PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I
SEMESTRE 2013-II
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
TAREA 1

ANTONIO SORIANO FLORES

Problema 1. *Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso estocástico con valores reales y $A \subset \mathbb{R}$ un boreliano. Pruebe que si*

$$T_0 = 0 \quad y \quad T_{n+1} = \min\{k > T_n : X_k \in A\}$$

entonces T_n es un tiempo de paro para toda n y $T_n \to \infty$ puntualmente conforme $n \to \infty$.

Solución: Primero notemos que como no se nos dice cuál es la filtración del proceso asumiremos que:

$$\mathscr{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}\ \mathscr{F}_n = \sigma\{X_1 \cdots X_n\},$$

El caso T_0 es fácil pues es constante y por tanto es medible para cualquier σ-álgebra en partícular para $\mathscr{F}_0$ y por tanto $\{T_0 = n\} \in \mathscr{F}_0$ lo que implica que es tiempo de paro.

Ahora, como $T_1 := \min\{k > 0 : X_k \in A\}$ (El primer arribo al conjunto A) . Entonces el evento $\{T_1 = n\}$ lo podemos expresar como:

$$\{T_1 = n\} = \{X_1 \notin A, X_2 \notin A, \cdots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} = \left\{\bigcap_{k=1}^{n-1} X_k \notin A\right\} \cap \{X_n \in A\}$$

De lo anterior como cada X_k es $\mathscr{F}_k$-medible $(1 \leq k \leq n-1)$ y por ser $\mathscr{F}_n$ filtración implica que $\left\{\bigcap_{k=1}^{n-1} X_k \notin A\right\} \in \mathscr{F}_n$ y finalmente es claro que $\{X_n \in A\} \in \mathscr{F}_n$ de donde concluimos que $\{T_1 = n\} \in \mathscr{F}_n$.

Siguiendo con el paso inductivo, supongamos que T_k es tal que $\{T_k = n\} \in \mathscr{F}_n \forall n$ P.D. que $\{T_{k+1} = n\} \in \mathscr{F}_n \forall n$

Notemos que por definición $T_k \geq k$ por lo que en nuestra prueba si $n \leq k$ entonces $\{T_{k+1} = n\} = \emptyset \in \mathscr{F}_n$. Supongamos entonces $n \geq k+1$. Expresamos al evento en cuestión de forma conveniente:

$$\{T_{k+1} = n\} = \bigcup_{r=k}^{n-1} \{T_k = r; X_{r+1} \notin A, X_{r+2} \notin A, \cdots, X_{n-1} \notin A; X_n \in A\}$$

Como:

- $\{T_k = r\} \in \mathscr{F}_r$ (Por hipótesis de inducción) y $k \leq r \leq n-1$ entonces por la filtración $\mathscr{F}_r \subseteq \mathscr{F}_n$ de donde concluimos que $\{T_k = r\} \in \mathscr{F}_n$.
- $\{X_{r+1} \notin A\} \in \mathscr{F}_{r+1}, \{X_{r+2} \notin A\} \in \mathscr{F}_{r+2}, \cdots, \{X_{n-1} \notin A\} \in \mathscr{F}_{n-1}$. Entonces por ser $\mathscr{F}_n$-filtración tendríamos que: $\{X_{r+1} \notin A, \cdots, X_{n-1} \notin A\} \in \mathscr{F}_n$
- $\{X_n \in A\} \in \mathscr{F}_n$

Por los tres puntos anteriores queda claro entonces que $\{T_{k+1} = n\} \in \mathscr{F}_n \forall n$. Lo que termina la prueba por inducción.

Con esto acabamos de probar que T_n cumple con la propiedad $\{T_n = k\} \in \mathscr{F}_k \forall n$ y $\forall k$. Formalmente para ser tiempo de paro hay que probar que también T_n es variable aleatoria pero esto se sigue inmediatamente del hecho de que $\{T_n = k\} \in \mathscr{F}_k$ implica que $\{T_n \leq k\} \in \mathscr{F}_k$ lo cual es valido para toda k y por tanto es medible respecta a la sigma álgebra que contiene a la filtración $\mathscr{F}$. Por lo tanto se sigue que en efecto T_n es tiempo de paro.

Para terminar con el ejercicio hay que probar que puntualmente $T_n \rightarrow \infty$. Sin embargo esto se sigue del hecho de la definición de T_n pues se tiene que $T_n(\omega) \geq n$ de donde tomando limite cuando $n \rightarrow \infty$ se concluye que $T_n(\omega) \rightarrow \infty$

Problema 2 (Lo que siempre tiene una posibilidad razonable de suceder lo hará; (casi seguramente)– y pronto)**.** *Suponga que T es un tiempo de paro tal que para algún $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{P}(T \leq N + n | \mathscr{F}_n) > \varepsilon \textit{ casi seguramente}$$

Al verificar la descomposición

$$\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N),$$

pruebe por inducción que para cada $k = 1, 2, \ldots$:

$$\mathbb{P}(T > kN) \leq (1 - \varepsilon)^k .$$

Pruebe que $\mathbb{E}(T) < \infty$.

Solución: Primero verificamos las descomposición

$$\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N),$$

La cual es válida por el hecho de que $\{T > kN\} \subseteq \{T > (k-1)N\}$ por lo que interceptando dichos eventos se tiene la igualdad $\{T > kN\} \cap \{T > (k-1)N\} = \{T > kN\}$ y luego tomando probabilidad en ambos lados se tiene el resultado.

