PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I
SEMESTRE 2013-II
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
TAREA 4

ANTONIO SORIANO FLORES

Problema 1. Sean $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$ y $\mathscr{G}$ subσ-fields de $\mathscr{F}$. Decimos que $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ si para cualquier H_i que sea $\mathscr{F}_i$ medible y acotada se tiene que

$$\mathbb{E}(\, H_1 \cdots H_n \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(\, H_1 \mid \mathscr{G}) \cdots \mathbb{E}(\, H_n \mid \mathscr{G})\,.$$

(1) ¿Qué quiere decir la independencia condicional cuando $\mathscr{G} = \{\Omega, \emptyset\}$?
Solución: Cuando $\mathscr{G} = \{\Omega, \emptyset\}$ la esperanza condicional es igual a la esperanza no condicional de la variable esto es $\mathbb{E}(\, X \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(X)$. En este caso obtenemos la independencia no condicional:

$$\mathbb{E}(H_1 \cdots H_n) = \mathbb{E}(H_1) \cdots \mathbb{E}(H_n)$$

De hecho esto es un resultado que es usado en los cursos de probabilidad básico.

(2) Pruebe que $\mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_2$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ (denotado $\mathscr{F}_1 \perp_{\mathscr{G}} \mathscr{F}_2$) si y sólo si para cualquier H que sea $\mathscr{F}_1$-medible y acotada se tiene que

$$\mathbb{E}(\, H \mid \mathscr{F}_2, \mathscr{G}) = \mathbb{E}(\, H \mid \mathscr{G})\,.$$

Proof. $\Rightarrow$:) Supongamos que $\mathscr{F}_1 \perp_{\mathscr{G}} \mathscr{F}_2$, por demostrar que para cualquier H que sea $\mathscr{F}_1$-medible y acotada se tiene que $\mathbb{E}(\, H \mid \mathscr{F}_2, \mathscr{G}) = \mathbb{E}(\, H \mid \mathscr{G})$. Sea $Y = \mathbb{E}(\, H \mid \mathscr{G})$ (una versión de la esperanza condicional). entonces Y es $\mathscr{G}$-medible. Queremos probar que $\mathbb{E}(\, H \mid \mathscr{F}_2, \mathscr{G}) = Y$ como Y es $\mathscr{G}$-medible entonces solo falta probar que para toda $A \in \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G})$ se tiene que:

$$\mathbb{E}(H\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$$

Sea

$$\mathscr{L} = \{A \in \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G}) : \mathbb{E}(H\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)\}$$

Probarémos que $\mathscr{L} \supseteq \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G})$ por medio del lema de clases monotonas. Definimos

$$\mathscr{C} := \{A \in \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G}) : A = A_2 \cap B : A_2 \in \mathscr{F}_2, B \in \mathscr{G}\}$$

Afirmación: $\mathscr{C}$ es un π-sistema que cumple con la propiedad $\mathbb{E}(H\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$. En efecto pues sea $C_1, C_2 \in \mathscr{C}$ entonces:

$$C_1 \cap C_2 = \left(A_2^{(1)} \cap B^{(1)}\right) \cap \left(A_2^{(2)} \cap B^{(2)}\right) = \left(A_2^{(1)} \cap A_2^{(2)}\right) \cap \left(B^{(1)} \cap B^{(2)}\right)$$

Como $A_2^{(1)}, A_2^{(2)} \in \mathscr{F}_2$ y $B^{(1)}, B^{(2)} \in \mathscr{G}$ entonces se sigue que $\left(A_2^{(1)} \cap A_2^{(2)}\right) \in \mathscr{F}_2$ y que $\left(B^{(1)} \cap B^{(2)}\right) \in \mathscr{G}$ por lo tanto se concluye que $C_1 \cap C_2 \in \mathscr{C}$ y por tanto cumple con ser π-sistema. Ahora verificamos que cumple con la propiedad.
Sea $C \in \mathscr{C}$ entonces:

$$\mathbb{E}(H\mathbb{1}_C) = \mathbb{E}(H\mathbb{1}_{A_2}\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(H\mathbb{1}_{A_2}\mathbb{1}_B \mid \mathscr{G})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B\mathbb{E}(H\mathbb{1}_{A_2} \mid \mathscr{G}))$$

Pero por hipótesis $\mathscr{F}_1 \perp_{\mathscr{G}} \mathscr{F}_2$ y dado que $\mathbb{1}_{A_2}$ es $\mathscr{F}_2$-medible y H es $\mathscr{F}_1$-medible, entonces:

$$\mathbb{E}(H\mathbb{1}_{A_2} \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(H \mid \mathscr{G})\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2} \mid \mathscr{G})$$

Sustituyendo este resultado:

$$\mathbb{E}(H\mathbb{1}_C) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B\mathbb{E}(H \mid \mathscr{G})\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2} \mid \mathscr{G}))$$

Pero $Y = \mathbb{E}(H \mid \mathscr{G})$ y es $\mathscr{G}$-medible entonces

$$\mathbb{E}(H\mathbb{1}_C) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B Y \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_2} \mid \mathscr{G})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_B\mathbb{1}_{A_2} \mid \mathscr{G})) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_B\mathbb{1}_{A_2}) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_C)$$

Por lo tanto cumple con la propiedad y por tanto $\mathscr{C}$ es un π-sistema que cumple con la propiedad $\mathbb{E}(H\mathbb{1}_C) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_C)$
Finalmente para terminar con la prueba hay que verificar que $\mathscr{L}$ es un λ-sistema.

- $\Omega \in \mathscr{L}$ pues $Y = \mathbb{E}(H \mid \mathscr{G})$ entonces tomando esperanza de ambos lados $\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_\Omega) = \mathbb{E}(H\mathbb{1}_\Omega)$
- Sea $A, B \in \mathscr{L}$ tal que $B \subset A$ P.D. $A - B \in \mathscr{L}$. Lo que hay que probar es que $\mathbb{E}(H\mathbb{1}_{A-B}) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{A-B})$. Tenemos lo siguiente:

$$\mathbb{E}(H\mathbb{1}_{A-B}) = \mathbb{E}(H\,(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)) = \mathbb{E}(H\mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(H\mathbb{1}_B)$$
$$= \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(Y\,(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{A-B})$$

  De donde se concluye que $A - B \in \mathscr{L}$.
- Sea (A_i) una sucesión creciente de elementos de $\mathscr{L}$, P.D. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{L}$. Como la sucesión es creciente entonces $\mathbb{1}_{A_n}$ es una sucesión de funciones creciente que converge puntualmente a $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$ de donde concluimos que $H\mathbb{1}_{A_n} \uparrow H\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$, por lo que usando el teorema de la convergencia monotona:

$$\mathbb{E}\big(H\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(H\mathbb{1}_{A_n}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_{A_n}) = \mathbb{E}\big(Y\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}\big)$$

  Por lo tanto $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{L}$.

