PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I
SEMESTRE 2013-II
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

1. Tarea 1

1.1. problema1.1.

Problema 1.1 *Sea* $(X_{n n\in\mathbb{N}})$ *un proceso estocástico con valores reales y* $A \subset \mathbb{R}$ *un boreliano. Pruebe que si*

$$T_0 = 0 \quad y \quad T_{n+1} = \min\{k > T_n : X_k \in A \subset \mathbb{R}\}$$

entonces T_n *es un tiempo de paro para toda* n *y* $T_n \to \infty$ *puntualmente conforme* $n \to \infty$.

Categorías: *Tiempos de paro.*

Demostración:

Sea $(\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una filtración.

Veamos que T_0 es tiempo de paro. $\{T_0 = 0\} = \Omega \in \mathscr{F}_n$ y $\{T_0 = c\} = \emptyset \in \mathscr{F}_n$ para $c \neq 0 \in \mathbb{N}$. Recordemos que:

$$\{T_0 = n\} \in \mathscr{F}_n \; \forall n \in \mathbb{N} \iff \{T_0 \leq n\} \in \mathscr{F}_n \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Y por lo tanto T_0 es variable aleatoria sobre la sigma álgebra $\sigma(\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n)$.

Para $n = 1$, veamos que:

(2) $$\{T_1 = 1\} = \{X_1 \in A\} \in \mathscr{F}_1$$

(3)

(4) $$\{T_1 = 2\} = \{X_1 \notin A, X_2 \in A\} =$$

(5) $$\{X_1 \notin A\} \cap \{X_2 \in A\} \in \mathscr{F}_2$$

(6)

(7) $$\{T_1 = 3\} = \{X_1 \notin A, X_2 \notin A, X_3 \in A\} =$$

(8) $$\{X_1 \notin A\} \cap \{X_2 \notin A\} \cap \{X_3 \in A\} \in \mathscr{F}_3$$

(9) $$\vdots$$

(10) $$\{T_1 = n\} = \{X_1 \notin A, X_2 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} =$$

(11) $$\bigcap_{i=1}^{i=n-1} \{X_i \notin A\} \cap \{X_n \in A\} \in \mathscr{F}_n$$

Por hipótesis de inducción supongamos que $\{T_k = n\} \in \mathscr{F}_n$ para cierta $k > 1$ y para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para demostrar la primera parte del ejercicio, basta probar que $\{T_{k+1} = n\} \in \mathscr{F}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Pues por lo dicho en (1) resultarían ser variables aleatorias en $\sigma(\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{F}_n)$.

Dado que

(12) $$0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_k$$

tenemos que $\{T_k = n\} = \emptyset \in \mathscr{F}_l$ para $n < k$.

Ahora, sea $n \geq k$

(13) $$\{T_{k+1} = n\} = \left(\bigcup_{i<n} \{T_k = i\}\right) \cap \left(\bigcap_{i<n} \{X_i \notin A\}\right) \cap \{X_n \in A\}$$

Donde

- $\{T_k = i\} \in \mathscr{F}_n \; \forall i < n \in \mathbb{N}$ (Por hipótesis de inducción).
- $\{X_i \notin A\} \in \mathscr{F}_n \; \forall i < n \in \mathbb{N}$ (Por ser $\mathscr{F}$ filtración).
- $\{X_n \in A\} \in \mathscr{F}_n$ (Por ser X_n variable aleatoria en $\mathscr{F}_n$)

Y por lo tanto, (13) pertenece a $\mathscr{F}_n$. Con lo que termina la demostración de la primera parte del ejercicio.

Ahora, de (12) se sigue inmediatamente que que $T_n \to \infty$.

