

PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I  
SEMESTRE 2013-II  
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

1. TAREA 1

1.1. problema1.1.

**Problema 1.1** Sea  $(X_{nn \in \mathbb{N}})$  un proceso estocástico con valores reales y  $A \subset \mathbb{R}$  un boreliano. Pruebe que si

$$T_0 = 0 \quad y \quad T_{n+1} = \min\{k > T_n : X_k \in A \subset \mathbb{R}\}$$

entonces  $T_n$  es un tiempo de paro para toda  $n$  y  $T_n \rightarrow \infty$  puntualmente conforme  $n \rightarrow \infty$ .

**Categorías:** *Tiempos de paro.*

**Demostración:**

Sea  $(\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  una filtración.

Veamos que  $T_0$  es tiempo de paro.  $\{T_0 = 0\} = \Omega \in \mathcal{F}_n$  y  $\{T_0 = c\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$  para  $c \neq 0 \in \mathbb{N}$ . Recordemos que:

$$(1) \quad \{T_0 = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff \{T_0 \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Y por lo tanto  $T_0$  es variable aleatoria sobre la sigma álgebra  $\sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$ .

Para  $n = 1$ , veamos que:

$$(2) \quad \{T_1 = 1\} = \{X_1 \in A\} \in \mathcal{F}_1$$

(3)

$$(4) \quad \{T_1 = 2\} = \{X_1 \notin A, X_2 \in A\} =$$

$$(5) \quad \{X_1 \notin A\} \cap \{X_2 \in A\} \in \mathcal{F}_2$$

(6)

$$(7) \quad \{T_1 = 3\} = \{X_1 \notin A, X_2 \notin A, X_3 \in A\} =$$

$$(8) \quad \{X_1 \notin A\} \cap \{X_2 \notin A\} \cap \{X_3 \in A\} \in \mathcal{F}_3$$

$$(9) \quad \vdots$$

$$(10) \quad \{T_1 = n\} = \{X_1 \notin A, X_2 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} =$$

$$(11) \quad \bigcap_{i=1}^{i=n-1} \{X_i \notin A\} \cap \{X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n$$

Por hipótesis de inducción supongamos que  $\{T_k = n\} \in \mathcal{F}_n$  para cierta  $k > 1$  y para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Para demostrar la primera parte del ejercicio, basta probar que  $\{T_{k+1} = n\} \in \mathcal{F}_n$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Pues por lo dicho en (1) resultarían ser variables aleatorias en  $\sigma(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n)$ .

Dado que

$$(12) \quad 0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k$$

tenemos que  $\{T_k = n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_l$  para  $n < k$ .

Ahora, sea  $n \geq k$

$$(13) \quad \{T_{k+1} = n\} = \left( \bigcup_{i < n} \{T_k = i\} \right) \cap \left( \bigcap_{i < n} \{X_i \notin A\} \right) \cap \{X_n \in A\}$$

Donde

- $\{T_k = i\} \in \mathcal{F}_n \ \forall i < n \in \mathbb{N}$  (Por hipótesis de inducción).
- $\{X_i \notin A\} \in \mathcal{F}_n \ \forall i < n \in \mathbb{N}$  (Por ser  $\mathcal{F}$  filtración).
- $\{X_n \in A\} \in \mathcal{F}_n$  (Por ser  $X_n$  variable aleatoria en  $\mathcal{F}_n$ )

Y por lo tanto, (13) pertenece a  $\mathcal{F}_n$ . Con lo que termina la demostración de la primera parte del ejercicio.

Ahora, de (12) se sigue inmediatamente que  $T_n \rightarrow \infty$ .

## 1.2. problema1.2.

**Problema 1.2** Suponga que  $T$  es un tiempo de paro tal que para algún  $N \in \mathbb{N}$  y  $\varepsilon > 0$  se tiene que para toda  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(14) \quad \mathbb{P}(T \leq N + n | \mathcal{F}_n) > \varepsilon \text{ casi seguramente}$$

Al verificar la descomposición

$$(15) \quad \mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N)$$

pruebe por inducción que para cada  $k = 1, 2, \dots$ :

$$\mathbb{P}(T > kN) \leq (1 - \varepsilon)^k.$$

Pruebe que  $\mathbb{E}(T) < \infty$ .