De los tres puntos anteriores se concluye que $\mathscr{L}$ es un λ-sistema que contiene a $\mathscr{C}$ un π-sistema. Por lo tanto usando lema de clases monótonas se concluye que $\mathscr{L} \supseteq \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G})$. Por lo tanto $\mathbb{E}(H\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A)$ para toda $A \in \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G})$ de donde por definición se concluye $Y = \mathbb{E}(H \mid \mathscr{G})$ es una versión de la esperanza condicional $\mathbb{E}(H \mid \mathscr{F}_2, \mathscr{G})$ es decir:

$$\mathbb{E}(H \mid \mathscr{F}_2, \mathscr{G}) = \mathbb{E}(H \mid \mathscr{G})$$

$\Leftarrow$:) Ahora supongamos que $\mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{F}_2, \mathscr{G}) = \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G})$ con H_1 una función $\mathscr{F}_1$-medible P.D. $\mathbb{E}(H_1 H_2 \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G})\,\mathbb{E}(H_2 \mid \mathscr{G})$ donde H_i es $\mathscr{F}_i$-medible y acotada ($i = 1, 2$). Definamos $Z = \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G})\mathbb{E}(H_2 \mid \mathscr{G})$ entonces Z es $\mathscr{G}$-medible por lo que solo hay que probar que para toda $A \in \mathscr{G}$ se tiene que $\mathbb{E}(H_1 H_2 \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Z \mathbb{1}_A)$. Como:

$$\mathbb{E}(H_1 H_2 \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_1 H_2 \mathbb{1}_A \mid \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G}))) = \mathbb{E}(H_2 \mathbb{1}_A \mathbb{E}(H_1 \mid \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G})))$$

Usando la hipótesis $\mathbb{E}(H_1 \mid \sigma(\mathscr{F}_2 \cup \mathscr{G})) = \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G})$ y condicionando respecto a $\mathscr{G}$.

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}(H_2 \mathbb{1}_A \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_2 \mathbb{1}_A \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G}) \mid \mathscr{G})) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_2 \mid \mathscr{G})\,\mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G})\,\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Z \mathbb{1}_A) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(H_1 H_2 \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Z \mathbb{1}_A)$ de donde se concluye el resultado. □

(3) Pruebe que $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots,$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ si y sólo si para cada $n \geq 1$, $\mathscr{F}_{n+1}$ es condicionalmente independiente de $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n$ dada $\mathscr{G}$.

Proof. $\Rightarrow$:) Supongamos que $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots,$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ y demostraremos que $\mathscr{F}_{n+1} \perp_{\mathscr{G}} \sigma(\mathscr{F}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{F}_n)$. Por el ejercicio anterior sólo tendrémos que probar que para H_{n+1} que sea $\mathscr{F}_{n+1}$-medible y acotada se tiene que:

$$\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \sigma(\mathscr{F}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G})) = \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})$$

La demostración de este último hecho se hará por medio del lema de clases monótonas. Definamos lo siguiente:

$$Y := \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G}) \text{ una version de la esperanza condicional}$$

$$\mathscr{L} := \{A \in \sigma(\mathscr{F}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G}) : \mathbb{E}(H_{n+1} \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_A)\}$$

$$\mathscr{C} := \{A \in \sigma(\mathscr{F}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G}) : A = A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n \cap B, A_i \in \mathscr{F}_i, B \in \mathscr{G}\}$$

Nuevamente el objetivo es probar que $\mathscr{L} \supseteq \sigma(\mathscr{F}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G})$ lo que concluiría por definición de esperanza condicional que $\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \sigma(\mathscr{F}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G})) = \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})$. Por definición es fácil ver que $\mathscr{C}$ es un π-sistema, por lo que solo verificaremos que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{L}$. Sea $C \in \mathscr{C}$ entonces:

$$\mathbb{E}(H_{n+1} \mathbb{1}_C) = \mathbb{E}(H_{n+1} \mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_n} \mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{E}(H_{n+1} \mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_n} \mid \mathscr{G}))$$

Pero por hipótesis tenemos que $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots,$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ entonces:

$$\mathbb{E}(H_{n+1} \mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_n} \mid \mathscr{G}) = Y \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_n} \mid \mathscr{G})$$

Y como Y y $\mathbb{1}_B$ son $\mathscr{G}$-medibles entonces

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{E}(H_{n+1} \mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_n} \mid \mathscr{G})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_B Y \mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_n} \mid \mathscr{G})) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_C)$$

Entonces $C \in \mathscr{L}$. Finalmente la prueba de que $\mathscr{L}$ es λ-sistema es similar a la prueba del inciso anterior. Por lo tanto usando el lema de clases monótonas se prueba que $\mathscr{L} \supseteq \sigma(\mathscr{F}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G})$, de donde obtenemos que:

$$\mathbb{E}(H_{n+1} \mathbb{1}_C) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_C) \text{ para todo } C \in \sigma(\mathscr{F}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G})$$

$\Leftarrow$:) Demostraremos por inducción. Para $n = 1$ se cumple pues se tiene que $\mathscr{F}_1$ es condicionalmente independiente de $\mathscr{F}_2$ dado $\mathscr{G}$. Supongamos entonces que la propiedad es válida para n y demostraremos que es válida para $n+1$
Entonces supongamos que $\mathscr{F}_{n+1} \perp_{\mathscr{G}} \sigma(\mathscr{F}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{F}_n)$, por ejercicio anterior tendríamos que para toda H_{n+1} que sea $\mathscr{F}_{n+1}$- medible y acotada se tiene que:

$$\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \sigma(\mathscr{F}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G})) = \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})$$

Queremos probar que : $\mathbb{E}(H_1 \ldots H_n H_{n+1} \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G}) \ldots \mathbb{E}(H_n \mid \mathscr{G}) \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})$.
Entonces tomamos $A \in \mathscr{G}$ y definamos $Z = \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G}) \ldots \mathbb{E}(H_n \mid \mathscr{G}) \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})$

$$\mathbb{E}(H_1 \ldots H_n H_{n+1} \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_1 \ldots H_n H_{n+1} \mathbb{1}_A \mid \sigma(\mathscr{F}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G})))$$

$$= \mathbb{E}(H_1 \ldots H_n \mathbb{1}_A \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \sigma(\mathscr{F}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G}))) = \mathbb{E}(H_1 \ldots H_n \mathbb{1}_A \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G}))$$

Condicionando sobre $\mathscr{G}$

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(H_1 \ldots H_n \mathbb{1}_A \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G}) \mid \mathscr{G})) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G}) \mathbb{E}(H_1 \ldots H_n \mid \mathscr{G}))$$

Pero por hipótesis de inducción $\mathbb{E}(H_1 \ldots H_n \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G}) \ldots \mathbb{E}(H_n \mid \mathscr{G})$. Entonces:

$$\mathbb{E}(H_1 \ldots H_n H_{n+1} \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G}) \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G}) \ldots \mathbb{E}(H_n \mid \mathscr{G})) = \mathbb{E}(Z \mathbb{1}_A)$$

Por lo tanto se tiene que: $\mathbb{E}(H_1 \ldots H_n H_{n+1} \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G}) \ldots \mathbb{E}(H_n \mid \mathscr{G}) \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})$ lo que prueba la independecia condicional. $\square$

Categorías: Esperanza condicional, Independencia condicional.

Problema 2. Sea μ una distribución de progenie y defina $\tilde{\mu}_j = \mu_{j+1}$. Sea $S = (S_n)$ una caminata aleatoria con distribución de salto $\tilde{\mu}$. Sea k un entero no-negativo y defina recursivamente

$$Z_0 = k = C_0, \quad Z_{n+1} = k + S_{C_n} \quad \text{y } C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}.$$

(1) Pruebe que $Z_n \geq 0$ para toda n y que si $Z_n = 0$ entonces $Z_{n+1} = 0$.

