# PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I
# SEMESTRE 2013-II
# POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## 1. Tarea 1

### 1.1. problema1.1.

**Problema 1.1** *Sea* $(X_{n n\in\mathbb{N}})$ *un proceso estocástico con valores reales y* $A \subset \mathbb{R}$ *un boreliano. Pruebe que si*

$$T_0 = 0 \quad y \quad T_{n+1} = \min\{k > T_n : X_k \in A \subset \mathbb{R}\}$$

*entonces* $T_n$ *es un tiempo de paro para toda* $n$ *y* $T_n \to \infty$ *puntualmente conforme* $n \to \infty$.

**Categorías:** *Tiempos de paro.*

**Demostración:**

Sea $(\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración.

Veamos que $T_0$ es tiempo de paro. $\{T_0 = 0\} = \Omega \in \mathscr{F}_n$ y $\{T_0 = c\} = \emptyset \in \mathscr{F}_n$ para $c \neq 0 \in \mathbb{N}$. Recordemos que:

$$\{T_0 = n\} \in \mathscr{F}_n \; \forall n \in \mathbb{N} \iff \{T_0 \leq n\} \in \mathscr{F}_n \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Y por lo tanto $T_0$ es variable aleatoria sobre la sigma álgebra $\sigma(\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n)$.

Para $n = 1$, veamos que:

$$\{T_1 = 1\} = \{X_1 \in A\} \in \mathscr{F}_1 \tag{2}$$

(3)

$$\{T_1 = 2\} = \{X_1 \notin A, X_2 \in A\} = \tag{4}$$

$$\{X_1 \notin A\} \cap \{X_2 \in A\} \in \mathscr{F}_2 \tag{5}$$

(6)

$$\{T_1 = 3\} = \{X_1 \notin A, X_2 \notin A, X_3 \in A\} = \tag{7}$$

$$\{X_1 \notin A\} \cap \{X_2 \notin A\} \cap \{X_3 \in A\} \in \mathscr{F}_3 \tag{8}$$

$$\vdots \tag{9}$$

$$\{T_1 = n\} = \{X_1 \notin A, X_2 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} = \tag{10}$$

$$\bigcap_{i=1}^{i=n-1} \{X_i \notin A\} \cap \{X_n \in A\} \in \mathscr{F}_n \tag{11}$$

Por hipótesis de inducción supongamos que $\{T_k = n\} \in \mathscr{F}_n$ para cierta $k > 1$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ .

Para demostrar la primera parte del ejercicio, basta probar que $\{T_{k+1} = n\} \in \mathscr{F}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Pues por lo dicho en (1) resultarían ser variables aleatorias en $\sigma(\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n)$.

Dado que

$$0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_k \tag{12}$$

tenemos que $\{T_k = n\} = \emptyset \in \mathscr{F}_l$ para $n < k$.

Ahora, sea $n \geq k$

$$\{T_{k+1} = n\} = \left(\bigcup_{i<n} \{T_k = i\}\right) \cap \left(\bigcap_{i<n} \{X_i \notin A\}\right) \cap \{X_n \in A\} \tag{13}$$

Donde

- $\{T_k = i\} \in \mathscr{F}_n \; \forall i < n \in \mathbb{N}$ (Por hipótesis de inducción).
- $\{X_i \notin A\} \in \mathscr{F}_n \; \forall i < n \in \mathbb{N}$ (Por ser $\mathscr{F}$ filtración).
- $\{X_n \in A\} \in \mathscr{F}_n$ (Por ser $X_n$ variable aleatoria en $\mathscr{F}_n$)

Y por lo tanto, (13) pertenece a $\mathscr{F}_n$. Con lo que termina la demostración de la primera parte del ejercicio.

Ahora, de (12) se sigue inmediatamente que que $T_n \to \infty$.

### 1.2. **problema1.2.**

**Problema 1.2** *Suponga que $T$ es un tiempo de paro tal que para algún $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{P}(T \leq N + n | F_n) > \varepsilon \text{ casi seguramente} \tag{14}$$

*Al verificar la desomposición*

$$\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N) \tag{15}$$

*pruebe por inducción que para cada $k = 1, 2, \ldots$:*

$$\mathbb{P}(T > kN) \leq (1 - \varepsilon)^k.$$

*Pruebe que $\mathbb{E}(T) < \infty$.*

**Categorías:** *Tiempos de paro.*

**Demostración:** Tenemos que:

$$\begin{aligned}
(T > kN \Rightarrow T > (k-1)N \Rightarrow \quad & (16)\\
(T > kN) \subset (T > (k-1)N) \Rightarrow \quad & (17)\\
(T > kN) \cap (T > (k-1)N) = (T > kN) \Rightarrow \quad & (18)\\
\mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N) = \mathbb{P}(T > kN) \quad & (19)
\end{aligned}$$

**Base de inducción.** $k = 1$. Usando (14), con $n = 0$

$$\mathbb{P}(T \leq 1N | \mathscr{F}_0) > \epsilon \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(T > N | \mathscr{F}_0) < 1 - \epsilon$$

Sustituyendo por la definición de probabilidad condicional tenemos:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T > N} | \mathscr{F}_0) = \mathbb{P}(T > N | \mathscr{F}_0) < 1 - \epsilon$$

Aplicando esperanza en ambos lados tenemos:

$$\mathbb{P}(T > N) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T > N} | \mathscr{F}_0)) < \mathbb{E}(1 - \epsilon) = 1 - \epsilon$$

.

