PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I
SEMESTRE 2013-II
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
TAREA 3

ANTONIO SORIANO FLORES

Problema 1. Sea M una $(\mathscr{F}_n)$-martingala. Pruebe que si T es un tiempo de paro finito entonces $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$ bajo cada una de las siguientes condiciones:

(1) M es acotada.
(2) T es integrable y la sucesión $(M_n - M_{n-1})$ es acotada.
(3) $(M_{n\wedge T})$ es uniformemente integrable.

Proof. (1) Supongamos que M_n es acotada, es decir $|M_n| < K$ para toda n. Consideremos el tiempo de paro acotado $T \wedge n$, entonces por el Teorema 1.3 de las notas

$$\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0)$$

Como $M_{T\wedge n} \to M_T$ y como por hipótesis M es acotada entonces usando T.C.D. tenemos

$$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}\Big(\lim_{n\to\infty} M_{T\wedge n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_0)$$

(2) Supongamos que T es integrable y la sucesión $(M_n - M_{n-1})$ es acotada. Nuevamente definamos $T \wedge n$ el tiempo de paro acotado, y por Teorema 1.3 de las notas:

$$\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0) \Rightarrow \mathbb{E}(M_{T\wedge n} - M_0) = 0$$

Como:

$$|M_{T\wedge n} - M_0| = \left|\sum_{i=1}^{T\wedge n} M_i - M_{i-1}\right| \leq \sum_{i=1}^{T\wedge n} |M_i - M_{i-1}| \leq \sum_{i=}^{T\wedge n} K \leq (T\wedge n)\, K \leq TK$$

Por lo tanto la sucesión $\phi_n := |M_{T\wedge n} - M_0|$ es dominada por la función medible TK la cual por hipótesis es integrable. Entonces usando el teorema de convergencia dominada y recordando que $M_{T\wedge n} \to M_T$, tenemos:

$$\mathbb{E}(M_T - M_0) = \mathbb{E}\Big(\lim_{n\to\infty} (M_{T\wedge n} - M_0)\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_{T\wedge n} - M_0) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}(M_T - M_0) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$$

(3) Supongamos que $(M_{n\wedge T})$ es uniformemente integrable. Entonces por teorema 1.8 de las notas y dado que $M_{T\wedge n} \to M_T$ se sigue que:

$$M_T \in L_1 \text{ y } M_{T\wedge n} \to M_T \text{ en } L_1 \Rightarrow \mathbb{E}(M_{T\wedge n}) \to \mathbb{E}(M_T)$$

Pero nuevamente por Teorema 1.3 de las notas sabemos que $M_{T\wedge n} = M_0$ por lo tanto se sigue que $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$

□

Categorías: Muestreo opcional.

Problema 2. Sea M una $(\mathscr{F}_n)$-martingala con saltos acotados. Sean

$$C = \{\limsup M_n = \liminf M_n \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad D = \{\limsup M_n = -\infty \text{ y } \limsup M_n = \infty\}.$$

Pruebe que $\mathbb{P}(C \cup D) = 1$. Deduzca que las caminatas aleatorias centradas con saltos acotados oscilan. Sugerencia: Para cada $K > 0$ defina

$$T = \min\{n \geq 0 : |M_n| \geq K\}$$

y aplique el teorema de convergencia de martingalas a M^T.

Sea M una caminata aleatoria no trivial con saltos integrables en $-1, 0, 1, \ldots$ y media cero. Pruebe que $\mathbb{P}(M \text{ converge en } \mathbb{N}) = 0$ y concluya que $\liminf M_n = -\infty$ casi seguramente. (Este resultado permitirá dar una prueba adicional de que un Galton-Watson crítico se extingue). Sugerencia: proceda como en el párrafo anterior y pruebe la integrabilidad uniforme de $M_{T\wedge n}, n \in \mathbb{N}$.