Proof. Sea $S_n = \sum_i^n \tilde{\xi}_i$ la caminata aleatoria planteada con distribución de salto $\tilde{\mu}$ con valores en $\{-1, 0, 1, 2, ...\}$. Primero probaremos que si $Z_n = 0$ entonces $Z_{n+1} = 0$. Como $Z_n = 0$ entonces $0 = k + S_{C_{n-1}}$ de donde $S_{C_{n-1}} = -k$ luego también tendríamos que $C_n := C_{n-1} + Z_n = C_{n-1} + 0$ por lo tanto $C_n = C_{n-1}$ por lo tanto:

$$Z_{n+1} := k + S_{C_n} = k + S_{C_{n-1}} = k - k = 0$$

Ahora probaremos por inducción que $Z_n \geq 0$ para toda n. Para $n = 0$ tenemos que $Z_0 = K \geq 0$
Supongamos entonces que $Z_n \geq 0$ y demostraremos que $Z_{n+1} \geq 0$. Si $Z_n = 0$ entonces por lo anterior $Z_{n+1} = 0$ por lo tanto se cumple que $Z_{n+1} \geq 0$. Supongamos entonces que $Z_n > 0$. Entonces de la definición de Z_{n+1} y de C_n tenemos que:

$$Z_{n+1} = k + S_{C_n} = k + S_{C_{n-1}+Z_n} = k + S_{C_{n-1}} + \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i = Z_n + \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i$$

Como S tiene distribución de salto $\tilde{\mu}$ entonces $\tilde{\xi}_i \geq -1$ por lo tanto

$$\sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i \geq \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} -1 = Z_n$$

Por lo tanto:

$$Z_{n+1} = Z_n + \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i \geq Z_n - Z_n = 0$$

□

(2) Pruebe que C_n es un tiempo de paro para la filtración canónica asociada a S.

Proof. Primero notemos que que: $C_n := C_{n-1} + Z_n$ pero sustituyendo $C_{n-1} := C_{n-2} + Z_{n-1}$ tendriamos que:

$$C_n = C_{n-2} + Z_{n-1} + Z_n$$

Siguiendo de manera recursiva obtenemos que:

$$C_n = k + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{n-1} + Z_n = k + \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Lo anterior implica que el proceso C_n es un proceso no decreciente (pues $Z_i \geq 0$), luego para probar que es tiempo de paro tenemos que verificar que el evento $\{C_n = m\}$ pertenece a $\mathscr{F}_m$ donde $\mathscr{F}_m = \sigma(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_m)$. Sea entonces n arbitrario, y $m \in \mathbb{N}$. Si $m < k$ entonces el evento $\{C_n = m\} = \{k + \sum_{i=1}^{n} Z_i = m\} = \emptyset \in \mathscr{F}_m$ (pues recordemos que $Z_i \geq 0$ para toda i, por lo tanto $C_n \geq k$). Supongamos entonces que $m \geq k$ por demostrar que $\{C_n = m\} \in \mathscr{F}_m$.
Como suponemos que $C_n = m$ entonces por ser C_n no decreciente tenemos que $C_i \leq m$ para $0 \leq i \leq n$. Luego entonces :

$$S_{C_i} := \sum_{i=1}^{C_i} \tilde{\xi}_i \text{ es } \mathscr{F}_m - \text{medible para } 0 \leq i \leq n$$

Lo anterior implica que $Z_i := k + S_{C_{i-1}}$ es $\mathscr{F}_m$-medible para $0 \leq i \leq n$ y por tanto

$$\{C_n = m\} = \left\{ k + \sum_{i=1}^{n} Z_i = m \right\} \in \mathscr{F}_m$$

Por lo que tenemos que C_n es tiempo de paro. □

(3) Pruebe que Z es un proceso de Galton-Watson con ley de progenie μ.

Proof. En clase vimos que $X = (X_n)$ es un proceso de Galtson-Watson si X cumple con la siguiente definición recursiva:

$$X_0 = k \text{ y } X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_{i,n}$$

Donde la colección $(\xi_{i,n})$ son variables aleatorias con distribución μ y la interpretación que le damos a $\xi_{i,n}$ es la cantidad de hijos que tiene el i-ésimo individuo de la generacón n (si es que existe).
En nuestro caso tenemos el proceso Z_n que por definición ya cumple con la primera parte, es decir $Z_0 = k > 0$. Por otro lado vimos que por la definición recursiva de Z_n tenemos:

$$Z_{n+1} = k + S_{C_n} + \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i = Z_n + \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i$$

Pero recordemos que $\tilde{\xi}_i$ tiene distribución $\tilde{\mu}$ por lo que $\tilde{\xi}_i = \xi_i - 1$ con ξ_i variables aleatorias con distribución μ y valores en $\{0, 1, 2, \ldots\}$ por lo tanto sustituyendo el valor de $\tilde{\xi}_i$:

$$Z_{n+1} = Z_n + \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} (\xi_i - 1) = Z_n + \left(\sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \xi_i \right) - Z_n$$

Pero definiendo $\xi_{i,n} = \xi_{i+C_{n-1}}$ tenemos que:

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i,n}$$

Lo que prueba que en efecto, $Z = (Z_n)$ es un proceso de Galton-Watson con distribución de progenie μ. Observacion: Dado que $C_n = k + \sum_{i=1}^{n} Z_i$, entonces el proceso $C = (C_n)$ es un proceso que nos va contanto el numero total de inviduos que se han acumulado hasta la generación n, por lo que cuando la población se extingue C_n permanece constante y nos indica el numero total de individuos que participaron en el proceso. □

(4) Pruebe que si S alcanza -1 entonces existe n tal que $Z_n = 0$. Deduzca que si la media de μ es 1 entonces Z se extingue. (Sugerencia: utilice un ejercicio anterior sobre martingalas con saltos acotados hacia abajo.)

Proof. Si suponemos que $\mu = 1$ entonces $\mathbb{E}(\xi_i) = 1$ entonces $\mathbb{E}\left(\tilde{\xi}_i + 1\right) = 1$ lo que implica que $\mathbb{E}\left(\tilde{\xi}_i\right) = 0$ luego entonces, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\xi}_i$ es una caminata aleatoria no trivial con media cero y saltos integrables por lo que aplicando el ejercicio 2 de la tercer tarea sabemos que dicha caminata oscila, en particular sabemos que $\liminf S_n = -\infty$ por lo tanto sabemos que existe n tal que $S_{C_n} = -k$ y por tanto según la definición de Z_{n+1} tendríamos que $Z_{n+1} = k + S_{C_n} = k - k = 0$ y por tanto se demuestra que en el caso crtíco, el proceso Galto-Watson se extingue. □

Categorías: Caminatas aleatorias, Procesos de Galton-Watson, Propiedad de Markov fuerte.

Problema 3. El objetivo de este ejercicio es ver ejemplos de cadenas de Markov X y de funciones f tales que $f(X) = (f(X_n), n \in \mathbb{N})$ sean o no cadenas de Markov.

(1) Considere el hipercubo n-dimensional $E = \{0,1\}^n$. A E lo pensaremos como la composición de la primera de dos urnas que tienen en total n bolas etiquetadas del 1 al n. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, interpretaremos $x_i = 1$ como que la bola i está en la urna 1. Considere el siguiente experimento aleatorio: inicialmente la composición de las urnas está dada por x y a cada instante de tiempo escogemos una bola al azar y la cambiamos de urna. Modele esta situación por medio de una cadena de Markov X en E. Sea $f : E \to \{0, \ldots, n\}$ dada por $f(x) = \sum_i x_i$. Pruebe que $f(X) = (f(X_n), n \in \mathbb{N})$ es una cadena de Markov cuya matriz de transición determinará.

