PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I
SEMESTRE 2013-II
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

GERÓNIMO URIBE BRAVO

Problema 1. Sean $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$ y $\mathscr{G}$ subσ-fields de $\mathscr{F}$. Decimos que $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ si para cualquier H_i que sea $\mathscr{F}_i$ medible y acotada se tiene que

$$\mathbb{E}(H_1 \cdots H_n \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G}) \cdots \mathbb{E}(H_n \mid \mathscr{G}).$$

1. ¿Qué quiere decir la independencia condicional cuando $\mathscr{G} = \{\Omega, \emptyset\}$?

   Demostración. Si $\mathscr{G}$ es la σ-álgebra trivial, entonces $\mathbb{E}(X|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(X)$, de modo que la propiedad de independencia condicional se reduce a

   $$\mathbb{E}(H_1 \cdots H_n) = \mathbb{E}(H_1) \cdots \mathbb{E}(H_n).$$

   Sea $A_i \in \mathscr{F}_i$ para toda $i \leq n$. Si elegimos a $H_i = \mathbb{1}_{A_i}$, entonces la anterior condición se traduce a

   $$\mathbb{P}(A_1 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n).$$

   Lo anterior es válido para todo $A_i \in \mathscr{F}_i$ para todo $i \leq n$, lo cual corresponde a la definición de independencia (normal) de $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n$, que se puede extender a la independencia de toda la secuencia $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$. □

2. Pruebe que F_1 y $\mathscr{F}_2$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ (denotado $\mathscr{F}_1 \perp_{\mathscr{G}} \mathscr{F}_2$) si y sólo si para cualquier H que sea $\mathscr{F}_1$-medible y acotada se tiene que

   $$\mathbb{E}(H \mid \mathscr{F}_2, \mathscr{G}) = \mathbb{E}(H \mid \mathscr{G}).$$

   Demostración. Notemos que el hecho de que H_1 y H_2 sean acotadas, permite trabajar con la esperanza condicional de su producto.

   $\Rightarrow$)Supongamos que $\mathscr{F}_1 \perp_{\mathscr{G}} \mathscr{F}_2$. Sea H una función $\mathscr{F}_1$ -medible y acotada. Definamos $Y := \mathbb{E}(H|\mathscr{G})$, de manera que Y es una función $\mathscr{G}$-medible y acotada.

Entonces bastará demostrar que para todo $A \in \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G})$,

$$\mathbb{E}(H\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A).$$

Para generar correctamente a la familia $\sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G})$, consideremos a

$$\mathcal{C} := \{C \in \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G}) : C = F_2 \cap G \text{ donde } F_2 \in \mathscr{F}_2 \text{ y } G \in \mathscr{G}\}.$$

Como $\Omega \in \mathscr{G}$, entonces todos los elementos de $\mathscr{F}_2$ pueden ser expresados mediante su intersección con Ω y por lo tanto, $\mathscr{F}_2 \subset \mathcal{C}$. El mismo argumento sigue para $\mathscr{G}$, de manera que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G})$. Además, es muy sencillo verificar que $\mathcal{C}$ es una π-sistema.

Después, definamos

$$\mathcal{L} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \mathbb{E}(H\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)\}.$$

La finalidad es demostrar que $\mathcal{L}$ es un λ-sistema y que $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$ para concluir que $\mathcal{L} = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G})$, es decir, que la propiedad (SEÑALAR) es válida para todo $A \in \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G})$. A continuación demostremos que $\mathcal{L}$ es un λ-sistema. La primera condición ($\Omega \in \mathcal{L}$) se cumple al notar que

$$\mathbb{E}(H\mathbb{1}_\Omega) = \mathbb{E}(H) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(H|\mathscr{G})) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_\Omega).$$

Para la segunda condición, sea $A, B \in \mathcal{L}$ tal que $B \subset A$, es decir $\mathbb{1}_{A-B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$. Entonces

$$\mathbb{E}(H\mathbb{1}_{A-B}) = \mathbb{E}(H\mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(H\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{A-B}),$$

por lo que $A - B \in \mathcal{L}$. Para la tercera y última condición, sea $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}$ tal que $A_i \subset A_{i+1}$, de manera que $\{\mathbb{1}_{A_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente que converge a $\mathbb{1}_{\cup A_i}$. Entonces usando convergencia monótona,

$$\mathbb{E}(H\mathbb{1}_{\cup A_i}) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{E}(H\mathbb{1}_{A_i}) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{A_i}) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{\cup A_i}),$$

por lo que $\cup A_i \in \mathcal{L}$, y queda demostrado que $\mathcal{L}$ es un λ-sistema.

Para finalizar esta parte de la demostración, resta demostrar que $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$. Sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $C = F_2 \cap G$ donde $F_2 \in \mathscr{F}_2$ y $G \in \mathscr{G}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H\mathbb{1}_C) &= \mathbb{E}(H\mathbb{1}_{F_2}\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(H\mathbb{1}_{F_2}\mathbb{1}_G|\mathscr{G})) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_G\mathbb{E}(H\mathbb{1}_{F_2}|\mathscr{G})) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_G\,(\mathbb{E}(H|\mathscr{G})\mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_2}|\mathscr{G}))) \qquad \text{(Por ind. cond.)} \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_G Y\mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_2}|\mathscr{G})) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_G Y\mathbb{1}_{F_2}|\mathscr{G})) \qquad (\text{Por } \mathscr{G} \text{ medibilidad de } Y \text{ y } G) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_G Y\mathbb{1}_{F_2}) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_C),
\end{aligned}$$

demostrando que $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$ y concluyendo que la propiedad (SEÑALAR) es válida para todo $A \in \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G})$.

$\Leftarrow$) A continuación supongamos que $\mathbb{E}(H_1|\mathscr{F}_2,\mathscr{G}) = \mathbb{E}(H_1|G)$ para toda función H_1 que sea $\mathscr{F}_1$-medible. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H_1H_2|\mathscr{G}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_1H_2|\sigma(\mathscr{F}_2\cup\mathscr{G}))|\mathscr{G}) \qquad \text{(Por propiedad de torre)}\\
&= \mathbb{E}(H_2\mathbb{E}(H_1|\sigma(\mathscr{F}_2\cup\mathscr{G}))|\mathscr{G})\\
&\quad (H_2 \text{ es } \mathscr{F}_2\text{-medible y entonces será } \sigma(\mathscr{F}_2\cup\mathscr{G})\text{-medible})\\
&= \mathbb{E}(H_2\mathbb{E}(H_1|\mathscr{G})|\mathscr{G}) \qquad \text{(Por hipótesis)}\\
&= \mathbb{E}(H_1|\mathscr{G})\mathbb{E}(H_2|\mathscr{G}) \qquad (\text{Por } \mathscr{G}\text{-medibilidad de } \mathbb{E}(H_1|\mathscr{G})),
\end{aligned}$$

finalizando la demostración. □

3. Pruebe que $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots,$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ si y sólo si para cada $n \geq 1$, $\mathscr{F}_{n+1}$ es condicionalmente independiente de $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n$ dada $\mathscr{G}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$ son cond. ind. dada $\mathscr{G}$. Definamos $\mathscr{F}^n := \mathscr{F}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{F}_n$: Por el inciso 2), solo será necesario demostrar que para cualquier función H_{n+1} que sea $\mathscr{F}_{n+1}$-medible y acotada, se cumple que

$$\mathbb{E}(H_{n+1}|\sigma(\mathscr{F}^n\cup\mathscr{G})) = \mathbb{E}(H_{n+1}|\mathscr{G}).$$

Definamos $Y := \mathbb{E}(H_{n+1}|\mathscr{G})$.

$$\mathcal{C} := \{C \in \sigma(\mathscr{F}^n\cup\mathscr{G}) : C = F_1\cap\cdots\cap F_n\cap G \text{ donde } F_i \in \mathscr{F}_i \text{ y } G \in \mathscr{G}\}.$$

Claramente $\mathcal{C}$ es un π sistema, y por los mismos argumentos que en el inciso 2), $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathscr{F}^n\cup\mathscr{G})$. Siendo así, definamos

$$\mathcal{L} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \mathbb{E}(H_{n+1}\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)\}.$$

En el inciso 2) se demostró para un conjunto casi idéntico que este es un λ-sistema. Por lo tanto, si demostramos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$, entonces se tendrá como conclusión que $\mathcal{L} = \sigma(\mathcal{C})$ y por lo tanto que la propiedad (SEÑALAR) es válida en todo $\sigma(\mathcal{C})$. Entonces, sea $C \in \mathcal{C}$ tal que $C = F_1\cap\cdots\cap F_n\cap G$ donde $F_i \in$

