PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I
SEMESTRE 2013-II
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
TAREA 2

ANTONIO SORIANO FLORES

Problema 1. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ una caminata aleatoria con saltos $X_i \in \{-1, 0, 1, \ldots\}$. Sea C_p una variable aleatoria geométrica de parámetro p independiente de S y definimos

$$M_p = -\min_{n \leq C_p} S_n.$$

El objetivo del ejercicio es determinar la distribución de M_p.

(A las caminatas aleatorias como S se les ha denominado Skip-free random walks Para aplicaciones de este tipo de procesos, ver [Asm03]. También aparecen en el estudio de Procesos Galton-Watson. Este ejercicio es el resultado básico del estudio de sus extremos, denominado teoría de fluctuaciones.)

(1) Sea

$$g(\lambda) = E(e^{-\lambda X_1}).$$

Pruebe que $g(\lambda) \in (0, \infty)$ y que

$$M_n = e^{-\lambda S_n} g(\lambda)^{-n}, n \geq 0$$

es una martingala.

Proof. Como:

$$e^{-\lambda X_1} > 0 \Rightarrow \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_1}\big) > 0 \Rightarrow g(\lambda) > 0$$

Ademas

$$-1 \leq X_1 \Rightarrow \lambda \geq -\lambda X_1 \Rightarrow e^{\lambda} \geq e^{-\lambda X_1} \Rightarrow \mathbb{E}\big(e^{\lambda}\big) \geq \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_1}\big) \Rightarrow g(\lambda) \leq e^{\lambda}$$

Concluimos entonces que:

$$0 \leq g(\lambda) \leq e^{\lambda} \Rightarrow g(\lambda) \in (0, \infty)$$

Ahora probaremos que M_n así definida es martingala

- . M_n es $\mathscr{F}_n$-medible (Suponemos que $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$) pues S_n es función medible de $X_1, X_2, ..., X_n$

$$S_n = f(X_1, X_2, ..., X_n) = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

La frase no está terminada. Para que tenga sentido, es mejor definir a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$.

- $M_n \in L_1$ pues sabemos que $g(\lambda) = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_1}\big) \leq e^{\lambda} \leq \infty$ entonces:
$$M_n = e^{-\lambda S_n} g(\lambda)^{-n} = g(\lambda)^{-n} \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda X_i}$$
Entonces M_n es producto finito de variables en L_1 y como las variables son independientes se sigue que $M_n \in L_1$.
- Demostraremos que $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) = M_n$.
$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}\Big(e^{-\lambda S_{n+1}} g(\lambda)^{-(n+1)} | \mathscr{F}_n\Big)$$
$$= g(\lambda)^{-(n+1)} \mathbb{E}\big(e^{-\lambda S_n} e^{-\lambda X_{n+1}} | \mathscr{F}_n\big) = g(\lambda)^{-(n+1)} e^{-\lambda S_n} \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_{n+1}}\big)$$
$$= g(\lambda)^{-(n+1)} e^{-\lambda S_n} \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_1}\big) = g(\lambda)^{-(n+1)} e^{-\lambda S_n} g(\lambda) = M_n$$
Observación. Aquí utilizamos propiedades de la esperanza condicional y que S_n es $\mathscr{F}_n$-medible así como la independencia que hay entre las variables X_i. Dado que estamos utilizando esperanzas condicionales, las igualdades anteriores deben de tomarse como casi-seguramente.

Por los tres puntos anteriores se concluye que M_n es martingala. □

(2) Pruebe que g es log-convexa al aplicar la desigualdad de Hölder. Pruebe que si $P(X_1 = -1) > 0$ (hipótesis que se utilizará desde ahora) entonces $g(\lambda) \to \infty$ conforme $\lambda \to \infty$. Utilice esta información para esbozar la gráfica de g. Defina $f(s) = \inf\{\lambda > 0 : g(\lambda)^{-1} < s\}$. Note que $1/g \circ f = Id$ en $(0,1)$. Pruebe que si $g(\lambda) > 1$, la martingala M es acotada hasta el tiempo de arribo de S a $-k$ dado por
$$T_k = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = -k\}$$
(donde se utiliza la convención $\inf \emptyset = \infty$). Aplique el teorema de muestreo opcional de Doob para mostrar que
$$E(s^{T_k}) = e^{-kf(s)}.$$
Justifique MUY bien por qué la fórmula es v?lida aun cuando T_k puede tomar el valor ∞ y deduzca que de hecho $\mathbb{P}(T_k = \infty) = 0$.

Proof. Necesitamos probar que $log(g(\lambda))$ es convexa. Puedes utilizar el comando log: `\log` Hay que probar entonces que para cualesquiera a y b en el dominio de g se tiene que para toda $t \in (0,1)$:
$$log(g(a(1-t)+bt)) \leq log(g(a))(1-t) + log(g(b))t$$
Rercordando la definicin de g tenemos que:
$$log(g(a(1-t)+bt)) = log\left(\mathbb{E}\Big(e^{-(a(1-t)+bt)X_1}\Big)\right) = log\left(\mathbb{E}\Big(e^{-a(1-t)X_1} e^{-btX_1}\Big)\right)$$
Sea $p = \frac{1}{1-t}$ y $q = \frac{1}{t}$. Entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces bajo estas definición podemos asegurar que:
$$e^{-a(1-t)X_1} \in L_p \text{ y } e^{-btX_1} \in L_q$$

Por lo tanto usando la desigualdad de HlderArreglar, recuerda que es mejor utilizar ö pues entonces no dependes del sistema operativo y del encoding.:

$$\mathbb{E}\Big(e^{-a(1-t)X_1}e^{-btX_1}\Big) \leq \mathbb{E}\Big(e^{-a(1-t)X_1 p}\Big)^{\frac{1}{p}}\,\mathbb{E}\big(e^{-btX_1 q}\big)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \mathbb{E}\big(e^{-aX_1}\big)^{1-t}\,\mathbb{E}\big(e^{-bX_1}\big)^{t} = g(a)^{1-t}g(b)^{t}$$

Tomando logaritmo (función creciente) obtenemos:

$$log(\mathbb{E}\Big(e^{-a(1-t)X_1}e^{-btX_1}\Big)) \leq log(g(a)^{1-t}g(b)^t) = (1-t)log(g(a)) + tlog(g(b))$$

Por lo tanto

$$log(g(a(1-t)+bt)) \leq log(g(a))(1-t) + log(g(b))t$$

De donde se sigue que g es log-convexa.
Observación:

- g también es convexa pues $g = e^{(log(g))}$ donde sabemos que la función exponencial es convexa y creciente. (Aquí hay que recordar que la composición de una función convexa con otra convexa y creciente genera una función convexa).
- g es continua. Una función convexa en un abierto es continua.Pues sea $\{X_n\}$ una sucesión de reales en $(0,\infty)$ que converge a X_0 entonces $g(X_n)$ converge a $g(X_0)$. Lo anterior es porque podemos intercambiar el limite con esperanza ya que la sucesión $\{g(X_n)\}$ es dominada. Esto ultimo porque: $g(X_n) \leq e^{X_n}$ (recordar que en el inciso anterior probamos que $g(\lambda) \leq e^{\lambda}$) y como X_n es convergente entonces es acotada, luego entonces existe X_* tal que $e^{X_n} \leq e^{X_*}$ para toda n, de donde se sigue que $\{g(X_n)\}$ es dominada y por tanto se puede utilizar T.C.D de donde se concluye que en efecto $g(X_n)$ converge a $g(X_0)$. Lo que a su vez muestra la continudad de g.