Proof. En este caso nuestro espacio de estados E está formado por vectores en $\mathbb{R}^n$ donde cada entrada sólo admite dos posibles valores $\{0,1\}$. Entonces la cardinalidad de E es 2^n. Luego, según la definición del experimento, la urna cambia de configuración solo en una bola cada tiempo, por lo tanto estando en el estado-vector $i \in E$ solo tenemos n posibles estados a donde podemos llegar en un paso con la misma probabilidad cada uno, es decir con probabilidad $1/n$. Es por lo anterior entonces que el valor de la variable en el paso $n+1$ depende sólo del paso inmediato anterior. Con esto en mente definamos la siguiente matriz

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } |i-j|^{\,*} = \tilde{e}_k \text{ donde } i,j \in E \text{ y } k \in \{1,2,\ldots,n\} \\ \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

*En este caso $|i-j|$ se refiere a tomar valor absoluto en cada entrada.
Donde $\tilde{e}_k \in \mathbb{R}^n$ y es tal que tiene un 1 en la k-ésima entrada y 0 en las restantes. Aquí hay que notar que la matriz solo toma el valor $1/n$ cuando el vector i difiere del vector j en una unidad en una sola entrada.
Por ejemplo con $n = 3$ el estado $(1,0,0)$ puede cambiar a los siguientes estados:

$$(1,0,0) \to (0,0,0) \quad (1,0,0) \to (1,1,0) \quad (1,0,0) \to (1,0,1)$$

Notemos entonces que en todos los casos arriba mencionados se tiene que $|i-j| = \tilde{e}_k$. Existen otros tres casos en donde también se cumple que la diferencia absoluta sea un vector $\tilde{e}_k$:

$$(1,0,0) \to (2,0,0) \quad (1,0,0) \to (1,-1,0) \quad (1,0,0) \to (1,0,-1)$$

Sin embargo estos tres casos quedan descartados de nuestro modelo pues se llega a vectores que no están en el espacio de estados definido. Es claro entonces que como $i,j \in E$, entonces dejando i fijo, sólo hay n posibles vectores j en E tal que $|i-j| = \tilde{e}_k$ de donde concluimos que se cumple que:

$$P = (P)_{i,j} = p_{i,j} \geq 0 \qquad \sum_{j \in E} p_{i,j} = 1$$

Por otro lado, como el proceso empieza en un estado inicial $X_0 = x_0$ (configuración inicial de las bolas) entonces la distribución inicial esta dada por:

$$p_j = \mathbb{1}_{\{j = x_0\}}$$

Bajo lo anterior P nos está modelando las probabilidades de transición entre los estados de E según el experimento de escoger al alzar una bola y cambiarla de urna. Entonces usando el teorema de existencia de kolmogorov sabemos que existe $X = (X_n)$ una cadena de Markov con matriz de transición P y es tal que $X_n : \Omega \to E$ nos modela la configuración de la urna al tiempo n.
Ahora aplicaremos una función $f : \mathbb{R}^n \to \{0, 1, \ldots, n\} = E^{'}$ al proceso anterior tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Entonces definamos al proceso Y como:

$$Y = (Y_n) := (f(X_n))$$

Entonces (Y_n) es un proceso que toma valores en $E^{'}$ y Y_n mide el número total de bolas en la urna 1 al tiempo n. Es claro notar que dada la naturaleza del experimento que el número total de bolas en la urna 1 depende sólo del número de bolas que había en el tiempo inmediato anterior. Estos es:

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} \,|Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = i_{n+1} \,|Y_n = i_n)$$

Siempre y cuando $\mathbb{P}(Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n) > 0$ por lo que se sigue que Y_n es una cadena de markov con espacio de estados en $\{0, 1, \ldots, n\}$. Luego para el cálculo de la matriz de transición tenemos que dado que estamos en un estado con i bolas en la urna con $i \notin \{0, n\}$ entonces el proceso X tiene n posibles estados de llegada de los cuales en $n - i$ aumentamos el número de bolas en la urna y en i disminuimos la cantidad de bolas. Por otro lado si estamos en en el estado en que X toma el vector 0, entonces sabemos que con probabilidad 1 aumentaremos en una unidad las bolas y de la misma forma, si estamos en el estado en que X toma el vector de puros 1's entonces con probabilidad 1 disminuiremos la cantidad de bolas. Resumiendo lo anterior la matriz de transición de la cadena Y que se obtiene de aplicar f a X es:

- Si $i \notin 0, 1$ entonces:

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{n-i}{n} & \text{si } j = i + 1 \\ \\ \frac{i}{n} & \text{si } j = i - 1 \end{cases}$$

- Si $i = 0$ entonces $p_{0,1} = 1$
- Si $i = n$ entonces $p_{n,n-1} = 1$

□

(2) Sea $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{Z}$ y matriz de transición

$$P_{i,i+1} = p \quad P_{i,i-1} = 1 - p$$

donde $p \in [0, 1]$. Dé una condición necesaria y suficiente para que $(|S_n|, n \in \mathbb{N})$ sea una cadena de Markov.

Proof. Primero calcularemos las probabilidades de transición a un paso y verificaremos bajo qué condiciones dichas probabilidades no dependen de n. Primero notemos que $(|S_n|)$ es un proceso que toma valores únicamente en lo enteros no negativos. Además es claro que por ser S_n una caminata aleatoria entonces la probabilidad de que el proceso $(|S_n|)$ pase del estado 0 al estado 1 es:

$$p_{0,1} = \mathbb{P}(|S_{n+1}| = 1 \,|\, |S_n| = 0) = 1 \text{ lo cual no depende de } n$$

Ahora procederemos a calcular $p_{i,i+1} = \mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \,|\, |S_n| = i)$.

$$\mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \,|\, |S_n| = i)$$

$$= \mathbb{P}(S_{n+1} = i+1 \,|\, |S_n| = i) + \mathbb{P}(S_{n+1} = -i-1 \,|\, |S_n| = i) \tag{1}$$

Pero:

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = i+1 \,|\, |S_n| = i) = \frac{\mathbb{P}(S_{n+1} = i+1, |S_n| = i)}{\mathbb{P}(|S_n| = i)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(S_{n+1} = i+1, S_n = i) + \mathbb{P}(S_{n+1} = i+1, S_n = -i)}{\mathbb{P}(|S_n| = i)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(S_{n+1} = i+1 \,|S_n = i)\,\mathbb{P}(S_n = i)}{\mathbb{P}(|S_n| = i)} = \frac{p\mathbb{P}(S_n = i)}{\mathbb{P}(|S_n| = i)}$$

De forma análoga se muestra que:

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = -i-1 \,|\, |S_n| = i) = \frac{(1-p)\mathbb{P}(S_n = -i)}{\mathbb{P}(|S_n| = i)}$$

Sustituyendo estos últimos resultados en la ecuación (1) obtenemos que:

$$\mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \,|\, |S_n| = i) = \frac{p\mathbb{P}(S_n = i) + (1-p)\mathbb{P}(S_n = -i)}{\mathbb{P}(|S_n| = i)} \tag{2}$$