1.2. **problema1.2.**

Problema 1.2 *Suponga que T es un tiempo de paro tal que para algún $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{P}(T \leq N + n | F_n) > \varepsilon \text{ casi seguramente} \tag{14}$$

Al verificar la desomposición

$$\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N) \tag{15}$$

pruebe por inducción que para cada $k = 1, 2, \ldots$:

$$\mathbb{P}(T > kN) \leq (1-\varepsilon)^k.$$

Pruebe que $\mathbb{E}(T) < \infty$.

Categorías: *Tiempos de paro.*

Demostración: Tenemos que:

$$(T > kN \Rightarrow T > (k-1)N \Rightarrow \tag{16}$$
$$(T > kN) \subset (T > (k-1)N) \Rightarrow \tag{17}$$
$$(T > kN) \cap (T > (k-1)N) = (T > kN) \Rightarrow \tag{18}$$
$$\mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N) = \mathbb{P}(T > kN) \tag{19}$$

Base de inducción. $k = 1$. Usando (14), con $n = 0$

$$\mathbb{P}(T \leq 1N | \mathscr{F}_0) > \epsilon \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(T > N | \mathscr{F}_0) < 1 - \epsilon$$

Sustituyendo por la definición de probabilidad condicional tenemos:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>N} | \mathscr{F}_0) = \mathbb{P}(T > N | \mathscr{F}_0) < 1 - \epsilon$$

Aplicando esperanza en ambos lados tenemos:

$$\mathbb{P}(T > N) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>N} | \mathscr{F}_0)) < \mathbb{E}(1 - \epsilon) = 1 - \epsilon$$

.

Hipótesis de induccion. Supongamos que $\mathbb{P}(T > k_0 N) \leq (1-\epsilon)^{k_0}$ para algún $k_0 \geq 1$.

Paso inductivo. Utilizando (15) tenemos que

$$\mathbb{P}(T > (k_0+1)N) = \mathbb{P}(T > (k_0+1)N, T > k_0 N) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>(k_0+1)N} \cdot \mathbb{1}_{T>k_0 N})$$

Ahora, dado que $T > k_0 N$ es un conjunto $\mathscr{F}_{k_0 N}$-medible tenemos:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>(k_0+1)N} \cdot \mathbb{1}_{T>k_0 N}) = \tag{20}$$
$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T>(k_0+1)N} \cdot \mathbb{1}_{T>k_0 N} | \mathscr{F}_{k_0 N}\right)\right) = \tag{21}$$
$$E\left(\mathbb{1}_{T>k_0 N} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T>(k_0+1)N} | \mathscr{F}_{k_0 N}\right)\right) \tag{22}$$

Utilizando $n = k_0 N$ en (14) tenemos

$$\mathbb{P}\left(T > k_0 N + N | \mathscr{F}_{k_0 N}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T>(k_0+1)N} | \mathscr{F}_{k_0 N}\right) < 1 - \epsilon$$

Sustituyendo esto último en (22) obtenemos:

$$E\left(\mathbb{1}_{T>k_0N}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T>(k_0+1)N}|\mathscr{F}_{k_0N}\right)\right) < \tag{23}$$
$$E\left(\mathbb{1}_{T>k_0N}(1-\epsilon)\right) = \tag{24}$$
$$(1-\epsilon)E\left(\mathbb{1}_{T>k_0N}\right) = \tag{25}$$
$$(1-\epsilon)\mathbb{P}(T>k_0N) \leq \tag{26}$$
$$(1-\epsilon)(1-\epsilon)^{k_0} = (1-\epsilon)^{k_0+1}. \tag{27}$$

Con lo que concluimos

$$\mathbb{P}(T>(k_0+1)N) \leq (1-\epsilon)^{k_0+1}.$$

Terminando así la demostración por inducción.

Para la siguiente prueba notemos que si X es una variable aleatoria y $r > s \in \mathbb{R}$ entonces $(X > s) \subset (X > r)$ y por lo tanto $\mathbb{P}(X > s) \leq \mathbb{P}(X > r)$.

En particular para nuestro tiempo de paro T, si dado $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ es tal que $kN \geq n < (k+1)N$, entonces $\mathbb{P}(T > n) \leq \mathbb{P}(T > kN)$.