Ahora supongamos que $\mathbb{P}(X=-1) > 0$. Utilizando el teorema de cambio de variable para calcular la esperanza:

$$g(\lambda) = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_1}\big) = \sum_{i=-1}^{\infty} e^{-\lambda i}\mathbb{P}(X=i) \leq \geq e^{\lambda}\mathbb{P}(X=-1)$$

Por lo tanto hemos probado que:

$$e^{\lambda}\mathbb{P}(X=-1) \leq g(\lambda)$$

De donde se observa que si λ tiene a infinito, entonces $g(\lambda)$ también crece a infinito.

Es decir una cota inferior para la función $g(\lambda)$ es $e^{\lambda}\mathbb{P}(X=-1)$
Por otro lado, se define $f(s) = inf\left\{\lambda > 0 : g(\lambda)^{-1} < s\right\}$. Sea $s \in (0,1)$ y supongamos que $a = f(s)$ entonces por definicin de infimo a es una cota inferior luego entonces para toda n

$$\frac{1}{s} < g\left(a + \frac{1}{n}\right)$$

Por lo que tomando limite y usando la continuidad de g:

$$\frac{1}{s} \leq g(a)$$

Demostraremos que $\frac{1}{s} = g(a)$ por contradicción. Supongamos que $\frac{1}{s} > g(a)$, entonces por la continuidad de g sabemos que existe una vecindad al rededor de a tal que para toda x en esa vecindad $g(x) > \frac{1}{s}$. Es decir, existe ε tal que para toda $x \in \{|x-a| < \varepsilon\}$ se tiene que $g(x) > \frac{1}{s}$. tomemos $x_* = a - \varepsilon/2$. Entonces tendriámos que (como $x_* \in \left\{\lambda > 0 : g(\lambda)^{-1} < s\right\}$)

$$a \leq x_* = a - \varepsilon/2 < a$$

Lo que nos lleva a una contradicción.

Por lo tanto $\frac{1}{s} = g(a)$, pero como $a = f(s)$ entonces $\frac{1}{s} = g(f(s))$ de donde se sigue que:

$$\frac{1}{g(f(s))} = s \Longrightarrow \frac{1}{g} o f = I$$

Ahora supongamos que $g(\lambda) > 1$. Por definición de T_k sabemos que si $n \leq T_k$ entonces (como S_n sólo disminuye en una unidad a la vez) $S_n \geq -k$ de donde se sigue lo siguiente:

$$S_n \geq -k \Rightarrow -\lambda S_n \leq \lambda k \Rightarrow e^{-\lambda S_n} \leq e^{\lambda k} \ \forall n \leq T_k$$

Entonces:

$$M_n = e^{-\lambda S_n} g(\lambda)^{-1} \leq e^{\lambda k} g(\lambda)^{-1} \leq e^{\lambda k} \ \forall n \leq T_k$$

Lo que muestra que en efecto, la martingala M_n es acotada hasta el tiempo de arribo de S a $-k$. Notemos además que si $T_k = \infty$ entonces M_n estaría acotada absolutamente por $e^{\lambda k}$ (pues $M_n \geq 0$ por definición).

Ahora mostraremos la formula:

$$E(s^{T_k}) = e^{-kf(s)}$$

Para ello recurrimos al tiempo de paro acotado $T_k \wedge n$. Entonces por el ejercicio anterior $|M_{T_k \wedge n}| \leq e^{\lambda k}$ para toda n, es decir la sucesión es acotada (dominada por una constante). Como $M_{T_k \wedge n} \to M_{T_k}$ c.s. entonces usando T.C.D.

$$\mathbb{E}(M_{T_k \wedge n}) \to \mathbb{E}(M_{T_k}) .$$

Pero usando el muestreo opcional de Doob, $\mathbb{E}(M_{T_k \wedge n}) = \mathbb{E}(M_1) = 1$ de donde concluimos que: $1 = \mathbb{E}(M_{T_k})$, pero como:

$$1 = \mathbb{E}(M_{T_k}) = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda S_{T_k}} g(\lambda)^{-T_k}\big) = e^{\lambda k}\mathbb{E}\big(g(\lambda)^{-T_k}\big)$$

De la ecuación anterior proponemos el siguiente cambio de variable $\lambda = f(s)$ obtenemos:

$$1 = e^{\lambda k}\mathbb{E}\big(g(\lambda)^{-T_k}\big) = e^{f(s)k}\mathbb{E}\big(g(f(s))^{-T_k}\big) = e^{f(s)k}\mathbb{E}\big(s^{T_k}\big)$$

De donde se concluye:

$$e^{-f(s)k} = \mathbb{E}\big(s^{T_k}\big)$$

Falta verificar porque la fórmula es válida aun cuando $T_k = \infty$. Si esto ocurre entonces como $s \in (0,1)$ implica que $s^{T_k} = 0$ por lo tanto

$$\mathbb{E}\big(s^{T_k}\big) = \mathbb{E}(0) = 0 = e^{-f(s)k}$$

La última igualdad es cierta porque, $f(s) = \infty$ pues $\big\{\lambda > 0 : \frac{1}{s} < g(\lambda)\big\}$ es vacío. En efecto, pues si $T_k = \infty$ entonces $S_n > -k$ para toda n de donde se sigue que:

$$\mathbb{E}\big(e^{-\lambda S_n}\big) =\leq e^{\lambda k} \Rightarrow \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_1}\big)^n \leq e^{\lambda k}$$

Entonces:

$$g(\lambda) = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_1}\big) \leq e^{\lambda k/n} \to 1$$

Por lo tanto $g(\lambda) \leq 1$ y como $s \in (0,1)$ se sigue que conjunto $\big\{\lambda > 0 : \frac{1}{s} < g(\lambda)\big\}$ es vacío. $\square$