Categorías: Teoremas de convergencia de martingalas

Proof. Definamos el siguiente tiempo de paro:

$$T_k = \min\{n > 0 : M_n \leq -K\}$$

Notemos que T_k así definido es tiempo de paro pues el evento $T_k = n$ depende por definición de los primeros n valores de la martingala M y por tanto es $\mathscr{F}_n$-medible. Luego abreviemos al conjunto $\{\omega : T_k(\omega) = \infty\}$ como $\{T_k = \infty\}$.
Como por hipótesis tenemos saltos acotados es decir $|M_i - M_{i-1}| < C$ para algún $C > 0$, entonces tenemos:

$$M_{T_k\wedge n} \geq -K - C \Rightarrow M_{T\wedge n} + K + C \geq 0 \text{ para toda n}$$

Pero como $M_{T\wedge n}$ es martingala (ver ejercicio 4 de la primera tarea), entonces $M_{T\wedge n} + K + C$ es una martingala positiva y por tanto por el teorema 1.4 de las notas se concluye que $M_{T\wedge n}$ converge. Pero notemos que en el conjunto $\{T_k = \infty\}$ se tiene que $M_{T\wedge n} = M_n$, de donde concluimos que M_n converge si $\{T_k = \infty\}$ para alguna $k \in \mathbb{Q}^+$. Es decir, hemos concluido que M_n converge si existe k tal que $T_k = \infty$ es decir.

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Q}^+} \{T_k = \infty\} = \left\{\liminf_n M_n > -\infty\right\}$$

Por otro lado si estudiamos el complemento de $\bigcup_{k\in\mathbb{Q}} \{T_k = \infty\}$ tenemos que:

$$\left\{\bigcup_{k\in\mathbb{Q}^+} \{T_k = \infty\}\right\}^c = \bigcap_{k\in\mathbb{Q}^+} \{T_k < \infty\}$$

Es decir que para toda $K \in \mathbb{Q}^+$ se tiene que $\{T_k < \infty\}$ por lo que tendiendo K a infinito tendríamos que $\liminf_n M_n = \infty$ pues $M_n \leq -K$ para toda K. Finalmente repitiendo el argumento pero ahora para el tiempo de paro $S_k = \min\{n > 0 : M_n \geq K\}$ concluimos que $\limsup_n M_n = \infty$. Por lo que se concluye que la martingala o converge o oscila. $\mathbb{P}(C \cup D) = 1$

Tomando ahora una caminata aleatoria $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ (no trivial) con saltos acotados concluimos que dicha caminata oscila pues:

$$\mathbb{P}(S_n \to_{n\to\infty} k) = 0 \text{ para toda } k$$

Es decir la caminata no puede converge a un número en $\mathbb{R}$ y por tanto aplicando lo anterior la caminata oscilará. Solo falta demostrar que en efecto la caminata no puede converger lo cual se sigue de lo siguiente, si S_n converge a un número entonces debe de existir un $N \in \mathbb{N}$ tal que la caminata se estabiliza en k:

$$\mathbb{P}(S_N = k, S_{N+1} = k, S_{N+2} = k, \dots, S_{N+n} = k)$$
$$= \mathbb{P}(S_N = k)\mathbb{P}(\xi_{N+1} = 0, \xi_{N+2} = 0, \dots, \xi_{N+n} = 0) = \mathbb{P}(S_N = k)\mathbb{P}(\xi_1 = 0)^n$$

Pero como es una caminata no trivial entonces $\mathbb{P}(\xi_1 = 0) < 1$, por lo tanto:

$$\mathbb{P}(S_N = k)\mathbb{P}(\xi_1 = 0)^n \to 0$$

de donde se concluye que la caminata no converge a un numero real, luego entonces la caminata debe de oscilar.