$\mathscr{F}_i$ y $G \in \mathscr{G}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H_{n+1}\mathbb{1}_C) &= \mathbb{E}(H_{n+1}\mathbb{1}_{F_1}\cdots\mathbb{1}_{F_n}\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_{n+1}\mathbb{1}_{F_1}\cdots\mathbb{1}_{F_n}\mathbb{1}_G|\mathscr{G}))\\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_G\mathbb{E}(H_{n+1}\mathbb{1}_{F_1}\cdots\mathbb{1}_{F_n}|\mathscr{G}))\\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_G\left(\mathbb{E}(H_{n+1}|\mathscr{G})\mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_1}|\mathscr{G})\cdots\mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_n}|\mathscr{G})\right)) \qquad \text{(Por ind. cond.)}\\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_G Y\mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_1}\cdots\mathbb{1}_{F_n}|\mathscr{G})) \qquad \text{(Por def. de } Y \text{ y por ind. cond.)}\\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_G Y\mathbb{1}_{F_1}\cdots\mathbb{1}_{F_n}|\mathscr{G}))\\
&\quad\ \text{(Por } \mathscr{G} \text{ medibilidad de } Y \text{ y } G)\\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_G Y\mathbb{1}_{F_1}\cdots\mathbb{1}_{F_n})\\
&= \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_C),
\end{aligned}$$

es decir, $C \in \mathcal{L}$, entonces $\mathcal{L} = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathscr{F}^n \cup \mathscr{G})$ y la propiedad (SEÑALAR) se cumplirá en todo $\sigma(\mathscr{F}^n \cup \mathscr{G})$.

$\Leftarrow$)Ahora supongamos que para todo $n \geq 2$, $\mathscr{F}_n \perp_{\mathscr{G}} \sigma(\mathscr{F}^{n-1} \cup \mathscr{G})$, es decir, que para cualquier función H_n que sea $\mathscr{F}_n$-medible, se cumple

$$\mathbb{E}(H_{n+1}|\sigma(\mathscr{F}^n \cup \mathscr{G})) = \mathbb{E}(H_{n+1}|\mathscr{G}),$$

y queda por demostrar que si H_i es una función $\mathscr{F}_i$-medible para todo $i \leq n$, entonces

$$\mathbb{E}(\, H_1 \cdots H_n \,|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(\, H_1 \,|\mathscr{G}) \cdots \mathbb{E}(\, H_n \,|\mathscr{G})\,,$$

lo cual será demostrado por inducción. La base para el caso $n = 2$ está demostrado en el inciso 2). Supongamos entonces que (SEÑALAR) es válido para n. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H_1\cdots H_{n+1}|\mathscr{G}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_1\cdots H_{n+1}|\sigma(\mathscr{F}^n\cup\mathscr{G}))|\mathscr{G}) \qquad \text{(Por propiedad de torre)}\\
&= \mathbb{E}(H_1\cdots H_n\mathbb{E}(H_{n+1}|\sigma(\mathscr{F}_2\cup\mathscr{G}))|\mathscr{G})\\
&\quad\ (H_1\cdots H_n \text{ son } \sigma(\mathscr{F}^n\cup\mathscr{G})\text{-medibles})\\
&= \mathbb{E}(H_1\cdots H_n\mathbb{E}(H_{n+1}|\mathscr{G})|\mathscr{G}) \qquad \text{(Por hipótesis (no de ind.))}\\
&= \mathbb{E}(H_{n+1}|\mathscr{G})\mathbb{E}(H_1\cdots H_n|\mathscr{G}) \qquad \text{(Por } \mathscr{G}\text{-medibilidad de } \mathbb{E}(H_1|\mathscr{G}))\\
&= \left(\mathbb{E}(H_1|\mathscr{G})\cdots\mathbb{E}(H_n|\mathscr{G})\right)\mathbb{E}(H_{n+1}|\mathscr{G}) \qquad \text{(Por hip. ind.)},
\end{aligned}$$

finalizando la inducción y la prueba.

□

Categorías: Esperanza condicional, Independencia condicional.

Problema 2. Sea μ una distribución de progenie y defina $\tilde{\mu}_j = \mu_{j+1}$. Sea $S = (S_n)$ una caminata aleatoria con distribución de salto $\tilde{\mu}$. Sea k un entero no-negativo y defina recursivamente

$$Z_0 = k = C_0, \quad Z_{n+1} = k + S_{C_n} \quad \text{y} C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}.$$

1. Pruebe que $Z_n \geq 0$ para toda n y que si $Z_n = 0$ entonces $Z_{n+1} = 0$.

   Demostración. En el caso en que $Z_n = 0$, se tiene que $0 = k + S_{C_{n-1}}$ y que $C_n = C_{n-1} + 0$, que conjuntamente dan como resultado $S_{C_n} = S_{C_{n-1}} = k$, de manera que por definición, $Z_{n+1} = k + S_{C_n} = k - k = 0$. Es decir, si en algún momento el proceso Z alcanza el nivel 0, se quedará ahí en los siguientes pasos.

   Antes de continuar, notemos que la caminata aleatoria S tiene incrementos, digamos $\tilde{\xi}_i \sim \tilde{\mu}$, con soporte en $\{-1, 0, 1, \dots\}$, o equivalentemente con incrementos $\xi_i - 1$ donde $\xi_i \sim \mu$ con soporte en $\{0, 1, \dots\}$. Para demostrar que $Z_n \geq 0$ para toda n, se hará por inducción. $Z_0 = K \geq 0$, demostrando la base. Ahora supongamos que $Z_n \geq 0$. De nuevo, si Z_n es 0, entonces $Z_{n+1} = 0$. Si $Z_n > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
Z_{n+1} &= k + S_{C_n} = k + S_{C_{n-1}+Z_n} = k + S_{C_{n-1}+Z_n} - Z_n + Z_n \\
&= k + S_{C_{n-1}+Z_n} - (k - S_{C_{n-1}}) + Z_n \\
&= (S_{C_{n-1}+Z_n} - S_{C_{n-1}}) + Z_n \\
&= \sum_{i=1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i - \sum_{i=1}^{C_{n-1}} \tilde{\xi}_i + Z_n \\
&= \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i + Z_n \\
&\geq \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} (-1) + Z_n \qquad \text{(Por el soporte de } \tilde{\xi}_i\text{)} \\
&= -Z_n + Z_n = 0,
\end{aligned}$$

   y se concluye que en ese caso, $Z_{n+1} \geq 0$. □

2. Pruebe que C_n es un tiempo de paro para la filtración canónica asociada a S.

   Demostración. Se demostrará por inducción. El caso $C_0 = k$ es un tiempo de paro respecto a cualquier filtración, quedando demostrada la base. Entonces supongamos que C_n es un tiempo de paro respecto a la filtración asociada a S, digamos $\mathscr{F}_m = \sigma(S_i, i \leq m)$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\{C_{n+1} = j\} = \{C_n + Z_{n+1} = j\} &= \cup_{i=0}^{j} \{C_n = i, Z_{n+1} = j - i\} \\
&= \cup_{i=0}^{j} \{C_n = i, k + S_{C_n} = j - i\} \\
&= \cup_{i=0}^{j} \{C_n = i, k + S_i = j - i\} \\
&= \cup_{i=0}^{j} [\{C_n = i\} \cap \{S_i = j - i - k\}]
\end{aligned}$$

donde $\{C_n = i\} \in \mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_j$ por hipótesis de inducción y $\{S_i = j - i - k\} \in \mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_j$ por definición de $\mathscr{F}_m$. La unión de estos eventos para todo $i \geq j$ se mantiene en $\mathscr{F}_j$, por lo tanto $\{C_{n+1} = j\} \in \mathscr{F}_j$, entonces C_{n+1} es un tiempo de paro respecto a $\mathscr{F}_m$, finalizando la inducción. $\square$

3. Pruebe que Z es un proceso de Galton-Watson con ley de progenie μ.

Demostración. Z es un proceso de Galton-Watson si y sólo si

$$Z_0 = k \text{ y } Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i,n},$$

para alguna colección $\{\xi_{i,n}\}_{i,n\in\mathbb{N}}$ v.a.i.i.d. con distribución μ y con soporte en $\mathbb{Z}_+$. Para comprobar la segunda propiedad, basta sustituir en S los incrementos $\tilde{\xi}_i \sim \tilde{\mu}$ por $\xi_i - 1$ donde $\xi_i \sim \mu$, descritos en el inciso 1). Es decir, por (SEÑALAR) se tendrá que

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i + Z_n \\ &= \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} (\xi_i - 1) + Z_n \\ &= \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \xi_i - Z_n + Z_n \\ &= \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \xi_i \\ &= \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i+C_{n-1}}, \end{aligned}$$

de manera que los incrementos de la caminata aleatoria S, en lugar de tomarlos de una sucesión lineal (que es lo que se está haciendo), los podríamos tomar de una colección de dimensión 2. Entonces haciendo $\xi_{i,n} = \xi_{i+C_{n-1}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $i \leq Z_n$ (que son justamente las v.a. que usamos y necesitamos), entonces

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i,n},$$

que tendrá incrementos con distribución μ y soporte en $\{0, 1, \dots\}$, finalizando la demostración. $\square$

4. Pruebe que si S alcanza -1 entonces existe n tal que $Z_n = 0$. Deduzca que si la media de μ es 1 entonces Z se extingue. (Sugerencia: utilice un ejercicio anterior sobre martingalas con saltos acotados hacia abajo.)

