**TAREA ÁLGEBRA MODERNA**
**SEMESTRE 2013-II**
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**
**HÉCTOR MANUEL TÉLLEZ GÓMEZ**

Proposición 11

Sea $H$ un grupo cíclico y sea $N$ un grupo arbitrario. Si $\varphi$ and $\psi$ son monomorfismos de $H$ a $Aut(N)$ tales que $\varphi(H) = \psi(H)$, entonces $N \rtimes_\varphi H \cong N \rtimes_\psi N$.

**Demostración:** Sea $H =< x >$. Como las imágenes de $H$ bajo $\varphi$ y $\psi$, $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ generan al mismo subgrupo cícilco de $Aut(N)$. Por lo tanto existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\varphi(x)^a = \psi(x)$ y $\varphi(x) = \psi(x)^b$.

De aquí que:

$$\varphi(x) = \psi(x)^b = \varphi(x)^{ab} = \varphi(x^{ab}).$$

Como $\varphi$ es monomorfimso, tenemos que

$$x = x^{ab} \tag{1}$$

Es decir, elevar a la $ab$ es otra manera de escribir el homomorfismo identidad.

Como $H$ es cíclico tenemos que para todo $h \in H$, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $x^r = h$ y entonces

$$\varphi(h^a) = \varphi((x^r)^a) = \varphi(x^a r) = (\varphi(x)^a)^r = \psi(x)^r = \psi(x^r) = \psi(h),$$

análogamente $\varphi(h) = \psi(h^b)$.

Definamos $\tau : N \rtimes_\varphi H \to N \rtimes_\psi N$ como $\tau(n, h) = (n, h^a)$.

$$\begin{aligned}
\tau((n_1, h_1)(n_2, h_2)) &= \tau(n_1\psi(h_1)(n_2), h_1h_2) \\
&= (n_1\psi(h1)(n_2), (h_1h_2)^a) \\
&= (n_1\varphi(h_1^a)(n_2), h_1^a h_2^a) \\
&= n_1h_1^a n2h_2^a \text{ (por definición de } N \rtimes_\psi H) \\
&= \tau(n_1h_1)\tau(n_2h_2)
\end{aligned}$$

Con esto, tenemos que $\tau$ separa productos y manda inversos en inversos. Por lo tanto $\tau$ es homomorfismo.

Análogamente $\lambda : N \rtimes_\psi H \to N \rtimes_\varphi N$ definida como $\lambda(n,h) = (n, h^b)$, resulta ser homomorfismo.

Ahora notemos que $\tau \circ \lambda(n,h) = \tau(n,h^b) = (n, h^{ab})$ y por ((1)), tenemos que $\tau \circ \lambda = id_{N \rtimes_\psi H}$.

Análogamente, tenemos que $\lambda \circ \tau = id_{N \rtimes_\varphi H}$. Con esto tenemos que tanto $\tau$ como $\lambda$ son isomorfismos, con lo que termina la demostración.

Proposición 12

Sean $N$ y $H$ grupos, sea $\psi : H \to Aut(N)$ un homomorfismo y $f \in Aut(N)$. Si $\hat{f}$ es el automorfismo interno de $Aut(N)$ inducido por $f$, entonces $N \rtimes_{\hat{f}\circ\psi} \cong N \rtimes_\psi H$.

**Demostración:** Sea $\theta : N \rtimes_\psi H \to N \rtimes_{\hat{f}\circ\psi}$ definida por $\theta(n,h) = (f(n), h)$. Veamos que $\theta$ es homomorfismo:

$$\begin{aligned}
\theta((n_1,h_1)\cdot(n_2,h_2)) &= \theta(n_1\psi(h_1)(n_2), h_1h_2) \\
&= (f(n_1\psi(h_1)(n_2)), h_1h_2) \\
&= (f(n_1)\cdot(f\circ\psi(h_1))(n_2), h_1h_2) \\
&= (f(n_1)\cdot(f\circ\psi(h_1)\circ f^{-1}\circ f)(n_2), h_1h_2) \\
&= (f(n_1)\cdot(\hat{f}(\psi(h_1))\circ f)(n_2), h_1h_2) \\
&= (f(n_1)\cdot(\hat{f}\circ\psi)(h_1)f(n_2), h_1h_2) \\
&= (f(n_1),h_1)(f(n_2),h_2) \\
&= \theta(n_1,h_1)\theta(n_2,h_2).
\end{aligned}$$

Con esto hemos demostrado que $\theta$ es homomorfismo pues abre multiplicaciones y manda inversos en inversos.

De manera análoga vemos que $\iota : N \rtimes_{\hat{f}\circ\psi} \to N \rtimes_\psi H$ definida por $\iota(n,h) = (f^{-1}(n), h)$ es homomorfismo.

Ahora notemos que:

$$(\iota\circ\theta)(n,h) = \iota(f(n),h) = (f^{-1}(f(n)),h) = (n,h).$$

Por lo tanto $\iota\circ\theta = id_{N\rtimes_\psi H}$.

Análogamente $\theta \circ \iota = id_{N \rtimes_{\hat{f} \circ \psi} H}$. Por lo tanto, $\theta$ y $\iota$ son isomorfismos y con esto terminamos la demostración.

## Schur-Zassenhaus