Trabajando por bloques de tamaño N tenemos que

$$\sum_{n=kN}^{(k+1)N-1} \mathbb{P}(T>n) \leq N\mathbb{P}(T>kN)$$

También recordemos que si T es una variable aleatoria positiva con valores en los enteros entonces

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T>n).$$

Sustituyendo nuestro penúltimo razonamiento en esta ultima fórmula tenemos:

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T>n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=kN}^{(k+1)N-1} \mathbb{P}(T>n) \leq N\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T>kN)$$

Sustituyendo nuetstro resultado de que $\mathbb{P}(T > kN) < (1-\epsilon)^k$ resulta que:

$$\mathbb{E}(T) \leq N\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T>kN) \leq N\sum_{k=0}^{\infty}(1-\epsilon)^k.$$

De lado derecho de esta última desigualdad tenemos una serie geométrica. Dado que ϵ es mayor que 0 y entonces que $1-\epsilon$ es menor que 1, tenemos que es una serie geométrica que converge en los reales y por lo tanto $\mathbb{E}(T)$ está acotada por un número real.

1.3. problema1.3.

Problema 1.3 Tomado de Mathematical Tripos, Part III, Paper 33, 2012, http://www.maths.cam.ac.uk/postgrad/mathiii/pastpapers/

Sean $(X_i, i \in \mathbb{N})$ *variables aleatorias independientes con* $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. *Sean* $S_0 = 0$ *y* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(i) *Sea* $T_1 = \min\{n \geq 0 : S_n = 1\}$. *Explique por qué* T_1 *es un tiempo de paro y calcule su esperanza.*

(ii) *Mediante el inciso anterior, construya una martingala que converge casi seguramente pero no lo hace en* L_1.

(iii) *Sea* M_n *la martingala obtenida al detener a* $-S$ *en* T_1. *Utilice la solución al Problema de la Ruina para probar que* $\mathbb{P}(max_n M_n \geq M) = 1/(M+1)$ *para todo* $M \geq 1$. *Concluya que* $\mathbb{E}(max_m M_n) = \infty$ *y que por lo tanto* $\mathbb{E}(max_{m\leq n} M_m) \to \infty$ *conforme* $n \to \infty$. *Finalmente, deduzca que no puede haber una desigualdad de tipo Doob cuando* $p = 1$.

(iv) *Sea* $T = \min\{n \geq 2 : S_n = S_{n-2} + 2\}$ *y* $U = T - 2$. *¿Son* T *y* U *tiempos de paro? Justifique su respuesta.*

(v) *Para la variable* T *que hemos definido, calcule* $\mathbb{E}(T)$.

Categorías: *Tiempos de paro, problema de la ruina*

Demostración:

(i) Sea $T_1 = \min\{n \geq 0 : S_n = 1\}$. Explique por qué T_1 es un tiempo de paro y calcule su esperanza.

Consideremos a la filtración $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como la filtracion generada por $X_1, X_2, \ldots$.

Es decir, $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Nótese que S_0 es medible bajo cualquier sigma álgebra por ser constante, en particular bajo $\mathscr{F}_0$.

Basta demostrar que $(T_1 = n) \in \mathscr{F}_n$ para ver que T_1 es tiempo de paro. T_1 representa el primer tiempo en que la suma es igual a 1. Es decir, para cualquier momento anterior, la suma no es 1.

Eso escrito en símbolos significa:

$$(T_1 = n) = \bigcap_{i=0}^{n-1} (S_i \neq 1) \cup (S_n = 1).$$

Para $n = 0$, $(S_0 = 1) = \omega \in \mathscr{F}_0$.

Como $(S_i \neq 1) \in \mathscr{F}_j$ siempre que $i \leq j$. Para $n > 0$, $(T_1 = n)$ es el resultado de unir e intersectar conjuntos $\mathscr{F}_n$-medibles, lo cual resulta $\mathscr{F}_n$-medible.