El ejercicio no indica donde empieza la caminata aleatoria por lo que supondremos que $S_0 = x_0 \in \mathbb{Z}$. En los siguientes cálculos utilizaremos la Proposición 2.3 del libro "introducción a los procesos estocástocos" de Luis Rincon que nos dice lo siguiente: **Proposición:** Si los números n y $i - x_0$ son ambos pares o ambos impares, entonces para $-n \leq i - x_0 \leq n$ se tiene que:

$$\mathbb{P}(S_n = i \,|S_0 = x_0) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+i-x_0)} p^{\frac{1}{2}(n+i-x_0)}(1-p)^{\frac{1}{2}(n-i+x_0)}$$

Como $\mathbb{P}(S_n = i) = \mathbb{P}(S_n = i \,|S_0 = x_0)$ (Suponiendo que la caminata empezó en x_0, de hecho la forma correcta de escribirlo es utilizar la medida $\mathbb{P}_{x_0}$ y decir que : $\mathbb{P}_{x_0}(S_n = i) = \mathbb{P}(S_n = i \,|S_0 = x_0)$), entonces sustituyendo el resultado de la proposición en la ecuación (2), tenemos que la probabilidad de transición $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \,|\, |S_n| = i)$ es igual a:

$$= \frac{p\binom{n}{\frac{1}{2}(n+i-x_0)} p^{\frac{1}{2}(n+i-x_0)}(1-p)^{\frac{1}{2}(n-i+x_0)}}{\mathbb{P}(|S_n| = i)} +$$

$$\frac{(1-p)\binom{n}{\frac{1}{2}(n-i-x_0)} p^{\frac{1}{2}(n-i-x_0)}(1-p)^{\frac{1}{2}(n+i+x_0)}}{\mathbb{P}(|S_n| = i)}$$

Como $\mathbb{P}(|S_n| = i) = \mathbb{P}(S_n = i) + \mathbb{P}(S_n = -i)$ entonces sustituyendo esto último según lo que dice la proposición y factorizando la cantidad $p^{\frac{1}{2}(n-x_0)}(1-p)^{\frac{1}{2}(n-x_0)}$ obtenemos que la probabilidad de transición toma la forma:

$$\mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \,|\, |S_n| = i) = \frac{\binom{n}{\frac{1}{2}(n+i-x_0)} p^{\frac{1}{2}i+1} q^{-\frac{1}{2}i} + \binom{n}{\frac{1}{2}(n-i-x_0)} p^{-\frac{1}{2}i} q^{\frac{1}{2}i+1}}{\binom{n}{\frac{1}{2}(n+i-x_0)} p^{\frac{1}{2}i} q^{-\frac{1}{2}i} + \binom{n}{\frac{1}{2}(n-i-x_0)} p^{-\frac{1}{2}i} q^{\frac{1}{2}i}}$$

Donde $q = 1-p$. Pero como:

$$\frac{\binom{n}{\frac{1}{2}(n-i-x_0)}}{\binom{n}{\frac{1}{2}(n+i-x_0)}} = \frac{\left(n - \frac{1}{2}(n+i-x_0)\right)! \left(\frac{1}{2}(n+i-x_0)\right)!}{\left(n - \frac{1}{2}(n-i-x_0)\right)! \left(\frac{1}{2}(n-i-x_0)\right)!}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}(n-i+x_0)\right)! \left(\frac{1}{2}(n+i-x_0)\right)!}{\left(\frac{1}{2}(n+i+x_0)\right)! \left(\frac{1}{2}(n-i-x_0)\right)!}$$

De donde queda claro que si x_0=0 entonces la anterior ecuación toma el valor de 1 y que si $x_0 \neq 0$ entonces dicha expresión queda en términos de n. Luego entonces si suponemos que la caminata comienza en el 0 tendríamos que la probabilidad de transición es:

$$\mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \,|\, |S_n| = i) = \frac{p^{\frac{1}{2}i+1} q^{-\frac{1}{2}i} + p^{-\frac{1}{2}i} q^{\frac{1}{2}i+1}}{p^{\frac{1}{2}i} q^{-\frac{1}{2}i} + p^{-\frac{1}{2}i} q^{\frac{1}{2}i}}$$

De esta última expresión si multiplicamos por un 1 conveniente

$$1 = \frac{p^{\frac{1}{2}i} q^{\frac{1}{2}i}}{p^{\frac{1}{2}i} q^{\frac{1}{2}i}}$$

Entonces:

$$\mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \,|\, |S_n| = i) = \frac{p^{i+1} + q^{i+1}}{p^i + q^i}$$

En resumen, si la caminata comienza en 0 ($x_0 = 0$) entonces el proceso $|S_n|$ es una cadena de markov con matriz de transición :

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ y } j = 1 \\ \frac{p^{i+1}+q^{i+1}}{p^i+q^i} & \text{si } j = i+1 \text{ con } i \neq 0 \\ 1 - \frac{p^{i+1}+q^{i+1}}{p^i+q^i} & \text{si } j = i-1 \text{ con } i \neq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Si la caminata no comienza en 0, entonces las probabilidades de transición dependen de n y por tanto no seria una cadena homogénea $\square$

Categorías: proyecciones de cadenas de Markov

Problema 4. Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos medidas de probabilidad en el espacio canónico $E^{\mathbb{N}}$ para sucesiones con valores en un conjunto a lo más numerable E. Decimos que $\mathbb{Q}$ es **localmente absolutamente continua** respecto de $\mathbb{P}$ si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n} \ll \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}$. Sea

$$D_n = \frac{d\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n}}{d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}}.$$

(1) Pruebe que D es una martingala bajo $\mathbb{P}$. Pruebe que si D es uniformemente integrable entonces $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.

Proof. En este ejercicio utilizaré el siguiente resultado:

Theorem 1. *Si g es una función $\mathscr{F}_n$-medible e integrable con respecto a $\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}$ entonces, g es integrable con respecto a $\mathbb{P}$:*

$$\int_\Omega g d\mathbb{P} = \int_\Omega g d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}$$

Proof. Primero notemos que la propiedad es válida si $g = \mathbb{1}_A$ con $A \in \mathscr{F}_n$, pues:

$$\int_\Omega g d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \int_\Omega \mathbb{1}_A d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}(A) = \mathbb{P}(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A d\mathbb{P} = \int_\Omega g d\mathbb{P}$$

Luego, como funciona para indicadoras de conjuntos en $\mathscr{F}_n$, entonces el resultado también será valido para funciones $\mathscr{F}_n$-simples, en efecto sea:

$$\varphi := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

una función $\mathscr{F}_n$-simple, entonces:

$$\int_\Omega \varphi d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} d\mathbb{P} = \int_\Omega \varphi d\mathbb{P}$$

Se ahora g una función $\mathscr{F}_n$-medible positiva integrable , entonces sabemos existe (φ_n) una suseción de funciones simples $\mathscr{F}_n$-medibles tales que $\varphi_n \uparrow g$, entonces por teorema de convergencia monótona:

$$\int_\Omega g d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \varphi_n d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n d\mathbb{P}$$
$$= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \varphi_n d\mathbb{P} = \int_\Omega g d\mathbb{P}$$