   Demostración. Si $\mathbb{E}(\xi) = 1$, entonces $\mathbb{E}(\tilde{\xi}) = 0$. Es decir, S es una caminata aleatoria con saltos integrables cuya media es 0, por lo que usando (SEÑALAR), esta caminata oscila y en particular, $\liminf_n S_n = -\infty$. Para demostrar que en algún momento Z alcanza el nivel 0, supongamos que no lo hace, es decir, que $Z_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_n = C_{n-1} + Z_n > C_{n-1}$, por lo que C es una sucesión estrictamente creciente y por lo tanto tiende a ∞. Además, en estos puntos sabemos que $k + S_{C_n} = Z_{n+1} > 0$, es decir, que $S_{C_n} > -k$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Solamente falta estudiar los tiempos entre los instantes C_n y C_{n+1} en la caminata aleatoria S. Notemos que existirán Z_{n+1} saltos entre estos tiempos, entonces para $j \in \{1, \ldots, Z_{n+1}\}$, se tendrá que

$$\begin{aligned} S_{C_n+j} &= S_{C_n} + \sum_{i=C_n+1}^{C_n+j} \tilde{\xi}_i \\ &\geq S_{C_n} + \sum_{i=C_n+1}^{C_n+j} (-1) \qquad \text{(Por el soporte de } \tilde{\xi}_i\text{)} \\ &= S_{C_n} - j \leq S_{C_n} - Z_{n+1} = S_{C_n} - (k + S_{C_n}) = -k, \end{aligned}$$

   es decir, la cadena S será mayor que $-k$ en los pasos entre los tiempos C_n y C_{n+1} (para toda $n \in \mathbb{N}$), y por lo tanto se tendrá que $S_n \geq -k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción ya que S oscila, demostrando que Z debe tomar el valor 0 en algún punto. $\square$

Categorías: Caminatas aleatorias, Procesos de Galton-Watson

Problema 3. El objetivo de este ejercicio es ver ejemplos de cadenas de Markov X y de funciones f tales que $f(X) = (f(X_n), n \in \mathbb{N})$ sean o no cadenas de Markov.

1. Considere el hipercubo n-dimensional $E = \{0,1\}^n$. A E lo pensaremos como la composición de la primera de dos urnas que tienen en total n bolas etiquetadas del 1 al n. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, interpretaremos $x_i = 1$ como que la bola i está en la urna 1. Considere el siguiente experimento aleatorio: inicialmente la composición de las urnas está dada por x y a cada instante de tiempo escogemos una bola al azar y la cambiamos de urna. Modele esta situación por medio de una cadena de Markov X en E. Sea $f : E \to \{0, \ldots, n\}$ dada por $f(x) = \sum_i x_i$. Pruebe que $f(X) = (f(X_n), n \in \mathbb{N})$ es una cadena de Markov cuya matriz de transición determinará.

Demostración. Sean $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $z = (z_1, \ldots, z_n)$ elementos de E. Lo primero que hay que notar, es que la transición de un estado a otro depende solamente de la constitución actual de las urnas (y no de como estuvieron compuestas anteriormente), es decir, es razonable pensar que se puede modelar mediante una cadena de Markov. El experimento dice que se puede cambiar una bola a la vez en cada paso, es decir, para ir de y a z en un paso, se debe cumplir que haya exactamente un cambio en alguna coordenada de estos vectores, o en otras palabras, que $\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| = 1$. Las demás transiciones serán imposibles. También hay que notar que para y fijo, existen n vectores z en total que cumplen tal condición (cambiando cada una de las coordenadas), y que la elección de la coordenada a cambiar es equiprobable. Por lo tanto, la matriz de transición para el proceso que deseamos construir tendrá entradas

$$p_{y,z} = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| = 1}$$

para todo $y, z \in E$, tendiendo como distribución inicial $\nu = \delta_x$. Por las notas, se tiene que dados estos parámetros existirá una cadena de Markov, digamos X, que tiene esta matriz de transición y distribución inicial, finalizando la primera parte.

Para ver si el proceso $Y = f(X)$ es una cadena de Markov, basta ver que este modelo es el de las urnas de Ehrenfest, el cual ya fue estudiado en clase y concluimos que su matriz de transición estaba dada por

$$p_{i,j} = \frac{n-i}{n}\delta_{j,i+1} + \frac{i}{n}\delta_{j,i-1}.$$

□

2. Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{Z}$ y matriz de transición

$$P_{i,i+1} = p \quad P_{i,i-1} = 1 - p$$

donde $p \in [0, 1]$. Dé una condición necesaria y suficiente para que $(|S_n|, n \in \mathbb{N})$ sea una cadena de Markov.

Demostración. Antes de empezar, calculemos $\mathbb{P}(S_n = i | S_0 = 0)$. Hay que notar que esta probabilidad es positiva solo si n y i son pares o impares y si $n \geq |i|$ (los demás casos tendrán probabilidad 0). Bajo estos supuestos, para que suceda que $S_n = i$, tuvo que suceder que el proceso subió en total $(n + i)/2$ veces y bajo $(n - i)/2$ veces, en cualquier orden. Pero existen justamente

$$\binom{n}{(n+i)/2} = \binom{n}{(n-i)/2}$$

de estas ordenaciones, por lo tanto se tiene que

$$\mathbb{P}(S_n = i | S_0 = 0) = \binom{n}{(n+i)/2} p^{(n+i)/2} q^{(n-i)/2},$$

y al ser una caminata aleatoria, se puede generalizar a

$$\mathbb{P}(S_n = i | S_0 = x_0) = \mathbb{P}(S_n = i - x_0 | S_0 = 0) = \binom{n}{(n+i-x_0)/2} p^{(n+i-x_0)/2} q^{(n-i+x_0)/2}.$$

Sigamos con el estudio de $|S_n|$, al ver que este proceso solamente se puede mover, al igual que S_n, una unidad para arriba o una para abajo en cada paso; estudiaremos el caso cuando este se mueve una unidad para arriba y así también concluiremos, por complementación, el estudio del proceso cuando este se mueve un paso para abajo. Demostraremos que bajo la condición $|S_0| = 0$, la cadena $|S_n|$ es efectivamente una cadena de Markov homogénea. Pero mientras, supongamos que $|S_0| = x_0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{x_0}(|S_n| = i+1 || S_n| = i) &= \frac{\mathbb{P}_{x_0}(|S_n| = i+1, |S_n| = i)}{\mathbb{P}_{x_0}(|S_n| = i)} \\
&= \frac{\mathbb{P}_{x_0}(S_n = i+1, S_n = i) + \mathbb{P}_{x_0}(S_n = -i-1, S_n = -i)}{\mathbb{P}_{x_0}(S_n = i) + \mathbb{P}_{x_0}(S_n = -i)} \\
&= \frac{\mathbb{P}_{x_0}(S_n = i)p + \mathbb{P}_{x_0}(S_n = -i)q}{\mathbb{P}_{x_0}(S_n = i) + \mathbb{P}_{x_0}(S_n = -i)} \\
&= \frac{\left(\binom{n}{(n+i-x_0)/2} p^{(n+i-x_0)/2} q^{(n-i+x_0)/2}\right) p + \left(\binom{n}{(n-i-x_0)/2} p^{(n-i-x_0)/2} q^{(n+i+x_0)/2}\right) q}{\left(\binom{n}{(n+i-x_0)/2} p^{(n+i-x_0)/2} q^{(n-i+x_0)/2}\right) + \left(\binom{n}{(n-i-x_0)/2} p^{(n-i-x_0)/2} q^{(n+i+x_0)/2}\right)} \\
&= \frac{\left(\binom{n}{(n+i-x_0)/2} p^{i+1}\right) + \left(\binom{n}{(n-i-x_0)/2} q^{i+1}\right)}{\left(\binom{n}{(n+i-x_0)/2} p^{i}\right) + \left(\binom{n}{(n-i-x_0)/2} q^{i}\right)}
\end{aligned}$$

(Factorizando $p^{(n-i-x_0)/2} q^{(n-i+x_0)/2}$).