Probaremos por inducción sobre k

- Para $k = 1$. Utilizando la hipótesis $\mathbb{P}(T \leq N + n | \mathscr{F}_n) > \varepsilon$ con n=0

$$\mathbb{P}(T \leq N | \mathscr{F}_0) > \varepsilon \Rightarrow \mathbb{P}(T > N | \mathscr{F}_0) < 1 - \varepsilon \text{ casi seguramente}$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T \leq N} | \mathscr{F}_0) > \varepsilon \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T > N} | \mathscr{F}_0) < 1 - \varepsilon \text{ casi seguramente}$$

Tomando esperanza en ambos lados de la igualdad.

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T > N} | \mathscr{F}_0)) < \mathbb{E}(1 - \varepsilon) \Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T > N}) < 1 - \varepsilon \Rightarrow \mathbb{P}(T > N) < 1 - \varepsilon$$

- Suponga $\mathbb{P}(T > kN) \leq (1-\varepsilon)^k$ P.D. $\mathbb{P}(T > (k+1)N) \leq (1-\varepsilon)^{k+1}$
  Como:

$$\mathbb{P}(T > (k+1)N) = \mathbb{P}(T > (k+1)N, T > kN) = \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{T>(k+1)N\}\cap\{T>kN\}}\big)$$

  Usando propiedad de esperanza condicional y la hipótesis $\mathbb{P}(T \leq N+n|\mathscr{F}_n) > \varepsilon$ con $n = Nk$

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{T>(k+1)N\}\cap\{T>kN\}}\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{T>(k+1)N\}}\big)\,\mathbb{1}_{\{T>kN\}}|\mathscr{F}_{Nk}\big)$$

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{T>(k+1)N\}}\mathbb{1}_{\{T>kN\}}|\mathscr{F}_{Nk}\big)\big) = \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{T>kN\}}\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{T>(k+1)N\}}|\mathscr{F}_{Nk}\big)\big)$$

  Como : $\mathbb{P}(T \leq N+n|\mathscr{F}_n) > \varepsilon$ con $n = Nk \Rightarrow \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{T>(k+1)N\}}|\mathscr{F}_{Nk}\big) < 1-\varepsilon$

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{T>kN\}}\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{T>(k+1)N\}}|\mathscr{F}_{Nk}\big)\big) \leq (1-\varepsilon)\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{T>kn\}}\big) \leq (1-\varepsilon)(1-\varepsilon)^k$$

  donde la ultima desigualdad se debe por la hipótesis de inducctón. Por lo tanto tenemos que :

$$\mathbb{P}(T > (k+1)N) \leq (1-\varepsilon)^{k+1}$$

  Ahora probaremos que: $\mathbb{E}(T) < \infty$.
  En el curso de probabilidad 1 se probó que para una v.a. positiva con valores enteros:

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq m)$$

  Nosotros probamos que $\mathbb{P}(T > kN) \leq (1-\varepsilon)^k$, pero notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ podremos encontrar una k tal que $Nk \leq m \leq (k+1)N$, de donde podemos concluir por monotona que

$$\sum_{m=kN}^{(k+1)N-1} \mathbb{P}(T \geq m) \leq N\mathbb{P}(T \geq kN)$$

  Entonces:

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq m) \leq N \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq mN) \leq N \sum_{m=1}^{\infty} (1-\varepsilon)^m = \frac{N}{\varepsilon} < \infty$$

  Por lo tanto se tiene que

$$\mathbb{E}(T) < \frac{N}{\varepsilon} < \infty$$

Problema 3. *Sean $(X_i, i \in \mathbb{N})$ variables aleatorias independientes con $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. Sean $S_0 = 0$ y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.*

(1) *Sea $T_1 = \min\{n \geq 0 : S_n = 1\}$. Explique por qué T_1 es un tiempo de paro y calcule su esperanza.*

(2) *Mediante el inciso anterior, construya una martingala que converge casi seguramente pero no lo hace en L_1.*

(3) *Sea M_n la martingala obtenida al detener a $-S$ en T_1. Utilice la solución al Problema de la Ruina para probar que $\mathbb{P}(\max_n M_n \geq M) = 1/M$ para todo $M \geq 1$. Concluya que $\mathbb{E}(\max_m M_m) = \infty$ y que por lo tanto $\mathbb{E}(\max_{m \leq n} M_n) \to \infty$ conforme $n \to \infty$. Finalmente, deduzca que no puede haber una desigualdad tipo Doob cuando $p = 1$.*

(4) *Sea $T = \min\{n \geq 2 : S_n = S_{n-2} + 2\}$ y $U = T - 2$. ¿Son T y U tiempos de paro? Justifique su respuesta.*

(5) *Para la variable T que hemos definido, calcule $\mathbb{E}(T)$.*

Solucion:

(1) Como $\{T = n\} = \{S_1 \neq 1\} \cap \{S_2 \neq 1\} \ldots \cap \{S_{n-1} \neq 1\} \cap \{S_n = 1\} \in \mathscr{F}_n$. Entonces T es tiempo de paro. Para calcular la esperanza de T definamos:

$$T_k = \min\{\{n \geq 0 : S_n = 1\} \cup \{S_n = -k\}\}$$

Creo que la definición correcta es:

$$T_k = \min\{n \geq 0 : S_n = 1 \text{ ó } S_n = -k\} \text{ o inclusive } \min\{n \geq 0 : S_n \in \{1, -K\}\}.$$

Obs: T_k es tiempo de paro pues:

$$\{T_k = n\} = \{S_1 \notin \{1, -k\}\} \ldots \cap \{S_{n-1} \notin \{1, -k\}\} \cap \{S_n \in \{1, -k\}\} \in \mathscr{F}_n$$