Finalmente si g $\mathscr{F}_n$-medible e integrable (no necesariamente positiva) entonces $g = g^+ - g^-$ con g^+, g^- funciones positivas e integrables entonces:

$$\int_\Omega g d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \int_\Omega g^+ d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} - \int_\Omega g^- d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \int_\Omega g^+ d\mathbb{P} - \int_\Omega g^- d\mathbb{P} = \int_\Omega g d\mathbb{P}$$

□

Demostraremos que D_n es una martingala bajo $\mathbb{P}$. Para ello mostraremos las tres condiciones para ser martingala:

- Primero notemos que por teorema de RadonNikodym D_n cumple con ser $\mathscr{F}_n$ medible y tomar valores en $[0, \infty)$ y ademas:

$$\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n}(A) = \int_A D_n \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}$$

Para todo $A \in \mathscr{F}_n$
Luego entonces D_n es $\mathscr{F}_n$ medible al ser la derivada de RadonNikodym y ademas es integrable con respecto a $\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}$ pues:

$$1 = \mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n}(\Omega) = \int_\Omega D_n \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}$$

- Como D_n es no negativa , $\mathscr{F}_n$ medible e integrable con respecto a $\mathscr{F}_n$ entonces:

$$\mathbb{E}(|D_n|) = \mathbb{E}(D_n) = \int_\Omega D_n dP = \int_\Omega D_n d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n}(\Omega) = 1 < \infty$$

- Finalmente probaremos que $\mathbb{E}(\, D_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = D_n$.
Como D_n es $\mathscr{F}_n$-medible entonces solo falta probar que para toda $A \in \mathscr{F}_n$ se cumple con que $\mathbb{E}(D_{n+1}\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(D_n \mathbb{1}_A)$.
Sea $A \in \mathscr{F}_n$, como $\mathscr{F}_n$ es filtración entonces $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$ y por lo tanto $\mathbb{1}_A$ es $\mathscr{F}_n$-medible y también$\mathscr{F}_{n+1}$-medible. Entonces:

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_{n+1}}(\Omega) = \int_\Omega D_{n+1}\mathbb{1}_A \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_{n+1}} = \int_\Omega D_{n+1}\mathbb{1}_A \mathbb{P} = \mathbb{E}(D_{n+1}\mathbb{1}_A)$$

y por otro lado usando ahora que $\mathbb{1}_A$ es $\mathscr{F}_n$-medible se tiene

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n}(\Omega) = \int_\Omega D_n\mathbb{1}_A \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \int_\Omega D_n\mathbb{1}_A \mathbb{P} = \mathbb{E}(D_n\mathbb{1}_A)$$

De donde juntando ambos resultados obtenemos que:

$$\mathbb{E}(D_n\mathbb{1}_A) = \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(D_{n+1}\mathbb{1}_A)$$

Por lo tanto D_n es martingala.
Ahora supongamos D_n es uniformemente integrable entonces D_n converge a D_∞ casi seguramente y en L_1 y además se tiene que D_n es una martingala cerrada, es decir $D_n = \mathbb{E}(\, D_\infty \mid \mathscr{F}_n)$. Bajo esta hipótesis afirmamos que:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A D_\infty d\mathbb{P} \quad \forall A \in \mathscr{F} = \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{F}_i\right)$$

Es decir si la afirmación es válida se sigue que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ y además se tendría que la martingala converge a $D_\infty = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Probaremos entonces la afirmación usando lema de clases monótonas. Definamos entonces.

$$\mathscr{L} := \left\{ A \in \mathscr{F} = \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{F}_i\right) : \mathbb{Q}(A) = \int_A D_\infty d\mathbb{P} \right\}$$

$$\mathscr{C} := \left\{ A \in \mathscr{F} = \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{F}_i\right) : A \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{F}_i \right\}$$

Primero $\mathscr{L}$ es λ-sistema pues:

- $\Omega \in \mathscr{L}$. Como D_n converge en L_1 a D_∞ y dado que $\mathbb{E}(D_n) = 1$ para toda n entonces $\mathbb{E}(D_\infty) = 1$ y por lo tanto $\int_\Omega D_\infty d\mathbb{P}$=1. Por otro lado $\mathbb{Q}$ al ser medida de probabilidad se tiene que $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$, por lo tanto se obtiene que
$$\mathbb{Q}(\Omega) = 1 = \int_\Omega D_\infty d\mathbb{P}$$
De donde se sigue que $\Omega \in \mathscr{L}$
- Supongamos $A, B \in \mathscr{L}$ tal que $A \subseteq B$. Entonces tenemos lo siguiente:
$$\mathbb{Q}(B\backslash A) = \mathbb{Q}(B) - \mathbb{Q}(A) = \int_A D_\infty d\mathbb{P} - \int_B D_\infty d\mathbb{P} = \int_{B\backslash A} D_\infty d\mathbb{P}$$
De donde se concluye que $B\backslash A \in \mathscr{L}$.
- Supongamos que $A_n \in \mathscr{L}$ para todo n tal que $A_n \subseteq A_{n+1}$ entonces se sigue que $\mathbb{1}_{A_n} \uparrow \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}$. Por lo tanto $D_\infty \mathbb{1}_{A_n} \uparrow D_\infty \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}$.
Luego usando teorema de la convergencia monotona tenemos:
$$\int D_\infty \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int D_\infty \mathbb{1}_{A_n} d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}(A_n)$$
Pero por continuidad de la medida de probabilidad sabemos que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}(A_n) = \mathbb{Q}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$$
por lo tanto
$$\int_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} D_\infty d\mathbb{P} = \int D_\infty \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} d\mathbb{P} = \mathbb{Q}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$$
De donde se sigue entonces que $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathscr{L}$ Por los tres puntos anteriores se concluye que $\mathscr{L}$ es λ-sistema.

Segundo, $\mathscr{C}$ es π-sistema y es tal que $\mathscr{C} \subset \mathscr{L}$.

- Sea $A, B \in \mathscr{C}$ entonces sabemos existen n, m tal que $A \in \mathscr{F}_n$ y $B \in \mathscr{F}_m$. Sin perdida de generalidad supongamos $n \leq m$. Entonces tendríamos que $A \in \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_m$ y como $B \in \mathscr{F}_m$ entonces se sigue que $A \cap B \in \mathscr{F}_m$ por lo tanto $A \cap B \in \bigcup_{i=1}^\infty \mathscr{F}_i$ de donde se concluye que $A \cap B \in \mathscr{C}$ y por tanto $\mathscr{C}$ es π-sistema
- Sea $A \in \mathscr{C}$ entonces $A \in \bigcup_{i=1}^\infty \mathscr{F}_i$ entonces existe n tal que $A \in \mathscr{F}_n$. Pero como D_n es uniformemente integrable se sigue que $D_n = \mathbb{E}(D_\infty \mid \mathscr{F}_n)$ y como $A \in \mathscr{F}_n$ entonces:
$$\mathbb{E}(D_n \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(D_\infty \mathbb{1}_A)$$
Por lo tanto:
$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n}(A) = \int_A D_n d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \int_A D_n d\mathbb{P} = \int_A D_\infty d\mathbb{P}$$
Por lo tanto $A \in \mathscr{L}$

Finalmente por lema de clases monótonas se concluye que $\mathscr{L} = \mathscr{F}$ y por tanto para toda $A \in \mathscr{F}$ se tiene que:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A D_\infty d\mathbb{P}$$

Lo que demuestra que en efecto $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ □

(2) Pruebe que si T es un tiempo de paro finito entonces $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_T} \ll \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$.

