Práctica 4

Integrabilidad Uniforme

A lo largo de esta guía fijaremos un espacio de medida finita $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Definición. Una familia $(f_i)_{i\in I}$ en $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ se dice *uniformemente integrable* si

$$\lim_{\xi\to+\infty} \left[\sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|>\xi\}} |f_i| \, d\mu \right] = 0.$$

1. *a*) Mostrar que toda familia uniformemente integrable está acotada en L^1.
   b) Mostrar que la recíproca no es cierta.
2. Mostrar que toda familia finita de funciones en L^1 es uniformemente integrable.
3. Mostrar que toda familia $(f_i)_{i\in I}$ uniformemente integrable está acotada en medida.
4. Probar que si $(f_i)_{i\in I}$ es una familia de funciones medibles tal que existe $f \in L^1$ que verifica $|f_i| \leq f$ para todo $i \in I$ entonces $(f_i)_{i\in I}$ es uniformemente integrable.
5. *a*) Sea $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función medible tal que $\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty$. Mostrar que para todo $C > 0$ la familia

   $$\left\{ f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu) : \int_X G(|f|) \, d\mu \leq C \right\}$$

   es uniformemente integrable.
   b) Deducir que toda familia acotada en L^p para $p > 1$ es uniformemente integrable.
   c) Probar la recíproca, i.e., si $(f_i)_{i\in I}$ es una familia uniformemente integrable entonces existe una función G como en el item (*a*) tal que

   $$\sup_{i\in I} \left[\int_X G(|f_i|) \, d\mu \right] < +\infty.$$

6. Sea $(f_i)_{i\in I}$ una familia acotada en L^1. Entonces son equivalentes
   a) $(f_i)_{i\in I}$ es uniformemente integrable.
   b) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

   $$\mu(A) < \delta \Longrightarrow \sup_{i\in I} \left[\int_A |f_i| \, d\mu \right] < \varepsilon.$$

7. Mostrar que si $(f_i)_{i\in I}$ y $(g_j)_{j\in J}$ son dos familias uniformemente integrables entonces $(f_i + g_j)_{(i,j)\in I\times J}$ es también uniformemente integrable.
8. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en L^1 que converge en medida a una función medible f. Mostrar que

   $$f_n \longrightarrow f \text{ en } L^1 \Longleftrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ uniformemente integrable.}$$