Con este tiempo de paro estamos en el caso visto en clase de la ruina del jugador donde al jugador B tiene 1 peso y el jugador A k pesos. El tiempo de paro definido T_k es el tiempo en donde se arruina B o se arruina A. En clase se probó que el tiempo esperado de juego es $1 * k$. Es decir utilizando teorema de la convergencia acotada y montona se prueba que:

$$\mathbb{E}(T_k) = k$$

Luego, notemos que como $\{n \geq 0 : S_n = 1\} \subset \{\{n \geq 0 : S_n = 1\} \cup \{S_n = -k\}\}$ tendríamos que $T_k \leq T \forall k$.
Ademas por definición $T_k \to T$ de forma creciente, pues $T_k \leq T_{k+1}$. Entonces usando T.C.M

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}\left(\lim_{k \to \infty} T_k\right) = \lim_{k \to \infty} \mathbb{E}(T_k) = \lim_{k \to \infty} k = \infty$$

De donde concluimos que el tiempo de paro tiene esperanza infinita.

(2) Definamos el siguiente proceso:

$$M_n = S_{T \wedge n}$$

Afirmación: Somo S_n es martingala entonces $S_{T \wedge n}$ es martingala

- M_n es adaptada a la filtración del proceso S_n pues:

$$M_n = S_{T \wedge n} = \sum_{k=1}^{T \wedge n} X_k = \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{T \wedge n \geq k}$$

  Como cada X_k y $\mathbb{1}_{T \wedge n \geq k}$ es $\mathscr{F}_k$-medible y como $\mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_n$ y la suma de funciones medibles es medible se sigue que M_n es $\mathscr{F}_n$-medible

- $M_n \in \mathbb{L}_1$ pues:

$$\mathbb{E}(|M_n|) = \mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{T\wedge n \geq k}\right|\right) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} |X_k|\right) \leq \infty$$

- Demostraremos la igualdad de martingala $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) = M_n$

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}\big(S_{T\wedge(n+1)}|\mathscr{F}_n\big)$$
$$= \mathbb{E}\big(S_{T\wedge(n+1)}\mathbb{1}_{T\geq n+1} + S_{T\wedge(n+1)}\mathbb{1}_{T<n+1}|\mathscr{F}_n\big)$$
$$= \mathbb{E}\big(S_{T\wedge(n+1)}\mathbb{1}_{T\geq n+1}|\mathscr{F}_n\big) + \mathbb{E}\big(S_{T\wedge(n+1)}\mathbb{1}_{T<n+1}|\mathscr{F}_n\big)$$
$$= \mathbb{E}\big(S_{(n+1)}\mathbb{1}_{T\geq n+1}|\mathscr{F}_n\big) + \mathbb{E}(S_T\mathbb{1}_{T\leq n}|\mathscr{F}_n)$$

Como, $\{T \geq n+1\}$ es $\mathscr{F}_n$-medible

$$= \mathbb{E}\big(S_{(n+1)}|\mathscr{F}_n\big)\,\mathbb{1}_{T\geq n+1} + \mathbb{E}(S_T\mathbb{1}_{T\leq n}|\mathscr{F}_n)$$

Pero notemos que $S_T\mathbb{1}_{T\leq n}$ es $\mathscr{F}_n$-medible, entonces:

$$\mathbb{E}(S_T\mathbb{1}_{T\leq n}|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\mathbb{1}_{T\geq i}|\mathscr{F}_n\right) = \sum_{i=1}^{n} X_i\mathbb{1}_{T\geq i} = S_T\mathbb{1}_{T\leq n}$$

En el lado derecho de la primera igualdad debe aparecer la condición $T \leq n$. Tal vez si utilizas $\mathbf{1}_{n\geq T\geq i}\ldots$ Entonces, sustituyendo este resultado obtenemos que $\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n)$ es igual a:

$$= \mathbb{E}\big(S_{(n+1)}|\mathscr{F}_n\big)\,\mathbb{1}_{T\geq n+1} + S_T\mathbb{1}_{T\leq n}$$
$$= S_n\mathbb{1}_{T\geq n+1} + S_T\mathbb{1}_{T\leq n} = S_{T\wedge n}\mathbb{1}_{T\geq n+1} + S_{T\wedge n}\mathbb{1}_{T\leq n}$$
$$= S_{T\wedge n} = M_n$$

y por tanto el proceso $M_n = S_{T\wedge n}$ es martingala.
Finalmente por como se definió el proceso se tiene que

$$M_n = S_{T\wedge n} \to_{n\to\infty} S_T \text{ casi seguramente}$$

Sin embargo la convergencia en $\mathbb{L}_1$ no se da pues :

$$\mathbb{E}(M_n) = 0 \nrightarrow 1 = \mathbb{E}(S_T)$$

Obs: Aquí hay que recordar que se esta utilizando muestreo opcional de Doob a $S_{T\wedge n}$ (Podemos utilizar este teorema pues el tiempo de paro es acotado y S_n es martingala) de donde se concluye que $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(S_T \wedge n) = \mathbb{E}(S_1) = \mathbb{E}(X_1) = 0$

(3) Primero notemos que $-S$ con el tiempo de paro T_1, es una martingala que toma valores no negativos salvo en S_{T_1} que es cuando vale -1 y se mantiene constante. Nos piden calcular $\mathbb{P}\left(Max_n M_n \geq M\right)$ la cual podemos calcular por complemento de la siguiente forma.

$$\mathbb{P}\left(Max_n M_n \geq M\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Max_n M_n \leq M-1\right)$$

Ahora, haciendo una comparación con el problema de la ruina visto en clase. Imaginemos que tenemos dos jugadores, A con 1 peso y B con M pesos, entonces bajo estas condiciones si definimos $T_{1,M}$ como el tiempo en donde se arruina A o B, entonces estamos bajo las mismas condiciones del problema de la ruina.