Ahora supongamos que M_n es una caminata con saltos integrables es decir, en este caso supondremos que:

$$M_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

Donde (ξ_i) son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas. Dado que suponemos saltos integrables eso implica que $|M_n - M_{n-1}| = |\xi_n|$ es integrable, esto es que $|\xi_i| \in L_1$ para toda i. Procediendo de forma similar al parrafo anterior definimos $T_k = \min\{n > 0 : |M_n| > k\}$, entonces la martingala $M_{T_k \wedge n}$ cumple con :

$$|M_{T_k \wedge n}| < k + |\xi_{T_k \wedge n}| := Y \in L_1$$

Aquí hay que recordar que (ξ_i) son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas entonces $\xi_{T_k \wedge n}$ tiene la misma distribución que ξ_1 y por lo tanto también tiene esperanza finita. Ahora mostraremos la integrabilidad uniforme de $M_{T_k \wedge n}$. Como tenemos que $|M_{T_k \wedge n}| < Y$, entonces $\mathbb{1}_{\{|M_{T_k \wedge n}| > c\}} \leq \mathbb{1}_{\{|Y| > c\}}$ por lo tanto.

$$|M_{T_k \wedge n}| \, \mathbb{1}_{\{|M_{T_k \wedge n}| > c\}} \leq |Y| \, \mathbb{1}_{\{|Y| > c\}}$$

Tomando supremo y limite.

$$\lim_{c\to\infty} \sup_n \mathbb{E}\left(|M_{T_k \wedge n}| \, \mathbb{1}_{\{|M_{T_k \wedge n}| > c\}}\right) \leq \lim_{c\to\infty} \mathbb{E}\left(|Y| \, \mathbb{1}_{\{|Y| > c\}}\right) = 0$$

La ultima igualdad se debe al teorema de la convergencia dominada. Sigue siendo incorrecto. Nota que tu cota Y depende de n y para aplicar convergencia dominada (y concluir que vale Doob) necesitas una cota que no dependa de n. Lo que se debe hacer es notar que $|M_{T \wedge n}| \leq K + |\xi_T|$. Luego, $\xi_T \geq -1$ y al descomponer respecto del valor de T

y de M_{T-1} vemos que $\mathbb{P}(\xi_T \geq j) \leq \mathbb{P}(\xi_1 \geq j)$. Por lo tanto ξ_T es integrable y entonces sí se obtiene una cota para M^T. por tanto $M_{T_k \wedge n}$ es uniformemente integrable. De aquí se concluye que la martingala $M_{T_k \wedge n}$ converge (Teorema 1.8 de las notas). Siguiendo un argumento similar a la prueba del caso de salto acotados tendríamos que en el conjunto $\{T_k = \infty\}$ se tiene que $M_{T_k \wedge n} = M_n$ y por tanto la martingala converge si existe k tal que $\{T_k = \infty\}$ y nuevamente en caso contrario , la martingala oscilara si para toda k se tiene que $\{T_k < \infty\}$.
En el caso de una caminata aleatoria con salto integrales en $\{-1, 0, 1, 2, 3...\}$ se tiene que dicha caminata no puede converger a un numero real ya que nuevamente se tendría que tener que los saltos ξ_i tomaran el valor de 0 infinitamente para tener convergencia, lo cual no sucede en una caminata no trivial, luego entonces la caminata oscilará y por tanto se concluye que $\liminf M_n = -\infty$ casi seguramente. □

Problema 3. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias intercambiables:

$$(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_{\pi_1}, \ldots, X_{\pi_n})$$

para cada permutación σ de $\{1, \ldots, n\}$.

(1) Para $\mathscr{G}, \mathscr{H}$ subσ-álgebras de $\mathscr{F}$ definimos a $\mathscr{G} \vee \mathscr{H} = \sigma(\mathscr{G} \cup \mathscr{H})$. Sea

$$\mathscr{G}^n = \sigma(f(X_1, \ldots, X_n) : f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ es simétrica}) \vee \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots).$$

Pruebe que $\mathscr{G}^n, n \geq 1$ es una filtración al revés. Sea $\mathscr{G}$ su intersección.