**Hipótesis de induccion.** Supongamos que $\mathbb{P}(T > k_0 N) \leq (1 - \epsilon)^{k_0}$ para algún $k_0 \geq 1$.

**Paso inductivo.** Utilizando (15) tenemos que

$$\mathbb{P}(T > (k_0 + 1)N) = \mathbb{P}(T > (k_0 + 1)N, T > k_0 N) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T > (k_0+1)N} \cdot \mathbb{1}_{T > k_0 N})$$

Ahora, dado que $T > k_0 N$ es un conjunto $\mathscr{F}_{k_0 N}$-medible tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T > (k_0+1)N} \cdot \mathbb{1}_{T > k_0 N}) = \quad & (20)\\
\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T > (k_0+1)N} \cdot \mathbb{1}_{T > k_0 N} | \mathscr{F}_{k_0 N}\right)\right) = \quad & (21)\\
E\left(\mathbb{1}_{T > k_0 N} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T > (k_0+1)N} | \mathscr{F}_{k_0 N}\right)\right) \quad & (22)
\end{aligned}$$

Utilizando $n = k_0 N$ en (14) tenemos

$$\mathbb{P}\left(T > k_0 N + N | \mathscr{F}_{k_0 N}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T > (k_0+1)N} | \mathscr{F}_{k_0 N}\right) < 1 - \epsilon$$

Sustituyendo esto último en (22) obtenemos:

$$E\left(\mathbb{1}_{T>k_0N}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T>(k_0+1)N}|\mathscr{F}_{k_0N}\right)\right) < \tag{23}$$

$$E\left(\mathbb{1}_{T>k_0N}(1-\epsilon)\right) = \tag{24}$$

$$(1-\epsilon)E\left(\mathbb{1}_{T>k_0N}\right) = \tag{25}$$

$$(1-\epsilon)\mathbb{P}(T>k_0N) \leq \tag{26}$$

$$(1-\epsilon)(1-\epsilon)^{k_0} = (1-\epsilon)^{k_0+1}. \tag{27}$$

Con lo que concluimos

$$\mathbb{P}(T>(k_0+1)N) \leq (1-\epsilon)^{k_0+1}.$$

Terminando así la demostración por inducción.

Para la siguiente prueba notemos que si $X$ es una variable aleatoria y $r > s \in \mathbb{R}$ entonces $(X > s) \subset (X > r)$ y por lo tanto $\mathbb{P}(X > s) \leq \mathbb{P}(X > r)$.

En particular para nuestro tiempo de paro $T$, si dado $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ es tal que $kN \geq n < (k+1)N$, entonces $\mathbb{P}(T > n) \leq \mathbb{P}(T > kN)$.

Trabajando por bloques de tamaño $N$ tenemos que

$$\sum_{n=kN}^{(k+1)N-1} \mathbb{P}(T>n) \leq N\mathbb{P}(T>kN)$$

También recordemos que si $T$ es una variable aleatoria positiva con valores en los enteros entonces

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T>n).$$

Sustituyendo nuestro penúltimo razonamiento en esta ultima fórmula tenemos:

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T>n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=kN}^{(k+1)N-1} \mathbb{P}(T>n) \leq N\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T>kN)$$

Sustituyendo nuetstro resultado de que $\mathbb{P}(T > kN) < (1-\epsilon)^k$ resulta que:

$$\mathbb{E}(T) \leq N\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T>kN) \leq N\sum_{k=0}^{\infty}(1-\epsilon)^k.$$

De lado derecho de esta última desigualdad tenemos una serie geométrica. Dado que $\epsilon$ es mayor que 0 y entonces que $1-\epsilon$ es menor que 1, tenemos que es una serie geométrica que converge en los reales y por lo tanto $\mathbb{E}(T)$ está acotada por un número real.

### 1.3. problema1.3.

**Problema 1.3** Tomado de Mathematical Tripos, Part III, Paper 33, 2012, http://www.maths.cam.ac.uk/postgrad/mathiii/pastpapers/

*Sean* $(X_i, i \in \mathbb{N})$ *variables aleatorias independientes con* $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. *Sean* $S_0 = 0$ *y* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(i) *Sea* $T_1 = \min\{n \geq 0 : S_n = 1\}$. *Explique por qué* $T_1$ *es un tiempo de paro y calcule su esperanza.*
(ii) *Mediante el inciso anterior, construya una martingala que converge casi seguramente pero no lo hace en* $L_1$.
(iii) *Sea* $M_n$ *la martingala obtenida al detener a* $-S$ *en* $T_1$. *Utilice la solución al Problema de la Ruina para probar que* $\mathbb{P}(max_n M_n \geq M) = 1/(M+1)$ *para todo* $M \geq 1$. *Concluya que* $\mathbb{E}(max_m M_n) = \infty$ *y que por lo tanto* $\mathbb{E}(max_{m \leq n} M_m) \to \infty$ *conforme* $n \to \infty$. *Finalmente, deduzca que no puede haber una desigualdad de tipo Doob cuando* $p = 1$.
(iv) *Sea* $T = \min\{n \geq 2 : S_n = S_{n-2} + 2\}$ *y* $U = T - 2$. *¿Son* $T$ *y* $U$ *tiempos de paro? Justifique su respuesta.*
(v) *Para la variable* $T$ *que hemos definido, calcule* $\mathbb{E}(T)$.

**Categorías:** *Tiempos de paro, problema de la ruina*

**Demostración:**

1.3.1. *(i).* Sea $T_1 = \min\{n \geq 0 : S_n = 1\}$. Explique por qué $T_1$ es un tiempo de paro y calcule su esperanza.