Supongamos que A se arruina, entonces B nunca se queda sin dinero y eso quiere decir que la martingala nunca alcanzó el valor de M que es la cantidad de pesos con la que cuenta este jugador. En términos de eventos se escribiría

$\left\{S_{T_{1,M}} = -1\right\} = \{M_n \leq M-1 : \text{para toda n}\} = \{Max_n M_n \leq M-1\}$

Pero en clase vimos que $\mathbb{P}\left(S_{T_{1,M}} = -1\right)$ (la probabilidad de que se arruine primero A antes que B) es igual a $M/M+1$ por lo tanto:

$$\mathbb{P}\left(Max_m M_n \geq M\right) = 1 - \frac{M}{M+1} = \frac{1}{M+1}$$

Con este resultado concluimos que $\mathbb{E}(Max_n M_n Mn) = \infty$ pues:

$$\mathbb{E}(Max_n M_n Mn) = \sum_{M=1}^{\infty} \mathbb{P}(Max_n M_n \geq M) = \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M+1} = \infty$$

Finalmente notemos que no puede haber desigualdad tipo Doob pues

$$\|\overline{M_n^+}\|_1 = \mathbb{E}\left(\overline{M_n^+}\right) = \mathbb{E}(Max_n Mn) = \infty$$

Mientras que:

$$\|M_n^+\|_1 = \| - S^+_{T_{1\wedge n}}\|_1 \longrightarrow \| - S^+_{T_1}\|_1 < \infty$$

Por lo tanto no existe constante K tal que:

$$\|\overline{M_n^+}\|_1 \leq K\|M_n^+\|_1$$

(4) Como $T = \min\{n \geq 2 : S_n = S_{n-2} + 2\} = \min\{n \geq 2 : X_n + X_{n-1} = 2\}$ Entonces,T es primer tiempo en donde aparecen dos 1's de manera consecutiva. T es tiempo de paro pues:

$$\{T \leq n\} = \{(X_1 \in \{-1,1\}, X_2 \in \{-1,1\}, \ldots, X_n \in \{-1,1\}) : \exists i \ni X_i + X_{i-1} = 2\}$$

Lo anterior no es correcto:

$$\{T \leq n\} = \cup_{i \leq n} \{X_{i-1} = X_i = 1\}.$$

de donde vemos que el tiempo de paro No le llames tiempo de paro hasta que pruebes que lo sea depende solo de las primeras n variables observadas y por tanto esta en $\mathscr{F}_n$

Por otro lado mostraremos que $U := T-2$ no es tiempo de paro con un contra ejemplo. Consideremos el evento $\{U = 1\}$

$\{U = 1\} = \{T-2 = 1\} = \{T = 3\} = \{X_1 = -1, X_2 = 1, X_3 = 1\} \notin \mathscr{F}_1$

Por lo tanto U no es tiempo de paro

(5) Una forma de encontrar la esperanza del tiempo de paro es por medio de simulaciones, es decir, generar varias caminatas aleatorias con las condiciones dadas y verificar en promedio cuando se obtiene el patrón deseado. Es muy importante verificar que en efecto las simulaciones son consistentes y que el promedio en realidad esta convergiendo ya que en caso de que la esperanza sea infinita la simulación nos arrojará un numero que obviamente no es la solución. Con

base a la simulación hecha en R se obtuvo la gráfica 1 donde se muestra como el promedio de tiempo de paro converge o se estabiliza en 6. De ahí que proponemos que $\mathbb{E}(T) = 6$. Sin embargo esto no es una prueba como tal por lo que procederemos a mostrar que usando teoría de martingalas y tiempos de paros obtenemos dicho resultado.
Como mencionamos estamos buscando tiempo esperado en que aparecerá un patrón en una caminata aleatria, en este caso nuestro patrón es observar la secuencia $\{1, 1\}$ en nuestras variables X_i. Notamos que este ejercicio es similar al propuesto en el libro de Williams en donde se pide encontrar el tiempo esperado de paro en que un "chango" escribe la palabra "ABRACADABRA".
Siguiendo con la sugerencia del libro, definamos un juego de apuestas donde un casino entrega dinero a los jugadores que atinen a la secuencia buscada. Imaginemos que el "chango" sólo escribe dos tipos de letras el "-1" y el "1" de forma aleatoria. En nuestro juego imaginario, suponemos que un jugador llega justo antes de que el chango presione una letra y apuesta a que la siguiente letra saldrá un "1", si el jugador gana, duplicará su dinero obteniendo del casino 2 pesos (lo que implica una ganancia neta de 1 peso). En caso de perder el jugador pierde el peso que apostó y se retira (Es decir el casino ganó un peso de este jugador). En caso de ganar, el jugador sigue en el juego y ahora apuesta toda su fortuna a que saldrá nuevamente un "1" en cuyo caso ahora recibirá 4 pesos (lo que implica una ganancia neta de 5 pesos sumando el peso que ganó en el primer juego). Sin embargo, recordemos que antes de que aparezca la siguiente letra ya llegó otro jugador apostando a que saldrá "1" en cuyo caso el casino ya habrá entregado la cantidad de 6 pesos pero recibido 2 de los apostadores que están jugando. Obviamente siguiendo con las reglas del casino, en caso de obtener un "-1" ambos jugadores pierden todo y se retiran del juego dejando una ganancia en el casino de 2 pesos.
Definida las reglas del juego, definamos la sucesión de variables aleatorias:

