PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I
SEMESTRE 2013-II
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

GERÓNIMO URIBE BRAVO

Problema 1. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso estocástico con valores reales y $A \subset \mathbb{R}$ un boreliano. Pruebe que si

$$T_0 = 0 \quad \text{y} \quad T_{n+1} = \min\{k > T_n : X_k \in A\}$$

entonces T_n es un tiempo de paro para toda n y $T_n \to \infty$ puntualmente conforme $n \to \infty$.

Categorías: Tiempos de paro

Problema 2 (Lo que siempre tiene una posibilidad razonable de suceder lo hará; (casi seguramente)– y pronto)**.** *Tomado de* [Wil91, E10.5, p.223]

Suponga que T es un tiempo de paro tal que para algún $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(T \leq N + n | \mathscr{F}_n) > \varepsilon \text{ casi seguramente}$$

Al verificar la desomposición

$$\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N),$$

pruebe por inducción que para cada $k = 1, 2, \ldots$:

$$\mathbb{P}(T > kN) \leq (1 - \varepsilon)^k .$$

Pruebe que $\mathbb{E}(T) < \infty$.

Categorías: Tiempos de paro.

Problema 3. *Tomado de Mathematical Tripos, Part III, Paper 33, 2012,* http://www.maths.cam.ac.uk/postgrad/mathiii/pastpapers/

Sean $(X_i, i \in \mathbb{N})$ variables aleatorias independientes con $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. Sean $S_0 = 0$ y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(1) Sea $T_1 = \min\{n \geq 0 : S_n = 1\}$. Explique por qué T_1 es un tiempo de paro y calcule su esperanza.

(2) Mediante el inciso anterior, construya una martingala que converge casi seguramente pero no lo hace en L_1.
(3) Sea M_n la martingala obtenida al detener a $-S$ en T_1. Utilice la solución al Problema de la Ruina para probar que $\mathbb{P}(\max_n M_n \geq M) = 1/M$ para todo $M \geq 1$. Concluya que $\mathbb{E}(\max_m M_m) = \infty$ y que por lo tanto $\mathbb{E}(\max_{m\leq n} M_n) \to \infty$ conforme $n \to \infty$. Finalmente, deduzca que no puede haber una desigualdad tipo Doob cuando $p = 1$.
(4) Sea $T = \min\{n \geq 2 : S_n = S_{n-2} + 2\}$ y $U = T - 2$. ¿Son T y U tiempos de paro? Justifique su respuesta.
(5) Para la variable T que hemos definido, calcule $\mathbb{E}(T)$.

Categorías: Tiempos de paro, problema de la ruina

Problema 4 (Extensiones del teorema de paro opcional)**.** Sea $M = (M_n, n \in \mathbb{N})$ una (super)martingala respecto de una filtración $(\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N})$ y sean S y T tiempos de paro.

(1) Pruebe que $S \wedge T$, $S + T$ y $S \vee T$ son tiempos de paro.
(2) Sea
$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n \text{ para toda } n\}$$
es una σ-álgebra, a la que nos referimos como la σ-álgebra detenida en τ. Comente qué puede fallar si T no es tiempo de paro. Pruebe que T es F_T-medible.
(3) Pruebe que si T es finito, entonces M_T es $\mathscr{F}_T$-medible.
(4) Pruebe que si $S \leq T \leq n$ entonces $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$. Si además T es acotado entonces $X_S, X_T \in L_1$ y
$$\mathbb{E}(M_T \mid \mathscr{F}_S) \leq M_S.$$
(5) Si $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ es un proceso estocástico $(\mathscr{F}_n)$-adaptado y tal que $X_n \in L_1$ y tal que para cualesquiera tiempos de paro acotados S y T se tiene que $\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_T)$ entonces X es una martingala. Sugerencia: considere tiempos de paro de la forma $n\mathbf{1}_A + (n+1)\mathbf{1}_{A^c}$ con $A \in \mathscr{F}_n$.
(6) Pruebe que el proceso M^T obtenido al detener a M al instante T y dado por $M^T_n = M_{T\wedge n}$ es una martingala respecto de $(\mathscr{F}_{T\wedge n}, n \geq 0)$ pero también respecto de $(\mathscr{F}_n, n \geq 0)$. Sugerencia: basta probar el resultado respecto de $(\mathscr{F}_n)$ y para esto es útil el inciso anterior.