Consideremos a la filtración $(\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como la filtracion generada por $X_1, X_2, \ldots$.

Es decir, $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Nótese que $S_0$ es medible bajo cualquier sigma álgebra por ser constante, en particular bajo $\mathscr{F}_0$.

Basta demostrar que $(T_1 = n) \in \mathscr{F}_n$ para ver que $T_1$ es tiempo de paro. $T_1$ representa el primer tiempo en que la suma es igual a 1. Es decir, para cualquier momento anterior, la suma no es 1.

Eso escrito en símbolos significa:

$$(T_1 = n) = \bigcap_{i=0}^{n-1} (S_i \neq 1) \cup (S_n = 1).$$

Para $n = 0$, $(S_0 = 1) = \omega \in \mathscr{F}_0$.

Como $(S_i \neq 1) \in \mathscr{F}_j$ siempre que $i \leq j$. Para $n > 0$, $(T_1 = n)$ es el resultado de unir e intersectar conjuntos $\mathscr{F}_n$-medibles, lo cual resulta $\mathscr{F}_n$-medible.

Para $m \in \mathbb{N}$. Definamos $T_m = min\{n \geq 0 : S_n = m\}$ (Nótese que para el caso $m = 1$, esta definición coincide con la definición previa de $T_1$).

Para $a, b \in \mathbb{N}$, podemos definir el tiempo de paro $T_{a,b} = T_{-a} \wedge T_b$, y corresponde al tiempo de paro del problema de la ruina. Para este tiempo de paro ya conocemos la esperanza y es

$$\mathbb{E}(T_{a,b}) = ab.$$

Ahora, definamos la sucesion de variables aleatorias $T_{1,1}, T_{2,1}, T_{3,1}, \ldots, T_{n,1}, \ldots$. Notemos que si $a > a' \in N$ entonces $T_{-a} > T_{-a'}$, pues $T_{-a}$ es la primera vez que se llega a $-a$, y para poder alcanzar $-a$ era necesario haber pasado por $-a'$. De aqui tenemos que si $a > a'$, entonces $T_{a,1} \geq T_{a',1}$. De donde nuestra suceción es no decreciente.

Por otro lado, que si $a > a' \in N$ entonces $T_{-a} > T_{-a'}$ implica que $T_{-n} n \in \mathbb{N}$ es una suceción extrictamente creciente y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} T_{-n} = \infty$, con esto tenemos que el límite de nuestra suceción es

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,1} = \lim_{n\to\infty} T_{-n} \wedge T_1 = \infty \wedge T_1 = T_1$$

Tenemos todos los ingredientes para usar Teorema de convergencia monótona sobre nuestra suceción y la variable $T_1$. Nuestra sucecion es monótona y converge puntualmente a $T_1$. Utilizando dicho teorema obtenemos:

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} T_{n,1}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(T_{n,1}) = \lim_{n\to\infty} n \cdot 1 = \infty.$$

Lo cual era intuitivo. Si $\mathbb{E}(T_1)$ fuese finito, diría que existe un número de volados donde uno puede apostar con mucha certeza que ganará un peso después de jugar "cerca" de esa cantidad de volados. Intuitivamente, esto vuelve injusto un juego de volados donde la moneda es justa.

1.3.2. *(ii).* Mediante el inciso anterior, construya una martingala que converge casi seguramente pero no lo hace en $L_1$.

En el ejercicio 4 se probará que si $T$ y $S$ son tiempos de paro, entonces $T \wedge S$ también es tiempo de paro. Con esto tenemos que si $T_1$ es tiempo de paro, entonces $T_1 \wedge n$ con $n \in \mathbb{N}$ también es tiempo de paro. Definimos entonces

$$M_n = S_{T_1 \wedge n}.$$

Veamos que los $M_n$ forman una martingala.

(a) $M_n$ es adaptada a la filtración.

$$M_n(w) = S_{T_1\wedge n}(w) = S_{T_1\wedge n(w)}(w) = \sum_{k=1}^{T_1\wedge n(w)} X_k = \sum_{k=1}^{n} (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k})(w).$$

De donde, podemos escribir:

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k}). \tag{28}$$

Recordemos que $X_k$ es $\mathscr{F}_n$-medible para toda $k \leq n$. Por ser $T_1$ tiempo de paro, los conjuntos $A_k = \{T_1 = k\}$ y $B_k = \{T_1 \leq k\}$ son $F_k$ medibles y por lo tanto $A_k \cup B_k^c = \{T_1 \geq k\}$ también lo es. De aquí que $\mathbb{1}_{T_1 \geq k}$ es $\mathscr{F}_k$-medible y por lo tanto también $\mathscr{F}_n$-medible para toda $n$ tal que $n \geq k$.

Entonces $M_n$ es suma y productos de funciones $\mathscr{F}_n$-medibles y por lo tanto $F_n$-medible. Que es lo que queríamos demostrar.

(b) $M_n \in \mathbb{L}_1$

De (28) podemos ver que $M_n$ es suma finita de variables acotadas. Por lo tanto $M_n \in \mathbb{L}_1$.