**Categorías:** Tiempos de paro.

**Demostración:** Tenemos que:

$$(16) \quad (T > kN \Rightarrow T > (k-1)N \Rightarrow$$

$$(17) \quad (T > kN) \subset (T > (k-1)N) \Rightarrow$$

$$(18) \quad (T > kN) \cap (T > (k-1)N) = (T > kN) \Rightarrow$$

$$(19) \quad \mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N) = \mathbb{P}(T > kN)$$

**Base de inducción.**  $k = 1$ . Usando (14), con  $n = 0$

$$\mathbb{P}(T \leq 1N | \mathcal{F}_0) > \varepsilon \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(T > N | \mathcal{F}_0) < 1 - \varepsilon$$

Sustituyendo por la definición de probabilidad condicional tenemos:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>N} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{P}(T > N | \mathcal{F}_0) < 1 - \varepsilon$$

Aplicando esperanza en ambos lados tenemos:

$$\mathbb{P}(T > N) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>N} | \mathcal{F}_0)) < \mathbb{E}(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon$$

**Hipótesis de inducción.** Supongamos que  $\mathbb{P}(T > k_0 N) \leq (1 - \varepsilon)^{k_0}$  para algún  $k_0 \geq 1$ .

**Paso inductivo.** Utilizando (15) tenemos que

$$\mathbb{P}(T > (k_0 + 1)N) = \mathbb{P}(T > (k_0 + 1)N, T > k_0 N) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>(k_0+1)N} \cdot \mathbb{1}_{T>k_0N})$$

Ahora, dado que  $T > k_0 N$  es un conjunto  $\mathcal{F}_{k_0 N}$ -medible tenemos:

$$(20) \quad \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>(k_0+1)N} \cdot \mathbb{1}_{T>k_0N}) =$$

$$(21) \quad \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>(k_0+1)N} \cdot \mathbb{1}_{T>k_0N} | \mathcal{F}_{k_0N})) =$$

$$(22) \quad \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>k_0N} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>(k_0+1)N} | \mathcal{F}_{k_0N}))$$

Utilizando  $n = k_0 N$  en (14) tenemos

$$\mathbb{P}(T > k_0 N + N | \mathcal{F}_{k_0 N}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>(k_0+1)N} | \mathcal{F}_{k_0 N}) < 1 - \varepsilon$$

Sustituyendo esto último en (22) obtenemos:

$$(23) \quad E \left( \mathbb{1}_{T > k_0 N} \mathbb{E} \left( \mathbb{1}_{T > (k_0 + 1)N} | \mathcal{F}_{k_0 N} \right) \right) <$$

$$(24) \quad E \left( \mathbb{1}_{T > k_0 N} (1 - \epsilon) \right) =$$

$$(25) \quad (1 - \epsilon) E \left( \mathbb{1}_{T > k_0 N} \right) =$$

$$(26) \quad (1 - \epsilon) \mathbb{P}(T > k_0 N) \leq$$

$$(27) \quad (1 - \epsilon)(1 - \epsilon)^{k_0} = (1 - \epsilon)^{k_0 + 1}.$$

Con lo que concluimos

$$\mathbb{P}(T > (k_0 + 1)N) \leq (1 - \epsilon)^{k_0 + 1}.$$

Terminando así la demostración por inducción.

Para la siguiente prueba notemos que si  $X$  es una variable aleatoria y  $r > s \in \mathbb{R}$  entonces  $(X > s) \subset (X > r)$  y por lo tanto  $\mathbb{P}(X > s) \leq \mathbb{P}(X > r)$ .

En particular para nuestro tiempo de paro  $T$ , si dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  es tal que  $kN \geq n < (k + 1)N$ , entonces  $\mathbb{P}(T > n) \leq \mathbb{P}(T > kN)$ .