Proof. Idea de posible demostración: Definamos las siguientes σ-álgebras:

$$\mathscr{F}_n := \sigma(f(X_1, \ldots, X_n) : f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ es simétrica})$$

$$\mathscr{H}_{n+1} := \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots).$$

Entonces por definición tendríamos que $\mathscr{G}^n = \sigma(\mathscr{F}_n \cup \mathscr{H}_{n+1})$. Si probamos que:

$$\mathscr{G}^n = \sigma(\mathscr{F}_n \cup \mathscr{H}_{n+1}) = \sigma\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \mathscr{F}_k\right) = \sigma\left(\mathscr{F}_n, \mathscr{F}_{n+1}, \ldots\right)$$

Por ejemplo si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es definida como $f(X_1 \ldots X_n) = S_n$ entonces seria claro que $\mathscr{G}^n = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) = \sigma\left(S_n, S_{n+1}, \ldots\right)$. En este caso tenemos que si probamos la igualdad antes mencionada se obtendría que

$$\mathscr{G}^{n+1} = \sigma\left(\mathscr{F}_{n+1}, \mathscr{F}_{n+2}, \ldots\right) \subset \sigma\left(\mathscr{F}_n, \mathscr{F}_{n+1}, \ldots\right) = \mathscr{G}^n$$

Lo que prueba que en efecto $\mathscr{G}^n$ es una martingala reversa. Otra posibilidad es notar que realmente lo que necesitas es que las variables

$$\sum_{\pi} f_1(X_{\pi_1}) \cdots f_n(X_{\pi_n})$$

sean medibles respecto de $\mathscr{G}_n$ para funciones medibles arbitrarias $f_1, \ldots, f_n$... Si defines a $\mathscr{G}_n$ como la σ-field generada por variables de ese tipo y por $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ entonces sí es fácil probar que se trata de una filtración al revés y con esta $\mathscr{G}_n$ puedes resolver el ejercicio. □

(2) Para cada $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, defina a

$$\Xi_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \in A}.$$

Pruebe que

$$\mathbb{P}(X_1 \in A \,|\mathscr{G}^n) = \Xi_n(A)\,.$$

¿Por qué puede definir a $\Xi(A) = \lim_{n\to\infty} \Xi_n(A)$?

Proof. Sabemos que $X_1, X_2, \dots,$ son intercambiables. Definamos las siguientes variables:

$$Y_1 = \mathbb{1}_{\{X_1 \in A\}}, Y_2 = \mathbb{1}_{\{X_2 \in A\}}, \dots Y_n = \mathbb{1}_{\{X_n \in A\}}, \dots$$

Entonces por definición cada $Y_i \in \{0,1\}$ y son intercambiables pues:

$$\mathbb{P}(Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{X_1 \in A\}} = i_1, \dots, \mathbb{1}_{\{X_n \in A\}} = i_n)$$

$$= \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\left\{X_{\pi(1)} \in A\right\}} = i_1, \dots, \mathbb{1}_{\left\{X_{\pi(n)} \in A\right\}} = i_n) = \mathbb{P}(Y_{\pi(1)} = i_1, \dots, Y_{\pi(n)} = i_n)$$

Ahora recordemos la proposición (1.9) de las notas que nos dice que para cualquier función h medible:

$$\mathbb{E}(\,h(Y_1, \dots, Y_n)\ |\mathscr{G}_n) = \mathbb{E}\big(\,h(Y_{\pi(1)}, \dots, Y_{\pi(n)})\ \big|\,\mathscr{G}_n\big)$$

Entonces tomando $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $h(Y_1, \dots, Y_n) = Y_1$ tenemos que:

$$\mathbb{E}(\,Y_j\ |\mathscr{G}_n) = \mathbb{E}(\,Y_1\ |\mathscr{G}_n)\ \text{ para toda } j \le n$$

Por otro lado dado que la función $f(Y_1, \dots, Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ es simétrica se sigue que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ es $\mathscr{G}^n$-medible y por lo tanto:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\ \middle|\ \mathscr{G}^n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\,Y_i\ |\mathscr{G}^n) = \mathbb{E}(\,Y_1\ |\mathscr{G}^n)$$

De donde se concluye que:

$$\Xi_n(A) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \in A} = \mathbb{E}(\,\mathbb{1}_{X_1 \in A}\ |\mathscr{G}^n) = \mathbb{P}(X_1 \in A|\mathscr{G}^n)$$