Para $m \in \mathbb{N}$. Definamos $T_m = min\{n \geq 0 : S_n = m\}$ (Nótese que para el caso $m = 1$, esta definición coincide con la definición previa de T_1).

Para $a, b \in \mathbb{N}$, podemos definir el tiempo de paro $T_{a,b} = T_{-a} \wedge T_b$, y corresponde al tiempo de paro del problema de la ruina. Para este tiempo de paro ya conocemos la esperanza y es

$$\mathbb{E}(T_{a,b}) = ab.$$

Ahora, definamos la sucesion de variables aleatorias $T_{1,1}, T_{2,1}, T_{3,1}, \dots, T_{n,1}, \dots$. Notemos que si $a > a' \in N$ entonces $T_{-a} > T_{-a'}$, pues T_{-a} es la primera vez que se llega a $-a$, y para poder alcanzar $-a$ era necesario haber pasado por $-a'$. De aqui tenemos que si $a > a'$, entonces $T_{a,1} \geq T_{a',1}$. De donde nuestra suceción es no decreciente.

Por otro lado, que si $a > a' \in N$ entonces $T_{-a} > T_{-a'}$ implica que $T_{-n} n \in \mathbb{N}$ es una suceción extrictamente creciente y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} T_{-n} = \infty$, con esto tenemos que el límite de nuestra suceción es

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,1} = \lim_{n\to\infty} T_{-n} \wedge T_1 = \infty \wedge T_1 = T_1$$

Tenemos todos los ingredientes para usar Teorema de convergencia monótona sobre nuestra suceción y la variable T_1. Nuestra sucecion es monótona y converge puntualmente a T_1. Utilizando dicho teorema obtenemos:

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} T_{n,1}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(T_{n,1}) = \lim_{n\to\infty} n \cdot 1 = \infty.$$

Lo cual era intuitivo. Si $\mathbb{E}(T_1)$ fuese finito, diría que existe un número de volados donde uno puede apostar con mucha certeza que ganará un peso después de jugar "cerca" de esa cantidad de volados. Intuitivamente, esto vuelve injusto un juego de volados donde la moneda es justa.

(ii) Mediante el inciso anterior, construya una martingala que converge casi seguramente pero no lo hace en L_1.

En el ejercicio 4 se probará que si T y S son tiempos de paro, entonces $T \wedge S$ también es tiempo de paro. Con esto tenemos que si T_1 es tiempo de paro, entonces $T_1 \wedge n$ con $n \in \mathbb{N}$ también es tiempo de paro. Definimos entonces

$$M_n = S_{T_1 \wedge n}.$$

Veamos que los M_n forman una martingala.

(a) M_n es adaptada a la filtración.

$$M_n(w) = S_{T_1 \wedge n}(w) = S_{T_1 \wedge n(w)}(w) = \sum_{k=1}^{T_1 \wedge n(w)} X_k = \sum_{k=1}^{n} (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k})(w).$$

De donde, podemos escribir:

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k}). \tag{28}$$

Recordemos que X_k es $\mathscr{F}_n$-medible para toda $k \leq n$. Por ser T_1 tiempo de paro, los conjuntos $A_k = \{T_1 = k\}$ y $B_k = \{T_1 \leq k\}$ son F_k medibles y por lo tanto $A_k \cup B_k^c = \{T_1 \geq k\}$ también lo es. De aquí que $\mathbb{1}_{T_1 \geq k}$ es $\mathscr{F}_k$-medible y por lo tanto también $\mathscr{F}_n$-medible para toda n tal que $n \geq k$.

Entonces M_n es suma y productos de funciones $\mathscr{F}_n$-medibles y por lo tanto F_n-medible. Que es lo que queríamos demostrar.

(b) $M_n \in \mathbb{L}_1$

De (28) podemos ver que M_n es suma finita de variables acotadas. Por lo tanto $M_n \in \mathbb{L}_1$.

