PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I
SEMESTRE 2013-II
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
TAREA 5

ANTONIO SORIANO FLORES

Problema 1. Sea N un proceso Poisson de parámetro λ y sea T_n el tiempo de su enésimo salto.

(1) Pruebe que condicionalmente a T_2, T_1 es uniforme en $[0, T_2]$.

Proof. Como estamos en un proceso Poisson λ entonces sabemos que:

$$T_1 = S_1 \sim Exp(\lambda)$$
$$T_2 = S_1 + S_2 \sim Gamma(2, \lambda)$$
$$T_2 - T_1 = S_2 \sim Exp(\lambda)$$

Además $(T_2 - T_1) \perp T_1$. Entonces:

$$f_{T_1, T_2 - T_1}(u, v) = \lambda e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{\{u>0, v>0\}} = \lambda^2 e^{-\lambda(u+v)} \mathbb{1}_{\{u>0, v>0\}}$$

Luego definiendo el cambio de variable $X = T_1, Y = T_2 - T_1$ lo que implica que $T_1 = X, T_2 = Y - X$ (con jacabiano igual a 1) tenemos que la conjunta de T_1 y T_2 es de la forma:

$$f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(t_2)} \mathbb{1}_{\{0 \leq t_1 \leq t_2\}}$$

Luego calculamos la densidad condicional $f_{T_1|T_2}(t_1|t_2)$

$$f_{T_1|T_2}(t_1|t_2) = \frac{f_{T_1,T_2}(t_1, t_2)}{f_{T_2}(t_2)} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda(t_2)} \mathbb{1}_{\{0 \leq t_1 \leq t_2\}}}{(\lambda t_2) e^{-\lambda t_2} \lambda \mathbb{1}_{\{0 \leq t_2\}}} = \frac{1}{t_2} \mathbb{1}_{\{0 \leq t_1 \leq t_2\}}$$

Obtenemos ahora la distribución de $T_2|T_1$, usando las propiedades de esperanza condicional.

$$F_{T1|T_2}(u) = \mathbb{P}(T_1 \leq u \,|T_2) = \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{T_1 \leq u\}} \,\big|\, T_2\big) = h(T_2)$$

donde h es una función definida por:

$$h(x) = \int_0^x \mathbb{1}_{\{t_1 \leq u\}} f_{T_1|T_2}(t_1|x) dt_1 = \int_0^u \frac{1}{x} dt_1 = \frac{u}{x}$$

Por lo tanto la distribución de $T_2|T_1$ es

$$F_{T1|T_2}(u) = \frac{u}{T_2}$$

De donde concluimos que $T1|T_2$ se distribuye uniforme $(0, T_2)$ $\square$

(2) Pruebe que si W_1 y W_2 son exponenciales de parámetro λ independientes entre si y de una variable uniforme U, entonces $U\left(W_1 + W_2\right)$ es una variable aleatoria exponencial de parámetro λ.

Proof. Como W_1 y W_2 son exponenciales de parámetro λ independientes entonces $S = W_1 + W_2$ tiene distribución Gamma(2,λ) luego supondremos que U tiene distribución uniforme(0,1) es decir que tiene por densidad a

$$f_U(u) = \mathbb{1}_{0 \leq u \leq 1}$$

Luego por independencia de U con W_1 y W_2 sabemos que la conjunta es el producto de la marginales y por tanto usando el teorema fundamental del calculo:

$$f_{U,S}(u,s) = (\lambda)^2 s e^{-\lambda s}\mathbb{1}_{0\leq u\leq 1}\mathbb{1}_{0\leq s} ds$$

Definamos a la variable $Y = U(W_1 + W_2) = US$ entonces el problema se reduce a encontrar la densidad la de Y.

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{\partial}{\partial y}\mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{\partial}{\partial y}\mathbb{P}(US \leq y) = \frac{\partial}{\partial y}\mathbb{P}(S \leq \frac{y}{U})$$

$$= \int_0^\infty f_{U,S}(\frac{y}{s}, s)\frac{1}{s} ds = \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda s}\mathbb{1}_{0\leq y\leq s}\mathbb{1}_{0\leq s} ds = \int_y^\infty \lambda^2 e^{-\lambda s} ds$$

Por lo tanto:

$$f_Y(y) = \int_y^\infty \lambda^2 e^{-\lambda s} ds = \lambda(1 - (1 - e^{-\lambda y})) = \lambda e^{-\lambda y}$$

Por lo tanto Y tiene distribución exponencial de parámetro λ. $\square$

(3) Conjeture cómo se generaliza lo anterior con T_n y T_1.

Proof. Se procederá como en el inciso 1, primero obtendremos la densidad conjunta de $T_1, \ldots T_n$ a partir del hecho de que $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots T_n - T_{n-1}$ son variables independientes e idénticamente distribuidas como Exponenciales de parámetro λ.

$$f_{T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}}(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda u_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n u_i}$$

De donde nuevamente definiendo el cambio de variable
$X_1 = T_1, X_2 = T_2 - T_1, \ldots, X_n = T_n - T_{n-1}$ (Jacobiano de la transformación igual a 1) obtenemos que:

$$\begin{aligned} f_{T_1,T_2,\ldots,T_n}(t_1,\ldots,t_n) &= f_{T_1,T_2-T_1,\ldots,T_n-T_{n-1}}(t_1, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}) \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n t_i - t_{i-1}} = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \end{aligned}$$

Donde en la anterior ecuación definimos $t_0 = 0$. Además recordemos que $T_n = \sum_i^n S_i$ y como S_i son independientes exponenciales de parámetro λ se sigue que T_n tiene densidad Gamma(n,λ). Por lo tanto

$$f_{T_n}(t_n) = \frac{(\lambda t_n)^{n-1} e{-}\lambda t_n \lambda}{\Gamma(n)} = \frac{\lambda^n t_n^{n-1} e^{-\lambda t_n}}{(n-1)!}$$

Luego entonces la densidad conjunta de $T_1, \ldots, T_{n-1}$ dado T_n esta dada por:

$$f_{T_1,\ldots,T_{n-1}|T_n}(t_1, \ldots, t_{n-1}|t_n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t_n}}{\frac{\lambda^n t_n^{n-1} e^{-\lambda t_n}}{(n-1)!}} = \frac{(n-1)!}{t_n^{n-1}}$$

Ahora, recordemos que la densidad de los estadísticos de orden de una muestra de tamaño $n-1$ proveniente de una población con densidad f esta dada por:

$$f_{Y_1\ldots,Y_{n-1}}(y_1, \ldots, y_{n-1}) = (n-1)! f_{Y_1}(y_1) \ldots f_{Y_{n-1}}(y_{n-1}) \mathbb{1}_{\{y_1 \leq y_2 \ldots \leq y_{n-1}\}}$$

Luego entonces si tenemos una muestra de tamaño $n-1$ de una distribución uniforme$(0, t_n)$ tendramos que:

$$f_{Y_1\ldots,Y_{n-1}}(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \frac{(n-1)!}{t_n^{n-1}}$$

Es decir tiene la misma densidad que la conjunta de $T_1, \ldots, T_{n-1}$ dado T_n. Por lo tanto concluimos que $T_1, \ldots, T_{n-1}$ dado T_n tiene la misma distribución que la distribución conjunta de los estadísticos de orden de un muestra de tamaño $n-1$ de una población uniforme $(0, t_n)$. Lo anterior nos indica entonces que T_i dado T_n con $0 < i < n$ tiene la misma distribución que el i-ésimo estadístico de orden es decir:

$$f_{T_i|T_n}(t_i|t_n) = i \binom{n-1}{i} \left(\frac{t_i}{t_n}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{t_i}{t_n}\right)^{n-1-i} \frac{1}{t_n} \mathbb{1}_{0 \leq t_i \leq t_n}$$

$\square$

(4) Escriba dos programas en Octave que simulen al proceso de Poisson de parámetro λ en el intervalo $[0, 1]$. En uno utilizará sólo variables exponenciales y en el otro puede utilizar una variable Poisson.

Problema 2. Sea Ξ una medida de Poisson aleatoria en $(0, \infty) \times (0, \infty)$ cuya medida de intensidad ν está dada por $\nu(ds, dx) = \mathbf{1}_{x>0} C/x^{1+\alpha}\, ds\, dx$.

(1) Determine los valores de α para los cuales $\int 1 \wedge x\, \nu(dx) < \infty$.