Trabajando por bloques de tamaño  $N$  tenemos que

$$\sum_{n=kN}^{(k+1)N-1} \mathbb{P}(T > n) \leq N \mathbb{P}(T > kN)$$

También recordemos que si  $T$  es una variable aleatoria positiva con valores en los enteros entonces

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n).$$

Sustituyendo nuestro penúltimo razonamiento en esta última fórmula tenemos:

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=kN}^{(k+1)N-1} \mathbb{P}(T > n) \leq N \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > kN)$$

Sustituyendo nuestro resultado de que  $\mathbb{P}(T > kN) < (1 - \epsilon)^k$  resulta que:

$$\mathbb{E}(T) \leq N \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > kN) \leq N \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \epsilon)^k.$$

De lado derecho de esta última desigualdad tenemos una serie geométrica. Dado que  $\epsilon$  es mayor que 0 y entonces que  $1 - \epsilon$  es menor que 1, tenemos que es una serie geométrica que converge en los reales y por lo tanto  $\mathbb{E}(T)$  está acotada por un número real.

### 1.3. problema1.3.

**Problema 1.3** Tomado de Mathematical Tripos, Part III, Paper 33, 2012, <http://www.maths.cam.ac.uk/postgrad/mathiii/pastpapers/>

Sean  $(X_i, i \in \mathbb{N})$  variables aleatorias independientes con  $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$ . Sean  $S_0 = 0$  y  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

- (i) Sea  $T_1 = \min \{n \geq 0 : S_n = 1\}$ . Explique por qué  $T_1$  es un tiempo de paro y calcule su esperanza.
- (ii) Mediante el inciso anterior, construya una martingala que converge casi seguramente pero no lo hace en  $L_1$ .
- (iii) Sea  $M_n$  la martingala obtenida al detener a  $-S$  en  $T_1$ . Utilice la solución al Problema de la Ruina para probar que  $\mathbb{P}(\max_n M_n \geq M) = 1/(M+1)$  para todo  $M \geq 1$ . Concluya que  $\mathbb{E}(\max_m M_m) = \infty$  y que por lo tanto  $\mathbb{E}(\max_{m \leq n} M_m) \rightarrow \infty$  conforme  $n \rightarrow \infty$ . Finalmente, deduzca que no puede haber una desigualdad de tipo Doob cuando  $p = 1$ .
- (iv) Sea  $T = \min \{n \geq 2 : S_n = S_{n-2} + 2\}$  y  $U = T - 2$ . ¿Son  $T$  y  $U$  tiempos de paro? Justifique su respuesta.
- (v) Para la variable  $T$  que hemos definido, calcule  $\mathbb{E}(T)$ .

**Categorías:** Tiempos de paro, problema de la ruina

#### Demostración:

- (i) Sea  $T_1 = \min \{n \geq 0 : S_n = 1\}$ . Explique por qué  $T_1$  es un tiempo de paro y calcule su esperanza.

Consideremos a la filtración  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  como la filtración generada por  $X_1, X_2, \dots$

Es decir,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Nótese que  $S_0$  es medible bajo cualquier sigma álgebra por ser constante, en particular bajo  $\mathcal{F}_0$ .

Basta demostrar que  $(T_1 = n) \in \mathcal{F}_n$  para ver que  $T_1$  es tiempo de paro.  $T_1$  representa el primer tiempo en que la suma es igual a 1. Es decir, para cualquier momento anterior, la suma no es 1.

Eso escrito en símbolos significa:

$$(T_1 = n) = \bigcap_{i=0}^{n-1} (S_i \neq 1) \cup (S_n = 1).$$

Para  $n = 0$ ,  $(S_0 = 1) = \omega \in \mathcal{F}_0$ .

Como  $(S_i \neq 1) \in \mathcal{F}_j$  siempre que  $i \leq j$ . Para  $n > 0$ ,  $(T_1 = n)$  es el resultado de unir e intersectar conjuntos  $\mathcal{F}_n$ -medibles, lo cual resulta  $\mathcal{F}_n$ -medible.

Para  $m \in \mathbb{N}$ . Definamos  $T_m = \min\{n \geq 0 : S_n = m\}$  (Nótese que para el caso  $m = 1$ , esta definición coincide con la definición previa de  $T_1$ ).