(c) Ahora probaremos que $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) = M_n$

Primero:

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(S_{T_1 \wedge (n+1)}|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n+1} (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k}) \middle| \mathscr{F}_n\right) \tag{29}$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k}) \middle| \mathscr{F}_n\right) + \mathbb{E}\left((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1}) \middle| \mathscr{F}_n\right) \tag{30}$$

$$\text{(Este paso es gracias a que } X_k \text{ y } \mathbb{1}_{T_1 \geq k} \text{ son } \mathscr{F}_n\text{-medibles)} \tag{31}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k}) + \mathbb{E}((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1})|\mathscr{F}_n) \tag{32}$$

$$= S_{T_1 \wedge n} + \mathbb{E}((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1})|\mathscr{F}_n) \tag{33}$$

$$= M_n + \mathbb{E}((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1})|\mathscr{F}_n) \tag{34}$$

Entonces, nos basta probar que $\mathbb{E}(X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1}|\mathscr{F}_n) = 0$ para terminar nuestra demostración.

Sean $A = \{T_1 = n\}$ y $B = \{T_1 \leq n\}$. Por ser $T_1$ tiempo de paro, $A$ y $B$ son $\mathscr{F}_n$-medibles. Por lo tanto $B \setminus A$ también es $\mathscr{F}_n$-medible. Notemos que $\{T_1 \geq n+1\} = (B \setminus A)^c$. Por lo tanto $\{T_1 \geq n+1\}$ es $\mathscr{F}_n$-medible. De donde $\mathbb{1}_{T_1 \geq n+1})$ es $\mathscr{F}_n$-medible.

Con esto, ahora tenemos que:

$$\mathbb{E}((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1})|\mathscr{F}_n) = \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1} \cdot \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) \tag{35}$$

$$\text{(Este paso es gracias a que los } X_n \text{ son independientes)} \tag{36}$$

$$= \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1} \cdot \mathbb{E}(X_{n+1}) \tag{37}$$

$$= \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1} \cdot 0 \tag{38}$$

$$= 0 \tag{39}$$

Como queríamos demostrar.

Ahora que tenemos que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es martingala, confirmemos que converge casi seguramente.

Notemos que $(T_1 \wedge n)_{n \to \infty} \to T_1$ c.s.

De aquí que $(M_n)_{n \to \infty} = (S_{T_1 \wedge n})_{n \to \infty} = S_{T_1}$ c.s.

Veamos que la convergencia no ocurre en $\mathbb{L}_1$.

Dado que $T_1 \wedge n$ es un tiempo de paro acotado para toda $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar el Teorema de Muestreo Opcional de Doob. El cual nos dice que $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(S_{T_1 \wedge n}) = \mathbb{E}(S_0) = 0$.

Por otro lado, por definición de $T_1$, $S_{T_1} = 1$ c.s. De donde $\mathbb{E}(S_T) = 1$.

$$\mathbb{E}(M_n) = 0 \not\to 1 = \mathbb{E}(S_{T_1}). \tag{40}$$

Y con esto, queda demostrado que la convergencia no se da en $\mathbb{L}_1$.

1.3.3. *(iii).* Sea $M_n$ la martingala obtenida al detener a $-S$ en $T_1$. Utilice la solución al Problema de la Ruina para probar que $\mathbb{P}(max_n M_n \geq M) = 1/(M+1)$ para todo $M \geq 1$. Concluya que $\mathbb{E}(max_m M_n) = \infty$ y que por lo tanto $\mathbb{E}(max_{m \leq n} M_m) \to \infty$ conforme $n \to \infty$. Finalmente, deduzca que no puede haber una desigualdad de tipo Doob cuando $p = 1$.

Definimos $M_n = -S_{T_1 \wedge n}$. Notemos que $M_n$ únicamente toma valores en $[-1, \infty]$. Para calcular $\mathbb{P}(max_n M_n \geq M)$ notemos primero que:

$$\mathbb{P}(max_n M_n \geq M) = 1 - \mathbb{P}(max_n M_n < M). \tag{41}$$

$max_n M_n < M$ significa que $M_n$ nunca alcanza el valor $M$.

Intentando hacer analogía con el problema de la ruina, pensemos en dos concursantes, uno con 1 peso y otro con $M$ pesos. Nunca alcanzar $M$ significa que nunca gana el que tiene 1 peso.

Esta probabilidad ya la conocemos y es

$$\mathbb{P}(max_n M_n < M) = \frac{M}{M+1}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&(42) & \mathbb{P}(max_n M_n \geq M) &= 1 - \mathbb{P}(max_n M_n < M) \\
&(43) & &= 1 - \frac{M}{M+1} \\
&(44) & &= \frac{M+1}{M+1} - \frac{M}{M+1} \\
&(45) & &= \frac{1}{M+1}
\end{aligned}$$

Utilizando este resultado:

$$\begin{aligned}
&(46) & \mathbb{E}(max_n M_n) &= -\mathbb{P}(max_n M_n = -1) + \sum_{M=1}^{\infty} \mathbb{P}(max_n M_n \geq M) \\
&(47) & &= -\mathbb{P}(max_n M_n = -1) + \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M+1} \\
&(48) & &= -\mathbb{P}(max_n M_n = -1) + \infty \\
&(49) & &= \infty
\end{aligned}$$

Ahora, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&(50) & \|\overline{M_n^+}\|_1 &= \mathbb{E}\overline{M_n^+} \\
&(51) & &= \mathbb{E}\max_{m \leq n} M_m^+ \\
&(52) & &\geq \mathbb{E}\max_{m \leq n} M_m
\end{aligned}$$

Donde, el último término, tiende a infinito en base al resultado (46).
Por otro lado:

$$(53) \qquad \|M_n^+\|_1 = \| - S_{T_{1 \wedge n}}^+\|_1 \longrightarrow \| - S_{T_1}^+\|_1 = 0 < \infty$$

Por lo tanto, no existe número $K$, tal que

$$(54) \qquad \|\overline{M_n^+}\|_1 \leq K\|M_n^+\|_1$$

En otras palabras, no tenemos una desigualdad de tipo Doob para $p = 1$.