Proof. Supondremos que $\nu(ds, dx) = \mathbf{1}_{s<t} \mathbf{1}_{x>0} C/x^{1+\alpha}\, ds\, dx$ y por lo tanto:

$$\int 1 \wedge x\, \nu(ds, dx) = \int_0^t \int_0^1 xC/x^{1+\alpha}\, dx\, ds + \int_0^t \int_1^\infty C/x^{1+\alpha}\, dx\, ds$$

Para que la integral sea finita necesitamos que las dos integrales anteriores sean finitas, entonces para la primer integral suponiendo $\alpha \neq 1$ tenemos:

$$\int_0^1 xC/x^{1+\alpha} dx = \frac{C}{1-\alpha} - C \lim_{x \to 0} \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$$

El limite anterior existe cuando $\alpha < 1$. Por otro lado analizando la otra integral y suponiendo $\alpha \neq 0$:

$$\int_1^\infty C/x^{1+\alpha} dx = \frac{C}{\alpha} - C \lim_{x \to \infty} \frac{x^{-\alpha}}{\alpha}$$

El limite anterior existe cuando $\alpha > 0$. Finalmente juntando las últimas dos desigualdades concluimos que $\int 1 \wedge x\, \nu(dx) < \infty$ cuando $\alpha \in (0, 1)$ $\square$

Nos restringimos ahora a valores de α para los cuales la integral anterior sea finita. Sean $f_t(s,x) = \mathbf{1}_{s\leq t}x$ y $X_t = \Xi f_t$.

(1) Determine los valores de α para los cuales $X_t < \infty$ para toda $t \geq 0$ casi seguramente.

Proof. Utilizando la proposición 4.6 de las notas , sabemos que $X_t = \Xi f_t$ es la integral de f_t respecto a la medida de poisson aleatoria Ξ. El inciso (2) de esta proposición nos indica que la variable $X_t = \Xi f_t$ es casi seguramente finita si la integral $\int 1 \wedge f_t dv$ es finita, por lo anterior calcularemos la integral involucrada:

$$\int 1 \wedge f_t dv = \int\int_{\mathbb{R}^{2+}} 1 \wedge \mathbf{1}_{s\leq t}x\mathbf{1}_{x>0}C/x^{1+\alpha}\, ds\, dx$$

$$= \int_0^1\int_0^\infty \mathbf{1}_{s\leq t}xC/x^{1+\alpha}\, ds\, dx + \int_1^\infty\int_0^\infty \mathbf{1}_{s\leq t}C/x^{1+\alpha}\, ds\, dx$$

$$= \int_0^1\int_0^t xC/x^{1+\alpha}\, ds\, dx + \int_1^\infty\int_0^t C/x^{1+\alpha}\, ds\, dx$$

$$= Ct\left(\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^{1+\alpha}}\right)$$

Y nuevamente, para que estas integrales sean finitas necesitamos que $\alpha \in (0,1)$. Luego, si $\alpha \in (0,1)$

$$\int 1 \wedge f_t dv = Ct\left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{Ct}{\alpha(1-\alpha)}$$

□

Nos restringiremos a dichos valores de α.

(1) Calcule $\mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big)$ y pruebe que X_t tiene la misma distribución que $t^{1/\alpha}X_1$.

Proof. Nuevamente, utilizaremos la proposición 4.6 de la notas, el inciso (1) de esta proposición nos dice que :

$$\mathbb{E}\big(e^{-\Xi f}\big) = \exp\left(-\int\left(1-e^{-f}\right)d\nu\right)$$

En nuestro caso sabemos que $X_t = \Xi f_t$ por lo tanto:

$$\mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big) = \exp\left(-\int\left(1-e^{-\lambda f_t}\right)d\nu\right)$$

Por lo que nos centraremos en el calculo de la integral : $\int\left(1-e^{-\lambda f_t}\right)d\nu$.

$$\int\left(1-e^{-\lambda f_t}\right)d\nu = \int_0^\infty\int_0^\infty \left(1-e^{-\lambda f_t}\right)C/x^{1+\alpha}\, ds\, dx$$

Sustituyendo la función $f_t(s,x) = \mathbf{1}_{s\leq t}x$ la integral se convierte en:

$$= C\int_0^\infty\int_0^t \left(1-e^{-\lambda x}\right)\frac{1}{x^{1+\alpha}}\, ds\, dx = Ct\int_0^\infty \left(1-e^{-\lambda x}\right)\frac{1}{x^{1+\alpha}}\, dx$$

Para resolver esta integral recordemos que la distribución de una densidad exponencial de parámetro λ es:

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{\lambda x}$$

Entonces la integral buscada la podemos ver como sigue:

$$Ct \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \frac{1}{x^{1+\alpha}}\, dx = Ct \int_0^\infty \left(\int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy \right) \frac{1}{x^{1+\alpha}}\, dx$$

Haciendo cambio de orden de integración:

$$= Ct \int_0^\infty \int_y^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda y}}{x^{1+\alpha}}\, dx\, dy = Ct \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} \left(\int_y^\infty \frac{1}{x^{1+\alpha}}\, dx \right) dy$$

Luego como suponemos que $\alpha \in (0,1)$ entonces $\int_y^\infty \frac{1}{x^{1+\alpha}}\, dx = \frac{y^{-\alpha}}{\alpha}$

$$= Ct \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} \left(\frac{y^{-\alpha}}{\alpha} \right) dy = \frac{Ct}{\alpha} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} y^{-\alpha}\, dy$$

$$= \frac{Ct\lambda^\alpha}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda y} (\lambda y)^{-\alpha} \lambda\, dy$$

Recordando que la función Gamma;

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \int_0^\infty (\lambda y)^z e{-}\lambda y \lambda\, dy$$

Entonces:

$$\frac{Ct\lambda^\alpha}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\lambda y} (\lambda y)^{-\alpha} \lambda\, dy = \frac{Ct\lambda^\alpha}{\alpha} \Gamma(1-\alpha)$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big) = \exp\left(-\frac{C\lambda^\alpha \Gamma(1-\alpha) t}{\alpha} \right) \tag{1}$$

Lo anterior nos esta dando la expresión para la función generadora de momentos de X_t evaluada en $-\lambda$, entonces para verificar que X_t tiene la misma distribución que $t^{1/\alpha} X_1$ tenemos que ver que $\mathbb{E}\Big(e^{-\lambda t^{1/\alpha} X_1}\Big) = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big)$ para toda λ. Consideremos entonces la función $\phi(\lambda; t) := \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big) = \exp\left(-\frac{C\lambda^\alpha \Gamma(1-\alpha) t}{\alpha} \right)$. Como lo anterior fue calculado para $t > 0$ arbitrario entonces tomando $t = 1$ obtenemos que:

$$\phi(\lambda; 1) := \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_1}\big) = \exp\left(-\frac{C\lambda^\alpha \Gamma(1-\alpha)(1)}{\alpha} \right)$$

Luego, evaluando la función en $\lambda t^{1/\alpha}$ obtenemos:

$$\phi(\lambda t^{1/\alpha}; 1) := \mathbb{E}\Big(e^{-\lambda t^{1/\alpha} X_1}\Big) = \exp\left(-\frac{C(\lambda t^{1/\alpha})^\alpha \Gamma(1-\alpha)(1)}{\alpha} \right)$$

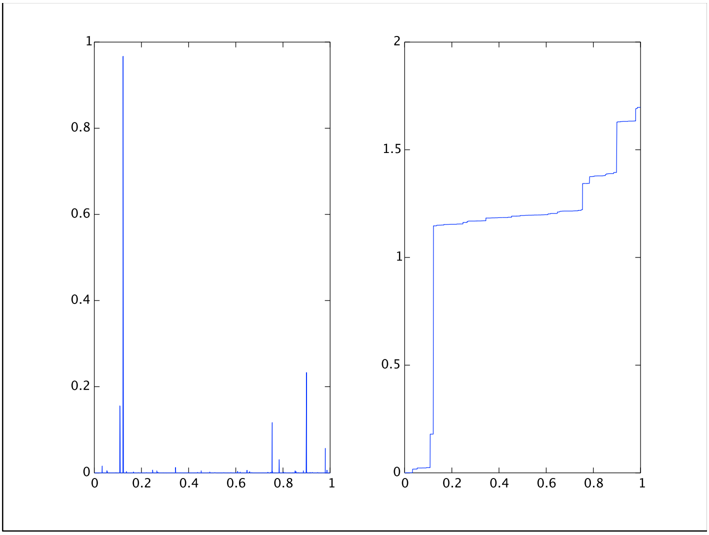

FIGURE 1. Figura 1 Simulacion del proceso X

Entonces:

$$\mathbb{E}\Big(e^{-\lambda t^{1/\alpha}X_1}\Big) = \exp\left(-\frac{C\lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)t}{\alpha}\right) = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big)$$

De donde se concluimos que X_t tiene la misma distribución que $t^{1/\alpha}X_1$ $\square$

(2) Diga por qué el siguiente código en Octave simula la trayectoria aproximada del proceso X en el intervalo $[0, 1]$.

```
C=1;
e=.000001;
alpha=1/2;
lambda=C/e^alpha;
T=1;
N=poissrnd(lambda*T, 1);
u=T*rand(N,1);
dx=e./rand(N,1).^(1/(alpha));
s=[0;cumsum(dx)];
t=[0;sort(u)];
subplot(1,2,1)
plot(t(2:length(t)),dx)
subplot(1,2,2)
plot(t,s)
```

. SuborEst.m

Problema 3. Pruebe que si X tiene incrementos independientes entonces el proceso X^t dado por $X^t_s = X_{t+s} - X_t$ es independiente de $\mathscr{F}^X_t = \sigma(X_s : s \leq t)$.