(c) Ahora probaremos que $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) = M_n$

Primero:

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(S_{T_1 \wedge (n+1)}|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n+1} (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k}) \middle| \mathscr{F}_n \right) \tag{29}$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k}) \middle| \mathscr{F}_n \right) + \mathbb{E}\left((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1}) \middle| \mathscr{F}_n \right) \tag{30}$$

$$\text{(Este paso es gracias a que } X_k \text{ y } \mathbb{1}_{T_1 \geq k} \text{ son } \mathscr{F}_n\text{-medibles)} \tag{31}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (X_k \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq k}) + \mathbb{E}((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1})|\mathscr{F}_n) \tag{32}$$

$$= S_{T_1 \wedge n} + \mathbb{E}((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1})|\mathscr{F}_n) \tag{33}$$

$$= M_n + \mathbb{E}((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1})|\mathscr{F}_n) \tag{34}$$

Entonces, nos basta probar que $\mathbb{E}(X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1}|\mathscr{F}_n) = 0$ para terminar nuestra demostración.

Sean $A = \{T_1 = n\}$ y $B = \{T_1 \leq n\}$. Por ser T_1 tiempo de paro, A y B son $\mathscr{F}_n$-medibles. Por lo tanto $B \setminus A$ también es $\mathscr{F}_n$-medible. Notemos que $\{T_1 \geq n+1\} = (B \setminus A)^c$. Por lo tanto $\{T_1 \geq n+1\}$ es $\mathscr{F}_n$-medible. De donde $\mathbb{1}_{T_1 \geq n+1})$ es $\mathscr{F}_n$-medible.

Con esto, ahora tenemos que:

(35) $\mathbb{E}((X_{n+1} \cdot \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1})|\mathscr{F}_n) = \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1} \cdot \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)$

(36) (Este paso es gracias a que los X_n son independientes)

(37) $= \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1} \cdot \mathbb{E}(X_{n+1})$

(38) $= \mathbb{1}_{T_1 \geq n+1} \cdot 0$

(39) $= 0$

Como queríamos demostrar.

Ahora que tenemos que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es martingala, confirmemos que converge casi seguramente.

Notemos que $(T_1 \wedge n)_{n\to\infty} \to T_1$ c.s.

De aquí que $(M_n)_{n\to\infty} = (S_{T_1 \wedge n})_{n\to\infty} = S_{T_1}$ c.s.

Veamos que la convergencia no ocurre en $\mathbb{L}_1$.

Dado que $T_1 \wedge n$ es un tiempo de paro acotado para toda $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar el Teorema de Muestreo Opcional de Doob. El cual nos dice que $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(S_{T_1 \wedge n}) = \mathbb{E}(S_0) = 0$.

Por otro lado, por definición de T_1, $S_{T_1} = 1$ c.s. De donde $\mathbb{E}(S_T) = 1$.

(40) $$\mathbb{E}(M_n) = 0 \not\to 1 = \mathbb{E}(S_{T_1}).$$

Y con esto, queda demostrado que la convergencia no se da en $\mathbb{L}_1$.

(iii) Sea M_n la martingala obtenida al detener a $-S$ en T_1. Utilice la solución al Problema de la Ruina para probar que $\mathbb{P}(max_n M_n \geq M) = 1/(M+1)$ para todo $M \geq 1$. Concluya que $\mathbb{E}(max_m M_n) = \infty$ y que por lo tanto $\mathbb{E}(max_{m\leq n} M_m) \to \infty$ conforme $n \to \infty$. Finalmente, deduzca que no puede haber una desigualdad de tipo Doob cuando $p = 1$.

Definimos $M_n = -S_{T_1 \wedge n}$. Notemos que M_n únicamente toma valores en $[-1, \infty]$. Para calcular $\mathbb{P}(max_n M_n \geq M)$ notemos primero que:

(41) $$\mathbb{P}(max_n M_n \geq M) = 1 - \mathbb{P}(max_n M_n < M).$$

$max_n M_n < M$ significa que M_n nunca alcanza el valor M.