Qué pasa cuando n tiende a infinito?, para responder esto definamos la siguiente martingala reversa:

$$M_n = \mathbb{E}(\,Y_1\ |\mathscr{G}^n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \in A}$$

Por construcción se tiene que M_n cumple con estar en L_1 y ser $\mathscr{G}^n$ medible pues:

$$\mathbb{E}(|M_n|) = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(\,Y_1\ |\mathscr{G}^n)|) \le \mathbb{E}(\mathbb{E}(\ |Y_1|\ |\mathscr{G}^n)) = \mathbb{E}(|Y_1|) < \infty$$

Por otro lado como:

$$\mathbb{E}\big(\,M_n\ \big|\,\mathscr{G}^{n+1}\big) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \in A}\ \middle|\ \mathscr{G}^{n+1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\big(\,Y_i\ \big|\,\mathscr{G}^{n+1}\big)$$

$$= \mathbb{E}\left(Y_1 \,\middle|\, \mathscr{G}^{n+1}\right) := M_{n+1}$$

Por lo tanto se puede afirmar que M_n es martingala reversa. Luego por teorema (1.13) de las notas M_n es uniformemente integrable y por tanto converge casi seguramente y en L_1 a $M_\infty = \mathbb{E}(Y_1 \mid \mathscr{G}^\infty) = \mathbb{E}(Y_1 \mid \mathscr{G}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \in A}$. Por lo tanto se puede definir

$$\Xi(A) = \lim_{n\to\infty} \Xi_n(A) = \mathbb{E}(Y_1 \mid \mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1 \in A \,|\mathscr{G})$$

Observacion, el limite en esta caso es una variable aleatoria que es $\mathscr{G}$ medible.

□

(3) Al considerar a la martingala

$$\frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{1\le i<j\le n} \mathbf{1}_{X_i\in A}\mathbf{1}_{X_j\in A},$$

pruebe que $\mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A \,|\mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1 \in A \,|\mathscr{G})\,\mathbb{P}(X_2 \in A \,|\mathscr{G})$. Extienda la afirmación de independencia condicional anterior a $X_1, \ldots, X_n$.

Proof. En el inciso anterior probamos que:

$$\mathbb{P}(X_1 \in A|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_1\in A} \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(Y_1 \mid \mathscr{G}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i\in A}$$

Repitiendo la demostración pero ahora tomando $h(Y_1, \ldots, Y_n) = Y_2$ obtenemos que:

$$\mathbb{P}(X_2 \in A|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_2\in A} \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(Y_2 \mid \mathscr{G}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i\in A}$$

Por otro lado notemos que $f(Y_1, \ldots, Y_n) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i\ne j\le n} Y_iY_j$ es simétrica se sigue que $\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\le i\ne j\le n} Y_iY_j$ es $\mathscr{G}^n$-medible y por lo tanto:

$$\frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{1\le i\ne j\le n} Y_iY_j = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{1\le i\ne j\le n} Y_iY_j \,\middle|\, \mathscr{G}^n\right) = \mathbb{E}(Y_1Y_2 \mid \mathscr{G}^n)$$

de donde se observa que en efecto:

$$M_n = \frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{1\le i\ne j\le n} Y_iY_j \text{ con } n > 1$$

Es una martingala reversa y por tanto converge casi seguramente y en L_1. En este caso la martingala converge a $M_\infty = \mathbb{E}(Y_1Y_2 \mid \mathscr{G}^\infty) = \mathbb{E}(Y_1Y_2 \mid \mathscr{G})$. Por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$\mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(Y_1Y_2 \mid \mathscr{G}) = M_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{1\le i\ne j\le n} Y_iY_j$$

Ahora observemos lo siguiente:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} Y_i Y_j$$

De donde despejando:

$$\sum_{1\leq i\neq j\leq n} Y_i Y_j = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) - \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

Pero $Y_i^2 = (\mathbb{1}_{X_i\in A})^2 = \mathbb{1}_{X_i\in A} = Y_i$. Entonces:

$$\sum_{1\leq i\neq j\leq n} Y_i Y_j = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j - 1\right)$$