(3) Argumente que

$$P(M_p \geq n) = P(T_n \leq C_p) = E((1-p)^{T_n})$$

para demostrar que M_p tiene distribución geométrica de parámetro $1 - e^{-f(1-p)}$

Proof. Por definición de M_p tenemos las siguiente igualdad de eventos:

$$\{M_p \geq n\} = \left\{- \min_{k \leq C_p} S_k \geq n\right\} = \left\{\min_{k \leq C_p} S_k \leq -n\right\}$$

Como la caminata S_k da pasos hacia atrás de tamanio a lo mas uno, entonces el evento $\big\{\min_{k \leq C_p} S_k \leq -n\big\}$ lo podríamos ver como el evento en el que la caminata rebasa por primera vez a $-n$ lo cual es precisamente el tiempo de paro T_n por lo tanto si el tiempo de paro ocurre antes de Cp se tendra la ocurrencia del evento, es decir se concluye que

$$\{M_p \geq n\} = \left\{\min_{k \leq C_p} S_k \leq -n\right\} = \{T_n \leq C_p\}$$

Por lo tanto $\mathbb{P}(M_p \geq n) = \mathbb{P}(T_n \leq C_p)$
Ahora usando la regla de probabilidad total:

$$\mathbb{P}(T_n \leq C_p) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \leq C_p | T_n = i)\mathbb{P}(T_n = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_p \geq i)\mathbb{P}(T_n = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty} \mathbb{P}(C_p = i)\mathbb{P}(T_n = i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty} (1-p)^k p\mathbb{P}(T_n = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} p\frac{(1-p)^i}{p}\mathbb{P}(T_n = i) = \sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^i\mathbb{P}(T_n = i) = \mathbb{E}\big((1-p)^{T_n}\big)$$

Observacion: Con lo anterior se deduce que la distribucin de M_p es

$$F_{M_p}(n) = 1 - \mathbb{E}\big((1-p)^{T_{n+1}}\big)$$

Ahora buscamos la densidad o función de masa de probabilidad para M_p

$$\mathbb{P}(M_p = n) = F_{M_p}(n) - F_{M_p}(n-1) = 1 - \mathbb{E}\big((1-p)^{T_{n+1}}\big) - 1 + \mathbb{E}\big((1-p)^{T_n}\big)$$

$$= \mathbb{E}\big((1-p)^{T_n}\big) - \mathbb{E}\big((1-p)^{T_{n+1}}\big) = e^{-nf(1-p)} - e^{-(n+1)f(1-p)}$$
$$= e^{-nf(1-p)}\big(1-e^{-f(1-p)}\big) = e^{-f(1-p)^n}\big(1-e^{-f(1-p)}\big)$$

De donde se concluye que en efecto, M_n se distribuye como una geometrica de parámetro $(1-e^{-f(1-p)})$

□

(4) Tome el l?mite conforme $p \to 0$ para mostrar que la variable aleatoria

$$M = -\min_{n\geq 0} S_n$$

tiene una distribución geométrica de parámetro $1-e^{-f(1)}$. Interprete esto cuando $f(1) = 0$.

Proof. Recordemos que la v.a. C_p mide el número de fracasos antes del primer éxito, donde p es la probabilidad de éxito. Por lo tanto cuando p se va a cero la probabilidad de que aparezca un éxito es cada vez mas remota a tal punto que la variable diverge a infinito. Falta un detalle muy importante: en qué sentido estás considerando la convergencia? en distribución? casi seguramente? Se pueden ambos pero necesitas un detalle adicional si quieres la convergencia casi segura.

$$C_p \to_{p\to 0} \infty$$

Luego entonces.

$$M_p = -\min_{n\leq C_p} S_n \to -\min_{n\leq\infty} S_n = M$$

Entonces:

$$\mathbb{P}(M=n) = \lim_{p\to 0}\mathbb{P}(M_p = n) = \lim_{p\to 0} e^{-nf(1-p)}\big(1-e^{-f(1-p)}\big) = e^{-nf(1)}\big(1-e^{-f(1)}\big)$$

Obs. Aqu estoy dando por hecho que $f(s) = \inf\{\lambda > 0 : 1/s < g(\lambda)\}$ es continua. ¿Y qué pasa si $f(1-) = 0$? □

Categorías: Caminatas aleatorias, muestreo opcional, fluctuaciones.

Ejercicio 1.

(1) Instale Octave en su computadora
(2) Échele un ojo a la documentaci?n
(3) Ejecute el siguiente código linea por linea:
(4) Lea las secciones sobre simple examples, ranges, random number generation y comparison operators y escriba su interpretación de lo que hace el código anterior. Nota: está relacionado con uno de los ejemplos del curso.
(5) Vuelva a correr el código varias veces y escriba sus impresiones sobre lo que está sucediendo.

Se presenta la gráfila de salida de este programa.

Este código esta ejecutando la martingala de las urnas de polya que estuvimos trabajando en clase. Ahí probamos que la proporción de bolas rojas es una martingala, además por el teorema de convergencia de martingalas y dado que polya es una martingala positiva, se concluye que la martingala converge. En efecto, la simulación nos

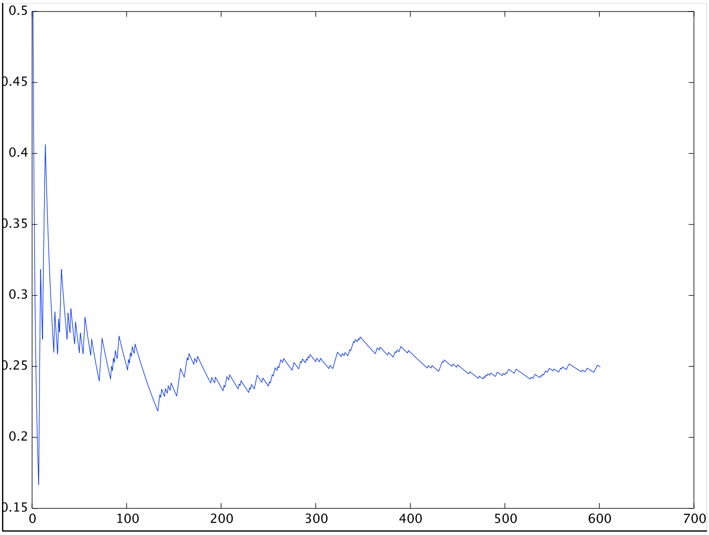

FIGURE 1. Grafica 1

muestra que la proporción de bolas se va estabilizando y por tanto para cada trayectoria que generamos converge. Después vimos que esta martingala converge a una variable aleatoria con distribución Beta.