Categorías: Tiempos de paro, Muestreo opcional

Problema 5. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ una caminata aleatoria con saltos $X_i \in \{-1, 0, 1, \ldots\}$. Sea C_p una variable aleatoria geométrica de parámetro p independiente de S y definimos
$$M_p = -\min_{n\leq C_p} S_n.$$
El objetivo del ejercicio es determinar la distribución de M_p.

(A las caminatas aleatorias como S se les ha denominado Skip-free random walks Para aplicaciones de este tipo de procesos, ver [Asm03]. También aparecen en el estudio de Procesos Galton-Watson. Este ejercicio es el resultado básico del estudio de sus extremos, denominado teoría de fluctuaciones.)

(1) Sea
$$g(\lambda) = E(e^{-\lambda X_1}).$$
Pruebe que $g(\lambda) \in (0, \infty)$ y que
$$M_n = e^{-\lambda S_n} g(\lambda)^{-n}, n \geq 0$$
es una martingala.

(2) Pruebe que g es log-convexa al aplicar la desigualdad de Hölder. Pruebe que si $P(X_1 = -1) > 0$ (hipótesis que se utilizará desde ahora) entonces $g(\lambda) \to \infty$ conforme $\lambda \to \infty$. Utilice esta información para esbozar la gráfica de g. Defina $f(s) = \inf\{\lambda > 0 : g(\lambda)^{-1} < s\}$. Note que $1/g \circ f = Id$ en $(0, 1)$. Pruebe que si $g(\lambda) > 1$, la martingala M es acotada hasta el tiempo de arribo de S a $-k$ dado por
$$T_k = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = -k\}$$
(donde se utiliza la convención $\inf \emptyset = \infty$). Aplique el teorema de muestreo opcional de Doob para mostrar que
$$E(s^{T_k}) = e^{-kf(s)}.$$
Justifique MUY bien por qué la fórmula es vlida aun cuando T_k puede tomar el valor ∞ y deduzca que de hecho $\mathbb{P}(T_k = \infty) = 0$.

(3) Argumente que
$$P(M_p \geq n) = P(T_n \leq C_p) = E((1 - p)^{T_n})$$
para demostrar que M_p tiene distribución geométrica de parámetro $1 - e^{-f(1-p)}$

(4) Tome el lmite conforme $p \to 0$ para mostrar que la variable aleatoria
$$M = -\min_{n \geq 0} S_n$$
tiene una distribución geométrica de parámetro $1 - e^{-f(1)}$. Interprete esto cuando $f(1) = 0$.

Categorías: Caminatas aleatorias, muestreo opcional, fluctuaciones.

Ejercicio 1.

(1) Instale Octave en su computadora
(2) Échele un ojo a la documentacin
(3) Ejecute el siguiente código linea por linea:

```
u=rand(600,1);
x=[1/2];
for i=1:600
x(i+1)=(2+i)/(2+i+1)*x(i)+(u(i)<x(i))/(2+i+1);
endfor
plot(x)
```

(4) Lea las secciones sobre simple examples, ranges, random number generation y comparison operators y escriba su interpretación de lo que hace el código anterior. Nota: está relacionado con uno de los ejemplos del curso.
(5) Vuelva a correr el código varias veces y escriba sus impresiones sobre lo que está sucediendo.