Hasta ese punto es donde se puede llegar suponiendo que $S_0 = x_0$; sin embargo, si suponemos que $x_0 = 0$, todas las combinaciones de la expresión anterior son iguales, por lo tanto se cancelan y tendríamos que

$$\mathbb{P}_0(|S_n| = i+1 || S_n| = i) = \frac{p^{i+1} + q^{i+1}}{p^i + q^i},$$

que no depende de n y por lo tanto $|S_n|$ es una cadena de Markov homogénea. □

Categorías: Proyecciones de cadenas de Markov

Problema 4. Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos medidas de probabilidad en el espacio canónico $E^{\mathbb{N}}$ para sucesiones con valores en un conjunto a lo más numerable E. Decimos que $\mathbb{Q}$ es **localmente absolutamente continua** respecto de $\mathbb{P}$ si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n} \ll \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}$. Sea

$$D_n = \frac{d\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n}}{d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}}.$$

1. Pruebe que D es una martingala bajo $\mathbb{P}$. Pruebe que si D es uniformemente integrable entonces $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.

Demostración. Por definición de derivada de Radon-Nikodym, D_n es $\mathscr{F}_n$-medible y como $\mathbb{Q}$ es una medida no negativa, entonces D_n es no negativa c.s. y entonces

$$\mathbb{E}(|D_n|) = \mathbb{E}(D_n) = \int D_n d\mathbb{P} = \int D_n d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n}(\Omega) = \mathbb{Q}(\Omega) = 1,$$

por lo tanto es integrable. Falta demostrar la condición de martingala, es decir, demostrar que para todo $A \in \mathscr{F}_n$, se tiene que $\mathbb{E}(D_n \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(D_{n+1}\mathbb{1}_A)$ bajo $\mathbb{P}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D_n \mathbb{1}_A) &= \int D_n \mathbb{1}_A d\mathbb{P} \\
&= \int D_n \mathbb{1}_A d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} \qquad (D_n \mathbb{1}_A \text{ es } \mathscr{F}_n\text{-medible}) \\
&= \mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n}(A) = \mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_{n+1}}(A) \qquad (A \in \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}) \\
&= \int D_{n+1} \mathbb{1}_A d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_{n+1}} \\
&= \int D_{n+1} \mathbb{1}_A d\mathbb{P} \qquad (D_{n+1}\mathbb{1}_A \text{ es } \mathscr{F}_{n+1}\text{-medible}) \\
&= \mathbb{E}(D_{n+1}\mathbb{1}_A),
\end{aligned}$$

demostrando que efectivamente, D es una martingala bajo $\mathbb{P}$.

Si suponemos que D es uniformemente integrable, entonces sabemos que converge c.s. y en L_1 a D_∞, y además $D_n = \mathbb{E}(D_\infty | \mathscr{F}_n)$. Si demostramos que para todo $A \in \mathscr{F}$ se cumple que

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A D_\infty d\mathbb{P},$$

habremos demostrado que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Lo haremos por el método usual de clases monótonas (no Dynkin). Sea $\mathcal{C} = \cup_n \mathscr{F}_n$. Claramente $\mathcal{C}$ es un álgebra. Sea $A \in \mathcal{C}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \in \mathscr{F}_k$. Pero como $D_k = \mathbb{E}(D_\infty | F_k)$, en este caso se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_k}(A) &= \int D_k \mathbb{1}_A d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_k} \\ &= \int D_\infty \mathbb{1}_A d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_k} \\ &= \int D_\infty \mathbb{1}_A d\mathbb{P},\end{aligned}$$

y por lo tanto la propiedad deseada es válida en todo $\mathcal{C}$. Definimos

$$\mathcal{L} := \{A \in \sigma(\cup_n \mathscr{F}_n) : \mathbb{Q}(A) = \int_A D_\infty d\mathbb{P}\}.$$

Se acaba de demostrar que el álgebra $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$, por lo tanto si demostramos que $\mathcal{L}$ es una clase monótona, entonces se tendrá que $\mathcal{L} = \sigma(\cup_n \mathscr{F}_n)$ y entonces la propiedad (SEÑALAR) se cumplirá para toda $A \in \sigma(\cup_n \mathscr{F}_n)$, demostrando que efectivamente $q \ll \mathbb{P}$. Entonces sea $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}$ una sucesión creciente, es decir, se tiene que $\mathbb{1}_{\cup_i A_i} = \lim_{i\to\infty} \mathbb{1}_{A_i}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\cup_i A_i) = \lim_{i\to\infty} q(A_i) &= \lim_{i\to\infty} \int D_\infty \mathbb{1}_{A_i} d\mathbb{P} \\ &= \int D_\infty \mathbb{1}_{\cup_i A_i} d\mathbb{P} \qquad \text{(Por conv. monótona).}\end{aligned}$$

Lo mismo sucede si consideramos una suceción decreciente (ahí se usa convergencia acotada), de manera que $\mathcal{L}$ es una clase monotona y $\mathcal{L} = \sigma(\cup_n \mathscr{F}_n)$, finalizando la demostración. □

2. Pruebe que si T es un tiempo de paro finito entonces $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_T} \ll \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$.

   Demostración. De nuevo, bastará con demostrar que para todo $A \in \mathscr{F}_T$,

$$\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_T}(A) = \int_A D_T d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}.$$

Por (SEÑALAR), sabemos que si T es un tiempo de paro finito, entonces D_T es $\mathscr{F}_T$-medible. Entonces

$$\begin{aligned}
\int D_T \mathbb{1}_A d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T} &= \int D_T \mathbb{1}_A d\mathbb{P} \\
&= \int \sum_{i=1}^{\infty} D_T \mathbb{1}_{A\cap\{T=i\}} d\mathbb{P} \\
&= \int \sum_{i=1}^{\infty} D_i \mathbb{1}_{A\cap\{T=i\}} d\mathbb{P} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int D_i \mathbb{1}_{A\cap\{T=i\}} d\mathbb{P} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int D_i \mathbb{1}_{A\cap\{T=i\}} d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_i} \\
&\quad (\text{Por } \mathscr{F}_i\text{-medibilidad de } D_i \mathbb{1}_{A\cap\{T=i\}}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}_{\mathscr{F}_i}(A\cap\{T=i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}(A\cap\{T=i\}) \\
&= \mathbb{Q}(A\cap\{T<\infty\}) = \mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_T}(A),
\end{aligned}$$

finalizando la prueba. □

3. Sea $\mathbb{P}^p$ la distribución de una caminata aleatoria simple que comienza en 0 y va de k a $k+1$ con probabilidad p, donde $p \in (0,1)$. Pruebe que $\mathbb{P}^p$ es localmente absolutamente continua respecto de $\mathbb{P}^{1/2}$ y encuentre la martingala D_n asociada.

Demostración. Consideremos una trayectoria válida del proceso hasta el paso n, digamos A_n, que sube $k = k(A_n)$ veces y baja $n-k$. Entonces

$$\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(A_n) = p^k q^{n-k} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}^{1/2}|_{\mathscr{F}_n}(A_n) = 1/2^n,$$

de manera que podemos expresar a

$$\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(A_n) = (2p)^k (2q)^{n-k} \frac{1}{2^n} = 2^n (p/q)^k (q)^n \mathbb{P}^{1/2}|_{\mathscr{F}_n}(A_n).$$

Sin embargo, k depende de la trayectoria elegida, pero bajo A_n, el numero de saltos hacia arriba es exactamente $(X_n+n)/2$, por lo tanto

$$\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(A_n) = 2^n (p/q)^{(X_n+n)/2} (q)^n \mathbb{P}^{1/2}|_{\mathscr{F}_n}(A_n).$$

La función $2^n(p/q)^{(X_n+n)/2}(q)^n$ será nuestro candidato para D_n, que de nuevo está definido para toda trayectoria hasta el paso n válida,es decir, estará definida para todo el conjunto

$$\mathcal{C} := \{A_n \in \mathscr{F}_n : A_n \text{ es una trayectoria válida hasta } n\} \cup \emptyset,$$

el cual es un π-sistema que genera a $\mathscr{F}_n$. Consideremos también a la familia

$$\mathcal{L} := \{A_n \in \mathscr{F}_n : \mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(A_n) = \int D_n d\, p^{1/2}|_{\mathscr{F}_n}.$$

Por lo argumentado inicialmente, $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$. Por lo tanto, si demostramos que $\mathcal{L}$ es un λ-sistema, lo cual es bastante parecido (y se omitirá) al procedimiento usado en los ejercicios anteriores (usando propiedades de la integral), concluiremos que efectivamente, la función D_n propuesta es la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(A_n)$ respecto a $\mathbb{P}^{1/2}|_{\mathscr{F}_n}(A_n)$, y en conclusión $\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n} \ll \mathbb{P}^{1/2}|_{\mathscr{F}_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\mathbb{P}^p$ es localmente absolutamente continua respecto de $\mathbb{P}^{1/2}$. □

4. Para $a, b > 0$, sea $T = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : X_n \in \{-a, b\}\}$. Pruebe que T y X_T son independientes bajo $\mathbb{P}^{1/2}$. Al utilizar la continuidad absoluta local, pruebe que T y X_T también son independientes bajo $\mathbb{P}^p$. Utilice alguna martingala de ejercicios anteriores para calcular $\mathbb{E}(T^2)$.

