

TAREA ÁLGEBRA MODERNA
SEMESTRE 2013-II
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
HÉCTOR MANUEL TÉLLEZ GÓMEZ

PROPOSICIÓN 11

Sea H un grupo cíclico y sea N un grupo arbitrario. Si φ and ψ son monomorfismos de H a $\text{Aut}(N)$ tales que $\varphi(H) = \psi(H)$, entonces $N \rtimes_{\varphi} H \cong N \rtimes_{\psi} N$.

Demostración: Sea $H = \langle x \rangle$. Como las imágenes de H bajo φ y ψ , $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ generan al mismo subgrupo cíclico de $\text{Aut}(N)$. Por lo tanto existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\varphi(x)^a = \psi(x)$ y $\varphi(x) = \psi(x)^b$.

De aquí que:

$$\varphi(x) = \psi(x)^b = \varphi(x)^{ab} = \varphi(x^{ab}).$$

Como φ es monomorfismo, tenemos que

$$x = x^{ab}$$

Es decir, elevar a la ab es otra manera de escribir el homomorfismo identidad.

Como H es cíclico tenemos que para todo $h \in H$, existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $x^r = h$ y entonces

$$\varphi(h^a) = \varphi((x^r)^a) = \varphi(x^a r) = (\varphi(x)^a)^r = \psi(x)^r = \psi(x^r) = \psi(h),$$

análogamente $\varphi(h) = \psi(h^b)$.

Definamos $\tau : N \rtimes_{\varphi} H \rightarrow N \rtimes_{\psi} N$ como $\tau(n, h) = (n, h^a)$.

$$\begin{aligned}
\tau((n_1, h_1)(n_2, h_2)) &= \tau(n_1\psi(h_1)(n_2), h_1h_2) \\
&= (n_1\psi(h_1)(n_2), (h_1h_2)^a) \\
&= (n_1\varphi(h_1^a)(n_2), h_1^ah_2^a) \\
&= n_1h_1^an_2h_2^a \text{ (por definición de } N \rtimes_{\psi} H) \\
&= \tau(n_1h_1)\tau(n_2h_2)
\end{aligned}$$

Con esto, tenemos que τ separa productos y manda inversos en inversos. Por lo tanto τ es homomorfismo.

Análogamente $\lambda : N \rtimes_{\psi} H \rightarrow N \rtimes_{\varphi} N$ definida como $\lambda(n, h) = (n, h^b)$, resulta ser homomorfismo.

Ahora notemos que $\tau \circ \lambda(n, h) = \tau(n, h^b) = (n, h^{ab})$ y por $()$, tenemos que $\tau \circ \lambda = id_{N \rtimes_{\psi} H}$.

Análogamente, tenemos que $\lambda \circ \tau = id_{N \rtimes_{\varphi} H}$. Con esto tenemos que tanto τ como λ son isomorfismos, con lo que termina la demostración.

PROPOSICIÓN 12

Sean N y H grupos, sea $\psi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$ un homomorfismo y $f \in \text{Aut}(N)$. Si \hat{f} es el automorfismo interno de $\text{Aut}(N)$ inducido por f , entonces $N \rtimes_{\hat{f} \circ \psi} \cong N \rtimes_{\psi} H$.

Demostración: Sea $\theta : N \rtimes_{\psi} H \rightarrow N \rtimes_{\hat{f} \circ \psi}$ definida por $\theta(n, h) = (f(n), h)$. Veamos que θ es homomorfismo:

$$\begin{aligned}
\theta((n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2)) &= \theta(n_1\psi(h_1)(n_2), h_1h_2) \\
&= (f(n_1\psi(h_1)(n_2)), h_1h_2) \\
&= (f(n_1) \cdot (f \circ \psi(h_1))(n_2), h_1h_2) \\
&= (f(n_1) \cdot (f \circ \psi(h_1) \circ f^{-1} \circ f)(n_2), h_1h_2) \\
&= (f(n_1) \cdot (\hat{f}(\psi(h_1)) \circ f)(n_2), h_1h_2) \\
&= (f(n_1) \cdot (\hat{f} \circ \psi)(h_1)f(n_2), h_1h_2) \\
&= (f(n_1), h_1)(f(n_2), h_2) \\
&= \theta(n_1, h_1)\theta(n_2, h_2).
\end{aligned}$$

Con esto hemos demostrado que θ es homomorfismo pues abre multiplicaciones y manda inversos en inversos.

De manera análoga vemos que $\iota : N \rtimes_{\hat{f} \circ \psi} H \rightarrow N \rtimes_{\psi} H$ definida por $\iota(n, h) = (f^{-1}(n), h)$ es homomorfismo.

Ahora notemos que:

$$(\iota \circ \theta)(n, h) = \iota(f(n), h) = (f^{-1}(f(n)), h) = (n, h).$$

Por lo tanto $\iota \circ \theta = id_{N \rtimes_{\psi} H}$.

Análogamente $\theta \circ \iota = id_{N \rtimes_{\hat{f} \circ \psi} H}$. Por lo tanto, θ y ι son isomorfismos y con esto terminamos la demostración.