Para  $a, b \in \mathbb{N}$ , podemos definir el tiempo de paro  $T_{a,b} = T_{-a} \wedge T_b$ , y corresponde al tiempo de paro del problema de la ruina. Para este tiempo de paro ya conocemos la esperanza y es

$$\mathbb{E}(T_{a,b}) = ab.$$

Ahora, definamos la sucesión de variables aleatorias  $T_{1,1}, T_{2,1}, T_{3,1}, \dots, T_{n,1}, \dots$ . Notemos que si  $a > a' \in \mathbb{N}$  entonces  $T_{-a} > T_{-a'}$ , pues  $T_{-a}$  es la primera vez que se llega a  $-a$ , y para poder alcanzar  $-a$  era necesario haber pasado por  $-a'$ . De aquí tenemos que si  $a > a'$ , entonces  $T_{a,1} \geq T_{a',1}$ . De donde nuestra sucesión es no decreciente.

Por otro lado, que si  $a > a' \in \mathbb{N}$  entonces  $T_{-a} > T_{-a'}$  implica que  $T_{-n}n \in \mathbb{N}$  es una sucesión estrictamente creciente y por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{-n} = \infty$ , con esto tenemos que el límite de nuestra sucesión es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{-n} \wedge T_1 = \infty \wedge T_1 = T_1$$

Tenemos todos los ingredientes para usar Teorema de convergencia monótona sobre nuestra sucesión y la variable  $T_1$ . Nuestra sucesión es monótona y converge puntualmente a  $T_1$ . Utilizando dicho teorema obtenemos:

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(T_{n,1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot 1 = \infty.$$

Lo cual era intuitivo. Si  $\mathbb{E}(T_1)$  fuese finito, diría que existe un número de volados donde uno puede apostar con mucha certeza que ganará un peso después de jugar "cerca" de esa cantidad de volados. Intuitivamente, esto vuelve injusto un juego de volados donde la moneda es justa.

- (ii) Mediante el inciso anterior, construya una martingala que converge casi seguramente pero no lo hace en  $L_1$ .

En el ejercicio 4 se probará que si  $T$  y  $S$  son tiempos de paro, entonces  $T \wedge S$  también es tiempo de paro. Con esto tenemos que si  $T_1$  es tiempo de paro, entonces  $T_1 \wedge n$  con  $n \in \mathbb{N}$  también es tiempo de paro. Definimos entonces

$$M_n = S_{T_1 \wedge n}.$$

Veamos que los  $M_n$  forman una martingala.

- (a)  $M_n$  es adaptada a la filtración.

$$M_n(w) = S_{T_1 \wedge n}(w) = S_{T_1 \wedge n(w)}(w) = \sum_{k=1}^{T_1 \wedge n(w)} X_k = \sum_{k=1}^n (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k})(w).$$

De donde, podemos escribir:

$$(28) \quad M_n = \sum_{k=1}^n (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k}).$$

Recordemos que  $X_k$  es  $\mathcal{F}_n$ -medible para toda  $k \leq n$ . Por ser  $T_1$  tiempo de paro, los conjuntos  $A_k = \{T_1 = k\}$  y  $B_k = \{T_1 \leq k\}$  son  $F_k$  medibles y por lo tanto  $A_k \cup B_k^c = \{T_1 \geq k\}$  también lo es. De aquí que  $\mathbb{1}_{T_1 \geq k}$  es  $\mathcal{F}_k$ -medible y por lo tanto también  $\mathcal{F}_n$ -medible para toda  $n$  tal que  $n \geq k$ .

Entonces  $M_n$  es suma y productos de funciones  $\mathcal{F}_n$ -medibles y por lo tanto  $F_n$ -medible. Que es lo que queríamos demostrar.

$$(b) \quad M_n \in \mathbb{L}_1$$

De (28) podemos ver que  $M_n$  es suma finita de variables acotadas. Por lo tanto  $M_n \in \mathbb{L}_1$ .

$$(c) \quad \text{Ahora probaremos que } \mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$$