Problema 2 (Ejercicios sueltos sobre martingalas)**.**

(1) Sea $(X_n, n \geq 0)$ una sucesión $(\mathscr{F}_n)$-adaptada. Pruebe que

$$\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(\, X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \,, \quad n \geq 0$$

es una $(\mathscr{F}_n)$-martingala.

Proof. Verificamos las tres propiedades para una martingala

- Como $\sum_{k=1}^{n} X_k$ es $\mathscr{F}_n$- medible y como $\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{E}(\, X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ es $\mathscr{F}_{n-1}$-medible, se sigue entonces que $\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(\, X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ es $\mathscr{F}_n$-medible (Recordar que $\mathscr{F}_{n-1} \subseteq \mathscr{F}_n$)
- Suponiendo que $(X_n, n \geq 0) \in L_1$ se sigue entonces que

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(\, X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})\right|\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|) + \mathbb{E}(|\mathbb{E}(\, X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})|)$$

Pero utilizando la desigualdad de Jensen para esperanza condicional

$$|\mathbb{E}(\, X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})| \leq \mathbb{E}(\, |X_k| \mid \mathscr{F}_{k-1})$$

Donde tomando esperanzas tenemos:

$$\mathbb{E}(|\mathbb{E}(\, X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})|) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(\, |X_k| \mid \mathscr{F}_{k-1})) = \mathbb{E}(|X_k|)$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})\right|\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|) + \mathbb{E}(|X_k|)$$

Lo que concluye que:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \in L_1$$

- Definamos:

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$$

queremos probar que $\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = M_n$. Veamos:

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n+1} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) + X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \,\middle|\, \mathscr{F}_n\right)$$

$$= M_n + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = M_n$$

Por lo tanto M_n es en efecto una martingala.Utiliza `\qedhere` □

(2) Descomposición de Doob para submartingalas: Sea Sea $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una submartingala. Pruebe que X se puede descomponer de manera única como $X = M + A$ donde M es una martingala y A es un proceso previsible no decreciente con $A_0 = 0$. Sugerencia: Asuma que ya tiene la descomposición y calcule esperanza condicional de X_{n+1} dada X_n.

Proof. Para la prueba utilizamos el ejercicio anterior. Como $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un proceso $\mathscr{F}_n$-medible y en L_1 entonces usando (1) podemos construir una martingala

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$$

Nota que

$$\begin{aligned} X_n &= X_0 + \sum_{1\leq i\leq n} X_i - X_{i=1} \\ &= X_0 + \sum_{1\leq i\leq n} X_i - \mathbb{E}(X_i \mid \mathscr{F}_{i-1}) + \sum_{1\leq i\leq n} \mathbb{E}(X_i \mid \mathscr{F}_{i-1}) - X_{i-1}. \end{aligned}$$

Creo que es distinto de la expresión que obtienes. Suponiendo que tenemos la descomposición $X_n = M_n + A_n$ entonces:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) + A_n$$

Abriendo la suma (solo el último sumando)

$$X_n = \sum_{k=1}^{n-1} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) + X_n - \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) + A_n$$

De donde podemos despejar A_n, observe que X_n se elimina de la ecuación anterior.

$$A_n = \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$$

Notemos que tanto $\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$ como $\sum_{k=1}^{n-1} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ son $\mathscr{F}_{n-1}$-medibles, por lo tanto A_n es predecible y por tanto por construcción se tiene que $X_n = M_n + A_n$. $(A_0 := 0)$.
Observacion: Tomando esperanza a A_n se tiene:

$$\mathbb{E}(A_n) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})\right) = \mathbb{E}(X_n)$$

Como X_n es submartingala entonces sabemos que $\mathbb{E}(X_n)$ es creciente conforme n crece por lo tanto A_n es un proceso cuya esperanza también es creciente.De hecho el proceso es creciente, no sólo en esperanza.
Ahora probaremos la unicidad, supongamos que existen $M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, A_n^{(1)}, A_n^{(2)}$, dos descomposiciones del proceso X_n es decir:

$$X_n = M_n^{(1)} + A_n^{(1)} = M_n^{(2)} + A_n^{(2)}$$

Con $M_n^{(i)}$ martingalas y $A_n^{(i)}$ procesos predecibles, es decir $\mathbb{E}\Big(A_n^{(i)} \,\Big|\, \mathscr{F}_{n-1}\Big) = A_n^{(i)}$.Esto no quiere decir que el proceso sea predecible, sino que es una consecuencia. La prueba no es correcta. Una posibilidad es notar que una martingala predecible es constante.
Demostraremos por inducción que $A_n^{(2)} = A_n^{(1)}$ para toda n.
Primero para $n = 0$, por construcción $A_0^{(1)} = 0 = A_0^{(2)}$.
Supongamos que $A_n^{(1)} = A_n^{(2)}$, por demostrar que $A_{n+1}^{(1)} = A_{n+1}^{(2)}$. De la hipotesis de inducción: $A_n^{(1)} = A_n^{(2)}$ entonces:

$$M_n^{(1)} + A_n^{(1)} = X_n = M_n^{(2)} + A_n^{(2)}$$

De donde se concluye que $M_{n+1}^{(1)} = M_{n+1}^{(2)}$.

$$A_{n+1}^{(2)} = \mathbb{E}(A_{n+1}(2) \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}\Big(X_{n+1} - M_{n+1}^{(2)} \,\Big|\, \mathscr{F}_n\Big) = \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) - M_n^{(2)}$$

$$= \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) - M_n^{(1)} = \mathbb{E}\Big(M_{n+1}^{(1)} + A_{n+1}^{(1)} \,\Big|\, \mathscr{F}_n\Big) - M_n^{(1)}$$

$$M_n^{(1)} - M_n^{(1)} + \mathbb{E}\Big(A_{n+1}^{(1)} \,\Big|\, \mathscr{F}_n\Big) = A_{n+1}^{(1)}$$

Por lo tanto hemos probado que $A_n^{(2)} = A_n^{(1)}$ para toda n. Luego se concluye por el hecho de que $X_n = M_n^{(1)} + A_n^{(1)} = M_n^{(2)} + A_n^{(2)} \Rightarrow M_n^{(1)} = M_n^{(2)}$ para toda n. Lo que demuestra la unicidad.

□

(3) Sea $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ donde las variables ξ son independientes y ξ_i tiene media cero y varianza finita σ_i^2. Pruebe que si $\sum_i \sigma_i^2 < \infty$ entonces S_n converge casi seguramente y en L_2 conforme $n \to \infty$. Construya un ejemplo de variables aleatorias ξ_i tales que la serie $\sum_i \xi_i$ sea casi seguramente absolutamente divergente y casi seguramente condicionalmente convergente (considere ejemplos simples!). Explique heurísticamente por qué cree que suceda esto.