Problema 6 (Ejercicios sueltos sobre martingalas)**.**

(1) Sea $(X_n, n \geq 0)$ una sucesión $(\mathscr{F}_n)$-adaptada. Pruebe que

$$\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}), \quad n \geq 0$$

es una $(\mathscr{F}_n)$-martingala.
(2) Descomposición de Doob para submartingalas: Sea Sea $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una submartingala. Pruebe que X se puede descomponer de manera única como $X = M + A$ donde M es una martingala y A es un proceso previsible con $A_0 = 0$. Sugerencia: Asuma que ya tiene la descomposición y calcule esperanza condicional de X_{n+1} dada X_n.
(3) Sea $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ donde las variables ξ son independientes y ξ_i tiene media cero y varianza finita σ_i^2. Pruebe que si $\sum_i \sigma_i^2 < \infty$ entonces S_n converge casi seguramente y en L_2 conforme $n \to \infty$. Construya un ejemplo de variables aleatorias ξ_i tales que la serie $\sum_i \xi_i$ sea casi seguramente absolutamente divergente y casi seguramente condicionalmente convergente (considere ejemplos simples!). Explique heurísticamente por qué cree que suceda esto.
(4) Sean X y Y dos martingalas (respecto de la misma filtración) y tales que $\mathbb{E}(X_i), \mathbb{E}(Y_i) < \infty$ para toda i. Pruebe la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}((X_i - X_{i-1})(Y_i - Y_{i-1})).$$

(5) Desigualdad de Azema-Hoeffding, tomado de [Wil91, E14.2, p.237]

(a) Muestre que si Y es una variable aleatoria con valores en $[-c, c]$ y media cero entonces, para $\theta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\big(e^{\theta Y}\big) \leq \cosh(\theta c) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 c^2\right).$$

(b) Pruebe que si M es una martingala nula en cero tal que para algunas constantes $(c_n, n \in \mathbb{N})$ se tiene que

$$|M_n - M_{n-1}| \leq c_n \quad \forall n$$

entonces, para $x > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} M_k \geq x\right) \leq \exp\left(\frac{x^2}{2\sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

Problema 7. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ donde $X_1, X_2, \ldots$ son iid. Sea

$$\phi(\lambda) = \mathbb{E}\big(e^{\lambda S_n}\big) \in (0, \infty].$$

(1) Pruebe que si existen $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ tales que $\phi(\lambda_i) < \infty$ entonces $\phi(\lambda) < \infty$ para toda $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Sugerencia: escriba $\lambda = a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2$ para algún $a \in [0,1]$ y aplique la desigualdad de Hölder. A partir de ahora se asume la premisa de este inciso.
(2) Pruebe que $\mathbb{E}\big(|S_n|^{\,k}\big) < \infty$ para toda $k \geq 0$.
(3) Sea $M_t^\lambda = e^{\lambda S_t}/\phi(\lambda)$. Argumente que si M^n es el proceso dado por

$$M_t^n = \left.\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\right|_{\lambda=0} M_t^\lambda,$$

entonces M^n es una martingala para toda n.
(4) Calcule las primeras 4 martingalas resultantes si $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. Utilícelas para calcular el valor de $\mathbb{E}\big(T^2\big)$ donde

$$T = \min\{n \geq 0 : S_n \in \{-a, b\}\}$$

y $a, b > 0$.

Categorías: Caminatas aleatorias, muestreo opcional, ejemplos de martingalas.

Problema 8. Sea M una $(\mathscr{F}_n)$-martingala. Pruebe que si T es un tiempo de paro finito entonces $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$ bajo cada una de las siguientes condiciones:

(1) M es acotada.
(2) T es integrable y la sucesión $(M_n - M_{n-1})$ es acotada.
(3) $(M_{n\wedge T})$ es uniformemente integrable.

Categorías: Muestreo opcional.

Problema 9. Sea M una $(\mathscr{F}_n)$-martingala con saltos acotados. Sean

$$C = \{\limsup M_n = \liminf M_n \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad D = \{\limsup M_n = -\infty \text{ y } \limsup M_n = \infty\}.$$

Pruebe que $\mathbb{P}(C \cup D) = 1$. Deduzca que las caminatas aleatorias centradas con saltos acotados oscilan. Sugerencia: Para cada $K > 0$ defina

$$T = \min\{n \geq 0 : |M_n| \geq K\}$$

y aplique el teorema de convergencia de martingalas a M^T.

Sea M una caminata aleatoria no trivial con saltos integrables en $-1, 0, 1, \ldots$ y media cero. Pruebe que $\mathbb{P}(M \text{ converge en } \mathbb{N}) = 0$ y concluya que $\liminf M_n = -\infty$ casi seguramente. (Este resultado permitirá dar una prueba adicional de que un Galton-Watson crítico se extingue). Sugerencia: proceda como en el párrafo anterior y pruebe la integrabilidad uniforme de $M_{T\wedge n}, n \in \mathbb{N}$.