Demostración. (FALTA) □

Categorías: Cambio de medida, Caminata aleatoria simple.

Problema 5. Sea N un proceso Poisson de parámetro λ y sea T_n el tiempo de su enésimo salto.

1. Pruebe que condicionalmente a T_2, T_1 es uniforme en $[0, T_2]$.

   Demostración. Como N es un proceso Poisson, $T_1, T_2 - T_1 \sim Exp(\lambda)$ y son independientes, por lo que

$$f_{T_1, T_2 - T_1}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{x \geq 0, y \geq 0},$$

   y haciendo una transformación lineal $g : (T_1, T_2 - T_1) \to (T_1, T_2)$, que puede ser representado mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   tiene como determinante a 1. Entonces se tendrá que

$$f_{T_1,T_2}(x, y) = f_{T_1,T_2-T_1}(g^{-1}(x, y)) = f_{T_1,T_2-T_1}(x, y - x) = \lambda^2 e^{-\lambda(y)} \mathbb{1}_{y \geq x \geq 0}.$$

   Además, $T_2 \sim Gamma(2, \lambda)$, es decir,

$$f_{T_2}(y) = \lambda^2 y e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y \geq 0},$$

por lo que

$$f_{T_1|T_2}(x|y) = \frac{f_{T_1,T_2}(x,y)}{f_{T_2}(y)} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda(y)} \mathbb{1}_{y \geq x \geq 0}}{\lambda^2 y e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y \geq 0}} = \frac{\mathbb{1}_{y \geq x \geq 0}}{y},$$

que se traduce a que bajo el evento $\{T_2 = y\}$, T_1 tendrá una distribución uniforme en el intervalo $[0, y]$. □

2. Pruebe que si W_1 y W_2 son exponenciales de parámetro λ independientes entre si y de una variable uniforme U, entonces $U(W_1 + W_2)$ es una variable aleatoria exponencial de parámetro λ.

   Demostración. Se tiene que $W_1 + W_2 \sim Gamma(2, \lambda)$ y es independiente de U. Entonces consideremos la transformación $g : (a, b) \to (a, ab)$ y su inversa $g^{-1} : (a, b) \to (a, b/a)$, cuyo Jacobiano es $1/a$. Entonces

$$\begin{aligned}
f_{U(W_1+W_2)}(x) &= \int f_{W_1+W_2, U(W_1+W_2)}(y, x) dy \\
&= \int_0^\infty f_{W_1+W_2}(y) f_U(x/y)(1/y) dy \\
&= \int_0^\infty \mathbb{1}_{1 \geq x/y \geq 0} \lambda^2 y e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y \geq 0}(1/y) dy \\
&= \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y \geq x \geq 0} dy \\
&= \int_x^\infty \lambda^2 e^{-\lambda y} dy \\
&= \lambda e^{-\lambda x},
\end{aligned}$$

   finalizando la demostración. □

3. Conjeture cómo se generaliza lo anterior con T_n y T_1.

   Demostración. De nuevo, consideremos una función $g : (T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}) \to (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, que puede ser representada mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo Jacobiano vale 1. Entonces

$$\begin{aligned} f_{T_1,T_2,\ldots,T_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n) &= f_{T_1,T_2-T_1,\ldots,T_n-T_{n-1}}(t_1,t_2-t_1,\ldots,t_n-t_{n-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda(t_i-i_{i-1})} \mathbb{1}_{t_i-t_{i-1}\geq 0} \qquad (\text{Haciendo } t_0=0) \\ &= \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_n}. \end{aligned}$$

Además, como $T_n \sim Gamma(n,\lambda)$,

$$\begin{aligned} f_{T_1,\ldots,T_{n-1}|T_n}(t_1,\ldots,t_{n-1}|t_n) &= \frac{f_{T_1,\ldots,T_{n-1},T_n}(t_1,\ldots,t_{n-1},t_n)}{f_{T_n}(t_n)} \\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda t_n}\mathbb{1}_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_n}}{(1/(n-1)!)\lambda^n t_n^{n-1} e^{-\lambda t_n}\mathbb{1}_{t_n\geq 0}} \\ &= \frac{(n-1)!\mathbb{1}_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_n}}{t_n^{n-1}}, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} f_{T_1|T_n}(t_1|t_n) &= \int\cdots\int \frac{(n-1)!\mathbb{1}_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_n}}{t_n^{n-1}} dt_2\cdots dt_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{t_n^{n-1}} \int\cdots\int \mathbb{1}_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_n} dt_2\cdots dt_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{t_n^{n-1}} \int\cdots\int \mathbb{1}_{0\leq t_1\leq\cdots\leq t_n} dt_2\cdots dt_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{t_n^{n-1}} \mathbb{1}_{0\leq t_1\leq t_n} \int_{t_1}^{t_n}\cdots\int_{t_1}^{t_3} 1 dt_2\cdots dt_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{t_n^{n-1}} \mathbb{1}_{0\leq t_1\leq t_n} \frac{(t_n-t_1)^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= (n-1)\frac{(t_n-t_1)^{n-2}}{t_n^{n-1}} \mathbb{1}_{0\leq t_1\leq t_n} \\ &= (n-1)\left(1-\frac{t_1}{t_n}\right)\left(\frac{1}{t_n}\right)^{n-2} \mathbb{1}_{0\leq t_1\leq t_n}. \end{aligned}$$

□

4. Escriba dos programas en Octave que simulen al proceso de Poisson de parámetro λ en el intervalo $[0,1]$. En uno utilizará sólo variables exponenciales y en el otro puede utilizar una variable Poisson.

Problema 6. Sea Ξ una medida de Poisson aleatoria en $(0,\infty)\times(0,\infty)$ cuya medida de intensidad ν está dada por $\nu(ds,dx) = \mathbf{1}_{x>0} C/x^{1+\alpha}\, ds\, dx$.

1. Determine los valores de α para los cuales $\int 1 \wedge x \, \nu(dx) < \infty$.

Demostración. Se tomará $\nu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = \mathbb{1}_{s \geq 0, x > 0} C/x^{1+\alpha} \mathrm{d}s\mathrm{d}x$. Para $s < 0$ cualquier integral será exactamente igual a 0. Por lo tanto, elijamos $s \geq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int 1 \wedge x \nu(s, \mathrm{d}s) &= \int (1 \wedge x) \mathbb{1}_{s \geq 0, x > 0} \frac{C}{x^{1+\alpha}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty (1 \wedge x) \frac{C}{x^{1+\alpha}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x \frac{C}{x^{1+\alpha}} \mathrm{d}x + \int_1^\infty 1 \frac{C}{x^{1+\alpha}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{C}{x^\alpha} \mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{C}{x^{1+\alpha}} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Estudiemos estas dos integrales a continuación. Si $\alpha = 1$, entonces

$$\int_0^1 \frac{C}{x^\alpha} \mathrm{d}x = [C \log(x)]_0^1 = -C \lim_{x \to 0} \log(x),$$

que converge a ∞ y por lo tanto no es un valor posible. Supongamos que $\alpha \neq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{C}{x^\alpha} \mathrm{d}x &= \int_0^1 C x^{-\alpha} \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{C x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_0^1 = \frac{C}{1-\alpha} - \lim_{x \to 0} \frac{C x^{1-\alpha}}{1-\alpha},
\end{aligned}$$

de manera que esta integral existe (y es igual a $C/(1-\alpha)$) si y solo si $\alpha < 1$.

Por otro lado, si $\alpha = 0$,

$$\int_1^\infty \frac{C}{x} \mathrm{d}x = C \log_{x \to \infty} \log(x),$$

el cual converge a ∞ y tamoco es una valor posible. Por lo tanto, supongamos que $\alpha \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{C}{x^{1+\alpha}} \mathrm{d}x &= \int_1^\infty C x^{-(1+\alpha)} \mathrm{d}x = \left[\frac{C x^{-\alpha}}{-\alpha} \right]_1^\infty \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{C x^{-\alpha}}{-\alpha} + \frac{C}{\alpha},
\end{aligned}$$

de manera que la integral existe (y es igual a C/α si y solo si $\alpha > 0$.