$Z_m^{(n)}$="La cantidad de dinero que ha recibido el jugador "n" al tiempo "m"
O desde el punto de vista del casino
$Z_m^{(n)}$ ="La cantidad de dinero que el casino ha dado al jugador "n" al tiempo "m"
Observaciones:

- $Z_m^{(n)} = 0$ si $m < n$
- $Z_{m+1}^{(n)} = (Z_m^{(n)} + 1)2X_{m+1} - 1$ donde $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ son variables aleatorias bernulli($\frac{1}{2}$) independientes.
- $Z_m^{(n)}$ es martingala con respecto a la filtración natural $\mathscr{F}_m = \sigma(X_1, X_2, ...X_m)$. Demostracion:
  - Por construcción $Z_m^{(n)}$ es $\mathscr{F}_m$ adaptado
  - $\mathbb{E}\Big(Z_{m+1}^{(n)}|\mathscr{F}_m\Big)$=$\mathbb{E}\Big((Z_m^{(n)} + 1)2X_{m+1} - 1|\mathscr{F}_m\Big)$. Como Z_m es $\mathscr{F}_m$ medible entonces:

$$\mathbb{E}\Big(Z_{m+1}^{(n)}|\mathscr{F}_m\Big) = (Z_m^{(n)} + 1)2\mathbb{E}(X_{m+1}|\mathscr{F}_m) - 1$$

Como X_{m+1} es independiente de $\mathscr{F}_m$ se sigue que $\mathbb{E}(X_{m+1}|\mathscr{F}_m) = \mathbb{E}(X_{m+1}) = \frac{1}{2}$ Por lo tanto :

$$\mathbb{E}\Big(Z_{m+1}^{(n)}|\mathscr{F}_m\Big) = (Z_m^{(n)}+1)-1 = Z_m^{(n)}$$

De donde concluimos que cumple la propiedad de martingala.

– Para demostrar que $Z_m^{(n)} \in L_1$ los haremos por inducción. Primero por definición si $m < n$ entonces $Z_m^{(n)} = 0$ y por tanto está en L_1. Supongamos entonces el caso $m \geq n$.
Si $m = n$ entonces $Z_n^{(n)} = 2X_n - 1 \in L_1$ pues $X_n \in L_1$
Supongamos que $Z_{n+m}^{(n)} \in L_1$ P.D. $Z_{n+m+1}^{(n)} \in L_1$
Como $Z_{n+m+1}^{(n)} = (Z_{n+m}^{(n)}+1)2X_{n+m+1} - 1$ y como $Z_{n+m}^{(n)} \perp X_{n+m+1}$ pues $Z_{n+m}^{(n)}$ solo depende de $X_1, ..., X_{n+m}$, se sigue entonces por hipotesis de inducción que $Z_{n+m+1}^{(n)} \in L_1$

Hemos definido entonces , una martingala por cada jugador que llega a apostar al casino. Ahora definamos:

$$Z_m = \sum_{n=1}^{m} Z_m^{(n)}$$

Notemos que bajo esta definición Z_m es la cantidad de dinero que ha dado el casino a todos los jugadores al tiempo m por lo que si $Z_m < 0$ implica que el casino a recibido mas de lo que ha dado a los jugadores. (Recordemos que cada jugador apuesta un peso y por tanto en cada tiempo el casino recibe un peso).
Afirmación: Se sigue que Z_m es martingala con respecto a la filtración $\mathscr{F}_m = \sigma(X_1, X_2, ...X_m)$ pues es suma finita de martingalas. Para su demostracin solo hay que utilizar la linealidad del operador esperanza condicional y que la suma de variables en L_1 esta en L_1.
Definamos el tiempo de paro $T = \min\{n \geq 2 : S_n = S_{n-2}+2\}$, entonces $T \wedge k$ es un tiempo de paro acotado, por lo que usando el muestreo opcional de Doob:

$$\mathbb{E}(Z_{T\wedge k}) = \mathbb{E}(Z_k) = \mathbb{E}(Z_1) = \mathbb{E}\Big(Z_1^{(1)}\Big) = \mathbb{E}(2X_1 - 1) = 0$$

Pero $Z_{T\wedge k}$ converge casi seguramente a Z_T y como

$$-T \leq Z_{T\wedge k} \leq 2^2 + (2-1) + (2-1) = 6$$

Se sigue entonces que si T tiene esperanza finita entonces el proceso $(Z_{T\wedge k})_{k=1}^{\infty}$ seria dominado por $\max\{T, 6\}$. Entonces hay que probar que $\mathbb{E}(T) \leq \infty$
Pero notemos que