Intentando hacer analogía con el problema de la ruina, pensemos en dos concursantes, uno con 1 peso y otro con M pesos. Nunca alcanzar M significa que nunca gana el que tiene 1 peso.

Esta probabilidad ya la conocemos y es

$$\mathbb{P}(max_n M_n < M) = \frac{M}{M+1}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}(max_n M_n \geq M) = 1 - \mathbb{P}(max_n M_n < M) \tag{42}$$
$$= 1 - \frac{M}{M+1} \tag{43}$$
$$= \frac{M+1}{M+1} - \frac{M}{M+1} \tag{44}$$
$$= \frac{1}{M+1} \tag{45}$$

Utilizando este resultado:

$$\mathbb{E}(max_n M_n) = -\mathbb{P}(max_n M_n = -1) + \sum_{M=1}^{\infty} \mathbb{P}(max_n M_n \geq M) \tag{46}$$
$$= -\mathbb{P}(max_n M_n = -1) + \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M+1} \tag{47}$$
$$= -\mathbb{P}(max_n M_n = -1) + \infty \tag{48}$$
$$= \infty \tag{49}$$

Intuitivamente, esto nos dice que el valor máximo que podemos esperar en un juego de volados, no está acotado. Ahora, tenemos que:

$$\|\overline{M_n^+}\|_1 = \mathbb{E}\overline{M_n^+} \tag{50}$$
$$= \mathbb{E}\max_{m \leq n} M_m^+ \tag{51}$$
$$\geq \mathbb{E}\max_{m \leq n} M_m \tag{52}$$

Donde, el último término, tiende a infinito en base al resultado (46).
Por otro lado:

$$\|M_n^+\|_1 = \| - S_{T_{1 \wedge n}}^+\|_1 \longrightarrow \| - S_{T_1}^+\|_1 = 0 < \infty \tag{53}$$

Por lo tanto, no existe número K, tal que

$$\|\overline{M_n^+}\|_1 \leq K\|M_n^+\|_1 \tag{54}$$

En otras palabras, no tenemos una desigualdad de tipo Doob para $p = 1$.

(iv) Sea $T = \min\{n \geq 2 : S_n = S_{n-2} + 2\}$ y $U = T - 2$. ¿Son T y U tiempos de paro? Justifique su respuesta.

(v) Para la variable T que hemos definido, calcule $\mathbb{E}(T)$.

1.4. problema1.4.

Problema 1.4 (Extensiones del teorema de paro opcional) *Sea $M = (M_n, n \in \mathbb{N})$ una (super)martingala respecto de una filtración $(\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N})$ y sean S y T tiempos de paro.*

(1) *Pruebe que $S \wedge T$, $S + T$ y $S \vee T$ son tiempos de paro.*

(2) *Sea*

$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n \text{ para toda } n\}$$

es una σ-álgebra, a la que nos referimos como la σ-álgebra detenida en τ. Comente qué puede fallar si T no es tiempo de paro. Pruebe que T es F_T-medible.

(3) *Pruebe que si T es finito, entonces M_T es $\mathscr{F}_T$-medible.*

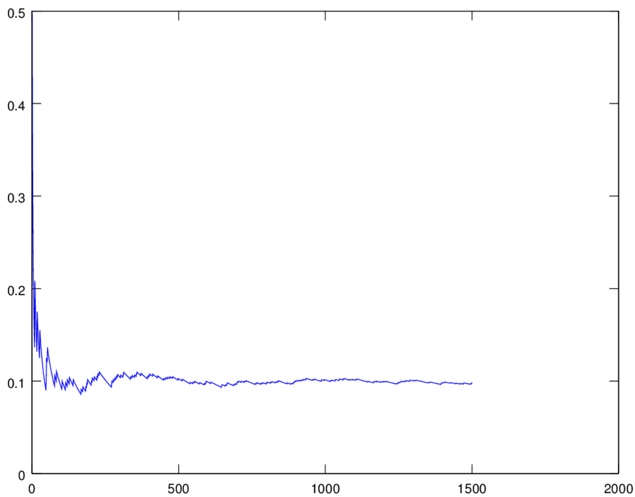
(4) *Pruebe que si $S \leq T \leq n$ entonces $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$. Si además T es acotado entonces $X_S, X_T \in L_1$ y*