Proof. Sea $0 \leq s_1 \leq s_2, \ldots, \leq s_n$ y $0 \leq t_1 \leq t_2, \ldots, \leq t_m \leq t$ y definamos los eventos:

$$A = \{X_{t_1} \leq x_{t_1}, \ldots, X_{t_m} \leq x_{t_m}\} \quad B = \left\{X^t_{s_1} \leq x^t_{s_1}, \ldots, X^t_{s_n} \leq x^t_{s_n}\right\}$$

Notemos que $A \in \mathscr{F}_t^X$ y $B \in \sigma(X_s^t : s \geq 0)$, demostraremos que A y B son eventos independientes.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}\left(X_{t_1} \leq x_{t_1}, \ldots, X_{t_m} \leq x_{t_m}, X_{s_1}^t \leq x_{s_1}^t, \ldots, X_{s_n}^t \leq x_{s_n}^t\right)$$
$$= \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}\left(X_{t_1} \leq x_{t_1}, \ldots, X_{t_m} \leq x_{t_m}, X_t \leq k, X_{s_1}^t \leq x_{s_1}^t, \ldots, X_{s_n}^t \leq x_{s_n}^t\right)$$

Recordando que $X_s^t = X_{t+s} - X_t$ lo que implica que $X_{s_2}^t - X_{s_1}^t = X_{t+s_2} - X_{t+s_1}$ entonces al construir incrementos independientes obtenemos:

$$= \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}\left(X_{t_1} \leq x_{t_1}, \ldots, X_t - X_{t_m} \leq k - x_{t_m}, \ldots, X_{t+s_n} - X_{t+s_{n-1}} \leq x_{s_n}^t - x_{s_{n-1}}^t\right)$$

Por la independencia en incrementos lo anterior es igual a:

$$\mathbb{P}\left(X_{t_1} \leq x_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1} \leq x_{t_2} - x_{t_1}, \ldots, X_{t_m} - X_{t_{m-1}} \leq x_{t_m} - x_{t_{m-1}}\right) *$$
$$\mathbb{P}\left(X_{t_{s_1}} - X_t \leq x_{s_1}^t, X_{t+s_2} - X_{t+s_1} \leq x_{s_2}^t - x_{s_1}^t, \ldots, X_{t+s_n} - X_{t_{s_{n-1}}} \leq x_{s_n}^t - x_{s_{n-1}}^t\right) *$$
$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{P}\left(X_t - X_{t_m} \leq k - x_{t_m}\right)$$

Notamos que el último límite es igual a 1 y como tenemos la siguiente igualdad de eventos:

$$A = \left\{X_{t_1} - X_0 \leq x_{t_1} - 0, X_{t_2} - X_{t_1} \leq x_{t_2} - x_{t_1}, \ldots, X_{t_m} - X_{t_{m-1}} \leq x_{t_m} - x_{t_{m-1}}\right\}$$
$$B = \left\{X_{t_{s_1}} - X_t \leq x_{s_1}^t, X_{t+s_2} - X_{t+s_1} \leq x_{s_2}^t - x_{s_1}^t, \ldots, X_{t+s_n} - X_{t_{s_{n-1}}} \leq x_{s_n}^t - x_{s_{n-1}}^t\right\}$$

Lo que demuestra que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Notemos que suponemos que además de incrementos independientes se tiene que el proceso empieza en 0 ($X_0 = 0$). □

Calcular la esperanza y varianza del proceso de Poisson y de Poisson compuesto (en términos de la intensidad y la distribución de salto).

Proof. Primero, se probó que en el proceso Poisson $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, luego entonces $\mathbb{E}(N_t) = \text{Var}(N_t) = \lambda t$. Por otro lado supongamos que tenemos un proceso Poisson compuesto, es decir:

$$X_t = \sum_{i=0}^{N_t} \xi_i$$

Donde ξ_i son variables aleatorias independientes que suponemos tienen segundo momento finito. Entonces calculando su esperanza tenemos:

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N_t} \xi_i\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N_t} \xi_i \,\middle|\, N_t\right)\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N_t} \xi_i \,\middle|\, N_t = k\right) \mathbb{1}_{\{N_t = k\}}\right)$$
$$= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k} \xi_i\right) \mathbb{1}_{\{N_t = k\}}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{E}(\xi_1)\, \mathbb{1}_{\{N_t = k\}}\right) = \mathbb{E}(\xi_1)\, \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{1}_{\{N_t = k\}}\right)$$
$$= \mathbb{E}(\xi_1)\, \mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}(\xi_1)\, \lambda t$$

Por otro lado la varianza del proceso poisson compuesto la podemos calcular recordando que:

$$\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X_t|N_t)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(\, X_t \mid N_t)) \tag{2}$$

El segundo sumando de la expresión anterior lo podemos calcular usando lo que ya se hizo en en el calculo de la esperanza del proceso Poisson compuesto:

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(\, X_t \mid N_t)) = \mathrm{Var}(\mathbb{E}(\xi_1)\, N_t) = \mathbb{E}(\xi_1)^2\, \mathrm{Var}(N_t) = \mathbb{E}(\xi_1)^2\, \lambda t \tag{3}$$

Por otro lado:

$$\mathrm{Var}(X_t|N_t) = \mathbb{E}\big(\, X_t^2 \mid N_t\big) - \mathbb{E}(\, X_t \mid N_t)^2 = \mathbb{E}\big(\, X_t^2 \mid N_t\big) - {N_t}^2\mathbb{E}(\xi_i)^2 \tag{4}$$

Luego como:

$$\mathbb{E}\big(\, X_t^2 \mid N_t\big) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{N_t} \xi_i\right)^2 \middle| N_t \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{N_t} \xi_i\right)^2 \middle| N_t = k \right) \mathbb{1}_{\{N_t=k\}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{k} \xi_i\right)^2 \right) \mathbb{1}_{\{N_t=k\}} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(k\mathbb{E}\big(\xi_1^2\big) + k(k-1)\mathbb{E}(\xi_1)^2\Big)\, \mathbb{1}_{\{N_t=k\}}$$

De donde concluimos que:

$$\mathbb{E}\big(\, X_t^2 \mid N_t\big) = N_t\mathbb{E}\big(\xi_1^2\big) + N_t(N_t-1)\mathbb{E}(\xi_1)^2$$

Sustituyendo esto en la ecuación (4) obtenemos:

$$\mathrm{Var}(X_t|N_t) = N_t\mathbb{E}\big(\xi_1^2\big) + N_t(N_t-1)\mathbb{E}(\xi_1)^2 - {N_t}^2\mathbb{E}(\xi_i)^2 = N_t\,\Big(\mathbb{E}\big(\xi_1^2\big) - \mathbb{E}(\xi_1)^2\Big)$$

Luego sustituyendo en (2) y tomando el resultado de (3) obtenemos que la varianza del proceso Poisson compuesto es:

$$\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}\Big(N_t\,\Big(\mathbb{E}\big(\xi_1^2\big) - \mathbb{E}(\xi_1)^2\Big)\Big) + \mathbb{E}(\xi_1)^2\,\lambda t = \lambda t\mathbb{E}\big(\xi_1^2\big)$$

Resumiendo tenemos que para el proceso Poisson compuesto se tiene que:

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\xi_1)\,\lambda t$$

$$\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}\big(\xi_1^2\big)\,\lambda t$$

□

Probar que si X un proceso Poisson compuesto con salto ξ_i entonces:

$$\mathbb{E}\big(e^{iuX_t}\big) = e^{-\lambda t(1-\psi(u))} \quad \text{donde} \quad \psi(u) = \mathbb{E}\big(e^{iu\xi_1}\big)\,.$$

Proof.

$$\mathbb{E}\big(e^{iuX_t}\big) = \mathbb{E}\Big(e^{iu\sum_{i=0}^{N_t}\xi_i}\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(e^{iu\sum_{i=0}^{N_t}\xi_i}\,\Big|\, N_t\Big)\Big) \tag{5}$$

Calculando la esperanza condicional involucrada y haciendo uso del hecho de que las (ξ_i) son independientes e idénticamente distribuidas:

$$\mathbb{E}\left(e^{iu \sum_{i=0}^{N_t} \xi_i} \,\middle|\, N_t \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{iu \sum_{i=0}^{N_t} \xi_i} \,\middle|\, N_t = k \right) \mathbb{1}_{\{Nt=k\}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{iu \sum_{i=0}^{k} \xi_i} \right) \mathbb{1}_{\{Nt=k\}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k} e^{iu\xi_i} \right) \mathbb{1}_{\{Nt=k\}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{iu\xi_1} \right)^k \mathbb{1}_{\{Nt=k\}}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}\left(e^{iu \sum_{i=0}^{N_t} \xi_i} \,\middle|\, N_t \right) = \mathbb{E}\left(e^{iu\xi_1} \right)^{N_t} = \psi(u)^{N_t}$$

Sustituyendo esto último en (5) obtenemos que:

$$\mathbb{E}\left(e^{iuX_t} \right) = \mathbb{E}\left(\psi(u)^{N_t} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi(u)^k \, \mathbb{P}(N_t = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi(u)^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\psi(u)\, \lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} e^{\psi(u)\lambda t} = e^{-\lambda t(1-\psi(u))}$$

□

Sea N un proceso de Lévy tal que N_t tiene distribución Poisson de parámetro λt.