Por lo tanto, (SEÑALAR) es finito si y solo si $\alpha \in (0, 1)$. □

Nos restringimos ahora a valores de α para los cuales la integral anterior sea finita. Sean $f_t(s, x) = \mathbf{1}_{s \leq t} x$ y $X_t = \Xi f_t$.

2. Determine los valores de α para los cuales $X_t < \infty$ para toda $t \geq 0$ casi seguramente.

Demostración. En clase se demostró que Ξf_t es finito c.s. si y sólo si $\int (1 \wedge f_t) \mathrm{d}\nu$ es finito. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int (1 \wedge f_t) \mathrm{d}\nu &= \int \int (1 \wedge \mathbb{1}_{s \geq t} x) \mathbb{1}_{s \geq 0, x > 0} \frac{C}{x^{1+\alpha}} \mathrm{d}x \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_0^\infty (1 \wedge x) \frac{C}{x^{1+\alpha}} \mathrm{d}x \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \left(\int_0^1 \frac{C}{x^\alpha} \mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{C}{x^{1+\alpha}} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \left(\frac{C}{1-\alpha} + \frac{C}{\alpha} \right) \mathrm{d}s \qquad \text{(Por inciso anterior)} \\
&= t \left(\frac{C}{1-\alpha} + \frac{C}{\alpha} \right) = \frac{Ct}{\alpha(1-\alpha)}.
\end{aligned}$$

En conclusión, la restricción $\alpha \in (0, 1)$ es necesaria y suficiente. □

Nos restringiremos a dichos valores de α.

3. Calcule $\mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big)$ y pruebe que X_t tiene la misma distribución que $t^{1/\alpha} X_1$.

Demostración. Por clase, sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-\lambda X_t}) &= \mathbb{E}(e^{-\Xi[\lambda f_t]}) \qquad (\Xi \text{ es un operador lineal}) \\
&= \exp(-\int (1 - e^{-\lambda f_t}) \mathrm{d}\nu).
\end{aligned}$$

Calculando la integral,

$$\begin{aligned}
\int(1-e^{-\lambda f_t})\mathrm{d}\nu &= \int\int(1-e^{-\lambda \mathbb{1}_{s\leq t}x})\mathbb{1}_{s\geq 0,x>0}\frac{C}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\
&= \int_0^\infty\int_0^t(1-e^{-\lambda x})\frac{C}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\
&= Ct\int_0^\infty\frac{1-e^{-\lambda x}}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x\\
&= Ct\int_0^\infty\frac{\int_0^x\lambda e^{-\lambda r}\mathrm{d}r}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x\\
&= Ct\lambda\int_0^\infty\int_r^\infty\frac{e^{-\lambda r}}{x^{1+\alpha}}\mathrm{d}x\mathrm{d}r\\
&= Ct\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda r}\left[\frac{1}{-\alpha x^\alpha}\right]_r^\infty\mathrm{d}r\\
&= \frac{Ct\lambda}{\alpha}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda r}}{r^\alpha}\mathrm{d}r\\
&= \frac{Ct\lambda}{\alpha}\frac{\lambda^\alpha}{\lambda}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda r}}{(\lambda r)^\alpha}\lambda\mathrm{d}r \qquad \text{(Multiplicando por un 1 conveniente)}\\
&= \frac{Ct\lambda^\alpha}{\alpha}\int_0^\infty(\lambda r)^{(-\alpha+1)-1}e^{-\lambda r}\mathrm{d}(\lambda r)\\
&= \frac{Ct\lambda^\alpha}{\alpha}\Gamma(1-\alpha),
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda X_t}) = \exp\left(-\frac{Ct\lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\right),$$

que justamente corresponde a su transformada de Laplace. Tomando $t=1$ y $\lambda=\lambda' t'^{1/\alpha}$, entonces

$$\mathbb{E}(\exp(-\lambda' t'^{1/\alpha}X_1)) = \exp\left(-\frac{C\cdot 1\cdot(-\lambda' t'^{1/\alpha})^\alpha\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\right) = \exp\left(-\frac{Ct'\lambda'^\alpha\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\right),$$

es decir $\mathbb{E}(\exp(-\lambda(t^{1/\alpha}X_1))) = \mathbb{E}(\exp(-\lambda X_t))$, es decir, sus transformadas de Laplace coinciden, y como son variables aleatorias no negativas c.s., éstas deben tener la misma distribución. □

4. Diga por qué el siguiente código en Octave simula la trayectoria aproximada del proceso X en el intervalo $[0,1]$.

   Demostración. (FALTA) □

Problema 7. Pruebe que si X tiene incrementos independientes entonces el proceso X^t dado por $X^t_s = X_{t+s} - X_t$ es independiente de $\mathscr{F}^X_t = \sigma(X_s : s \geq 0)$.

Demostración. Supongamos que X^t tiene incrementos independientes. La σ-álgebra $\mathscr{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ es generada por los subconjuntos de la forma

$$\{\omega \in \Omega : X_s(\omega) \in A\}$$

para todo $s \in [0,t]$ y $A \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Más aún, $\mathscr{F}_t$ también es generada por los subconjuntos de la forma

$$\{X_{s_0} \in A_0, X_{s_1} - X_{s_0} \in A_1, \ldots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}} \in A_n\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_0 < s_1 < \cdots < s_n \leq t$ y $A_0, \ldots, A_n \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Para ver esto, notemos que los subconjuntos del primer tipo se pueden ver como subconjuntos del segundo tipo si hacemos $A_1, \ldots, A_n = \mathbb{R}$. Ademas, los conjuntos del segundo tipo son $\mathscr{F}_t$-medibles y por lo tanto, generan justamente a $\mathscr{F}_t$. Llamaremos a la familia de subconjuntos del segundo tipo (uniendo al elemento $\{\emptyset\}$) como $\mathcal{C}_t$. Por la discusión anterior se tendrá que $\sigma(\mathcal{C}_t) = \mathscr{F}_t$; además, notemos que $\mathcal{C}_t$ es un π-sistema.

Lo mismo se puede concluir para $\mathscr{F}^t = \sigma(X^t_r, r \geq 0) = \sigma(X_{t+r} - X_t, r \geq 0)$; es decir, que $\mathscr{F}^t$ es generada por subconjuntos de la forma

$$\{X_{t+r_0} - X_t \in B_0, X_{t+r_1} - X_{t+r_0} \in B_1, \ldots, X_{t+r_m} - X_{t+r_{m-1}} \in B_m\}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq r_0 < r_1 < \cdots < r_m \leq t$ y $B_0, \ldots, B_m \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. A la familia de subconjuntos de este tipo (unión el elemento $\{\emptyset\}$) le llamaremos $\mathcal{C}^t$, donde también se tendrá que $\sigma(\mathcal{C}^t) = \mathscr{F}^t$ y que $\mathcal{C}^t$ es un π-sistema.

Sea $D_0 \in \mathcal{C}^t$ fijo, es decir,

$$D_0 = \{X_{t+r^0_0} - X_t \in B^0_0, X_{t+r^0_1} - X_{t+r^0_0} \in B^0_1, \ldots, X_{t+r^0_{m^0}} - X_{t+r^0_{m^0-1}} \in B_{m^0}\}.$$

para algún $m^0 \in \mathbb{N}$, $0 \leq r^0_0 < r^0_1 < \cdots < r^0_{m^0} \leq t$ y $B^0_0, \ldots, B^0_{m^0} \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Definamos

$$\mathcal{L}_t := \{C \in \sigma(\mathcal{C}_t) = \mathscr{F}_t : \mathbb{P}(C \cap D_0) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D_0)\}.$$