Categorías: Teoremas de convergencia de martingalas

Problema 10. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias intercambiables:

$$(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_{\pi_1}, \ldots, X_{\pi_n})$$

para cada permutación σ de $\{1, \ldots, n\}$.

(1) Para $\mathscr{G}, \mathscr{H}$ subσ-álgebras de $\mathscr{F}$ definimos a $\mathscr{G} \vee \mathscr{H} = \sigma(\mathscr{G} \cup \mathscr{H})$. Sea

$$\mathscr{G}^n = \sigma(f(X_1, \ldots, X_n) : f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ es simétrica}) \vee \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots).$$

Pruebe que $\mathscr{G}^n, n \geq 1$ es una filtración al revés. Sea $\mathscr{G}$ su intersección.

(2) Para cada $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, defina a

$$\Xi_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \in A}.$$

Pruebe que

$$\mathbb{P}(X_1 \in A \,|\, \mathscr{G}^n) = \Xi_n(A).$$

¿Por qué puede definir a $\Xi(A) = \lim_{n\to\infty} \Xi_n(A)$?

(3) Al considerar a la martingala

$$\frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbf{1}_{X_i \in A} \mathbf{1}_{X_j \in A},$$

pruebe que $\mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A \,|\, \mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1 \in A \,|\, \mathscr{G})\, \mathbb{P}(X_2 \in A \,|\, \mathscr{G})$. Extienda la afirmación de independencia condicional anterior a $X_1, \ldots, X_n$.

Cagegorías: Teorema de convergencia de martingalas, variables intercambiables, teorema de de Finetti.

Ejercicio 2.

(1) Ejecute y explique la función del siguiente código en Octave. Comente qué teoremas del curso (y del curso de probabilidad) son importantes para interpretar la figura.

```
tic;
n=1000;
m=10000;
u=rand(n,m);
r=2;
v=3;
c=1;
x=ones(1,m)*(r/(r+v));
for i=1:n
x(i+1,:)=(r+v+(i-1)*c)/(r+v+i*c).*x(i,:)+(u(i,:)<x(i
    ,:))./(r+v+i*c);
endfor
y=sort(x(n+1,:));
plot(y,(1:m)./m,y,betacdf(y,r/c,v/c))
toc
```

(2) Ejecute y explique la función del siguiente código en Octave. Incluya una gráfica en la que la longitud de la variable k sea mayor a 1000. (Puede modificar el programa...) En la gráfica observara un esbozo de la trayectoria de un proceso de ramificación continuo (en una escala distinta...).

```
k=[10];
aux=k(length(k));
while (aux>0 && length(k)<1000)
k=[k;2*binornd(aux,.5)];
aux=k(length(k));
endwhile
plot(k)
```

Problema 11. Sean $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$ y $\mathscr{G}$ subσ-fields de $\mathscr{F}$. Decimos que $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ si para cualquier H_i que sea $\mathscr{F}_i$ medible y acotada se tiene que

$$\mathbb{E}(H_1 \cdots H_n \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G}) \cdots \mathbb{E}(H_n \mid \mathscr{G}) .$$

(1) ¿Qué quiere decir la independencia condicional cuando $\mathscr{G} = \{\Omega, \emptyset\}$?

(2) Pruebe que F_1 y $\mathscr{F}_2$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ (denotado $\mathscr{F}_1 \perp_{\mathscr{G}} \mathscr{F}_2$) si y sólo si para cualquier H que sea $\mathscr{F}_1$-medible y acotada se tiene que

$$\mathbb{E}(H \mid \mathscr{F}_2, \mathscr{G}) = \mathbb{E}(H \mid \mathscr{G}) .$$

(3) Pruebe que $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots,$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ si y sólo si para cada $n \geq 1$, $\mathscr{F}_{n+1}$ es condicionalmente independiente de $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n$ dada $\mathscr{G}$.

Categorías: Esperanza condicional, Independencia condicional.

