

**TAREA ÁLGEBRA MODERNA**  
**SEMESTRE 2013-II**  
**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**HÉCTOR MANUEL TÉLLEZ GÓMEZ**

PROPOSICIÓN 11

Sea  $H$  un grupo cíclico y sea  $N$  un grupo arbitrario. Si  $\varphi$  and  $\psi$  son monomorfismos de  $H$  a  $\text{Aut}(N)$  tales que  $\varphi(H) = \psi(H)$ , entonces  $N \rtimes_{\varphi} H \cong N \rtimes_{\psi} N$ .

**Demostración:** Sea  $H = \langle x \rangle$ . Como las imágenes de  $H$  bajo  $\varphi$  y  $\psi$ ,  $\varphi(x)$  y  $\psi(x)$  generan al mismo subgrupo cíclico de  $\text{Aut}(N)$ . Por lo tanto existen  $a, b \in \mathbb{Z}$  tales que  $\varphi(x)^a = \psi(x)$  y  $\varphi(x) = \psi(x)^b$ .

De aquí que:

$$(1) \quad \varphi(x) = \psi(x)^b = \varphi(x)^{ab} = \varphi(x^{ab}).$$

Como  $\varphi$  es monomorfismo, tenemos que

$$(2) \quad x = x^{ab}$$

Es decir, elevar a la  $ab$  es otra manera de escribir el homomorfismo identidad.

Como  $H$  es cíclico tenemos que para todo  $h \in H$ , existe  $r \in \mathbb{Z}$  tal que  $x^r = h$  y entonces

$$\varphi(h^a) = \varphi((x^r)^a) = \varphi(x^a r) = (\varphi(x)^a)^r = \psi(x)^r = \psi(x^r) = \psi(h),$$

análogamente  $\varphi(h) = \psi(h^b)$ .

Definamos  $\tau : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow N \rtimes_{\psi} N$  como  $\tau(n, h) = (n, h^a)$ .

$$\begin{aligned} (3) \quad \tau((n_1, h_1)(n_2, h_2)) &= \tau(n_1 \psi(h_1)(n_2), h_1 h_2) \\ (4) \quad &= (n_1 \psi(h_1)(n_2), (h_1 h_2)^a) \\ (5) \quad &= (n_1 \varphi(h_1^a)(n_2), h_1^a h_2^a) \\ (6) \quad &= n_1 h_1^a n_2 h_2^a \text{ (por definición de } N \rtimes_{\psi} H) \\ (7) \quad &= \tau(n_1 h_1) \tau(n_2 h_2) \end{aligned}$$

Con esto, tenemos que  $\tau$  separa productos y manda inversos en inversos. Por lo tanto  $\tau$  es homomorfismo.

Análogamente  $\lambda : N \rtimes_{\psi} H \rightarrow N \rtimes_{\varphi} N$  definida como  $\lambda(n, h) = (n, h^b)$ , resulta ser homomorfismo.

Ahora notemos que  $\tau \circ \lambda(n, h) = \tau(n, h^b) = (n, h^{ab})$  y por (2), tenemos que  $\tau \circ \lambda = id_{N \rtimes_{\psi} H}$ .

Análogamente, tenemos que  $\lambda \circ \tau = id_{N \rtimes_{\varphi} H}$ . Con esto tenemos que tanto  $\tau$  como  $\lambda$  son isomorfismos, con lo que termina la demostración.

### PROPOSICIÓN 12

Sean  $N$  y  $H$  grupos, sea  $\psi : H \rightarrow Aut(N)$  un homomorfismo y  $f \in Aut(N)$ . Si  $\hat{f}$  es el automorfismo interno de  $Aut(N)$  inducido por  $f$ , entonces  $N \rtimes_{\hat{f} \circ \psi} H \cong N \rtimes_{\psi} H$ .

**Demostración:** Sea  $\theta : N \rtimes_{\psi} H \rightarrow N \rtimes_{\hat{f} \circ \psi} H$  definida por  $\theta(n, h) = (f(n), h)$ . Veamos que  $\theta$  es homomorfismo:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \theta((n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2)) &= \theta(n_1 \psi(h_1)(n_2), h_1 h_2) \\
 (9) \quad &= (f(n_1 \psi(h_1)(n_2)), h_1 h_2) \\
 (10) \quad &= (f(n_1) \cdot (f \circ \psi(h_1))(n_2), h_1 h_2) \\
 (11) \quad &= (f(n_1) \cdot (f \circ \psi(h_1) \circ f^{-1} \circ f)(n_2), h_1 h_2) \\
 (12) \quad &= (f(n_1) \cdot (\hat{f}(\psi(h_1)) \circ f)(n_2), h_1 h_2) \\
 (13) \quad &= (f(n_1) \cdot (\hat{f} \circ \psi)(h_1) f(n_2), h_1 h_2) \\
 (14) \quad &= (f(n_1), h_1)(f(n_2), h_2) \\
 (15) \quad &= \theta(n_1, h_1) \theta(n_2, h_2).
 \end{aligned}$$

Con esto hemos demostrado que  $\theta$  es homomorfismo pues abre multiplicaciones y manda inversos en inversos.

De manera análoga vemos que  $\iota : N \rtimes_{\hat{f} \circ \psi} H \rightarrow N \rtimes_{\psi} H$  definida por  $\iota(n, h) = (f^{-1}(n), h)$  es homomorfismo.

Ahora notemos que:

$$(16) \quad (\iota \circ \theta)(n, h) = \iota(f(n), h) = (f^{-1}(f(n)), h) = (n, h).$$

Por lo tanto  $\iota \circ \theta = id_{N \rtimes_{\psi} H}$ .

Análogamente  $\theta \circ \iota = id_{N \rtimes_{\hat{f} \circ \psi} H}$ . Por lo tanto,  $\theta$  y  $\iota$  son isomorfismos y con esto terminamos la demostración.