Primero:

$$(29) \quad \mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_{T_1 \wedge (n+1)} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n+1} (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k}) \middle| \mathcal{F}_n\right)$$

$$(30) \quad = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k}) \middle| \mathcal{F}_n\right) + \mathbb{E}\left((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1}) \middle| \mathcal{F}_n\right)$$

$$(31) \quad (\text{Este paso es gracias a que } X_k \text{ y } \mathbb{1}_{T_1 \geq k} \text{ son } \mathcal{F}_n\text{-medibles})$$

$$(32) \quad = \sum_{k=1}^n (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k}) + \mathbb{E}((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1}) | \mathcal{F}_n)$$

$$(33) \quad = S_{T_1 \wedge n} + \mathbb{E}((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1}) | \mathcal{F}_n)$$

$$(34) \quad = M_n + \mathbb{E}((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1}) | \mathcal{F}_n)$$

Entonces, nos basta probar que  $\mathbb{E}(X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1} | \mathcal{F}_n) = 0$  para terminar nuestra demostración.

Sean  $A = \{T_1 = n\}$  y  $B = \{T_1 \leq n\}$ . Por ser  $T_1$  tiempo de paro,  $A$  y  $B$  son  $\mathcal{F}_n$ -medibles. Por lo tanto  $B \setminus A$  también es  $\mathcal{F}_n$ -medible. Notemos que  $\{T_1 \geq n+1\} = (B \setminus A)^c$ . Por lo tanto  $\{T_1 \geq n+1\}$  es  $\mathcal{F}_n$ -medible. De donde  $\mathbb{1}_{T_1 \geq n+1}$  es  $\mathcal{F}_n$ -medible.

Con esto, ahora tenemos que:

$$(35) \quad \mathbb{E}((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1} \cdot \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$$

$$(36) \quad \text{(Este paso es gracias a que los } X_n \text{ son independientes)}$$

$$(37) \quad = \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1} \cdot \mathbb{E}(X_{n+1})$$

$$(38) \quad = \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1} \cdot 0$$

$$(39) \quad = 0$$

Como queríamos demostrar.

Ahora que tenemos que  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es martingala, confirmemos que converge casi seguramente.

Notemos que  $(T_1 \wedge n)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow T_1$  c.s.

De aquí que  $(M_n)_{n \rightarrow \infty} = (S_{T_1 \wedge n})_{n \rightarrow \infty} = S_{T_1}$  c.s.

Veamos que la convergencia no ocurre en  $\mathbb{L}_1$ .

Dado que  $T_1 \wedge n$  es un tiempo de paro acotado para toda  $n \in \mathbb{N}$ , podemos aplicar el Teorema de Muestreo Opcional de Doob. El cual nos dice que  $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(S_{T_1 \wedge n}) = \mathbb{E}(S_0) = 0$ .

Por otro lado, por definición de  $T_1$ ,  $S_{T_1} = 1$  c.s. De donde  $\mathbb{E}(S_T) = 1$ .

$$(40) \quad \mathbb{E}(M_n) = 0 \not\rightarrow 1 = \mathbb{E}(S_{T_1}).$$

Y con esto, queda demostrado que la convergencia no se da en  $\mathbb{L}_1$ .

(iii) Sea  $M_n$  la martingala obtenida al detener a  $-S$  en  $T_1$ . Utilice la solución al Problema de la Ruina para probar que  $\mathbb{P}(\max_n M_n \geq M) = 1/(M+1)$  para todo  $M \geq 1$ . Concluya que  $\mathbb{E}(\max_m M_m) = \infty$  y que por lo tanto  $\mathbb{E}(\max_{m \leq n} M_m) \rightarrow \infty$  conforme  $n \rightarrow \infty$ . Finalmente, deduzca que no puede haber una desigualdad de tipo Doob cuando  $p = 1$ .

Definimos  $M_n = -S_{T_1 \wedge n}$ . Notemos que  $M_n$  únicamente toma valores en  $[-1, \infty]$ . Para calcular  $\mathbb{P}(\max_n M_n \geq M)$  notemos primero que:

$$(41) \quad \mathbb{P}(\max_n M_n \geq M) = 1 - \mathbb{P}(\max_n M_n < M).$$

$\max_n M_n < M$  significa que  $M_n$  nunca alcanza el valor  $M$ .