1.3.4. *(iv).* Sea $T = \min\{n \geq 2 : S_n = S_{n-2} + 2\}$ y $U = T - 2$. ¿Son $T$ y $U$ tiempos de paro? Justifique su respuesta.

Intuitivamente, $T$ significa, el primer tiempo tal que ganamos en dos volados consecutivos. También intuitivamente, esto debería ser un tiempo de paro.

Veamos que efectivamente así ocurre. Utilizando la siguiente prueba por inducción:

**Base de inducción:**

$$\{T = 0\} = \emptyset \qquad \in \mathscr{F}_0 \tag{55}$$

$$\{T = 1\} = \emptyset \qquad \in \mathscr{F}_1 \tag{56}$$

$$\{T = 2\} = \{X_1 = 1, X_2 = 1\} \qquad \in \mathscr{F}_2 \tag{57}$$

**Hipótesis de inducción:**

Supongamos que $\{T = n\} \in \mathscr{F}_n$ para cierto $n \geq 2$.

**Paso inductivo:**

$$\{T = n+1\} = \{X_n = 1, X_{n+1} = 1\} \setminus \bigcup_{i=0}^{n} \{T = i\}. \tag{58}$$

Es claro que $\{X_n = 1, X_{n+1} = 1\} \in \mathscr{F}_{n+1}$ y que por hipótesis de inducción $\bigcup_{i=0}^{n} T = i \in \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$. Por lo tanto $\{T = n+1\} \in \mathscr{F}_{n+1}$ para toda $n \geq 2$ y con esto termina la demostración.

Ahora, intuitivamente $U$ significa el momento justo antes de ganar dos volados consecutivos. Esto, quedría decir que tenemos información sobre eventos que aún no ocurren. Así que intuitivamente esto no debería ser un tiempo de paro.

Efectivamente, si tomamos como ejemplo el conjunto:

$$\{U = 1\} = \{T - 2 = 1\} = \{T = 3\} = \{X_1 = -1, X_2 = 1, X_3 = 1\} \tag{59}$$

Es fácil notar que es un conjunto que pertenece a $\mathscr{F}_3$, pero no a $\mathscr{F}_1$. Pues $\mathscr{F}_1$ no contiene información alguna sobre $X_2$ y $X_3$. Así que el conjunto más pequeño de $\mathscr{F}_1$ que contiene a $\{U = 1\}$ es $\{X_1 = -1\}$.

1.3.5. *(v).* Para la variable $T$ que hemos definido, calcule $\mathbb{E}(T)$.

Primero, platicaré de manera intuitiva cómo vamos a proceder para solucionar este problema.

Imaginemos un juego de casino a base de un juego de volados con las siguientes reglas:

- En cada turno, cada jugador tiene que apostar todo el dinero que tiene.
- Si un jugador se queda sin dinero, tiene que abandonar el juego.
- Si cae "sol" cada jugador recibe el doble de lo que había apostado en ese turno.

El casino tiene dinero infinito y cada habitante cuenta con exactamente 1 peso antes de iniciar el juego.

Además, en cada nuevo turno entra exactamente un nuevo jugador al juego.

Para nuestro problema, supongamos que $X_n = 1$ significa que en el $n$-ésimo turno, salió sol. Entonces, $T$ nos indica cuando es la primera vez que caen dos soles consecutivos.

Sea $D_n$ la variable que indica cuánto dinero ha ganado el casino para el tiempo $n$.

Observemos que en el momento que cae "águila", todo jugador pierde todo su dinero y abandona el juego. Y que por cada jugador que pierde, el casino gana exáctamente 1 peso (pues cada jugador en cada turno apuesta todo el dinero que posee, es decir el peso con el que empezó y todo lo que le habia ganado al casino).

Entonces, al tiempo $T - 2$, todo mundo había perdido. Es decir que al tiempo $T - 2$ el casino ha ganado $T - 2$ pesos.

Luego, al tiempo $T - 1$, ha caido un sol y hay exactamente un jugador al que el casino tuvo que pagar 1 peso.

Al tiempo $T$, al jugador del turno pasado el casino tuvo que darle 2 pesos y al jugador del nuevo turno tuvo que darle 1 peso.

Entonces, ya podemos decir cuanto dinero ha ganado el casino al tiempo $T$.

$$D_T = T - 2 - 1 - 3 = T - 6. \tag{60}$$

Notemos que además el juego es justo, en cada turno cada jugador tiene 1/2 de probabilidad de ganar $2^t$ y 1/2 de probabilidad de perder $2^t$. Es decir, la esperanza es 0.

$D_n$ es suma de este tipo de variables y por lo tanto su esperanza también será 0.

Esto, nos da la intuición de que $D_n$ es martingala, pero esa es la parte que demostraremos más adelante.

Si logramos demostrar que $\mathbb{E}(D_T) = 0$. De (60) concluimos

$$0 = \mathbb{E}(T - 6) = \mathbb{E}(T) - 6 \tag{61}$$

De donde $\mathbb{E}(T) = 6$.

Ahora, para terminar con las formalidades, definamos bien a $D$ y comprobemos que es martingala y que podemos utilizar el Teoremoa del muestreo opcional de Doob como lo hemos hecho.