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq k) \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T > 2k) \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(V > k | V \sim Geo\left(\frac{1}{4}\right))$$
$$= 2\mathbb{E}(U) = 2 * 4 = 8$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(T) \leq \infty$. De donde se concluye que $(Z_{T\wedge k})_{k=1}^{\infty}$ es dominada por una función en L_1. Luego usando T.D.L tendramos que:

$$0 = \mathbb{E}(Z_{T\wedge k}) \longrightarrow \mathbb{E}(Z_T)$$

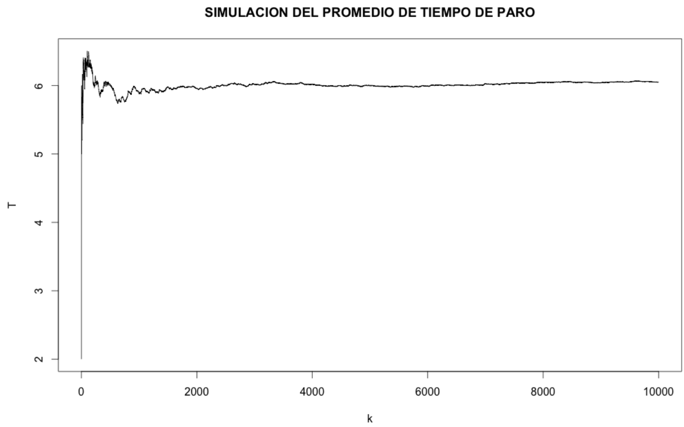

FIGURE 1. Grafica 1

Por lo tanto hemos concluido que $\mathbb{E}(Z_T) = 0$. Pero $Z_T =$ Al dinero que ha dado el casino al tiempo de paro T es igual a :

$$Z_T = (2-1) + 4 + (2-1) - T$$

Donde (2-1)+4 corresponde al jugador que acertó en las dos ocasiones y (2-1) se refiere al jugador que al final acertó una vez. Finalmente el "-T" de la formula surge porque el casino a recibido T pesos de cada uno de los T jugadores que estuvieron apostando hasta el tiempo de paro.
Tomando esperanza de la ultima igualdad

$$0 = \mathbb{E}(Z_T) = 6 - \mathbb{E}(T) \Longrightarrow \mathbb{E}(T) = 6$$

Problema 4 (Extensiones del teorema de paro opcional)**.** *Sea $M = (M_n, n \in \mathbb{N})$ una (super)martingala respecto de una filtración $(\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N})$ y sean S y T tiempos de paro.*

(1) *Pruebe que $S \wedge T$, $S + T$ y $S \vee T$ son tiempos de paro.*
(2) *Sea*
$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n \text{ para toda } n\}$$
es una σ-álgebra, a la que nos referimos como la σ-álgebra detenida en τ. Comente qué puede fallar si T no es tiempo de paro. Pruebe que T es F_T-medible.
(3) *Pruebe que si T es finito, entonces M_T es $\mathscr{F}_T$-medible.*
(4) *Pruebe que si $S \leq T \leq n$ entonces $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$. Si además T es acotado entonces $X_S, X_T \in L_1$ y*
$$\mathbb{E}(M_T \mid \mathscr{F}_S) \leq M_S.$$
(5) *Si $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ es un proceso estocástico $(\mathscr{F}_n)$-adaptado y tal que $X_n \in L_1$ y tal que para cualesquiera tiempos de paro acotados S y T se tiene que $\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_T)$ entonces X es una martingala. Sugerencia: considere tiempos de paro de la forma $n\mathbf{1}_A + (n+1)\mathbf{1}_{A^c}$ con $A \in \mathscr{F}_n$.*

(6) *Pruebe que el proceso M^T obtenido al detener a M al instante T y dado por $M_n^T = M_{T\wedge n}$ es una martingala respecto de $(\mathscr{F}_{T\wedge n}, n \geq 0)$ pero también respecto de $(\mathscr{F}_n, n \geq 0)$. Sugerencia: basta probar el resultado respecto de $(\mathscr{F}_n)$ y para esto es útil el inciso anterior.*

Solucion:

(1) Demostraremos que $S \wedge T$, $S \vee T$ y $S + T$ son tiempos de paro
- Como $\{S \wedge T \leq n\}^c = \{S \wedge T > n\} = \{S > n\} \cap \{T > n\} \in \mathscr{F}_n$ entonces $\{S \wedge T \leq n\} \in F_n$
- Como $\{S \vee T \leq n\} = \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ entonces $\{S \vee T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$
- Notemos que

$$\{S+T=n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{S=k, T=n-k\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{S=i\} \cap \{T=n-i\} \in \mathscr{F}_n$$

  Por lo tanto en los tres casos hemos demostrado que se cumple la propiedad de tiempo de paro y como consecuencia cada una de estas tres funciones es una variable aleatoria pues son $\mathscr{F}$-medibles

(2) Se demostrará que $\mathscr{F}_T$ como se definió es σ-algebra
- Claramente $\Omega \in \mathscr{F}_T$ pues $\Omega \cap \{T \leq n\} = \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ pues T es tiempo de paro
- $\mathscr{F}_T$ es cerrado bajo complementación pues; supongamos $A \in \mathscr{F}_T$ lo que implica por definición que $\forall n, A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$, pero como $\mathscr{F}_n$ es σ-algebra entonces $(A \cap \{T \leq n\})^c = A^c \cup \{T > n\} \in \mathscr{F}_n$. Luego al ser T un tiempo de paro implica que el evento $\{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$, por lo que interceptando estos dos últimos evento de $\mathscr{F}_n$ tendramos que:

$$(A^c \cup \{T > n\}) \cap \{T \leq n\} = (A^c \cap \{T \leq n\}) \cup (\{T > n\} \cap \{T \leq n\}) \in \mathscr{F}_n$$

  Pero como $\{T > n\} \cap \{T \leq n\} = \emptyset$, entonces se sigue que $(A^c \cap \{T \leq n\}) \in \mathscr{F}_n$ y por tanto se concluye que $A^c \in \mathscr{F}_T$
- $\mathscr{F}_T$ es cerrado bajo uniones numerables. Sea $\{A_k\}$ una colección numerable de elementos en $\mathscr{F}_T$ y $n \in \mathbb{N}$
  Como:

$$\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\} \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\{A_k\} \cap \{T \leq n\}\} \in \mathscr{F}_n$$

  De donde lo ultimo es consecuencia de que $A_k \in \mathscr{F}_n \forall n$. Por lo tanto se concluye que $\mathscr{F}_T$ asi definida es σ-algebra
  Comentario: Si T no fuera tiempo de paro la cerradura bajo complementación podrá fallar pues en la prueba se requiere que T sea tiempo de paro para demostrar que $\mathscr{F}_T$ es cerrado bajo complementación.