Sea $C_0 \in \mathcal{C}_t$, es decir,

$$C_0 = \{X_{s^0_0} \in A^0_0, X_{s^0_1} - X_{s^0_0} \in A^0_1, \ldots, X_{s^0_{n^0}} - X_{s^0_{n^0-1}} \in A^0_{n^0}\}$$

para algún $n^0 \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_0 < s_1 < \cdots < s_{n^0} \leq t$ y $A_0, \ldots, A_{n^0} \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_0 \cap D_0) &= \mathbb{P}(\{X_{s_0^0} \in A_0^0, X_{s_1^0} - X_{s_0^0} \in A_1^0, \ldots, X_{s_{n^0}^0} - X_{s_{n^0-1}^0} \in A_{n^0}^0\} \cap \\
&\quad \{X_{t+r_0^0} - X_t \in B_0^0, X_{t+r_1^0} - X_{t+r_0^0} \in B_1^0, \ldots, X_{t+r_{m^0}^0} - X_{t+r_{m^0-1}^0} \in B_{m^0}\}) \\
&= \mathbb{P}(\{X_{s_0^0} \in A_0^0, X_{s_1^0} - X_{s_0^0} \in A_1^0, \ldots, X_{s_{n^0}^0} - X_{s_{n^0-1}^0} \in A_{n^0}^0\} \cap \\
&\quad \{X_t - X_{s_{n^0}^0} \in \mathbb{R}\} \cap \\
&\quad \{X_{t+r_0^0} - X_t \in B_0^0, X_{t+r_1^0} - X_{t+r_0^0} \in B_1^0, \ldots, X_{t+r_{m^0}^0} - X_{t+r_{m^0-1}^0} \in B_{m^0}\}) \\
&= \mathbb{P}(X_{s_0^0} \in A_0^0, X_{s_1^0} - X_{s_0^0} \in A_1^0, \ldots, X_{s_{n^0}^0} - X_{s_{n^0-1}^0} \in A_{n^0}^0) \times \\
&\quad \mathbb{P}(X_t - X_{s_{n^0}^0} \in \mathbb{R}) \times \\
&\quad \mathbb{P}(X_{t+r_0^0} - X_t \in B_0^0, X_{t+r_1^0} - X_{t+r_0^0} \in B_1^0, \ldots, X_{t+r_{m^0}^0} - X_{t+r_{m^0-1}^0} \in B_{m^0}) \\
&= \mathbb{P}(C_0) \times 1 \times \mathbb{P}(D_0),
\end{aligned}$$

de manera que $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{L}_t$. Si demostramos que $\mathcal{L}_t$ es un λ-sistema, se tendría que $\mathcal{L}_t = \sigma(\mathcal{C}_t)$; esta prueba es muy sencilla y se ha realizado en repetidas ocasiones; esta vez bastará con utilizar la propiedad de aditividad finita continuidad de la función de probabilidad, sin embargo, la demostración formal será omitida. A continuación, tomemos un $C_0' \in \mathscr{F}_t$ fijo. Definamos

$$\mathcal{L}^t := \{D \in \sigma(\mathcal{C}^t) = \mathscr{F}_t : \mathbb{P}(C_0' \cap D) = \mathbb{P}(C_0')\mathbb{P}(D)\}.$$

Por el resultado anterior, se tiene que $\mathcal{C}^t \subset \mathcal{L}^t$ y de igual manera, se omite la prueba de que $\mathcal{L}^t$ es un λ-sistema (es prácticamente la misma). Así pues, se concluye que $\mathcal{L}_2 = \sigma(\mathcal{C}^t) = \mathscr{F}^t$, lo que quiere decir que para todo $C \in \mathscr{F}_t$ y $D \in \mathscr{F}^t$, se tiene que $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$, es decir, X^t es independiente de $\mathscr{F}_t$. $\square$

Calcular la esperanza y varianza del proceso de Poisson y de Poisson compuesto (en términos de la intensidad y la distribución de salto). Probar que si X es

$$\mathbb{E}\left(e^{iuZ_t}\right) = e^{-\lambda t(1-\psi(u))} \quad \text{donde} \quad \psi(u) = \mathbb{E}\left(e^{iu\xi_1}\right).$$

Demostración. Sea N_t el proceso Poisson de intesidad λ. Entonces, como $N_t \sim Poi(\lambda t)$, se tiene que

$$\mathbb{E}(N_t) = \sum_{i=1}^{\infty} i e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^{i+1}}{i!} = \lambda t.$$

De la misma manera,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_t^2) &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} i e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i-1!} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) e^{\lambda t} \frac{(\lambda t)^{i+1}}{i!} \\
&= (\lambda t)\mathbb{E}(N_t) + (\lambda t) = (\lambda t)^2 + (\lambda t),
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$Var(N_t) = \mathbb{E}(N_t^2) - \mathbb{E}(N_t)^2 = (\lambda t)^2 + (\lambda t) - (\lambda t)^2 = \lambda t.$$

Sea Z_t el proceso Poisson compuesto con saltos $\{\xi_i\}_i \in \mathbb{N}$ independientes e idénticamente distribuidos, es decir,

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_t) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t} \xi_i\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \mathbb{1}_{T_i \le t}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\xi_i \mathbb{1}_{T_i \le t}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_i)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T_i \le t}\right) \qquad \text{(Por independencia)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T_i \le t}\right) \qquad \text{(Las } \xi_i\text{'s son v.a.i.i.d.)} \\
&= \mathbb{E}(\xi_1) \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{T_i \le t}\right) = \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_i \le t}\right) \\
&= \mathbb{E}(\xi_1)\mathbb{E}\left(N_t\right) = \mathbb{E}(\xi_1)(\lambda t).
\end{aligned}$$

Para calcular su varianza,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_t^2) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Z_t^2|N_t\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{N_t}\xi_i\right)^2|N_t\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{1}_{N_t=j}\left(\sum_{i=1}^{j}\xi_i\right)^2|N_t\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{1}_{N_t=j}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{j}\xi_i\right)^2|N_t\right)\right) \qquad \text{(Por medibilidad y Fubini)} \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{1}_{N_t=j}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{j}\xi_i\right)^2\right)\right) \qquad \text{(Por independencia de los } \xi_i\text{'s con } N_t\text{)} \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{1}_{N_t=j}\left(Var\left(\sum_{i=1}^{j}\xi_i\right)+\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{j}\xi_i\right)^2\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{1}_{N_t=j}\left(j\times Var\left(\xi_1\right)+j^2\times\mathbb{E}\left(\xi_1\right)^2\right)\right) \qquad \text{(Por que las } \xi_i\text{'s son v.a.i.d.d.)} \\
&= \mathbb{E}\left(N_t\times Var\left(\xi_1\right)+N_t^2\times\mathbb{E}\left(\xi_1\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}(N_t)Var\left(\xi_1\right)+\mathbb{E}(N_t^2)\mathbb{E}\left(\xi_1\right)^2 \\
&= \mathbb{E}(N_t)Var\left(\xi_1\right)+(Var(N_t)+\mathbb{E}(N_t^2))\mathbb{E}\left(\xi_1\right)^2 \\
&= (\lambda t)Var\left(\xi_1\right)+(\lambda t)\mathbb{E}\left(\xi_1\right)^2+\left(\mathbb{E}(N_t)\mathbb{E}\left(\xi_1\right)\right)^2 \\
&= (\lambda t)(\mathbb{E}(\xi_1^2))+\left(\mathbb{E}(N_t)\mathbb{E}\left(\xi_1\right)\right)^2,
\end{aligned}
$$

y por lo tanto,

$$
Var(Z_t) = \mathbb{E}(Z_t^2) - \mathbb{E}(Z_t)^2 = (\lambda t)(\mathbb{E}(\xi_1^2)).
$$

Para calcular $\mathbb{E}(e^{iuZ_t})$, se sigue un procedimiento similar, de manera que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{iuZ_t}) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(iu\sum_{j=1}^{N_t}\xi_j\right)|N_t\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{1}_{N_t=k}\exp\left(iu\sum_{j=1}^{k}\xi_j\right)|N_t\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{1}_{N_t=k}\mathbb{E}\left(\exp\left(iu\sum_{j=1}^{k}\xi_j\right)|N_t\right)\right)\\
&\quad\text{(Medibilidad y Fubini)}\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{1}_{N_t=k}\mathbb{E}\left(\exp\left(iu\sum_{j=1}^{k}\xi_j\right)\right)\right)\\
&\quad\text{(Independencia con } N_t\text{)}\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{1}_{N_t=k}\mathbb{E}\left(\exp\left(iu\xi_1\right)\right)^k\right)\\
&\quad\text{(Las } \xi_j\text{'s son v.a.i.i.d.)}\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(iu\xi_1\right)\right)^{N_t}\right) = \mathbb{E}(\psi(u)^{N_t})\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\psi(u)^i \times e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\\
&= e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\psi(u)\lambda t)^i}{i!}\\
&= e^{-\lambda t}e^{\psi(u)\lambda t} = e^{-\lambda t(1-\psi(u))}
\end{aligned}
$$

□

Sea N un proceso de Lévy tal que N_t tiene distribución de parámetro λt.

1. Pruebe que casi seguramente las trayectorias de N son no-decrecientes.
2. Sea Ξ la única medida en $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ tal que $\Xi([0,t]) = N_t$. Pruebe que Ξ es una medida de Poisson aleatoria de intensidad $\lambda \cdot \text{Leb}$.
3. Concluya que N es un proceso de Poisson de intensidad λ.

Problema 8. Sea P_t la probabilidad de transición en t unidades de tiempo para el proceso de Poisson de parámetro λ.

Al utilizar el teorema del biniomio, pruebe directamente que las probabilidades de transición del proceso de Poisson satisfacen las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov $P_{t+s} = P_t P_s$. Dé además un argumento probabilístico, basado en condicionar con lo que sucede al tiempo s, para probar dicha ecuación.