Proof. Para la prueba utilizamos el teorema 1.6 de las notas. Para ello tenemos que probar que $\mathbb{E}\left(\left|S_n^2\right|\right) = \mathbb{E}\left(S_n^2\right) \leq \infty$. No, debes probar que la martingala está acotada en L_2.
Como $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ entonces $\mathbb{E}(S_n) = 0$ de donde concluimos que $\mathrm{var}(S_n) = \mathbb{E}\left(S_n^2\right)$. Entonces:

$$\mathbb{E}\left(S_n^2\right) = var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} var(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$$

Se sigue entonces que por ser S_n martingala, y por el hecho de que $\mathbb{E}\left(\left|S_n^2\right|\right) = \mathbb{E}\left(S_n^2\right) < \infty$ usando Teorema 1.6. S_n converge casi seguramente y en L_2 conforme n tiende a infinito.
Ejemplo: Sea ξ v.a.i.i.d tal que $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = 1/2$ y $\mathbb{P}(\xi_i = -1) = 1/2$, entonces $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ y $var(\xi_i) = 1$.Definimos:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{i} \Rightarrow S_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{i}$$

La serie de la derecha no converge absolutamente pues $\left|\frac{\xi_i}{i}\right| = \frac{1}{i}$ (obtenemos la serie armonica). Sin embargo como:

$$\mathbb{E}\left(S_n^2\right) = var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} var\left(\frac{\xi_i}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

Se sigue, que aplicando Teorema 1.6 que $S_n$es seguramente condicionalmente convergente. □

(4) Sean X y Y dos martingalas (respecto de la misma filtración) y tales que $\mathbb{E}(X_i), \mathbb{E}(Y_i) < \infty$ para toda i. Pruebe la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}((X_i - X_{i-1})(Y_i - Y_{i-1})).$$

Proof. Partimos del lado derecho:

$$(X_i - X_{i-1})(Y_i - Y_{i-1}) = X_i Y_i - X_i Y_{i-1} - X_{i-1} Y_i + X_{i-1} Y_{i-1}$$

Sumando un cero $X_{i-1}Y_{i-1} - X_{i-1}Y_{i-1}$

$$= X_iY_i - X_{i-1}Y_{i-1} + (X_{i-1} - X_i)\,Y_{i-1} + X_{i-1}\,(Y_{i-1} - Y_i)$$

Sumando desde $i = 1, 2 \ldots n$ y notando que el primer termino de la ecuación anterior es una suma telescópica tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{i-1})\,(Y_i - Y_{i-1}) = X_nY_n - X_0Y_0 + \sum_{i=1}^{n} (X_{i-1} - X_i)\,Y_{i-1} + \sum_{i=1}^{n} X_{i-1}\,(Y_{i-1} - Y_i)$$

Tomando esperanza en la igualdad anterior y notando que:

$$\mathbb{E}((X_{i-1} - X_i)\,Y_{i-1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\,(X_{i-1} - X_i)\,Y_{i-1} \mid \mathscr{F}_{i-1})) = 0$$

$$\mathbb{E}(X_{i-1}\,(Y_{i-1} - Y_i)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\,X_{i-1}\,(Y_{i-1} - Y_i) \mid \mathscr{F}_{i-1})) = 0$$

Se obtiene entonces:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{i-1})\,(Y_i - Y_{i-1})\right) = \mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(X_0Y_0)$$

De donde por linealidad de la esperanza se obtiene el resultado. □

(5) Desigualdad de Azema-Hoeffding, tomado de [Wil91, E14.2, p.237]
   (a) Muestre que si Y es una variable aleatoria con valores en $[-c, c]$ y media cero entonces, para $\theta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left(e^{\theta Y}\right) \leq \cosh(\theta c) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 c^2\right).$$

Proof. Primero probaremos la desigualdad: $\mathbb{E}\left(e^{\theta Y}\right) \leq \cosh(\theta c)$. Hagamos notar que $f(y) = e^{\theta Y}$ es una funcíon convexa y por tanto la recta que une a los punto $(-c, e^{\theta Y})$ y $(c, e^{\theta Y})$ está siempre por arriba de la función $f(y)$. Esto se traduce en la siguiente desigualdad:

$$e^{\theta Y} \leq \frac{e^{c\theta} - e^{-c\theta}}{2c}(Y + c) - e^{-c\theta} \leq \frac{e^{c\theta} - e^{-c\theta}}{2c}(Y + c)$$

La anterior desigualdad se vale para todo $Y(\omega)$ en el intervalo cerrado $[-c, c]$. Luego tomado esperanzas y recodando que por hiptesis $\mathbb{E}(Y) = 0$ obtenemos que:

$$\mathbb{E}\left(e^{\theta Y}\right) \leq \frac{e^{c\theta} - e^{-c\theta}}{2 \text{ quitar } c} := \cosh\theta c$$

Para la segunda desigualdad solo tenemos que probar que para toda x se tiene $\cosh x \leq e^{\frac{1}{2}x^2}$. Para ello utilizaremos la descomposición en series de la función e^x

$$\cosh x := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(1 - (-1)^k\right)$$

La ultima suma solo es valida para numero pares, por lo que la podemos expresar de la siguiente forma

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2x^{2k}}{(2k)!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{x^2}{2})^k}{(k)!}=e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Observacion, la ultima desigualdad es valida por el hecho de que

$$(2k)!\leq 2^k k!$$

Esto último lo demostraremos por inducción.
Para $k=1$ se tiene $2\leq 2$ por lo tanto es válida
Supongamos que es válida para k por demostrar que es válida para $k+1$

$$\begin{aligned}(2(k+1))! &= (2k+2)(2k+1)(2k!)\geq^{*}(2k+2)(2k+1)2^k k!\\ &= 2^{k+1}(k+1)!(2k+1)\geq 2^{k+1}(k+1)!\end{aligned}$$

Donde la desigualdad con (*) se debe a la hipótesis de inducción.
Finalmente hemos probado entonces que para toda x se tiene que

$$\cosh x\leq e^{\frac{1}{2}x^2}\Rightarrow\cosh(c\theta)\leq e^{\frac{1}{2}\theta^2c^2}$$

Lo que muestra la desigualdad. Quita el enter para que la prueba acabe en el renglón adecuado.