Sean entonces $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias Bernulli de parámetro $1/2$ independientes. Y sea $Z_n^m$ la cantidad de dinero que el jugador $m$ ha dado al casino definidas como:

- Si $n < m$ entonces $Z_n^m = 0$ . (El jugador $m$ no participa en el juego sino hasta el turno $m$).
- $Z_{n+1}^m = (Z_n^m - 1) \cdot 2(Y_{n+1}) + 1$. (Si $Y_{n+1} = 1$ [El jugador gana el volado], entonces el casino pierde la cantidad apostada, que para el turno $n+1$ es $Z_n^n + 1$). Nótese que en cuanto un $Y_{n_0}$ se hace cero, $Z_{n_0}^n$ y todos los que le sigan son todos iguales a 1 (Como el jugador deja el juego después de haber perdido un volado, deja su peso en el casino y entonces de ahí en adelante la cantidad que ha dado al casino es exactamente 1).

Veamos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $(Z_n^m)_{n\in\mathbb{N}}$ forma una martingala con respecto a la filtración $(\mathscr{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por los $Y_n$.

Cada $Z_n^m$ es $\mathscr{G}_m$-medible por definición.

Cada $Z_n^m$ es suma finita de variables acotadas. Por lo tanto cada una pertenece a $L_1$.

Sólo nos falta verificar la propiedad de martingala.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1}^m|\mathscr{G}_n) &= \mathbb{E}((Z_n^m - 1) \cdot 2(Y_{n+1}) + 1|\mathscr{G}_n) && (62)\\
&= \mathbb{E}((Z_n^m - 1) \cdot 2(Y_{n+1})|\mathscr{G}_n) + \mathbb{E}(1|\mathscr{G}_n) && (63)\\
&\quad [\text{Por ser } (Z_n^m - 1) \text{ una variable } \mathscr{G}_n\text{-medible.}] && (64)\\
&= (Z_n^m - 1) \cdot \mathbb{E}(2(Y_{n+1})|\mathscr{G}_n) + \mathbb{E}(1|\mathscr{G}_n) && (65)\\
&= (Z_n^m - 1) \cdot 2\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathscr{G}_n) + \mathbb{E}(1|\mathscr{G}_n) && (66)\\
&\quad [\text{Por ser } Y_{n+1} \text{ independiente } \mathscr{G}_n.] && (67)\\
&= (Z_n^m - 1) \cdot 2\mathbb{E}(Y_{n+1}) + \mathbb{E}(1|\mathscr{G}_n) && (68)\\
&= (Z_n^m - 1) \cdot 2\frac{1}{2} + \mathbb{E}(1|\mathscr{G}_n) && (69)\\
&= (Z_n^m - 1) \cdot +1 && (70)\\
&= Z_n^m. && (71)
\end{aligned}$$

Ahora definamos a $D_n = \sum_{i=1}^{n}(Z_n^i)$. Que significa, La cantidad de dinero que el casino ha ganado al tiempo $n$. Justo como lo habíamos dicho en la "demostración intuitiva".

Ver que $D$ es martingala es fácil. Cada $D_n$ es suma finita de variables finitas y por lo tanto pertenece a $L_1$. $D_n$ es suma de variables $\mathscr{G}_n$-medibles y por lo tanto también lo es. Y la propiedad de martingala se sigue directamente de (62).

Es cierto que podemos aplicar Doob sobre el tiempo $T \wedge n$ por ser acotado y de aquí que: $\mathbb{E}(D_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(D_1) = 0$.

Notemos que $D_{T\wedge n} \longrightarrow D_T$ *c.s.*

Nos gustaría poder decir lo mismo de sus esperanzas y para eso utilizaremos teroema de convergencia dominada.

Es claro que al tiempo $T \wedge n$ el casino a lo más pudo haber ganado $T \wedge n$ pesos. De aquí que $D_{T\wedge n} \geq T \wedge n \geq T$.

Además, por definición de $T$, para el tiempo $T$ el casino a lo más ha perdido 4 pesos y es la primera vez que pierde tanto. Así que $-4 \leq D_{T\wedge n}$.

Entonces, nuestra martingala $D$ esta dominada por $\max(T, 4) < T + 4$. Bastaría demostrar que $\mathbb{E}(T+4) < \infty$ para poder utilizar el teorema de convergencia dominada.

Notemos que

$$\mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T > n-1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(T > n-2). \tag{72}$$

Pues queremos garantizar que en los primeros $n$ turnos, no pierde dos veces consecutivas el casino.

Si en el turno 1, gana el casino (de aquí el $\frac{1}{2}$), en el resto de los $n-1$ turnos tenemos que garantizar que el casino no pierde dos veces consecutivas, como las variables están idénticamente distribuidas, esto es equivalente a que $T > n-1$. (De aqui el $\mathbb{P}(T > n-1)$.

Si el casino pierde en el turno 1, necesariamente tiene que ganar en el turno 2 (de aquí el $\frac{1}{4}$). Y la probabilidad de que no pierda dos veces consecutivas en los siguientes $n-2$ turnos es $\mathbb{P}(T > n-2)$.

De (72) podemos notar fácilmente que $\mathbb{P}(T > 2) \leq \frac{3}{4}$

También notemos que $\mathbb{P}(T > n) \geq \mathbb{P}(T > n+1)$ (El primer evento contiene al segundo).