Problema 12. Sea μ una distribución de progenie y defina $\tilde{\mu}_j = \mu_{j+1}$. Sea $S = (S_n)$ una caminata aleatoria con distribución de salto $\tilde{\mu}$. Sea k un entero no-negativo y defina recursivamente

$$Z_0 = k = C_0, \quad Z_{n+1} = k + S_{C_n} \quad \text{y} C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}.$$

(1) Pruebe que $Z_n \geq 0$ para toda n y que si $Z_n = 0$ entonces $Z_{n+1} = 0$.
(2) Pruebe que C_n es un tiempo de paro para la filtración canónica asociada a S.
(3) Pruebe que Z es un proceso de Galton-Watson con ley de progenie μ.
(4) Pruebe que si S alcanza -1 entonces existe n tal que $Z_n = 0$. Deduzca que si la media de μ es 1 entonces Z se extingue. (Sugerencia: utilice un ejercicio anterior sobre martingalas con saltos acotados hacia abajo.)

Categorías: Caminatas aleatorias, Procesos de Galton-Watson

Problema 13. El objetivo de este ejercicio es ver ejemplos de cadenas de Markov X y de funciones f tales que $f(X) = (f(X_n), n \in \mathbb{N})$ sean o no cadenas de Markov.

(1) Considere el hipercubo n-dimensional $E = \{0, 1\}^n$. A E lo pensaremos como la composición de la primera de dos urnas que tienen en total n bolas etiquetadas del 1 al n. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, interpretaremos $x_i = 1$ como que la bola i está en la urna 1. Considere el siguiente experimento aleatorio: inicialmente la composición de las urnas está dada por x y a cada instante de tiempo escogemos una bola al azar y la cambiamos de urna. Modele esta situación por medio de una cadena de Markov X en E. Sea $f : E \to \{0, \ldots, n\}$ dada por $f(x) = \sum_i x_i$. Pruebe que $f(X) = (f(X_n), n \in \mathbb{N})$ es una cadena de Markov cuya matriz de transición determinará.
(2) Sea $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{Z}$ y matriz de transición

$$P_{i,i+1} = p \quad P_{i,i-1} = 1 - p$$

donde $p \in [0, 1]$. Dé una condición necesaria y suficiente para que $(|S_n|, n \in \mathbb{N})$ sea una cadena de Markov.

Categorías: proyecciones de cadenas de Markov

Problema 14. Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos medidas de probabilidad en el espacio canónico $E^{\mathbb{N}}$ para sucesiones con valores en un conjunto a lo más numerable E. Decimos que $\mathbb{Q}$ es **localmente absolutamente continua** respecto de $\mathbb{P}$ si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n} \ll \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}$. Sea

$$D_n = \frac{d\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n}}{d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}}.$$

(1) Pruebe que D es una martingala bajo $\mathbb{P}$. Pruebe que si D es uniformemente integrable entonces $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.
(2) Pruebe que si T es un tiempo de paro finito entonces $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_T} \ll \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$.
(3) Sea $\mathbb{P}^p$ la distribución de una caminata aleatoria simple que comienza en 0 y va de k a $k+1$ con probabilidad p, donde $p \in (0,1)$. Pruebe que $\mathbb{P}^p$ es localmente absolutamente continua respecto de $\mathbb{P}^{1/2}$ y encuentre la martingala D_n asociada.
(4) Para $a, b > 0$, sea $T = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n \in \{-a, b\}\}$. Pruebe que T y X_T son independientes bajo $\mathbb{P}^{1/2}$. Al utilizar la continuidad absoluta local, pruebe que T y X_T también son independientes bajo $\mathbb{P}^p$. Utilice alguna martingala de ejercicios anteriores para calcular $\mathbb{E}\left(T^2\right)$.

Categorías: Cambio de medida, Caminata aleatoria simple.

References

[Asm03] Søren Asmussen, *Applied probability and queues*, second ed., Applications of Mathematics (New York), vol. 51, Springer-Verlag, New York, 2003, Stochastic Modelling and Applied Probability. MR 1978607 (2004f:60001)

[Wil91] David Williams, *Probability with martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. MR 1155402 (93d:60002)