Por lo tanto tomando limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{1\leq i\neq j\leq n} Y_i Y_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\,(n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j - 1\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right)\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n-1}\right)$$

Como los limites de los factores existe, entonces:

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right)\left(\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1}\right) - \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}\right)\right)$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right) = \mathbb{P}(X_1 \in A|\mathscr{G})\mathbb{P}(X_2 \in A|\mathscr{G})$$

Por lo tanto obtenemos:

$$\mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A\,|\mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1 \in A\,|\mathscr{G})\,\mathbb{P}(X_2 \in A\,|\mathscr{G})$$

Ahora generalizaremos el resultado para para $X_1, \dots X_k$. Para ello tomaremos la martingala

$$M_n = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-(k-1)} \sum_{1\leq i_1\neq i_2\dots\neq i_k\leq n} Y_{i_1} Y_{i_2} \dots Y_{i_k}$$

El cual al ser $f(Y_1 \dots Y_k) = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-(k-1)} \sum_{1\leq i_1\neq i_2\dots\neq i_k\leq n} Y_{i_1} Y_{i_2} \dots Y_{i_k}$ una función simétrica $(n > k)$ entonces se sigue que:

$$M_n = \mathbb{E}(\,Y_1 Y_2 \dots Y_k\,\,|\mathscr{G}^n)$$

Es una martingala reversa y por tanto convergente casi seguramente y en L_1, es decir :

$$M_\infty = \mathbb{E}(\,Y_1 Y_2 \dots Y_k\,\,|\mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A, \dots, X_k \in A\,|\mathscr{G})$$

Por lo que ahora habria que probar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n-1)\dots(n-(k-1)} \sum_{1\le i_1\neq i_2 \dots \neq i_k \le n} Y_{i_1}Y_{i_2}\dots Y_{i_k}$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^k = \mathbb{P}(X_1 \in A|\mathscr{G})\mathbb{P}(X_2 \in A|\mathscr{G})\dots\mathbb{P}(X_k \in A|\mathscr{G})$$

Faltaría probar esto último :(□

Cagegorías: Teorema de convergencia de martingalas, teorema de de Finetti.

Ejercicio 1.

(1) Ejecute y explique la función del siguiente código en Octave. Comente qué teoremas del curso (y del curso de probabilidad) son importantes para interpretar la figura.

```
tic;
n =1000;
m =10000;
u= rand (n,m);
r=2;
v=3;
c=1;
x= ones (1,m)*(r/(r+v));
for i=1:n
    x(i+1 ,:) =(r+v+(i -1)*c)/(r+v+i*c).*x(i ,:)
       +(u(i ,:) <x(i,:))./(r+v+i*c);
endfor
y= sort (x(n+1 ,:));
plot (y ,(1: m)./m,y, betacdf (y,r/c,v/c))
```

.

El código que nos proporcionan es sobre el problema de las urnas de poyla. En clase vimos que la proporción de bolas rojas era una martingala además al ser positiva se concluyó que dicha variable convergía casi seguramente a una variable X_∞. De hecho en la tarea 1 se simuló este proceso y se observaba que en efecto la trayectoria se estabilizaba conforme n se iba a infinito.
Dado que X_∞ es una variable aleatoria, surgió entonces la pregunta de saber cuál era su distribución. Fue con ayuda del teorema de De Finetti y la intercambiabilidad que se logró probar que la variable X_∞ tenía exactamente los mismos momentos que una distribución Beta de parámetro $\left(\frac{r}{c}, \frac{v}{c}\right)$.
El código anterior lo que esta haciendo entonces es simular 10,000 trayectorias del proceso en donde en cada trayectoria se están generando 1,000 realizaciones del experimento. Al final lo que vemos es un par de gráficas en donde se muestra que en efecto, la distribución empírica que genera la simulación es prácticamente