Ahora

$$\mathbb{P}(T > 2(2)) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T > 2+1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(T > 2) \tag{73}$$
$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{P}(T > 2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(T > 2) \tag{74}$$
$$\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2. \tag{75}$$

De manera recursiva tenemos que

$$\mathbb{P}(T > 2(n+1)) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T > 2(n+1)-1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(T > 2(n+1)-2) \tag{76}$$
$$= \frac{1}{2}\mathbb{P}(T > 2(n)+1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(T > 2(n)) \tag{77}$$
$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{P}(T > 2n) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(T > 2n) \tag{78}$$
$$\leq \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}. \tag{79}$$

Entonces,

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(T > n) \tag{80}$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2\mathbb{P}(T > 2n) \tag{81}$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(T > 2n) \tag{82}$$
$$\leq 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n < \infty \tag{83}$$
$$\tag{84}$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(T+4) \leq \infty$. Y entonces nuestra martingala $D$ está dominada por una variable integrable y finalmente podemos aplicar teorema de convergencia dominada para concluir que:

$$0 = \lim_{n\longrightarrow\infty}\mathbb{E}(D_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(D_T). \tag{85}$$

Y con esto terminamos de demostrar todas las formalidades que nos hacían falta.

## 1.4. **problema1.4.**

**Problema 1.4** (Extensiones del teorema de paro opcional) *Sea $M = (M_n, n \in \mathbb{N})$ una (super)martingala respecto de una filtración $(\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N})$ y sean $S$ y $T$ tiempos de paro.*

(i) *Pruebe que $S \wedge T$, $S + T$ y $S \vee T$ son tiempos de paro.*

(ii)

$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n \text{ para toda } n\}$$

*es una $\sigma$-álgebra, a la que nos referimos como la $\sigma$-álgebra detenida en $\tau$. Comente qué puede fallar si $T$ no es tiempo de paro. Pruebe que $T$ es $F_T$-medible.*

(iii) *Pruebe que si $T$ es finito, entonces $M_T$ es $\mathscr{F}_T$-medible.*

(iv) *Pruebe que si $S \leq T \leq n$ entonces $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$. Si además $T$ es acotado entonces $X_S, X_T \in L_1$ y*

$$\mathbb{E}( M_T \mid \mathscr{F}_S) \leq M_S.$$

(v) *Si $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ es un proceso estocástico $(\mathscr{F}_n)$-adaptado y tal que $X_n \in L_1$ y tal que para cualesquiera tiempos de paro acotados $S$ y $T$ se tiene que $\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_T)$ entonces $X$ es una martingala. Sugerencia: considere tiempos de paro de la forma $n\mathbf{1}_A + (n+1)\mathbf{1}_{A^c}$ con $A \in \mathscr{F}_n$.*

**Categorías:** *Tiempos de paro, Muestreo opcional*

**Demostración:**

1.4.1. *(i).* Pruebe que $S \wedge T$, $S + T$ y $S \vee T$ son tiempos de paro.

(1) Comprobemos que:

$$\{S \wedge T \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\}. \tag{86}$$

Sea $\omega \in \{S \wedge T \leq n\}$. Entonces $T(\omega) \leq n$ ó $S(\omega) \leq n$. Por lo tanto:

$$\{S \wedge T \leq n\} \subset \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\}. \tag{87}$$

Por otro lado, si $\omega \in \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\}$ entonces $T(\omega) \leq n$ ó $S(\omega) \leq n$. En particular, el mínimo tendrá que ser menor que $n$ y por lo tanto:

$$\{T \leq n\} \cup \{S \leq n\} \subset \{S \wedge T \leq n\}. \tag{88}$$

Por último, $\{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ y $\{S \leq n\} \in \mathscr{F}_n$. Por lo tanto $\{T \leq n\} \cup \{S \leq n\} = \{S \wedge T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ y con esto demostramos que $S \wedge T$ es tiempo de paro.

(2) Comprobemos que:

$$\{S \vee T \leq n\} = \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\}. \tag{89}$$

Sea $\omega \in \{S \vee T \leq n\}$. Entonces $T(\omega) \leq n$ y $S(\omega) \leq n$. Por lo tanto:

$$\{S \vee T \leq n\} \subset \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\}. \tag{90}$$

Por otro lado, si $\omega \in \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\}$ entonces $T(\omega) \leq n$ y $S(\omega) \leq n$. En particular, el máximo tendrá que ser menor que $n$ y por lo tanto:

$$\{T \leq n\} \cap \{S \leq n\} \subset \{S \vee T \leq n\}. \tag{91}$$

Por último, $\{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ y $\{S \leq n\} \in \mathscr{F}_n$. Por lo tanto $\{T \leq n\} \cap \{S \leq n\} = \{S \vee T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ y con esto demostramos que $S \vee T$ es tiempo de paro.

(3) Comprobemos que:

$$\{S+T=n\} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \Big( \{S=n-i\} \cap \{T=i\} \Big). \tag{92}$$

Si $\omega \in \{S+T=n\}$, entonces $S(\omega)+T(\omega)=n$, como $S$ y $T$ son positivas, entonces $1 \leq S(\omega) \leq n-1$. Entonces basta elegir $i=S(\omega)$ para afirmar que $\omega \in \{S=n-i\} \cap \{T=i\}$ y por lo tanto

$$\{S+T=n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} \Big( \{S=n-i\} \cap \{T=i\} \Big). \tag{93}$$

Por otro lado, si $\omega \in \bigcup_{i=1}^{n-1} \Big( \{S=n-i\} \cap \{T=i\} \Big)$ significa que existe un $i$ tal que $1 \leq i \leq n-1$ y $\omega \in \{S=n-i\} \cap \{T=i\}$. Y por lo tanto: $S(\omega)=n-i$ y $T(\omega)=i$. De donde $(T+S)(\omega)=n$.