(1) Pruebe que casi seguramente las trayectorias de N son no-decrecientes.

Proof. Como N es Lévy entonces tiene incrementos independientes y estacionarios. Sea $0 < t < t + s$ con $s \geq 0$. Lo que queremos probar que que $N_t \leq N_{t+s}$. Pero como $N_t \sim Poisson(\lambda t)$ y por ser proceso de Lévy entonces:

$$N_{t+s} - N_t = N_s - N_0 = N_s \sim Poisson(\lambda s)$$

Luego como N_s es Poisson sabemos que $N_s \geq 0$ casi seguramente y por tanto $N_{t+s} - N_t \geq 0$ casi seguramente lo que nos implica que $N_t \leq N_{t+s}$ casi seguramente de donde se concluye que tiene trayectorias no-decrecientes. □

(2) Sea Ξ la única medida en $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ tal que $\Xi([0,t]) = N_t$. Pruebe que Ξ es una medida de Poisson aleatoria de intensidad $\lambda \cdot \text{Leb}$

Proof. Tenemos que probar dos cosas:

(a) Para todo $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ la variable $\Xi(A)$ tiene distribución Poisson de parametro $\lambda \cdot \text{Leb}(A)$

Para probar esto usaremos el lema de clases monónotonas definiendo lo siguiente:

$$\mathscr{C} := \left\{ A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+} : A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \text{ tal que } a_i < b_i < a_{i+1} \right\}$$

Notamos que $\mathscr{C}$ asi definida es una álgebra y como en su σ-álgebra están los intervalos abiertos pues:

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} = [a + \frac{1}{n}, b)$$

Luego entonces $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$. Por otro lado definamos a la colección $\mathscr{M}$ como:

$$\mathscr{M} := \left\{A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+} : \Xi(A) \sim Poisson(\lambda \cdot \mathrm{Leb}(A))\right\}$$

Probaremos entonces que $\mathscr{M}$ es clase monótona. Sea $A_1, \ldots, \in \mathscr{M}, A_i \subset A_{i+1}$ y definamos a $A := \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$. Queremos que probar que $A \in \mathscr{M}$, pero como $A_i \uparrow A$ entonces $\Xi(A_i) \uparrow \Xi(A)$ y como una sucesión convergente de enteros es eventualmente constante se tiene que:

$$\mathbb{P}(\Xi(A) = n) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(\Xi(A_i) = n)$$

Pero cada $\Xi(A_i) \sim Poisson(\lambda \cdot \mathrm{Leb}(A_i))$ pues $A_i \in \mathscr{M}$, luego entonces:

$$\mathbb{P}(\Xi(A) = n) = \lim_{i\to\infty} e^{-\lambda\cdot\mathrm{Leb}(A_i)} \frac{(\lambda \cdot \mathrm{Leb}(A_i))^n}{n!}$$

Pero como $A_i \uparrow A$ entonces $\cdot\mathrm{Leb}(A_i) \uparrow \mathrm{Leb}(A)$ de donde se concluye que:

$$\mathbb{P}(\Xi(A) = n) = e^{-\lambda\cdot\mathrm{Leb}(A)} \frac{(\lambda \cdot \mathrm{Leb}(A))^n}{n!}$$

Y por tanto $A \in \mathscr{M}$ por lo que $\mathscr{M}$ es clase monótona.
Por otro lado probaremos que $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}$. En efecto, sea $A \in \mathscr{C}$ entonces A tiene la forma:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] \quad a_i < b_i < a_{i+1}$$

Como N es un proceso de Lévy entonces N tiene incrementos independientes y estacionarios por lo tanto:

$$\Xi(A) = \sum_{i=1}^{n} \Xi(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \Xi((a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{n} \Xi[0, b_i] - \Xi[0, a_i] = \sum_{i=1}^{n} N_{b_i} - N_{a_i} = \sum_{i=1}^{n} N_{b_i - a_i}$$

Por lo tanto

$$\Xi(A) = \sum_{i=1}^{n} N_{b_i - a_i} \sim Poisson(\lambda \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)) = Poisson(\lambda \cdot \mathrm{Leb}(A))$$

De donde se concluye que $A \in \mathscr{M}$ y por tanto $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}$. Luego entonces por el lema de clases monótonas se concluye que para todo $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ la variable $\Xi(A)$ tiene distribución Poisson de parametro $\lambda \cdot \mathrm{Leb}(A)$

(b) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ son ajenos por pares entonces $\Xi(A_1), \ldots, \Xi(A_n)$ son independientes

$\square$

(3) Concluya que N es un proceso de Poisson de intensidad λ.

Problema 4. Sea P_t la probabilidad de transición en t unidades de tiempo para el proceso de Poisson de parámetro λ.

Al utilizar el teorema del biniomio, pruebe directamente que las probabilidades de transición del proceso de Poisson satisfacen las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov $P_{t+s} = P_t P_s$. Dé además un argumento probabilístico, basado en condicionar con lo que sucede al tiempo s, para probar dicha ecuación.

Sea

$$Q(i,j) = \begin{cases} -\lambda & j = i \\ \lambda & j = i+1 \\ 0 & j \neq i, i+1 \end{cases}.$$

Pruebe directamente que se satisfacen las ecuaciones de Kolmogorov

$$\frac{d}{dt} P_t(i,j) = QP_t(i,j) = P_t Q(i,j)\,,$$

donde QP_t es el producto de las matrices Q y P_t.

Proof. En el caso Poisson sabemos que:

$$P_t(i,j) = \mathbb{P}(N_t = j - i) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

Por lo tanto la entrada i, j de la matriz P_{t+s} es:

$$P_{t+s}(i,j) = e^{-\lambda(t+s)} \frac{(\lambda(t+s))^{j-i}}{(j-i)!} = e^{-\lambda(t+s)} \frac{\lambda^{j-i}(t+s)^{j-i}}{(j-i)!}$$

Usando el teorema del binomio obtenemos que:

$$\frac{(t+s)^{j-i}}{(j-i)!} = \frac{\sum_{k=0}^{j-i} \binom{j-i}{k} s^k t^{j-i-k}}{(j-i)!} = \sum_{k=0}^{j-i} \frac{s^k t^{j-i-k}}{(k)!(j-i-k)!}$$

De donde concluimos que la entrada i, j de la matriz P_{t+s} es:

$$P_{t+s}(i,j) = e^{-\lambda(t+s)} \lambda^{j-i} \sum_{k=0}^{j-i} \frac{s^k t^{j-i-k}}{(k)!(j-i-k)!} \tag{6}$$

Por otro lado, si calculamos la entrada i, j de la matriz que se obtiene de multiplicar $P_t P_s$ obtenemos:

$$\begin{aligned}(P_t P_s)(i,j) = \sum_{k=0}^{\infty} P_t(i,k) P_s(k,j) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-i}}{(k-i)!} \mathbb{1}_{\{k \geq i\}} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{j-k}}{(j-k)!} \mathbb{1}_{\{k \leq j\}} \\ &= e^{-\lambda(t+s)} \lambda^{j-i} \sum_{k=j}^{i} \frac{s^{j-k} t^{k-i}}{(k-i)(j-k)!}\end{aligned}$$

Luego en la suma anterior haciendo el cambio $u = j - k$ obtenemos que la entreada i, j de la matriz producto $P_t P_s$ es:

$$(P_t P_s)(i,j) = e^{-\lambda(t+s)} \lambda^{j-i} \sum_{u=0}^{j-i} \frac{s^u t^{j-u-i}}{(j-u-i)(u)!} \tag{7}$$

Por las ecuaciones (6) y (7) obtenemos que se da la igualdad de las matrices $P_{t+s} = P_t P_s$. Poro otro lado ahora daremos una justificacin probabística de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

$$P_{t+s}(i,j) = \mathbb{P}(N_{t+s} = j-i) = \sum_{u=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_{t+s} = j-i, N_s = u)$$

Como el proceso N es creciente entonces $N_{t+s} > N_s$ por lo tanto se debe de tener que $j - i \geq u$ entonces:

$$P_{t+s}(i,j) = \sum_{u=0}^{j-i} \mathbb{P}(N_{t+s} = j-i, N_s = u) = \sum_{u=0}^{j-i} \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = j-i-u, N_s = u)$$

Haciendo el cambio de variable $u = j - k \Rightarrow k = j - u$ en la suma anterior obtenemos:

$$P_{t+s}(i,j) = \sum_{k=j}^{i} \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = k-i, N_s = j-k)$$

Como el proceso Poisson tiene incrementos independientes tiene que:

$$\mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = k-i, N_s = j-k) = \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = k-i)\mathbb{P}(N_s = j-k)$$

Luego por incrementos estacionarios:

$$\mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = k-i)\mathbb{P}(N_t = j-k) = \mathbb{P}(N_t = k-i)\mathbb{P}(N_s = j-k)$$