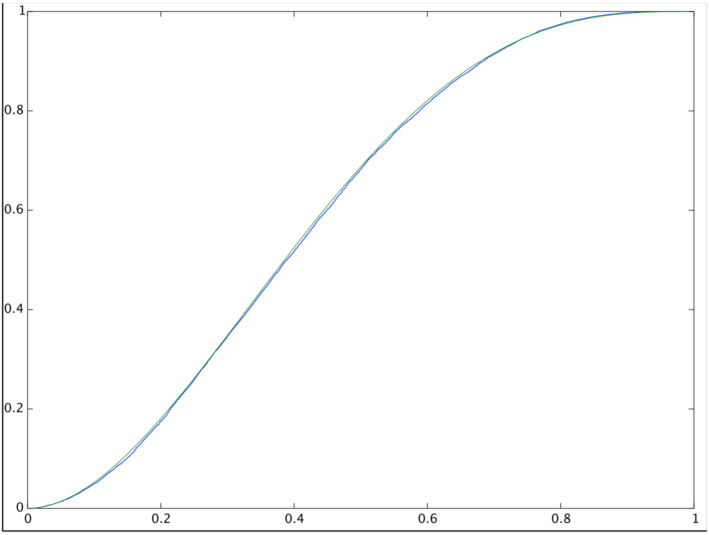

FIGURE 1. Grafica 1

igual a la distribución de un a Beta, por lo tanto se verifica la convergencia de la martingala a una variable X_∞ con distribución beta.

(2) Ejecute y explique la función del siguiente código en Octave. Incluya una gráfica en la que la longitud de la variable k sea mayor a 1000. (Puede modificar el programa...) En la gráfica observara un esbozo de la trayectoria de un proceso de ramificación continuo (en una escala distinta...).

```
k =[10];
aux=k( length (k));
while (aux >0 && length (k) <1000)
k=[k;2* binornd (aux ,.5) ];
aux=k( length (k));
endwhile
plot (k)
```

.

Lo que el código esta simulando es un proceso de Galton-Watson, el proceso inicia con una población de 10 sujetos luego cada sujeto puede tener 2 o 0 hijos con probabilidad 1/2, esto quiere decir que la distribución de progenia está dada por $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2 = \mathbb{P}(X = 2)$. Luego entonces la media $\mathbb{E}(X) = 1$ por lo que estamos en el "caso critico" y por tanto sabemos que la población se extinguiraá con probabilidad 1. Las simulaciones terminan cuando la última generación es de 0 sujetos. El ejercicios nos pide que veamos una gráfica en donde la longitud de k sea mayor a 1000, es decir una trayectoria en donde la población se extinga después de la generación 1000, para ello utilizamos el siguiente código:

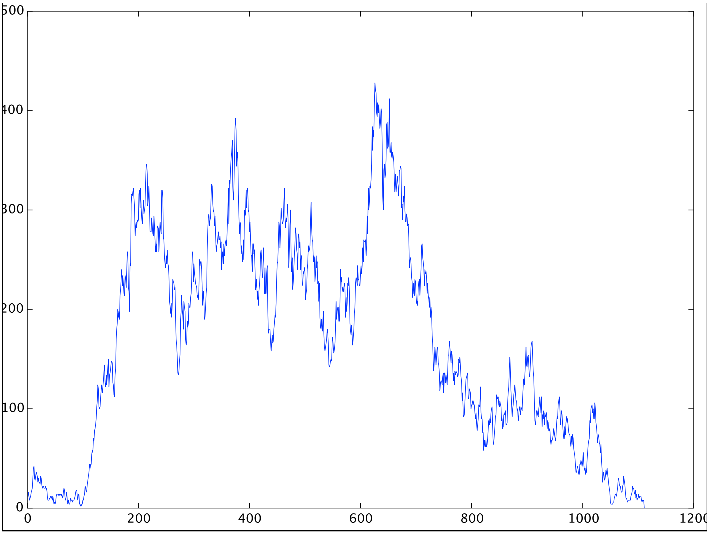

FIGURE 2. Grafica 2

```
k =[10];
aux = k(length(k));
while length(k)<1000
    k =[10];
    aux = k(length(k));
    while (aux > 0)
        k =[k;2*binornd(aux,.5)];
        aux =k(length(k));
    endwhile
endwhile
plot(k)
```

.