$$\mathbb{E}(\, M_T \mid \mathscr{F}_S) \leq M_S.$$

(5) *Si $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ es un proceso estocástico $(\mathscr{F}_n)$-adaptado y tal que $X_n \in L_1$ y tal que para cualesquiera tiempos de paro acotados S y T se tiene que $\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_T)$ entonces X es una martingala. Sugerencia: considere tiempos de paro de la forma $n\mathbf{1}_A + (n+1)\mathbf{1}_{A^c}$ con $A \in \mathscr{F}_n$.*

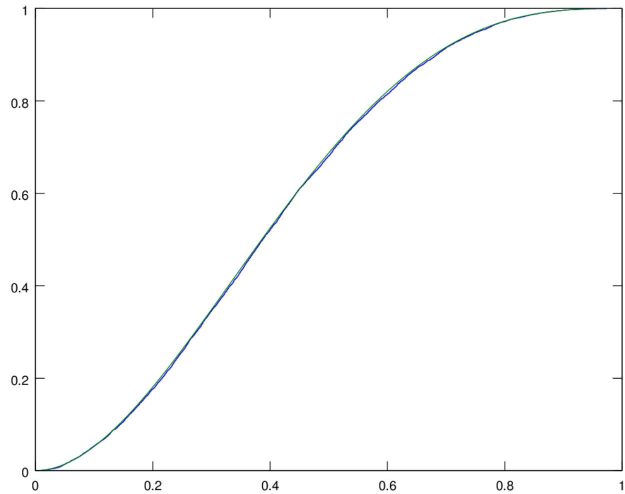
Categorías: *Tiempos de paro, Muestreo opcional*

2. Tarea 2

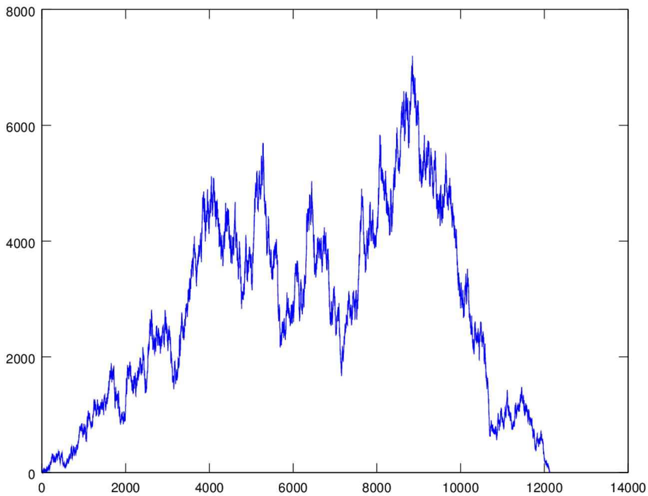


Gráfica de una ejecución de urnas de Poyla
con 1 bola verde inicial, 1 bola roja inicial y constante 1.

3. Tarea 3



Gráfica del histagrama de los radios ẅfinalesd̈e muchas iteraciones del proceso de urnas de Poyla.



Gráfica de una ejecución del proceso de extinción de Galton-Watson

Parámetros: 10 individuos
La probabilidad de que un individuo tenga 2 hijos es $\frac{1}{2}$
La probabilidad de que un individuo tenga 0 hijos es $\frac{1}{2}$.