Por lo tanto:

$$P_{t+s}(i,j) = \sum_{k=j}^{i} \mathbb{P}(N_t = k-i)\mathbb{P}(N_s = j-k) = \sum_{k=j}^{i} P_t(i,k)P_s(k,j) = (P_t P_s)(i,j)$$

Lo que muestra la igualdad de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.
Por otro lado: Sea

$$Q(i,j) = \begin{cases} -\lambda & j = i \\ \lambda & j = i+1 \\ 0 & j \neq i, i+1 \end{cases}.$$

Probaremos directamente que se satisfacen las ecuaciones de Kolmogorov, es decir que:

$$\frac{d}{dt} P_t(i,j) = QP_t(i,j) = P_t Q(i,j)$$

Primero calculamos la derivada:

$$\frac{d}{dt} P_t(i,j) = \frac{d}{dt} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} = -\lambda P_t(i,j) + \lambda P_t(i+1,j)$$

Por otros lado, como la matriz toma valores distintos de cero cuando $i = j$ y $j = i + 1$, entonces:

$$QP_t(i,j) = \sum_{k=0}^{\infty} Q(i,k)P_t(k,j) = Q(i,i)P_t(i,j) + Q(i,i+1)P_t(i+1,j)$$

Y por definicin de Q se tiene entonces que:

$$QP_t(i,j) = -\lambda P_t(i,j) + \lambda P_t(i+1,j) = \frac{d}{dt}P_t(i,j)$$

De la misma forma tenemos:

$$P_tQ(i,j) = \sum_{k=0}^{\infty} P_t(i,k)Q(k,j) = P_t(i,j)Q(j,j) + P_t(i,j-1)Q(j-1,j)$$

De donde sustituyendo el valor que toma Q en esas entradas:

$$P_tQ(i,j) = -\lambda P_t(i,j) + \lambda P_t(i,j-1) = -\lambda P_t(i,j) + \lambda P_t(i+1,j) = \frac{d}{dt}P_t(i,j)$$

Lo anterior es valido porque $P_t(i,j-1) = P_t(i,j-1)$, en efecto pues:

$$P_t(i,j-1) = \mathbb{P}(N_t = j-1-i) = \mathbb{P}(N_t = j-(i+1)) = P_t(i+1,j)$$

Por lo tanto se cumplen las ecuaciones de Kolmogorov □

Problema 5 (Tomado del examen general de probabilidad del Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM, Febrero 2011)**.** Una planta de producción toma su energía de dos generadores. La cantidad de generadores al tiempo t está representado por una cadena de Markov a tiempo continuo $\{X_t, t \geq 0\}$ con espacio de estados $E = \{0,1,2\}$ y matriz infinitésimal Q dada por

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Encuentre la matriz de transición de la cadena de Markov de los estados distintos que toma X, clasifique los estados, diga si existe una única distribución invariante y en caso afirmativo, encuéntrela. Calcule explícitamente las potencias de la matriz de transición. (Recuerde que de ser posible diagonalizar, esta es una buena estrategia.)

Proof. Primero recordemos que Q tiene las tasas de transición entre estados y que además $-c(x) = \sum_y Q(x,y)$, $Q(x,y) = c(x)P(x,y)$. Tambien vimos que $P(x,x) = 1$ si $c(x) = 0$ y $P(x,x) = 0$ si $c(x) \neq 0$. Entonces:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notamos que todos los estados están comunicados y por tanto la matriz es irreducible. Por otro lado el corolario 2 de las notas (página 72) nos indica que como estamos en una cadena irreducible con espacios de estados finitos, entonces todos los estados son positivos recurrentes y existe una distribución estacionaria. Pero además el Teorema 2.4 de las notas nos asegura que al tener estados positivos recurrentes entonces la distribución invariante es única. Buscamos entonces un vector de probabilidades $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ tal que:

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{6}{7}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Con la condición adicional a que $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Luego entonces del sistema de ecuaciones tenemos que;

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\pi_2}{7} & \pi_1 + \pi_2 & \frac{6\pi_3}{7}\end{pmatrix}$$

De donde concluimos dada la restricción $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ tenemos que la distribución invariante es:

$$\begin{pmatrix}\pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{14}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{3}{7}\end{pmatrix}^T$$

Ahora calcularemos explícitamente las potencias de la matriz de transición, para ello recurriremos a la diagonalización de la matriz P. Primero encontramos los eigenvectores de P obteniendo $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$ con eigenvectores correspondientes:

$$v_1 = (1,1,1)^t\,, v_2 = (-6,0,1)^t\,, v_3 = (1,-1,1)^t$$

Por lo tanto definiendo la matrices U y D como:

$$U := \begin{pmatrix}1 & -6 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} D := \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Obtenemos que la descomposición de P como:

$$P = UDU^{-1}$$

$$P = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1 & -6 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -7 & 6\end{pmatrix}$$

Luego entonces:

$$P^n = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1 & -6 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -7 & 6\end{pmatrix}$$

Por lo tanto tenemos dos casos:

$$P^{2n} = \begin{pmatrix}\frac{1}{7} & 0 & \frac{6}{7}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{6}{7}\end{pmatrix} \quad P^{2n-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{6}{7}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Observamos que entonces la P^n no converge. □

(2) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos generadores estén trabajando al tiempo t si sólo uno trabaja al tiempo cero?

Proof. Necesitamos calcular $P_t(1,2)$, para ello primero tenemos que encontrar P_t a partir de la matriz infinitesimal Q, por lo que nuevamente tendremos que diagonalizar Q. Para ello encontramos los eigenvalores y egenvectores asociados obteniendo $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = -10$ con eigenvectores correspondientes:

$$v_1 = (1,1,1)^t, v_2 = (18,3,-2)^t, v_3 = (-6,4,-1)^t$$

Definiendo nuevamente las matrices U y D como:

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Obtenemos que la descomposición de Q como:

$$Q = UDU^{-1}$$

$$Q = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 18 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego,recordando que:

$$P_t = e^{Qt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Qt)^n}{n!}$$

Entonces:

$$P_t = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-10t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 18 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego buscamos la entrada correspondiente para calcular $P_t(1,2)$, esto es;

$$P_t(1,2) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ -2e^{-5t} \\ -3e^{-10t} \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\left(18 - 6e^{-5t} - 12e^{-10t}\right)$$

□

(3) Si ρ_2 denota la primera vez que ambos generadores están trabajando al mismo tiempo, encuentre la distribución de ρ_2 cuando sólo un generador está trabajando al tiempo cero.

Proof. Para encontrar la distribución de ρ_2 debemos suponer que el estado en que hay 2 generadores es un estado absorbente, es decir suponer que una vez que la cadena llega al estado 2 permanece ahí por una infinidad de tiempo. Para hacer que el estado 2 sea absorbente tenemos que hacer que en la matriz infinitesimal la tasa de salir del estado sea cero, es decir definiremos Q_1 como:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

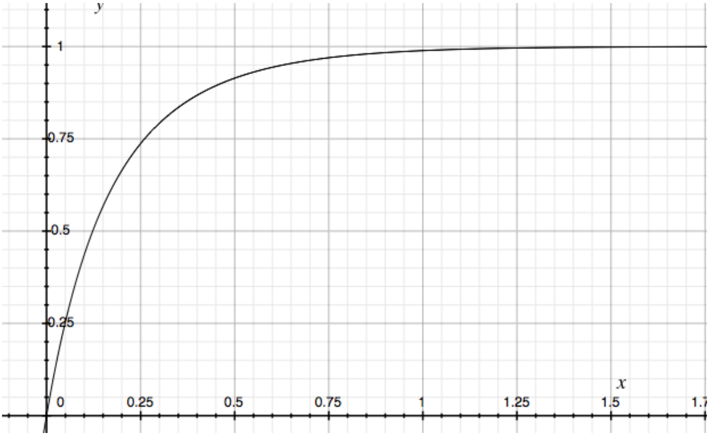

FIGURE 2. Figura 2 Distribución de ρ_2

Con esta matriz, procederemos a encontrar la matriz P_t , luego como nos están pidiendo la distribución de ρ_2 entonces la respuesta será $\mathbb{P}(\rho_2 \leq t) = P_t(1,2)$. Luego entonces para encontrar P_t procedemos a diagonalizar Q_1 con la misma metodología del inciso anterior, es decir encontramos lo eigenvectores y eigenvalores obteniendo la siguiente diagonalización de Q_1:

$$Q_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

De donde, recordando que $P_t = e^{Qt}$ se tiene que:

$$P_t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-9t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Entonces, multiplicando:

$$P_t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ e^{-4t} & 2e^{-4t} & -3e^{-4t} \\ -e^{-9t} & 3e^{-9t} & -2e^{-9t} \end{pmatrix}$$

Finalmente la distribución buscada es:

$$\mathbb{P}(\rho_2 \leq t) = P_t(1,2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3e^{-4t} \\ -2e^{-9t} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left(5 - 3e^{-4t} - 2e^{-9t}\right)$$

□

(4) Encuentre la proporción de tiempo asintótica en que los dos generadores están trabajando. Si cada generador produce 2.5 MW de energía por unidad de

tiempo, ¿Cuál es la cantidad promedio de energía producida a largo plazo por unidad de tiempo?