  Ahora también tenemos que probar que T es $\mathscr{F}_T$-medible. Como T toma valores en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ entonces bastaría probar que para una $k \in \mathbb{N}$ se tiene que el evento $\{T \leq k\} \in \mathscr{F}_T$. Pero como:

$$\{T \le k\} \cap \{T \le n\} = \{T \le min\{k,n\}\} \in \mathscr{F}_{n\wedge k} \subset \mathscr{F}_n \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces se sigue por la definición de $\mathscr{F}_T$ que el evento $\{T \le k\} \in \mathscr{F}_T$ y por tanto T es $\mathscr{F}_T$-medible

(3) Ahora se probará que si T es finito, entonces la variable M_T es $\mathscr{F}_T$-medible. Al ser T finito tenemos que existe N tal que $T < N$,Esto no es cierto, sólo sabemos que $T < \infty$, pero la prueba de abajo es válida con $N = \infty$. además como en este caso M_T toma valores reales entonces hay que probar que el evento $\{M_T \in A\} \in \mathscr{F}_T$ con $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ un boreliano arbitrario. Como:

$$\{M_T \in A\} = \bigcup_{i=0}^{N} \{M_T \in A\} \cap \{T = i\} = \bigcup_{i=0}^{N} \{M_i \in A\} \cap \{T = i\}$$

Entonces, sea n arbitrario en $\mathbb{N}$:

$$\{M_T \in A\} \cap \{T \le n\} = \left(\bigcup_{i=0}^{N} \{M_i \in A\} \cap \{T = i\}\right) \cap \{T \le n\} = \bigcup_{i=0}^{N\wedge n} \{M_i \in A\} \cap \{T = i\}$$

Como estámos intersectando elementos de la σ-algebra $\mathscr{F}_i$ (recuerde que T es tiempo de paro y por tanto $\{T = i\} \in \mathscr{F}_i$) y dado que $i \le n$ se sigue que todos los conjuntos que se unen e intersectan son elementos de la σ-algebra $\mathscr{F}_n$ por lo tanto hemos probado que para toda n:

$$\{M_T \in A\} \cap \{T \le n\} \in \mathscr{F}_n \Rightarrow \{M_T \in A\} \in \mathscr{F}_T$$

Por lo tanto M_T es $\mathscr{F}_T$ medible

(4) Primero probaremos que si $S < T$ la prueba que das es válida si $S \le T$ entonces $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$. Sea $A \in \mathscr{F}_S$ P.D. $A \in \mathscr{F}_T$. Como $A \in \mathscr{F}_S$ entonces por definición de $\mathscr{F}_S$ sabemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ el evento $A \cap \{S \le n\} \in \mathscr{F}_n$ pero notando que $\{T \le n\} \subset \{S \le n\}$ pues $S < T$ entonces:

$$A \cap \{T \le n\} = A \cap \{T \le n\} \cap \{S \le n\} = (A \cap \{S \le n\}) \cap \{T \le n\} \in \mathscr{F}_n$$

Lo ultimo se debe a que T es tiempo de paro y a que $(A \cap \{S \le n\}) \in \mathscr{F}_n$ por hipótesis. Por lo tanto

$$A \cap \{T \le n\} \in \mathscr{F}_n \forall n$$

De donde por definición $A \in \mathscr{F}_T$ y por tanto $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$.
Si ahora suponemos que existe una cota para T, (Existe n tal que $T \le n$) entonces :

$$M_T = \sum_{i=1}^{n} M_i \mathbb{1}_{T=i}$$

$$\mathbb{E}(|M_T|) \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(|M_i \mathbb{1}_{T=i}|) \le \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}(|M_i|) < \infty$$

Y como $S < T$ entonces S también es acotado y análogamente se probaría que $\mathbb{E}(|M_S|) < \infty$ de donde se concluye que $M_S, M_T \in \mathbb{L}_1$
Resta probar que $\mathbb{E}(M_T|\mathscr{F}_S) \le M_S$. Probaremos primero la igualdad. Para

demostrar que la M_S es una versión de la esperanza condicional hay que verificar dos cosas:

- M_S es $\mathscr{F}_S$ medible lo cual ya se había probado en el inciso (2) (Sólo hay que cambiar T por S en la demostración)
- $\mathbb{E}(M_T \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(M_S \mathbb{1}_A)$ para toda $A \in \mathscr{F}_S$.
  Para demostrar esto último expresámos a $M_T - M_S$ como una suma telescópica de la siguiente forma:

$$M_T - M_S = \sum_{i=0}^{n} (M_i - M_{i-1}) \mathbb{1}_{S<i\leq T}$$

Tomamos $A \in F_S$ arbitrario por lo que $A \cap \{S \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ para toda n. Luego multiplicando la expresión anterior por $\mathbb{1}_A$ y tomando esperanza

$$\mathbb{E}((M_T - M_S) \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n} (M_i - M_{i-1}) \mathbb{1}_{\{S<i\leq T\}} \mathbb{1}_A \right)$$