Intentando hacer analogía con el problema de la ruina, pensemos en dos concursantes, uno con 1 peso y otro con  $M$  pesos. Nunca alcanzar  $M$  significa que



nunca gana el que tiene 1 peso.

Esta probabilidad ya la conocemos y es

$$\mathbb{P}(\max_n M_n < M) = \frac{M}{M+1}$$

Por lo tanto

$$(42) \quad \mathbb{P}(\max_n M_n \geq M) = 1 - \mathbb{P}(\max_n M_n < M)$$

$$(43) \quad = 1 - \frac{M}{M+1}$$

$$(44) \quad = \frac{M+1}{M+1} - \frac{M}{M+1}$$

$$(45) \quad = \frac{1}{M+1}$$

Utilizando este resultado:

$$(46) \quad \mathbb{E}(\max_n M_n) = -\mathbb{P}(\max_n M_n = -1) + \sum_{M=1}^{\infty} \mathbb{P}(\max_n M_n \geq M)$$

$$(47) \quad = -\mathbb{P}(\max_n M_n = -1) + \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M+1}$$

$$(48) \quad = -\mathbb{P}(\max_n M_n = -1) + \infty$$

$$(49) \quad = \infty$$

Intuitivamente, esto nos dice que el valor máximo que podemos esperar en un juego de volados, no está acotado. Ahora, tenemos que:

$$(50) \quad \|\overline{M_n^+}\|_1 = \mathbb{E}\overline{M_n^+}$$

$$(51) \quad = \mathbb{E}\max_{m \leq n} M_m^+$$

$$(52) \quad \geq \mathbb{E}\max_{m \leq n} M_m$$

Donde, el último término, tiende a infinito en base al resultado (46).

Por otro lado:

$$(53) \quad \|M_n^+\|_1 = \| -S_{T_1 \wedge n}^+ \|_1 \longrightarrow \| -S_{T_1}^+ \|_1 = 0 < \infty$$

Por lo tanto, no existe número  $K$ , tal que

$$(54) \quad \|\overline{M_n^+}\|_1 \leq K \|M_n^+\|_1$$

En otras palabras, no tenemos una desigualdad de tipo Doob para  $p = 1$ .

- (iv) Sea  $T = \min \{n \geq 2 : S_n = S_{n-2} + 2\}$  y  $U = T - 2$ . ¿Son  $T$  y  $U$  tiempos de paro? Justifique su respuesta.

Intuitivamente,  $T$  significa, el primer tiempo tal que ganamos en dos volados consecutivos. También intuitivamente, esto debería ser un tiempo de paro.

Veamos que efectivamente así ocurre:

$$(55) \quad \{T = 1\} = \emptyset \quad \in \mathcal{F}_1$$

$$(56) \quad \{T = 2\} = \{X_1 = 1, X_2 = 1\} \quad \in \mathcal{F}_2$$

(v) Para la variable  $T$  que hemos definido, calcule  $\mathbb{E}(T)$ .

#### 1.4. problema1.4.

**Problema 1.4** (Extensiones del teorema de paro opcional) Sea  $M = (M_n, n \in \mathbb{N})$  una (super)martingala respecto de una filtración  $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$  y sean  $S$  y  $T$  tiempos de paro.

- (1) Pruebe que  $S \wedge T$ ,  $S + T$  y  $S \vee T$  son tiempos de paro.
- (2) Sea

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \text{ para toda } n\}$$

es una  $\sigma$ -álgebra, a la que nos referimos como la  $\sigma$ -álgebra detenida en  $\tau$ . Comente qué puede fallar si  $T$  no es tiempo de paro. Pruebe que  $T$  es  $\mathcal{F}_T$ -medible.