Proof. La proporción de tiempo asintótica buscada se obtiene sacando límite cuando t tiende a infinito de $P_t(1,2)$, es decir:

$$\lim_{t\to\infty} P_t(1,2) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{25}\left(18 - 6e^{5t} - 2e^{10t}\right) = \frac{18}{25}$$

Por otro lado la proporción de tiempo en donde hay un solo generador es:

$$\lim_{t\to\infty} P_t(1,1) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{25}\left(6 + 3e^{5t} + 16e^{10t}\right) = \frac{6}{25}$$

Por lo tanto, si cada generador produce 2.5 MW entonces en promedio la cantidad de energía producida a largo plazo por unidad de tiempo es:

$$5\frac{18}{25} + 2.5\frac{6}{25} = 4.2$$

□

Problema 6 (Procesos de ramificación a tiempo continuo)**.** Sea μ una distribución en $\mathbb{N}$. A μ_k lo interpretamos como la probabilidad de que un individuo tenga k hijos. Nos imaginamos la dinámica de la población como sigue: a tasa λ, los individuos de una población se reproducen. Entonces tienen k hijos con probabilidad μ_k. Se pueden introducir dos modelos: uno en que el individuo que se reproduce es retirado de la población (nos imaginamos que muere) y otro en que no es retirado de la población (por ejemplo cuando se interpreta a la población como especies y a sus descendientes como mutaciones). En el caso particular del segundo modelo en que $\mu_1 = 1$, se conoce como proceso de Yule.

(1) Especifique un modelo de cadenas de Markov a tiempo continuo para cada uno de los modelos anteriores. A estos procesos se les conoce como procesos de ramificación a tiempo continuo.

Proof. Primero tenemos que el espacio de estados es $\mathbb{N}\cup\{0\}$, en donde el cero es un estado absorbente pues una vez que la población se extingue ya no se puede reproducir.

- Caso 1: (El individuo es retirado de la población). La matriz de tasas de transición α la podemos determinar como sigue: Queremos que la cadena pase del estado x (individuos) al estado y (individuos), como solamente una persona es retirada de la población entonces estando en x podemos movernos hacia cualquier estado y siempre y cuando $y \geq x-1$, la tasa con la que dejamos el estado x y accedemos a y seria entonces:

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} \lambda x \mu_{y-x+1} & y \geq x-1, x \neq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}.$$

(Notemos que para que el modelo de markov que estamos construyendo coincida con lo que hemos venido trabajando se requiere que $\mu_1 = 0$) El termino $\lambda x \mu_{y-x+1}$ lo obtenemos por el siguiente argumento: Estando en x tenemos x individuos por lo tanto la tasa de salida del estado x es $\lambda * x$ (la tasa con la que se reproduce un individuo multiplicada por el número de individuos) y finalmente este numero lo multiplicamos por μ_{y-x+1} porque justamente queremos pasar al estado $y \geq x-1$ lo cual se obtiene cuando el individuo que se reprodujo tuvo exactamente $y-x+1$ hijos, lo cual se obtiene con probabilidad μ_{y-x+1}. Luego a partir de la matriz de tasas de transición podemos obtener la matriz P con las identidades:

$$c(x) = \sum_{y \in E} \alpha(x,y) \quad P(x,y) = \frac{\alpha(x,y)}{c(x)} \quad c(x) \neq 0$$

Y como $c(0) = 0$ entonces $P(0,0) = 1$, luego como $c(x) = \sum_{y \in E} \alpha(x,y) = \lambda x$, obtenemos que la matriz P toma la siguiente forma:

$$P(x,y) = \begin{cases} \mu_{y-x+1} & y \geq x-1, x \neq 0 \\ 1 & x = 0 = y \\ 0 & e.o.c \end{cases}.$$

- Caso 2: (El individuo no es retirado de la población). En este caso la población no pierde individuos entonces estando en x podemos movernos hacia cualquier estado y siempre y cuando $y \geq x$, la tasa con la que dejamos el estado x y accedemos a y seria entonces:

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} \lambda x \mu_{y-x} & y \geq x, x \neq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}.$$

(Notemos que para que el modelo de markov que estamos construyendo coincida con lo que hemos venido trabajando se requiere que $\mu_0 = 0$) Luego a partir de la matriz de tasas de transición podemos obtener la matriz P:

$$P(x,y) = \begin{cases} \mu_{y-x} & y \geq x, x \neq 0 \\ 1 & x = 0 = y \\ 0 & e.o.c \end{cases}.$$

Finalmente, en clase vimos que dada una matriz de tasas de transición podemos encontrar una cadena de markov a tiempo continuo X_t mediante el siguiente procedimiento, primero construimos $S_1, S_2, \ldots$ variables aleatorias independiente e idénticamente distribuidas como exponenciales de parámetro 1 , luego por el teorema de kolmogorov sabemos existe Z_n una cadena de markov con matriz de transición P y que comience en $X_0 = k$ (k suponemos son el número de individuos con los que comienza la población. Con lo anterior definimos $T_0 = 0$ y $T_{n+1} = T_n + \frac{S_n}{c(Z_n)}$ y finalmente se considera al proceso:

$$X_t = Z_n \quad \text{si } t \in [T_n, T_{n+1})$$

Dicho proceso se muestra es una cadena de Markov a tiempo continuo con matriz de transición α □

Nuestro primer objetivo será encontrar una relación entre procesos de ramificación a tiempo continuo y procesos de Poisson compuestos. Sea N un proceso de Poisson y S

una caminata aleatoria independiente de N tal que $\mathbb{P}(S_1 = j) = \mu_{j-1}$ ó μ_j dependiendo de si estamos en el primer caso o en el segundo. Sea $k \geq 0$ y definamos a $X_t = k + S_{N_t}$.

(1) Diga brevemente por qué X es una cadena de Markov a tiempo continuo e identifique su matriz infinitesimal para ambos modelos.

Proof. Primero notemos que al proceso $X_t = k + S_{N_t}$ lo podemos escribir como:

$$X_t = k + S_n = k + \sum_{i=0}^{n} \xi_i \quad T_{n-1} \leq t < T_n$$

Donde T_n son los tiempos de salto del proceso poisson. N_t. Luego entonces el proceso de salto asociado $Z_n = X_{T_n} = k + S_n$ es una cadena de Markov a tiempo discreto, en efecto pues:

$$\mathbb{P}(Z_n = z_n \,|Z_1 = z_1, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}) = \frac{\mathbb{P}(Z_1 = z_1, \ldots Z_n = z_n)}{\mathbb{P}(Z_1 = z_1, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1})}$$

Pero como;

$$\mathbb{P}(Z_1 = z_1, \ldots Z_n = z_n) = \mathbb{P}(Z_1 = z_1, Z_2 - Z_1 = z_2 - z_1, \ldots, Z_n - Z_{n-1} = z_n - z_{n-1})$$

$$= \mathbb{P}(k + \xi_1 = z_1, \xi_2 = z_2 - z_1, \ldots, \xi_n = z_n - z_{n-1})$$

Por independencia de ξ_i y dado que ξ toma el valor k con probabilidad μ_k entonces:

$$= \mathbb{P}(\xi_1 = z_1 - k)\mathbb{P}(\xi_2 = z_2 - z_1) \ldots \mathbb{P}(\xi_n = z_n - z_{n-1})$$

$$= \mu_{z_1 - k}\mu_{z_2 - z_1} \ldots \mu_{z_n - z_{n-1}}$$

De donde concluimos que:

$$\mathbb{P}(Z_n = z_n \,|Z_1 = z_1, \ldots, Z_{n-1} = z_{n-1}) = \mu_{z_n - z_{n-1}} = \mathbb{P}(Z_n = z_n \,|Z_{n-1} = z_{n-1})$$

Luego entonces, Z_n as definido es una cadena de Markov en tiempo discreto. Adicionalmente a esto, como los tiempo de salto $T_n - T_{n-1}$ vienen del proceso poisson N, entonces sabemos que son independientes y exponenciales de parámetro λ. De donde se concluye que X_t es en efecto una cadena de Markov a tiempo continuo.
Ahora encontramos las matrices infinitesimales asociadas.