Como $\mathbb{1}_{\{S<i\leq T\}} \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{\{S<i\}\cap A} \mathbb{1}_{i\leq T}$. Pero por hipótesis $\{S < i\} \cap A \in \mathscr{F}_{i-1}$ y dado que T es un tiempo de paro $\{i \leq T\} = \{T \leq i-1\}^c \in \mathscr{F}_{i-1}$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n} (M_i - M_{i-1}) \mathbb{1}_{\{S<i\leq T\}} \mathbb{1}_A \right) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}\big((M_i - M_{i-1}) \mathbb{1}_{\{S<i\leq T\}} \mathbb{1}_A \big)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big((M_i - M_{i-1}) \mathbb{1}_{\{S<i\}\cap A} \mathbb{1}_{i\leq T} | \mathscr{F}_{i-1} \big) \big)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{S<i\}\cap A} \mathbb{E}((M_i - M_{i-1}) | \mathscr{F}_{i-1}) \mathbb{1}_{i\leq T} \big) = 0$$

Pues las ser M_i martingala se tiene que

$$\mathbb{E}((M_i - M_{i-1}) | \mathscr{F}_{i-1}) = M_{i-1} - M_{i-1} = 0$$

De donde concluimos que para todo $A \in \mathscr{F}_S$ se tiene que:

$$\mathbb{E}((M_T - M_S) \mathbb{1}_A) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{E}(M_T \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(M_S \mathbb{1}_A)$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}(M_T | \mathscr{F}_S) = M_S \text{ casi seguramente}$$

La prueba con la desigualdad es análoga solo hay que notar que ahora supondramos que estamos con una supermartingala y por tanto

$$\mathbb{E}((M_i - M_{i-1}) | \mathscr{F}_{i-1}) \leq 0$$

(5) Hay que probar que X=$(X_n, n \in \mathbb{N})$ es martingala, por lo tanto hay que probar tres cosas

- X_n es adaptado por construcción entonces X_n es $\mathscr{F}_n$-medible
- $X_n \in \mathbb{L}_1$ por como se definió el proceso X

- S'olo resta demostrar que $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n$
  Para demostrarlo usaremos la sugerencia y definiremos el tiempo de paro $T_n = n\mathbb{1}_A + (n+1)\mathbb{1}_{A^c}$ con $A \in \mathscr{F}_n$ arbitrario.
  Haremos unas observaciones
  - T_n asi definido es tiempo de paro pues el evento $\{T_n = k\} \in \mathscr{F}_k$ para toda k. En efecto pues $\{T_n = k\} = \emptyset$ si $k \notin \{n, n+1\}$; $\{T_n = n\} = A \in \mathscr{F}_n$ y $\{T_n = n+1\} = A^c \in \mathscr{F}_n$
  - T_n solo toma dos valores :n y $n+1$; por lo que es un tiempo de paro acotado por $n+1$

  Por otro lado definamos el tiempo de paro constante $S_n = n+1$ (Es tiempo de paro por ser medible para cualquier σ-álgebra) el cual también es acotado. Entonces por ser T_n y S_n tiempo de paros acotados se tendría que por hipótesis $\mathbb{E}(X_{T_n}) = \mathbb{E}(X_{S_n})$
  Con estas dos definiciones tenemos lo siguiente:

$$X_{T_n} = \sum_{i=0}^{\infty} X_i \mathbb{1}_{T=i} = X_n \mathbb{1}_{T=n} + X_{n+1}\mathbb{1}_{T=n+1} = X_n\mathbb{1}_A + X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c}$$

  Por lo tanto para cualquier $A \in \mathscr{F}_n$ se tendra:

$$\mathbb{E}(X_{T_n}) = \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_A + X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c})$$

  y como $S_n = n+1$ entonces

$$\mathbb{E}(X_{S_n}) = \mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_A + X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c})$$

  y recordando que $\mathbb{E}(X_{S_n})$=$\mathbb{E}(X_{T_n})$ se tendría que:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c})$$

  Entonces:

$$\mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_A)$$

  Notemos que la anterior igualdad es para todo $A \in \mathscr{F}_n$ y recordando la definición de Esperanza condicional tendamos que X_n es una representación de $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)$. Pues
  - X_n es $\mathscr{F}_n$-medible
  - $\mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_A) \, \forall A \in \mathscr{F}_n$

  De donde se sigue que:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n \text{ casi seguramente}$$

  Por lo tanto X=$(X_n, n \in \mathbb{N})$ es martingala

(6) Para probar que M_n^T es martingala utilizaremos el ejercicio anterior. Tenemos pues un proceso estocástico M_n^T que es claramente $\mathscr{F}_n$ - adaptado, pues como $T \wedge n \leq n$ entonces:

$$M_n^T = \sum_{k=1}^{n} M_i \mathbb{1}_{T\wedge n = i}$$

De donde se concluye que M_n^T es $\mathscr{F}_n$ medible para toda n.
Por otro definamos dos tiempos de paro acotados $T \wedge n$ y $S \wedge n$ arbitrarios.

Como M_n es martingala entonces usando el Muestreo opcional del Doob en los dos tiempos de paro definidos obtenemos;

$$\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_1) = \mathbb{E}(M_{S\wedge n})$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_{S\wedge n})$ de donde usando el ejercicio anterior concluimos que M_n^T es martingala. Para utilizar el ejercicio anterior, tendrías que utilizar dos tiempos de paro acotados S_1 y S_2 y mostrar que $\mathbb{E}\big(M_{S_1}^T\big) = \mathbb{E}\big(M_{S_2}^T\big)$.