De aquí que

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} \Big( \{S=n-i\} \cap \{T=i\} \Big) \subset \{S+T=n\}. \tag{94}$$

Ahra, para cada $i$ tal que $1 \leq i \leq n-1$, $\{S=n-i\} \cap \{T=i\} \in \mathscr{F}_n$. Por lo tanto $\{S+T=n\} \in \mathscr{F}_n$ y con esto queda demostrado que $S+T$ es tiempo de paro.

1.4.2. *(ii).*

$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n \text{ para toda } n\} \tag{95}$$

es una $\sigma$-álgebra, a la que nos referimos como la $\sigma$-álgebra detenida en $\tau$. Comente qué puede fallar si $T$ no es tiempo de paro. Pruebe que $T$ es $F_T$-medible.

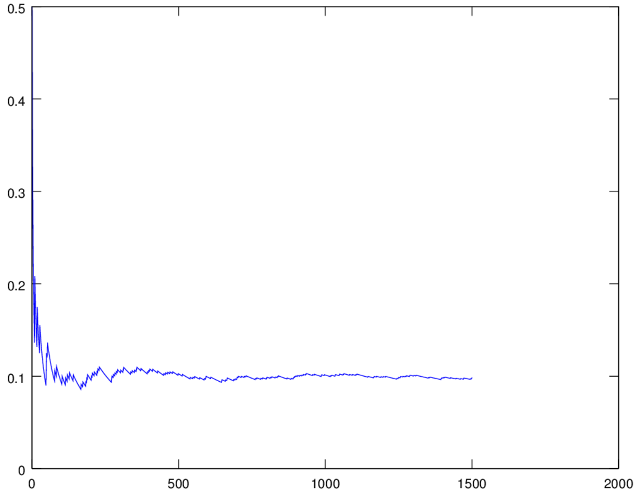
1.4.3. *(iii).* Pruebe que si $T$ es finito, entonces $M_T$ es $\mathscr{F}_T$-medible.

1.4.4. *(iv).* Pruebe que si $S \leq T \leq n$ entonces $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$. Si además $T$ es acotado entonces $X_S, X_T \in L_1$ y

$$\mathbb{E}(\, M_T \mid \mathscr{F}_S) \leq M_S.$$

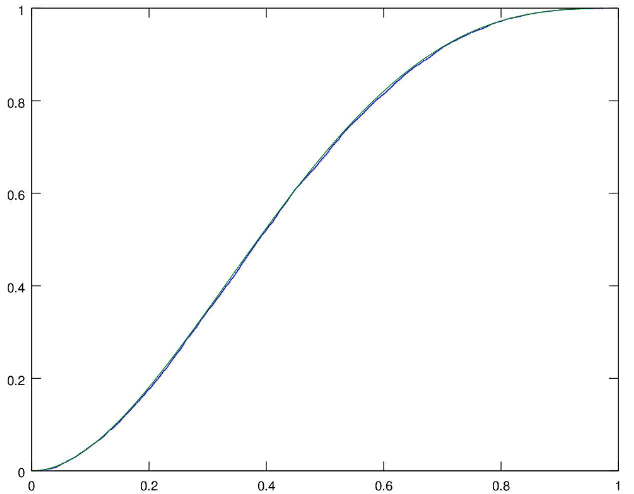
1.4.5. *(v).* Si $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ es un proceso estocástico $(\mathscr{F}_n)$-adaptado y tal que $X_n \in L_1$ y tal que para cualesquiera tiempos de paro acotados $S$ y $T$ se tiene que $\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_T)$ entonces $X$ es una martingala. Sugerencia: considere tiempos de paro de la forma $n\mathbf{1}_A + (n+1)\mathbf{1}_{A^c}$ con $A \in \mathscr{F}_n$.

## 2. Tarea 2

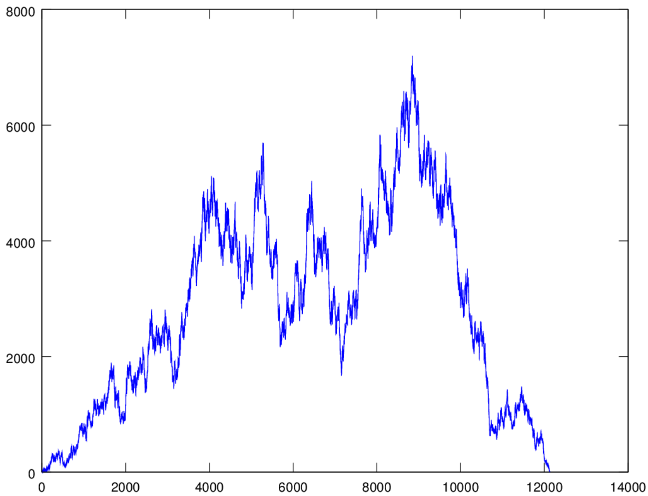



Gráfica de una ejecución de urnas de Poyla
con 1 bola verde inicial, 1 bola roja inicial y constante 1.

## 3. Tarea 3




Gráfica del histograma de los radios ̈finales ̈de muchas iteraciones del proceso de urnas de Poyla.




Gráfica de una ejecución del proceso de extinción de Galton-Watson
Parámetros: 10 individuos
La probabilidad de que un individuo tenga 2 hijos es $\frac{1}{2}$
La probabilidad de que un individuo tenga 0 hijos es $\frac{1}{2}$.