- Caso 1: (El individuo es retirado de la población). En este caso tenemos que la distribución de las variables ξ_i cumplen con: $\mathbb{P}(\xi_i = j) = \mu_{j+1}$, es decir la variable ξ_i puede tomar valores en $\{-1, 0, 1 \ldots\}$. Primero obtengamos la matriz de tasas de transición la cual obtenemos razonando de manera similar, suponiendo que tenemos x individuos entonces la tasa con la que abandonamos el estado x para llegar al estado y (individuos) $y \geq x - 1$ es precisamente $\lambda x \mathbb{P}(\xi_1 = y - x) = \lambda x \mu_{y-x+1}$ por lo tanto la matriz es:

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \lambda x \mu_{y-x+1} & y \geq x - 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}.$$

De donde la matriz infinitesimal es (Recordemos que en este caso suponemos que $\mu_1 = 0$):

$$Q(x,y) = \begin{cases} \lambda x \mu_{y-x+1} & y \geq x-1; x \neq y \\ -x\lambda & x = y \\ 0 & e.o.c \end{cases}.$$

- Caso 2: (El individuo no es retirado de la población). De manera muy similar al caso 1 ahora tenemos que las variables ξ_i cumplen con: $\mathbb{P}(\xi_i = j) = \mu_j$ por lo tanto la variable ξ_i puede tomar valores en $\{0, 1, 2 \ldots\}$. La matriz de tasas de transición es:

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} \lambda x \mu_{y-x} & y \geq x \\ 0 & e.o.c \end{cases}.$$

De donde la matriz infinitesimal es (Recordemos que en este caso suponemos que $\mu_0 = 0$):

$$Q(x,y) = \begin{cases} \lambda x \mu_{y-x} & y > x; x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x\lambda & x = y \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Observación : en este caso tenemos que el proceso X_t nunca puede tomar el valor de cero, pues ξ_i solo puede tomar valores en $\{0, 1, 2 \ldots\}$ por lo tanto se agrega la condición de que $x \geq 0$ en caso de que $x = 0$ entonces $Q(x,y) = 0$

□

Sea ahora $\tau = \min\{t \geq 0 : X_t = 0\}$ y $Y_t = X_{t \wedge \tau}$.

(1) Argumente por qué Y es una cadena de Markov a tiempo continuo e identifique su matriz infinitesimal.

Proof. Como ya explicamos el segundo caso (cuando el individuo no es retirado) el proces X_t nunca toma el valor de 0 y por tanto $\tau = \infty$ de donde se concluye que $X_t = Y_t$ y como ya argumentamos que X_t es cadena de Markov a tiempo continuo entonces se sigue que Y_t es una cadena de Markov a tiempo continuo. Nos enfocaremos entonces en el primer caso es decir , cuando el individuo es retirado de la población. En este caso el proceso X_t que empieza en k si puede ir disminuyendo en una 1 siempre y cuando el individuo que se reprodujo tuvo 0 hijos con probabilidad μ_0. Tenemos entonces que el proceso Y_t se obtiene de hacer al estado 0 absorbente en la matriz de tasas de transisción del proceso X_t. Asi pues, Y_t es un proceso de markov a tiempo continuo que tiene por estado absorbente al 0 y por tanto tiene por matriz infinitesimal a:

$$Q_{Y_t}(x,y)=\begin{cases}\lambda x\mu_{y-x+1} & y\geq x-1; x>0; x\neq y\\ 0 & x=0\\ -x\lambda & x=y\\ 0 & e.o.c\end{cases}$$

(Recuerde que en este caso suponemos que $\mu_1=0$) ,Es decir :

$$Q_{Y_t}(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\ \lambda\mu_0 & -\lambda & \lambda\mu_2 & \lambda\mu_3 & \dots\\ 0 & 2\lambda\mu_0 & -2\lambda & 2\lambda\mu_2 & \dots\\ 0 & 0 & 3\lambda\mu_0 & -3\lambda & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

□

(2) Argumente por qué existe un único proceso Z que satisface

$$Z_t=Y_{\int_0^t Z_s\,ds}$$

y que dicho proceso es un proceso de ramificación a tiempo continuo. Sugerencia: Recuerde que las trayectorias de Y son constantes por pedazos.

Proof. Construiremos Z_t tal que cumpla con que $Z_t=Y_{\int_0^t Z_s\,ds}$. Para ello recordemos que Y_t es un proceso que por construcción empieza en K ($Y_0=K$) y que ademas es constante por pedazos. Definiendo:

$$T_i=\min\{t\geq 0|N_t=i\}$$

Obtenemos que Y_t es contante en el intervalo $[0,T_1)$ y por tanto:

$$\int_0^t Y_t ds=tk$$

Queremos que $Z_t=Y_{\int_0^t Z_s\,ds}$ como el proceso empieza en k entonces necesitamos que

$$Z_t=k=Y_{\int_0^t k\,ds}=Y_{kt}$$

De donde requerimos para que se de la igualdad que $tk<T_1$ es decir para $t<\frac{T_1}{k}$. Por lo tanto si definimos a $Z_t=k$ para $t<\frac{T_1}{k}$ se obtiene lo que buscamos. Continuando con el proceso, tenemos que el segundo salto de Y_t se obtiene en T_2 y como el proceso es constante por pedazos tenemos que $Y_t=k+\xi_1=k+S_1$ cuando $t\in[T_1,T_2)$ queremos ahora que

$$Z_t=k+S_1=Y_{\int_0^t Z_s\,ds}=Y_{\int_0^{\frac{T_1}{k}} k\,ds+\int_{\frac{T_1}{k}}^t k+S_1}$$

Para que se dé la igualdad se requiere que

$$T_1\leq\int_0^{\frac{T_1}{k}} k\,ds+\int_{\frac{T_1}{k}}^t k+S_1<T_2$$

De aquí obtenemos que:

$$\frac{T_1}{k} \leq t < \frac{T_1}{k} + \frac{T_2 - T_1}{k + S_1}$$

Por lo tanto definimos

$$Z_t = k + S_1 \text{ si } t \in \left[\frac{T_1}{k}, \frac{T_1}{k} + \frac{T_2 - T_1}{k + S_1}\right)$$

Continuando de esta forma, el n-ésimo salto del proceso Y_t se obtiene en T_n y de hecho el proceso vale $k + S_{n-1}$ en el intervalo $[T_{n-1}, T_n)$, para satisfacer la igualdad requerida necesitamos buscar el intervalo de t para que se de la siguiente desigualdad:

$$T_{n-1} \leq \int_0^{\frac{T_1}{k}} k\, ds + \int_{\frac{T_1}{k}}^{\frac{T_1}{k} + \frac{T_2 - T_1}{k + S_1}} k + S_1 + \ldots + \int_{\frac{T_1}{k} + \ldots + \frac{T_{n-1} - T_{n-2}}{k + S_{n-2}}}^{t} k + S_{n-1} < T_n$$

De aqui obtenemos que:

$$\frac{T_1}{k} + \frac{T_2 - T_1}{k + S_1} + \ldots + \frac{T_{n-1} - T_{n-2}}{k + S_{n-2}} \leq t < \frac{T_1}{k} + \frac{T_2 - T_1}{k + S_1} + \ldots + \frac{T_n - T_{n-1}}{k + S_{n-1}}$$

Por lo tanto para tener la igualdad $Z_t = Y_{\int_0^t Z_s\, ds}$. definiremos a Z_t como :

$$Z_t = k + S_{n-1} \text{ si } t \in \left[\frac{T_1}{k} + \ldots + \frac{T_{n-1} - T_{n-2}}{k + S_{n-2}}, \frac{T_1}{k} + \ldots + \frac{T_n - T_{n-1}}{k + S_{n-1}}\right)$$

En resumen, si definimos A_n como:

$$A_n := \frac{T_1}{k} + \frac{T_2 - T_1}{k + S_1} + \ldots + \frac{T_n - T_{n-1}}{k + S_{n-1}}$$

Se construye Z_t como:

$$Z_t = k + S_{n-1} \text{ si } t \in [A_{n-1}, A_n)$$

Finalmente para ver Z_t es un proceso de markov a tiempo continuo hay que ver los tiempos $A_n - A_{n-1}$ se distribuyen exponenciales. Tenemos entonces lo siguiente:

$$A_n - A_{n-1} = \frac{T_n - T_{n-1}}{k + S_{n-1}}$$

Pero recordando que los T_i son los tiempos en donde el proceso poisson N cambia de estado entonces, se tiene que $T_n - T_{n-1}$ sigue una distribución exponencial de parámetro λ por lo tanto $\frac{T_n - T_{n-1}}{k + S_n - 1}$ sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda(k + S_{n-1})$

$\square$

Ahora nos enfocaremos en el proceso de Yule

(1) Escriba las ecuaciones backward de Kolmogorov para las probabilidades de transición $P_t(x, y)$. Al argumentar por qué $P_t(x, x) = e^{-\lambda x}$, resuelva las ecuaciones backward por medio de la técnica de factor integrante (comenzando con $P_t(x, x + 1)$) y pruebe que

$$P_t(x, y) = \binom{y - 1}{y - x} e^{-\lambda x t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{y - x}.$$

Proof. Las ecuaciones backward de Kolmogorov es:

$$\frac{d}{dt}P_t(x,y) = (QP_t)(x,y) = \sum_{s\in E} Q(x,s)P_t(s,y)$$

Observación: para el caso 1, si suponemos que $\mu_1 = 1$ (proceso de Yule) tenemos un proceso constante en el tiempo pues siempre que sale un individuo entra uno nuevo con probabilidad 1, luego entonces supondremos que estamos en el (caso 2), donde el individuo no es retirado de la población, en este caso se tiene que la matriz Q toma la forma:

$$Q(x,y) = \begin{cases} \lambda x & y = x+1 \\ -x\lambda & x = y \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Entonces la ecuación backward de Kolmogorov se transforma a:

$$\frac{d}{dt}P_t(x,y) = \sum_{s\in E} Q(x,z)P_t(z,y) = \lambda x P_t(x+1,y) - \lambda x P_t(x,y)$$