$\square$

(b) Pruebe que si M es una martingala nula en $n=0$ tal que para algunas constantes $(c_n, n\in\mathbb{N})$ se tiene que

$$|M_n-M_{n-1}|\leq c_n\quad\forall n$$

entonces, para $x>0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{k\leq n}M_k\geq x\right)\leq\exp\left(\frac{x^2}{2\sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

Proof. En esta parte utilizaremos la proposición 1.4 de la notas que dice que para una sub-martingala M_n se tiene:

$$\lambda\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n}M_i^+>\lambda\right)\leq\mathbb{E}(M_n^+)$$

En nuestro caso M_n es martingala por lo que $e^{\theta M_n}$ es una sub-martingala positiva, aplicando la desigualdad de la proposición anterior a esta sub-martingala y tomando $\lambda=e^{\theta x}$ obtenemos que:

$$e^{\theta x}\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n}e^{\theta M_i}>e^{\theta x}\right)\leq\mathbb{E}(e^{\theta M_n})$$

Pero como el evento $\left\{\max_{1\leq i\leq n}e^{\theta M_i}>e^{\theta x}\right\}=\{\max_{1\leq i\leq n}M_i>x\}$. Entonces:

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n}M_i>x\right)\leq e^{-\theta x}\mathbb{E}(e^{\theta M_n})$$

Para poder utilizar el ejercicio anterior necesitamos acotar a la martingala M_n la cual es nula en $n = 0$. Como:

$$|M_n| = \left|\sum_{i=1}^{n} M_i - M_{i-1}\right| \leq \sum_{i=0}^{n} |M_i - M_{i-1}| \leq \sum_{i=0}^{n} c_i = c^*$$

Entonces $|M_n|$ es acotada por c^* por lo que podemos aplicar la desigualdad del ejercicio anterior

$$\mathbb{E}\left(e^{\theta M_n}\right) \leq e^{\frac{1}{2}\theta^2 (c^*)^2}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} M_i > x\right) \leq e^{-\theta x} e^{\frac{1}{2}\theta^2 (c^*)^2}$$

Como lo anterior es válido para todo $\theta > 0$, tomamos $\theta = \frac{x}{(c^*)^2}$. Utiliza `\qedhere`dentro de la ecuación para que termine la prueba sin espacio adicional.Entonces

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} M_i > x\right) \leq exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{(c^*)^2}\right) = exp\left(\frac{-x^2}{2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2}\right)$$

□

Problema 3. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ donde $X_1, X_2, \dots$ son iid. Sea

$$\phi(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda S_n}\right) \in (0, \infty].$$

(1) Pruebe que si existen $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ tales que $\phi(\lambda_i) < \infty$ entonces $\phi(\lambda) < \infty$ para toda $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Sugerencia: escriba $\lambda = a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2$ para algún $a \in [0, 1]$ y aplique la desigualdad de Hölder. A partir de ahora se asume la premisa de este inciso.

Proof. Supongamos que existen λ_1, λ_2 con la condiciones dadas arriba, entonces usando la sugerencia expresamos a $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ como:

$$\lambda = a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2$$

. Entonces podemos escribir a $\phi(\lambda)$ como sigue:

$$\phi(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2}\right) = \mathbb{E}\left(e^{a\lambda_1 S_n} e^{(1-a)\lambda_2 S_n}\right)$$

Usando holder con $p = \frac{1}{a}$ y $q = \frac{1}{1-a}$ tenemos:

$$\mathbb{E}\left(e^{a\lambda_1 S_n} e^{(1-a)\lambda_2 S_n}\right) \leq \mathbb{E}\left(e^{\lambda_1 S_n}\right)^a \mathbb{E}\left(e^{\lambda_2 S_n}\right)^{1-a} = \phi(\lambda_1)^a \phi(\lambda_2)^{1-a}$$

Luego como por hipótesis $\phi(\lambda_i) < \infty$ tenemos que

$$\phi(\lambda) \leq \phi(\lambda_1)^a \phi(\lambda_2)^{1-a} < \infty$$

□

(2) Pruebe que $\mathbb{E}\left(|S_n|^{\,k}\right) < \infty$ para toda $k \geq 0$.

Proof. Sea $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ con $\lambda \neq 0$ entonces por inciso anterior aseguramos que $\phi(\lambda) < \infty$ y $\phi(-\lambda) < \infty$. Tal como lo escribes es falso, pero sí es cierto si λ es suficientemente pequeño. Ahora expresamos como serie de taylor a $e^{|\lambda S_n|}$. Entonces:

$$e^{|\lambda S_n|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda S_n|^k}{k!}$$

No es necesario truncar la serie hasta el sumando m. El razonamiento que sigue muestra ya la finitud de los momentos. Como $T_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{|\lambda S_n|^k}{k!}$ es una sucesión creciente, pues estamos sumando números positivos, se tiene por el teorema de la convergencia monótona que:

$$\mathbb{E}\left(e^{|\lambda S_n|}\right) = \mathbb{E}\left(\lim_{m\to\infty} T_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}(T_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k \mathbb{E}\big(|S_n|^k\big)}{k!}$$

Pero como:

$$\mathbb{E}\left(e^{|\lambda S_n|}\right) = \mathbb{E}\big(e^{\lambda S_n} \mathbb{1}_{\{\lambda S_n \geq 0\}}\big) + \mathbb{E}\big(e^{-\lambda S_n} \mathbb{1}_{\{\lambda S_n < 0\}}\big)$$

$$\leq \mathbb{E}\big(e^{\lambda S_n}\big) + \mathbb{E}\big(e^{-\lambda S_n}\big) = \phi(\lambda) + \phi(-\lambda) < \infty$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k \mathbb{E}\big(|S_n|^k\big)}{k!} < \infty$$

De donde concluimos que:

$$\mathbb{E}\big(|S_n|^k\big) < \infty \text{ para toda k}$$

□

(3) Sea $M_t^\lambda = e^{\lambda S_t}/\phi(\lambda)$. Argumente que si M^n es el proceso dado por

$$M_t^n = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\bigg|_{\lambda=0} M_t^\lambda,$$

entonces M^n es una martingala para toda n.

