TAREA ÁLGEBRA MODERNA
SEMESTRE 2013-II
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

HÉCTOR MANUEL TÉLLEZ GÓMEZ

Dedekind

Antes de comenzar con la demostración del Lema de Dedekind, haremos algunas definiciones.

Definición 1 *Un **caracter** de un grupo G en un campo E es un homomofrphismo de grupos*

$$\sigma : G \longrightarrow E^{\#}$$

Donde $E^{\#} = E - \{0\}$ es el grupo multiplicativo de E.

Definición 2 *Un conjunto $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ de caracteres de un grupo G en un campo E es **independiente** si no existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in E$, no todos 0, tales que*

$$\sum a_i \sigma_i(x) = 0 \quad \forall x \in G$$

Ahora estamos listos para el Lema de Dedekind.

Lema 1 *Todo conjunto $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ de caracteres distintos de un grupo G en un campo E es independiente.*

Demostración: Procedemos por inducción sobre n.

- Base de inducción

  Sea $n = 1$. Si $\{\sigma_1\}$ no fuera independiente entonces existiría $a_1 \in E$, con $a_1 != 0$ tal que $a_1\sigma_1(x) = 0$. Pero tanto a_1 como $\sigma_1(x)$ son distintos de 0 y pertenecen a un campo (es decir, a un dominio entero) y por lo tanto no es posible que $a_1\sigma_1(x) = 0$.

- Hipótesis de inducción

  Sea $n > 1$. Y supongamos que para $m < n$ se cumple el resultado.

- Paso inductivo

  Supongamos que existen $a_1, \ldots, a_n \in E$ tales que para todo $x \in G$ se tiene que

$$\sum a_i \sigma_i(x) = 0 \tag{1}$$

  Por hipótesis de inducción, tenemos que $a_1, \ldots, a_n$ son necesariamente todos distintos de cero. También podemos suponer que $a_n = 1$, si no es así, basta multiplicar la suma por a_n^{-1}.

  Como $\sigma_n \neq \sigma_1$, necesariamente existe $y \in G$ tal que $\sigma_n(y) \neq \sigma_1(y)$. Como (1) aplica para todo $x \in G$, en particular aplica para yx. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\sum a_i \sigma_i(yx) &= \sum a_i \sigma_i(y)\sigma_i(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

  Multiplicando esto por $\sigma_n(y)^{-1}$ y, recordando que $a_n = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma_n(y)^{-1} \sum a_i \sigma_i(y)\sigma_i(x) &= \sum a_i \sigma_n(y)^{-1}\sigma_i(y)\sigma_i(x)\\ &= \sum_{i<n} a_i \sigma_n(y)^{-1}\sigma_i(y)\sigma_i(x) + \sigma_n(x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

  Restando esto último de (1) obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i<n} a_i\sigma_i(x) + \sigma_n(x) - (\sum_{i<n} a_i \sigma_n(y)^{-1}\sigma_i(y)\sigma_i(x) + \sigma_n(x))\\ &= \sum_{i<n} a_i\sigma_i(x) - a_i\sigma_n(y)^{-1}\sigma_i(y)\sigma_i(x)\\ &= \sum_{i<n} a_i(1 - \sigma_n(y)^{-1}\sigma_i(y))\sigma_i(x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por un lado, la hipótesis de inducción nos dice que esto es cierto sólamente si $a_i(1-\sigma_n(y)^{-1}\sigma_i(y)) = 0$ para todo i. En particular para $i = 1$ tendríamos $a_1(1 - \sigma_n(y)^{-1}\sigma_1(y)) = 0$. Como $a_1 \neq 0$ esto obliga a $\sigma_n(y)^{-1}\sigma_1(y) = 1$, y por lo tanto $\sigma_n(y) = \sigma_1(y)$, lo cual contradice nuestra elección de y.

Y con esto hemos demostrado que no existen tales $a_1, \ldots, a_n$.