Resolveremos la ecuación suponiendo $x = y$ y dado que el proceso no retrocede (siempre agrega un individuo) entonces $P_t(x+1,x) = 0$, por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}P_t(x,x) = -\lambda x P_t(x,x)$$

Resolviendo la ecuación diferencial obtemos:

$$P_t(x,x) = e^{-\lambda x t} = \binom{x-1}{x-x} e^{-\lambda x t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{x-x}$$

Ahora atacaremos el problema en que $y > x$ utilizando inducción, supongamos y=x+k, comenzamos con el caso k=1. Entonces:

$$\frac{d}{dt}P_t(x,x+1) = \lambda x P_t(x+1,x+1) - \lambda x P_t(x,x+1)$$

Pero ya probamos que $P_t(x+1,x+1) = e^{-\lambda(x+1)t}$ entonces la ecuación diferencial es:

$$\frac{d}{dt}P_t(x,x+1) = \lambda x e^{-\lambda(x+1)t} - \lambda x P_t(x,x+1)$$

Mutiplicando por el factor integrante $e^{\lambda x t}$ obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda x t}P_t(x,x+1)\right) = \lambda x e^{-\lambda t}$$

Resolviendo la ecuación con la condición inicial de $P_0(x,x+1) = 0$

$$e^{\lambda x t}P_t(x,x+1) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda s} ds = x(1 - e^{\lambda t})$$

De donde encontramos que:

$$P_t(x,x+1) = x e^{-\lambda x t}(1 - e^{\lambda t}) = \binom{x}{1} e^{-\lambda x t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{x+1-x}$$

Por lo tanto la igualdad es válida para $k = 1$, ahora supongamos valida para $y = x + k$ y la demostraremos para $y = x + k + 1$

$$\frac{d}{dt}P_t(x, x + k + 1) = \lambda x P_t(x + 1, x + k + 1) - \lambda x P_t(x, x + k + 1)$$

Por la hipótesis de inducción:

$$P_t(x + 1, x + k + 1) = P_t((x + 1), (x + 1) + k) = \binom{x+k}{k} e^{-\lambda(x+1)t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^k .$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}P_t(x, x + k + 1) = \lambda x \binom{x+k}{k} e^{-\lambda(x+1)t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^k - \lambda x P_t(x, x + k + 1)$$

Nuevamente haciendo uso de la técnica del factor integrante (multiplicamos por $e^{\lambda xt}$) obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda xt}P_t(x, x + k + 1)\right) = \lambda x \binom{x+k}{k} e^{-\lambda t}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^k$$

Resolviendo la ecuacin integrando

$$\left(e^{\lambda xt}P_t(x, x + k + 1)\right) = \int_0^t \lambda x \binom{x+k}{k} e^{-\lambda s}\left(1 - e^{-\lambda s}\right)^k ds$$

Obtenemos:

$$P_t(x, x + k + 1) = \frac{x}{k+1}\binom{x+k}{k} e^{-\lambda xt}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{k+1}$$

Finalmente como:

$$\frac{x}{k+1}\binom{x+k}{k} = \frac{x(x+k)!}{(k+1)x!k!} = \frac{(x+k)!}{(x-1)!(k+1)!} = \binom{x+k}{k+1}$$

Obtenemos que la formúpa es valida para k+1, pues:

$$P_t(x, x + k + 1) = \binom{x+k}{k+1} e^{-\lambda xt}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{k+1}$$

Luego entonces es valida la solución a la ecuación kolmogorov para todo $y \geq x$. Es decir:

$$P_t(x, y) = \binom{y-1}{y-x} e^{-\lambda xt}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{y-x}$$

Observación: Notamos que $P_t(x, y)$ tiene distribución Binomial Negativa de parámetros $p = e^{-\lambda t}, r = x$. Entonces si suponemos que

$$Z \sim BinNeg(z; p = e^{-\lambda t}, r = x)$$

Entonces:

$$P_t(x, y) = \mathbb{P}(Z = y - x)$$

□

(2) Al utilizar la fórmula para la esperanza de una variable binomial negativa, pruebe que

$$\mathbb{E}_x(Z_t) = xe^{\lambda t}.$$

Proof.

$$\mathbb{E}_x(Z_t) = \sum_{z=0}^{\infty} z\mathbb{P}_x(Z_t = z) = \sum_{z=0}^{\infty} zP_t(x,z) = \mathbb{E}\big(Z \;\big|\; Z \sim BinNeg(z; p = e^{-\lambda t}, r = x)\big)$$

Como la esperanza de una distribución Binomial Negativa de parámetros p, r es $\frac{r}{p}$ entonces:

$$\mathbb{E}_x(Z_t) = \frac{r}{p} = \frac{x}{e^{-\lambda t}} = xe^{\lambda t}$$

□

(3) Pruebe que $e^{-\lambda t}Z_t$ es una martingala no-negativa y que por lo tanto converge casi seguramente a una variable aleatoria W.

Proof. Como suponemos la filtración usual, es decir $\mathscr{F}_s = \sigma(Z_t : t \leq s)$ se sigue que $e^{-\lambda t}Z_t$ es auto-adaptada y como Z_t es positiva y por el inciso anterior se concluye que el proceso $e^{-\lambda t}Z_t \in L_1$, por lo tanto solo falta probar la propiedad de martingala, sea entonces $s \leq t$:

$$\mathbb{E}\big(e^{-\lambda t}Z_t \;\big|\; \mathscr{F}_s\big) = e^{-\lambda t}\mathbb{E}(\,Z_t \mid \mathscr{F}_s) = e^{-\lambda t}\mathbb{E}_{Z_s}\,(Z_{t-s}|\mathscr{F}_s)$$

Esta última igualdad es por la propiedad de markov y además como sabemos que Z_{t-s} es independiente de $\mathscr{F}_s$ entonces:

$$= e^{-\lambda t}\mathbb{E}_{Z_s}\,(Z_{t-s}|\mathscr{F}_s) = e^{-\lambda t}\mathbb{E}_{Z_s}\,(Z_{t-s}) = e^{-\lambda t}Z_s e^{\lambda(t-s)} = e^{-\lambda s}Z_s$$

Por lo tanto cumple con la propiedad de martingala. Por lo tanto $e^{-\lambda t}Z_t$ al ser positiva converge casi seguramente a una variable que llamaremos W.

$$e^{-\lambda t}Z_t \to W$$

□

(4) Al calcular la transformada de Laplace de $e^{-\lambda t}Z_t$, pruebe que W tiene distribución exponencial. Por lo tanto, argumente que casi seguramente Z crece exponencialmente.

Proof. Sabemos que la transformada de Laplaza de una distrsibución Binomial Negativa es:

$$\phi(a) = \mathbb{E}\big(e^{aZ_t}\big) = \left(\frac{pe^a}{1-(1-p)e^a}\right)^r$$

Pero en nuestro caso $r = x$ (estado inicial por lo que suponemos $x = k = r$ donde k es la población inicial), $p = e^{-\lambda t}$ entonces:

$$\phi(a) = \mathbb{E}\big(e^{aZ_t}\big) = \left(\frac{e^{-\lambda t + a}}{1-(1-e^{-\lambda t})e^a}\right)^k = \left(\frac{e^{-\lambda t}}{e^{-a}-(1-e^{-\lambda t})}\right)^k$$

Evaluando en $a = se^{-\lambda t}$ obtemos la transformada de laplace para $e^{-\lambda t}Z_t$, entonces

$$f(s) = \phi(se^{-\lambda t}) = \mathbb{E}\Big(e^{se^{-\lambda t}Z_t}\Big) = \left(\frac{e^{-\lambda t}}{e^{-se^{-\lambda t}}-(1-e^{-\lambda t})}\right)^k$$

Ahora queremos ver a que converge cuando t tiende a infinito. Haciendo el cambio de variable $u = e^{-\lambda t}$ entonces tenemos:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^{-\lambda t}}{e^{-se^{-\lambda t}}-(1-e^{-\lambda t})}\right)^k = \lim_{u\to 0}\left(\frac{u}{e^{-su}-(1-u)}\right)^k = \left(\lim_{u\to 0}\frac{u}{e^{-su}-(1-u)}\right)^k$$

Como tenemos indeterminación de $\frac{0}{0}$ aplicamos L'Hopital obtenemos:

$$\left(\lim_{u\to 0}\frac{1}{e^{-su}-s+1)}\right)^k = \left(\frac{1}{1-s}\right)^k$$

La última expresión corresponde a la función generadora de momentos de una distribucón Gamma de parámetros $(k, \lambda = 1)$, es decir, concluimos que W tiene una distribución $Gamma(k, 1)$.

Observación: Si el proceso Z_t hubiera comenzado con un sólo individuo entonces W sigue una distribución Exponencial de parámetro 1. $\square$