Proof. Para probar esto hay que mostrar que el operador derivada puede salir de la esperanza condicional. La prueba la haremos por inducción sobre n.
Para $n = 1$:
Primero recordemos que por la pregunta 1 de la tarea 2 inciso 1) que M_t^λ es martingala para toda λ. Ahora procedamos a verificar que la primera derivada también es martingala para toda λ, en particular para $\lambda = 0$. Como:

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial^1}{\partial \lambda^1} M_t^\lambda \,\middle|\, \mathscr{F}_{t-1}\right) * = \frac{\partial^1}{\partial \lambda^1} \mathbb{E}\big(M_t^\lambda \mid \mathscr{F}_{t-1}\big)$$

Como M_t^λ es martingala se sigue que:

$$\frac{\partial^1}{\partial \lambda^1} \mathbb{E}\big(M_t^\lambda \mid \mathscr{F}_{t-1}\big) = \frac{\partial^1}{\partial \lambda^1} M_{t-1}^\lambda$$

Por lo que hemos probado que en efecto la derivada tiene la propiedad de martingala, en particular, evaluando en $\lambda = 0$ se tendría que M_t^1 tiene la propiedad de martingala, además como:

$$\frac{\partial^1}{\partial \lambda^1} M_t^\lambda = \lim_{n\to\infty} n\left(M_t^{\lambda+\frac{1}{n}} - M_t^\lambda\right)$$

Se sigue que M_t^1 es limite de funciones $\mathscr{F}_t$ medibles y por lo tanto M_t^1 es $\mathscr{F}_t$ medible.
(*)Note que en la prueba se está haciendo uso de que podemos intercambiar esperanza con derivada.
Ahora supongamos que $\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} M_t^\lambda$ es martingala, y demostrarmos que $\frac{\partial^{n+1}}{\partial \lambda^{n+1}} M_t^\lambda$ es martingala. Tenemos lo siguiente:

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial^{n+1}}{\partial \lambda^{n+1}} M_t^\lambda \,\middle|\, \mathscr{F}_{t-1}\right) * = \frac{\partial^1}{\partial \lambda^1}\mathbb{E}\left(\frac{\partial^{n}}{\partial \lambda^{n}} M_t^\lambda \,\middle|\, \mathscr{F}_{t-1}\right) = \frac{\partial^1}{\partial \lambda^1}\frac{\partial^{n}}{\partial \lambda^{n}} M_{t-1}^\lambda$$

Donde la ultima igualdad es por la hipótesis de inducción además de que nuevamente estamos haciendo uso de que en la esperanza condicional se puede introducir la derivada. Finalmente se tiene que;

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial^{n+1}}{\partial \lambda^{n+1}} M_t^\lambda \,\middle|\, \mathscr{F}_{t-1}\right) = \frac{\partial^{n+1}}{\partial \lambda^{n+1}} M_{t-1}^\lambda$$

En particular, evaluando $\lambda = 0$ obtenemos que en efecto M_t^{n+1} es martingala y por la inducción se sigue que esto es válido para toda n.
Sin embargo para que esta prueba sea válida hay que probar que en efecto estamos en condiciones de sacar la derivada de la esperanza condicional. A continuación presento una prueba parcial de este hecho:
Queremos mostrar que bajo la condiciones de nuestro problema se tiene:

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial^1}{\partial \lambda^1} M_t^\lambda \,\middle|\, \mathscr{F}_{t-1}\right) * = \frac{\partial^1}{\partial \lambda^1}\mathbb{E}\left(M_t^\lambda \,\middle|\, \mathscr{F}_{t-1}\right)$$

El prueba consistirá en utilizar el T.C.D. para la esperanza condicional, es decir utilizaremos el teorema que nos indica que si (X_n) es una sucesión de variables en L_1 puntualmente convergente y existe Y integrable tal que $|X_n| \leq Y$ para $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} X_n \,\middle|\, \mathscr{G}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_n \,\middle|\, \mathscr{G}\right)$$

En nuestro caso definiremos lo siguiente:

$$X_n = n\left(M_t^{\lambda+\frac{1}{n}} - M_t^\lambda\right) \to_{n\to\infty} X = \frac{\partial^1}{\partial \lambda^1} M_t^\lambda$$

Si mostramos que X_n es dominada por una una variable Y integrable ya acabamos pues por el T.C.D para la esperanza condicional nos dira que;

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial^1}{\partial \lambda^1} M_t^\lambda \,\middle|\, \mathscr{G}\right) = \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} X_n \,\middle|\, \mathscr{G}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_n \,\middle|\, \mathscr{G}\right)$$

Pero

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(X_n \,|\, \mathscr{G}\big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(n\left(M_t^{\lambda+\frac{1}{n}} - M_t^{\lambda}\right) \Big| \mathscr{G}\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\mathbb{E}\Big(M_t^{\lambda+\frac{1}{n}} \Big| \mathscr{G}\Big) - \mathbb{E}\big(M_t^{\lambda} \,|\, \mathscr{G}\big)\right) = \frac{\partial^1}{\partial\lambda^1}\mathbb{E}\big(M_t^{\lambda} \,|\, \mathscr{G}\big)$$

Ahora hay que mostar que en efecto podemos dominar a X_n. Bajo el supuesto de que $\left|\frac{\partial^1}{\partial\lambda^1} M_t^{\lambda}\right| < m(\omega)$ donde $m : \Omega \to \mathbb{R}$ es integrable se tendriá que:

$$|X_n| = n\left|\left(M_t^{\lambda+\frac{1}{n}} - M_t^{\lambda}\right)\right| = n\left|\int_{\lambda}^{\lambda+\frac{1}{n}} \frac{\partial^1}{\partial\lambda^1} M_t^{\lambda} d\lambda\right| \leq n\int_{\lambda}^{\lambda+\frac{1}{n}} \left|\frac{\partial^1}{\partial\lambda^1} M_t^{\lambda}\right| d\lambda$$

$$\leq n\int_{\lambda}^{\lambda+\frac{1}{n}} m(\omega) d\lambda = m(\omega) n\left(\lambda + \frac{1}{n} - \lambda\right) = m(\omega)$$

Y como la función $m(\omega)$ la suponemos integrable, entonces se sigue la sucesión es dominada por una variable integrable y podemos aplicar T.D.C para esperanza condicional.

Obs: (No pude encontrar una cota para la primera derivada: $\left|\frac{\partial^1}{\partial\lambda^1} M_t^{\lambda}\right|$:(Puedes derivar directamente y obtener

$$\frac{\partial M_t^{\lambda}}{\partial\lambda} = e^{\lambda S_t}\frac{S_t\phi(\lambda) - \phi'(t)}{\phi(\lambda)^2}.$$

Puesto que ϕ es convexa, se sigue que puedes acotar a su derivada (que es creciente) y a la función en compactos. Finalmente, $e^{\lambda S_t} S_t$ es integrable como se ve al utilizar Hölder siempre y cuando $\phi(2\lambda) < \infty$. Sin embargo, lo que quieres acotar no es a la derivada sino a sus aproximaciones (lo cual puedes hacer si puedes acotar a M_t^{λ} para alguna λ en el intervalo de interés y a la derivada en todo el intervalo por v.a. integrables que ya no dependan de λ, como en el libro de Bartle. Finalmente, me parece muy positivo que hayas podido despejar el problema y que no te detuvieras por el problema técnico con el que te topaste. □

(4) Calcule las primeras 4 martingalas resultantes si $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. Utilícelas para calcular el valor de $\mathbb{E}\big(T^2\big)$ donde

$$T = \min\{n \geq 0 : S_n \in \{-a, b\}\}$$

y $a, b > 0$.