Proof. Sabemos que $\mathscr{F}_T := \{A \in \mathbb{E} : A \cap \{T = n\} \in \mathscr{F}_n \forall n\}$ además al ser T tiempo de paro finito se sigue que D_T es $\mathscr{F}_T$ medible. Con esto primero demostraremos que para toda $A \in \mathscr{F}_T$ se tiene que:

$$\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_T}(A) = \int_A D_T d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$$

Primero como D_T es $\mathscr{F}_T$ medible tenemos que;

$$\int_A D_T d\mathbb{P}|_{F_T} = \int_A D_T d\mathbb{P}$$

Pero $D_T = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \mathbb{1}_{T=n}$ y como D_n es no negativo para todo n entonces usando Teorema de la convergencia monotona obtenemos:

$$\int_A D_T d\mathbb{P} = \int_A \sum_{n=0}^{\infty} D_n \mathbb{1}_{T=n} d\mathbb{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega D_n \mathbb{1}_{\{T=n\}\cap A} d\mathbb{P}$$

Pero por hipótesis $A \in \mathscr{F}_T$, entonces $\{T = n\} \cap A \in \mathscr{F}_n$ luego entonces:

$$\int_\Omega D_n \mathbb{1}_{\{T=n\}\cap A} d\mathbb{P} = \int_{\{T=n\}\cap A} D_n d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n}(\{T = n\} \cap A) = \mathbb{Q}(\{T = n\} \cap A)$$

Por lo tanto sustituyendo esto último obtenemos que;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega D_n \mathbb{1}_{\{T=n\}\cap A} d\mathbb{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}(\{T = n\} \cap A) = \mathbb{Q}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{T = n\} \cap A\right)$$

Por lo tanto hemos probado que:

$$\int_A D_T d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T} = \mathbb{Q}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{T = n\} \cap A\right) = \mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_T}(A)$$

Por lo tanto obtenemos que:

$$\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_T}(A) = \int_A D_T d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T} \quad \forall A \in \mathscr{F}_T$$

Por lo tanto $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_T} \ll \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$. □

(3) Sea $\mathbb{P}^p$ la distribución de una caminata aleatoria simple que comienza en 0 y va de k a $k+1$ con probabilidad p, donde $p \in (0, 1)$. Pruebe que $\mathbb{P}^p$ es localmente absolutamente continua respecto de $\mathbb{P}^{1/2}$ y encuentre la martingala D_n asociada.

Proof. Tenemos dos medidas de probabilidad $\mathbb{P}^p$ y $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}$. Definamos al evento

$$A = \{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\} \in \mathscr{F}_n$$

Entonces bajo $\mathbb{P}^p$ tenemos que:

$$\mathbb{P}^p(A) = \mathbb{P}^p\left(X_1 = x_1, \ldots X_n = x_n\right) = p^k q^{n-k}$$

Donde $q = 1 - p$, k =número de saltos hacia arriba, además esta probabilidad es válida cuando $x_i - x_{i-1} \in \{-1, 1\}$. De la misma manera y bajo las mismas condiciones tenemos que bajo $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}$, se tiene que:

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(A) = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_1 = x_1, \ldots X_n = x_n\right) = \frac{1}{2^n}$$

Entonces podemos re-expresar de la siguiente forma:

$$\mathbb{P}^p(A) = q^n \left(\frac{p}{q}\right)^k = (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^k \frac{1}{2^n}$$

Pero k es igual al número de saltos hacia arriba y como se trata de una caminata simple con saltos en $\{-1, 1\}$ y dado que X_n nos dice la posición de la caminata en el tiempo n, entonces $k = \frac{x_n+n}{2}$ por lo que sustituyendo esto ultimo.

$$\mathbb{P}^p(A) = (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{x_n+n}{2}} \frac{1}{2^n} = \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left((2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} \mathbb{1}_{\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\}}\right)$$

Donde $\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}$ se refiere a la esperanza con respecto a la medida $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}$ luego entonces en términos de integral hemos probado que:

$$\mathbb{P}^p(A) = \mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(A) = \int_A (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}} = \int_A (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n}$$

La última igualdad es válida porque $(2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}}$ es $\mathscr{F}_n$-medible. Hay que notar además que lo anterior fue demostrado válido para $A \in \mathscr{F}_n$ que son de la forma $\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}$ sin embargo usando Lema de clases monótonas se mostrará que lo último es valido para todo $A \in \mathscr{F}_n$. Definamos entonces:

$$\mathscr{L} := \left\{A \in \mathscr{F}_n : \mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(A) = \int_A (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n}\right\}$$

$$\mathscr{C} := \{A \in \mathscr{F}_n : A = \{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}\}$$

Por lo que ya probamos arriba, es claro que $\mathscr{C} \subset \mathscr{L}$ y además es un π-sistema pues la intersección de cilindros finito dimensionales es otro cilindro finito dimensional. Entonces solo basta probar que $\mathscr{L}$ es un λ-sistema.

- $\Omega \in \mathscr{L}$ pues:

$$\int_\Omega (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n} = \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left((2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}}\right) = (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}} \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{q}^{\frac{X_n}{2}}\right)$$

Pero $X_n = S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ con ξ_i variables aleatorias independientes con valores en $\{-1, 1\}$ los cuales toma con probabilidad $\frac{1}{2}$ bajo $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}$

$$\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{q}^{\frac{X_n}{2}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p}{q}^{\frac{\xi_1}{2}}\right) = \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(pq)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^n}(pq)^{-\frac{n}{2}}$$

Sustituyendo esto último obtenemos que:

$$\int_{\Omega}(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n} = (2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2^n}(pq)^{-\frac{n}{2}} = 1$$

Por otro lado al ser $\mathbb{P}^p$ medida de probabilidad entonces $\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(\Omega) = 1$ por lo tanto se tiene la igualdad:

$$\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(\Omega) = 1 = \int_{\Omega}(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n}$$

Por lo tanto $\Omega \in \mathscr{L}$

- Supongamos $A, B \in \mathscr{L}$ tal que $A \subseteq B$. Entonces tenemos lo siguiente:

$$\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(B\backslash A) = \mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(B) - \mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(A)$$

$$= \int_{B}(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n} - \int_{A}(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n}$$

$$= \int_{B\backslash A}(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n}$$

De donde se concluye que $B\backslash A \in \mathscr{L}$.

- Supongamos que $A_k \in \mathscr{L}$ para todo k tal que $A_k \subseteq A_{k+1}$ entonces se sigue que $\mathbb{1}_{A_k} \uparrow \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}$. Por lo tanto

$$(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} \mathbb{1}_{A_k} \uparrow (2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)_{\infty}^{\frac{X_n+n}{2}} \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}$$

(Note que en lo anterior la n es fija y lo que tiende a infinito es k).
Luego usando teorema de la convergencia monotona tenemos:

$$\int(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n} = \lim_{k\to\infty}\int(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} \mathbb{1}_{A_k} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n}$$

Pero como cada $A_k \in \mathscr{L}$ entonces

$$\lim_{k\to\infty}\int(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} \mathbb{1}_{A_k} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n} = \lim_{k\to\infty}\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(A_k) = \mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$$

Por lo tanto hemos probado que:

$$\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n}$$

De donde se sigue entonces que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{L}$. Luego por los tres puntos anteriores se concluye que $\mathscr{L}$ es λ-sistema y por tanto;

$$\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_n}(A) = \int_A (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_n} \quad \forall A \in \mathscr{F}_n$$

Lo anterior nos indica que $\mathbb{P}^p$ es localmente absolutamente continua respecto de $\mathbb{P}^{1/2}$ y además la martingala asociada es:

$$D_n = (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}}$$

□

(4) Para $a, b > 0$, sea $T = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n \in \{-a, b\}\}$. Pruebe que T y X_T son independientes bajo $\mathbb{P}^{1/2}$. Al utilizar la continuidad absoluta local, pruebe que T y X_T también son independientes bajo $\mathbb{P}^p$. Utilice alguna martingala de ejercicios anteriores para calcular $\mathbb{E}(T^2)$.