Sea

$$Q(i,j) = \begin{cases} -\lambda & j = i \\ \lambda & j = i+1 \\ 0 & j \neq i, i+1 \end{cases}.$$

Pruebe directamente que se satisfacen las ecuaciones de Kolmogorov

$$\frac{d}{dt} P_t(i,j) = QP_t(i,j) = P_t Q(i,j)\,,$$

donde QP_t es el producto de las matrices Q y P_t.

Demostración. Elijamos $i, j \in \mathbb{N}$. Sabemos que

$$P_r(i,j) = \mathbb{P}(N_r = j - i) = e^{-\lambda r} \frac{(\lambda r)^{j-i}}{(j-i)!}$$

cuando $i \leq j$ y 0 en otro caso. Sea entonces $i \leq j$. Entonces,

$$\begin{aligned} P_{t+s}(i,j) &= e^{-\lambda(t+s)} \frac{(\lambda(t+s))^{j-i}}{(j-i)!} \\ &= e^{-\lambda(t+s)} \frac{\sum_{l=0}^{j-i} \binom{j-i}{l} t^l s^{j-i-l}}{(j-i)!} \\ &= e^{-\lambda(t+s)} \sum_{l=0}^{j-i} \frac{t^l s^{j-i-l}}{l!(j-i-l)!}. \end{aligned}$$

Si multiplicamos las matrices P_t y P_s, tendríamos que

$$\begin{aligned}
(P_tP_s)(i,j) &= \sum_{l=0}^{\infty} P_t(i,l)P_s(l,j) \\
&= \sum_{l=i}^{j} P_t(i,l)P_s(l,j) \\
&\qquad \text{(Se tiene que } P_t(i,l) = P_s(l,j) = 0 \text{ para todo } l < i \text{ y } j < l) \\
&= \sum_{l=i}^{j} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{l-i}}{(l-i)!} \times e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{j-l}}{(j-l)!} \\
&= e^{-\lambda(t+s)}\lambda^{j-i}\sum_{l=i}^{j}\frac{t^{l-i}s^{j-l}}{(l-i)!(j-l)!} \\
&= e^{-\lambda(t+s)}\lambda^{j-i}\sum_{l'=0}^{j-1}\frac{t^{l'}s^{j-i-l'}}{l'!(j-i-l')!} \qquad \text{(Haciendo } l' = l-i).
\end{aligned}$$

Notemos que en el caso $i > j$, los sumandos de (SEÑALAR) son exactamente igual a 0, ya que para todo l, se tendrá que $i > l$ o que $j < l$, y en cualquier caso la multiplicación de probabilidades se anula. Por lo tanto se ha comprobado que las entradas (i,j) para todo $i,j \in \mathbb{N}$ de las matrices P_{t+s} y P_tP_s coinciden y por lo tanto, son idénticas. $\square$

Problema 9 (Tomado del examen general de probabilidad del Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM, Febrero 2011)**.** Una planta de producción toma su energía de dos generadores. La cantidad de generadores al tiempo t está representado por una cadena de Markov a tiempo continuo $\{X_t, t \geq 0\}$ con espacio de estados $E = \{0,1,2\}$ y matriz infinitésimal Q dada por

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Encuentre la matriz de transición de la cadena de Markov de los estados distintos que toma X, clasifique los estados, diga si existe una única distribución invariante y en caso afirmativo, encuéntrela. Calcule explícitamente las potencias de la matriz de transición. (Recuerde que de ser posible diagonalizar, esta es una buena estrategia.)
2. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos generadores estén trabajando al tiempo t si sólo uno trabaja al tiempo cero?

3. Si ρ_2 denota la primera vez que ambos generadores están trabajando al mismo tiempo, encuentre la distribución de ρ_2 cuando sólo un generador está trabajando al tiempo cero.
4. Encuentre la proporción de tiempo asintótica en que los dos generadores están trabajando. Si cada generador produce 2.5 MW de energía por unidad de tiempo, ¿Cuál es la cantidad promedio de energía producida a largo plazo por unidad de tiempo?

Problema 10 (Procesos de ramificación a tiempo continuo)**.** Sea μ una distribución en $\mathbb{N}$. A μ_k lo interpretamos como la probabilidad de que un individuo tenga k hijos. Nos imaginamos la dinámica de la población como sigue: a tasa λ, los individuos de una población se reproducen. Entonces tienen k hijos con probabilidad μ_k. Se pueden introducir dos modelos: uno en que el individuo que se reproduce es retirado de la población (nos imaginamos que muere) y otro en que no es retirado de la población (por ejemplo cuando se interpreta a la población como especies y a sus descendientes como mutaciones). En el caso particular del segundo modelo en que $\mu_1 = 1$, se conoce como proceso de Yule.

1. Especifique un modelo de cadenas de Markov a tiempo continuo para cada uno de los modelos anteriores. A estos procesos se les conoce como procesos de ramificación a tiempo continuo.

Nuestro primer objetivo será encontrar una relación entre procesos de ramificación a tiempo continuo y procesos de Poisson compuestos. Sea N un proceso de Poisson y S una caminata aleatoria independiente de N tal que $\mathbb{P}(S_1 = j) = \mu_{j-1}$ ó μ_j dependiendo de si estamos en el primer caso o en el segundo. Sea $k \geq 0$ y definamos a $X_t = k + S_{N_t}$.

2. Diga brevemente por qué X es una cadena de Markov a tiempo continuo e identifique su matriz infinitesimal para ambos modelos.

Sea ahora $\tau = \min \{t \geq 0 : X_t = 0\}$ y $Y_t = X_{t\wedge\tau}$.

3. Argumente por qué Y es una cadena de Markov a tiempo continuo e identifique su matriz infinitesimal.
4. Argumente por qué existe un único proceso Z que satisface

$$Z_t = Y_{\int_0^t Z_s\, ds}$$

y que dicho proceso es un proceso de ramificación a tiempo continuo. Sugerencia: Recuerde que las trayectorias de Y son constantes por pedazos.

Ahora nos enfocaremos en el proceso de Yule.

5. Escriba las ecuaciones backward de Kolmogorov para las probabilidades de transición $P_t(x, y)$. Al argumentar por qué $P_t(x, x) = e^{-\lambda x}$, resuelva las ecuaciones backward por medio de la técnica de factor integrante (comenzando con

$P_t(x, x+1)$) y pruebe que

$$P_t(x, y) = \binom{y-1}{y-x} e^{-\lambda x t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{y-x}.$$

6. Al utilizar la fórmula para la esperanza de una variable binomial negativa, pruebe que
$$\mathbb{E}_x(Z_t) = x e^{\lambda t}.$$
7. Pruebe que $e^{-\lambda t} Z_t$ es una martingala no-negativa y que por lo tanto converge casi seguramente a una variable aleatoria W.
8. Al calcular la transformada de Laplace de $e^{-\lambda t} Z_t$, pruebe que W tiene distribución exponencial. Por lo tanto, argumente que casi seguramente Z crece exponencialmente.

Problema 11. (Tomado del examen general de conocimientos del área de Probabilidad del Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM, Agosto 2011)

Sea N un proceso de Poisson homogéneo de parámetro λ. Sea $E = (-1, 1)$ y X_0 una variable aleatoria con valores en E independiente de N. Se define el proceso

$$X_t = X_0 \times (-1)^{N_t}, \quad t \geq 0.$$

1. Explique por qué X es una cadena de Markov a tiempo continuo con valores en E.
2. Calcule sus probabilidades de transición y su matriz infinitesimal.
3. ¿Existe una distribución estacionaria para esta cadena? En caso afirmativo ?'Cuál es?

Problema 12. Sea

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Haga un programa en octave que permita simular las trayectorias de una cadena de Markov a tiempo continuo X con matriz infinitesimal Q.
2. Utilice su programa para generar 10000 trayectorias en el intervalo de tiempo $[0, 10]$ comenzando con probabilidad $1/2$ en cada estado y obtenga la distribución empírica de $X_1 0$.
3. Calcule e^{10Q} (utilizando algún comando adecuado) y contraste con la distribución empírica del inciso anterior.
4. Codifique el siguiente esquema numérico, conocido como método de Euler, para aproximar a e^{10Q}: escoja $h > 0$ pequeño, defina a P_0^h como la matriz identidad y recursivamente
$$P_{i+1}^h = P_i^h + hQP_i^h.$$

corra hasta que $i = \lfloor 10/h \rfloor$ y compare la matriz resultante con e^{10Q}. Si no se parecen escoja a h más pequeño. ¿Con qué h puede aproximar a e^{10Q} a 6 decimales?