Proof. Derivando y evaluando en $\lambda = 0$, y recordando que estamos bajo la hipótesis de que $\phi(\lambda)$ esta acotada en una vecindad del cero tenemos que:

$$\left.\frac{\partial^{(k)}}{\partial\lambda^k}\right|_{\lambda=0} \phi(\lambda) = \mathbb{E}\left(\left.\frac{\partial^{(k)}}{\partial\lambda^k}\right|_{\lambda=0} e^{\lambda S_n}\right) = \mathbb{E}\big(S_n^k\big) < \infty$$

Esto quiere decir que las derivadas de $\phi(\lambda)$ evaluadas en 0 nos proporcionan los distintos momentos de S_n.Ademas dado que estamos en una caminata aleatoria donde $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. Entonces:

$$\mathbb{E}(S_n) = 0 = \left.\frac{\partial^{(1)}}{\partial \lambda^1}\right|_{\lambda=0} \phi(\lambda)$$

$$\mathbb{E}\big(S_n^2\big) = n = \left.\frac{\partial^{(2)}}{\partial \lambda^2}\right|_{\lambda=0} \phi(\lambda)$$

$$\mathbb{E}\big(S_n^3\big) = 0 = \left.\frac{\partial^{(3)}}{\partial \lambda^3}\right|_{\lambda=0} \phi(\lambda)$$

$$\mathbb{E}\big(S_n^4\big) = 3n^2 - 2n = \left.\frac{\partial^{(4)}}{\partial \lambda^4}\right|_{\lambda=0} \phi(\lambda)$$

Las martingalas que obtenemos son las siguientes:
(a)

$$M_t^1 = \left.\frac{\partial^1}{\partial \lambda^1}\right|_{\lambda=0} M_t^\lambda = S_t$$

(b)

$$M_t^2 = \left.\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\right|_{\lambda=0} M_t^\lambda = S_t^2 - t$$

(c)

$$M_t^3 = \left.\frac{\partial^3}{\partial \lambda^3}\right|_{\lambda=0} M_t^\lambda = S_t^3 - 3tS_t$$

(d)

$$M_t^4 = \left.\frac{\partial^4}{\partial \lambda^4}\right|_{\lambda=0} M_t^\lambda = S_t^4 - 6tS_t^2 + 3t^2 + 2t$$

Luego como vimos en clase S_T (La caminata evaluada en el tiempo de paro) es una variable que toma dos valores :

$$\mathbb{P}(S_T = -a) = \frac{b}{a+b}$$

$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{a}{a+b}$$

Entonces

$$\mathbb{E}(S_T) = 0$$

$$\mathbb{E}\big(S_T^2\big) = ab$$

$$\mathbb{E}\big(S_T^3\big) = ab(a-b)$$

$$\mathbb{E}\big(S_T^4\big) = \frac{ab(a^3+b^3)}{a+b}$$

Luego, usando el muestro opcional de Doob y dado que todas las martingalas generadas tiene media cero obtenemos que;

$$0 = \mathbb{E}\big(S_T^4 - 6TS_T^2 + 3T^2 + 2T\big) = \mathbb{E}\big(S_T^4\big) - 6\mathbb{E}\big(TS_T^2\big) + 3\mathbb{E}\big(T^2\big) + 2\mathbb{E}(T)$$

De donde despejando:

$$\mathbb{E}\big(T^2\big) = \frac{6\mathbb{E}\big(TS_T^2\big) - \frac{ab(a^3+b^3)}{a+b} - 2ab}{3}$$

*Falta evaluar $\mathbb{E}\big(TS_T^2\big) =?$
Solucionaremos el problema para el caso en que $a = b$.
Cuando $a = b$ entonces S_T^2 solo toma una valor que es a^2 por lo que la formula nos queda:

$$\mathbb{E}\big(T^2\big) = \frac{6\mathbb{E}\big(Ta^2\big) - \frac{ab(a^3+b^3)}{a+b} - 2ab}{3}$$

Simplificando:

$$\mathbb{E}\big(T^2\big) = \frac{a^2(5a^2-2)}{3}$$

Con esto ya podemos calcular la varianza de T.

$$Var(T) = \mathbb{E}\big(T^2\big) - \mathbb{E}(T) = \frac{a^2(5a^2-2)}{3} - a^2$$

Llevamos a cabo simulaciones en R para verificar nuestro resultado, a continuación se presenta la simulación de $30,000$ caminatas aleatorias donde $a = 3$ y $b = 3$. El resultado teórico nos dice que $\mathbb{E}\big(T^2\big) = 129$ mientras que las simulaciones se estabilizaron en un valor de 129.1989 . A continuación presentamos código y gráfica

```
a=3
b=3
T=0
Sim=30000
for (k in 1:Sim){
  S=0
  S[1]=0
  j=1
  while (((S[j]>-a) && (S[j]<b)) ){
    u=runif(1)
    if (u <= 1/2)  Y=1  else  Y=-1
    S[j+1]=S[j]+Y
    j=j+1
  }
  T[k]=(j-1)^2
}
mean(T)
a^2*(5*a^2-2)/3
```

.

$\square$

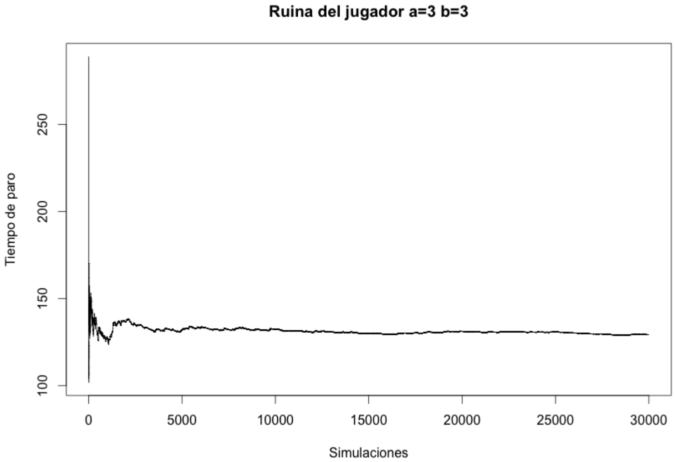

FIGURE 2. Grafica 1

Categorías: Caminatas aleatorias, muestreo opcional, ejemplos de martingales.

REFERENCES

[Asm03] Søren Asmussen, *Applied probability and queues*, second ed., Applications of Mathematics (New York), vol. 51, Springer-Verlag, New York, 2003, Stochastic Modelling and Applied Probability. MR 1978607 (2004f:60001)

[Wil91] David Williams, *Probability with martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. MR 1155402 (93d:60002)