- (3) Pruebe que si  $T$  es finito, entonces  $M_T$  es  $\mathcal{F}_T$ -medible.
- (4) Pruebe que si  $S \leq T \leq n$  entonces  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ . Si además  $T$  es acotado entonces  $X_S, X_T \in L_1$  y

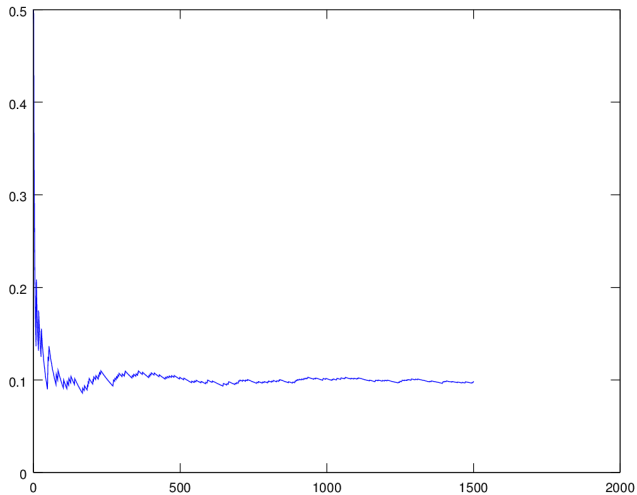
$$\mathbb{E}(M_T \mid \mathcal{F}_S) \leq M_S.$$

- (5) Si  $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$  es un proceso estocástico  $(\mathcal{F}_n)$ -adaptado y tal que  $X_n \in L_1$  y tal que para cualesquiera tiempos de paro acotados  $S$  y  $T$  se tiene que  $\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_T)$  entonces  $X$  es una martingala. Sugerencia: considere tiempos de paro de la forma  $n\mathbf{1}_A + (n+1)\mathbf{1}_{A^c}$  con  $A \in \mathcal{F}_n$ .

**Categorías:** Tiempos de paro, Muestreo opcional

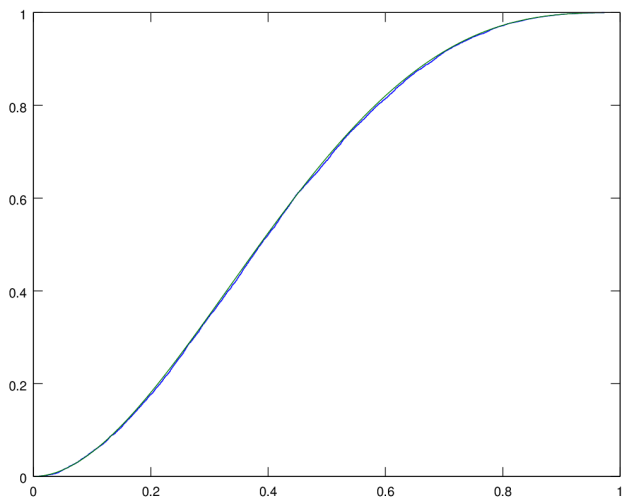


## 2. TAREA 2

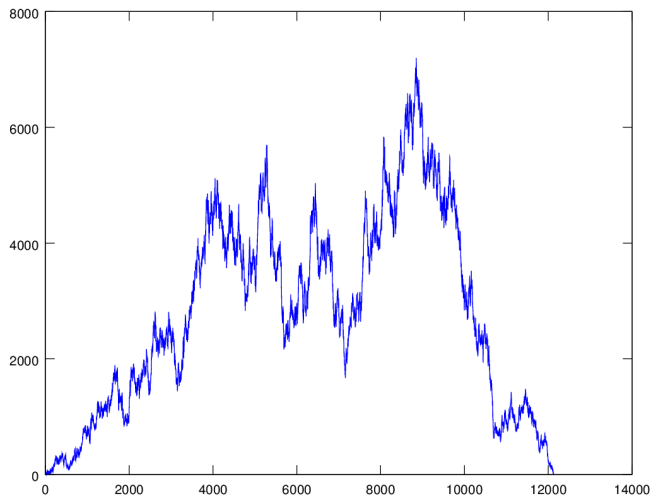


Gráfica de una ejecución de urnas de Poyla  
con 1 bola verde inicial, 1 bola roja inicial y constante 1.

## 3. TAREA 3



Gráfica del histograma de los radios finales de muchas iteraciones del proceso  
de urnas de Poyla.



Gráfica de una ejecución del proceso de extinción de Galton-Watson

Parámetros: 10 individuos

La probabilidad de que un individuo tenga 2 hijos es  $\frac{1}{2}$

La probabilidad de que un individuo tenga 0 hijos es  $\frac{1}{2}$ .