Proof. En clase probamos que en el problema de la ruina del jugador con el supuesto de que $p = \frac{1}{2}$ se tenía que:

$$\mathbb{E}(T) = ab \quad \text{y} \quad \mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0) = 0$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(T)\,\mathbb{E}(X_T) = 0$. Si X_T fuera independiente de T entonces se tendria que $\mathbb{E}(X_T T) = 0$, a continuación presento una simulación de la caminata aleatoria con a=2 y b=3 donde se observa que el promedio de la variable $X_T T$ no se estabiliza cerca de cero, lo que contradice la hipótesis de independencia.

```
a=2
b=3
T=0
X=0
Sim=40000
for (k in 1:Sim){
  S=0
  S[1]=0
  j=1
  while (((S[j]>-a) && (S[j]<b)) ){
    u=runif(1)
    if (u <= 1/2)  Y=1  else  Y=-1
    S[j+1]=S[j]+Y
    j=j+1
  }
  T[k]=(j-1)
  X[k]=S[j]
}

mean(T)

Valor teorico a*b=6
Valor obtenido en la simulacion=6.01975


mean(X)
Valor teorico E(X_T)=E(X_0)=0
Valor obtenido en la simulacion=-0.00025
```

```
Generamos la vaiable $X_T*T$
G=X*T

mean(G)
Valor toerico bajo independencia  E(X_T*T)=E(X_T)*E(T)=0
Valor obtenido en la simulacion=2.01075
```

.

Se probará que la independencia de X_T con T se obtiene cuando se tiene que $a = b$, es decir cuando se define $T = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n \in \{-a, a\}\}$. Bajo estas condiciones se tiene que la variable X_T toma solo dos valores a saber $\{a, -a\}$ ambos con probabilidad (bajo $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}$) igual a $\frac{a}{a+a} = \frac{1}{2}$, lo que demostraremos para verificar la independencia entre las variable X_T y T es que:

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a|T = k\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T = a) \quad \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = -a|T = k\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T = -a)$$

con k tal que $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k) > 0$. Para la demostración de lo anterior notemos que:

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a|T = k\right) = \frac{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T = a, T = k)}{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k)} = \frac{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_k = a, T = k)}{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k)}$$

Pero notemos dado que el evento $\{X_k = a, T = k\}$ es equivalente al evento de que la primer visita al estado a sea precisamente en el paso k, denotemos a $f_{0,a}(k)$ como la probabilidad de que la caminata alcance por primera vez al estado a en el paso k, bajo esa definición obtenemos que :

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a|T = k\right) = \frac{f_{0,a}(k)}{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k)} \tag{3}$$

De forma análoga se demuestra que:

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = -a|T = k\right) \frac{f_{0,-a}(k)}{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k)} \tag{4}$$

Como X_T solo toma dos valores $\{-a, a\}$ entonces

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a|T = k\right) + \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = -a|T = k\right) = 1$$

por lo tanto:

$$\frac{f_{0,a}(k)}{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k)} + \frac{f_{0,-a}(k)}{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k)} = 1$$

Entonces tenemos que $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k) = f_{0,a}(k) + f_{0,-a}(k)$. Luego sustituyendo esto último en la ecuación (3) obtenemos:

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a|T = k\right) = \frac{f_{0,a}(k)}{f_{0,a}(k) + f_{0,-a}(k)}$$

Por lo que solo hay que verificar que $f_{0,a}(k) = f_{0,-a}(k)$. Para ello notemos que:

$$f_{0,a}(k) = \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1} \neq a} \mathbb{P}_0^{\frac{1}{2}}\left(X_1 = i_1, \ldots, X_{k-1} = i_{k-1}, X_k = a\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1} \neq a} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

y de forma analoga:

$$f_{0,-a}(k) = \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}\neq -a} \mathbb{P}_0^{\frac{1}{2}}\left(X_1 = i_1, \ldots, X_{k-1} = i_{k-1}, X_k = -a\right) = \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}\neq -a} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

De donde se observa que $f_{0,a}(k) = f_{0,-a}(k)$ pues

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}\neq a} 1 = \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}\neq -a} 1$$

Ya que $\sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}\neq a} 1$ nos indica el número de las distintas trayectorias de la caminata de 0 a a en k pasos y por simetría esto es igual a $\sum_{i_1,\ldots,i_{k-1}\neq -a} 1$ que es número de las distintas trayectorias de la caminata de 0 a $-a$. Finalmente como $f_{0,a}(k) = f_{0,-a}(k)$ se sigue

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a | T = k\right) = \frac{f_{0,a}(k)}{f_{0,a}(k) + f_{0,-a}(k)} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto se obtiene que en efecto hay independencia bajo $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}$ pues:

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a | T = k\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a\right)$$

Y de forma analoga se obtiene que:

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = -a | T = k\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = -a\right)$$

Ahora, verificaremos que también hay independencia entre X_T y T bajo $\mathbb{P}^p$ usando que $\mathbb{P}^p$ es localmente absolutamente continua respecto de $\mathbb{P}^{1/2}$.
Primero por el inciso (2) de este ejercicio tenemos que $\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_T} \ll \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_T}$ (Pues ya se había probado en clase que T es tiempo de paro finito). Y ademas tenemos que:

$$\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_T}(A) = \int_A D_T d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_T} = \int_A (2q)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_T}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_T} \tag{5}$$

Para toda $A \in \mathscr{F}_T$. Luego por problema 4 de la tarea 1 tenemos que X_T y T son $\mathscr{F}_T$-medibles, por lo tanto el evento $\{X_T = a, T = k\} \in \mathscr{F}_T$. Para demostrar la independencia probaremos que, $\mathbb{P}^p(X_T = a, T = k) = \mathbb{P}^p(X_T = a)\mathbb{P}^p(T = k)$. Primero tenemos que:

$$\mathbb{P}^p(X_T = a, T = k) = \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_T}{2}} \mathbb{1}_{\{X_T = a\}} \mathbb{1}_{\{T = k\}}\right)$$

Por la independencia de X_T y T bajo $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}$ obtenemos que:

$$= \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}} \mathbb{1}_{\{T = k\}}\right) \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_T}{2}} \mathbb{1}_{\{X_T = a\}}\right)$$

Entonces:

$$\mathbb{P}^p(X_T = a, T = k) = (2q)^k \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}} \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k)\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T = a) \tag{6}$$

Por otro lado calculemos $\mathbb{P}^p(X_T=a)$ dado que $\{X_T=a\}\in\mathscr{F}_T$ y usando (5) tenemos:

$$\mathbb{P}^p(X_T=a)=\int_{\{X_T=a\}}(2q)^T\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_T}{2}}d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_T}$$

$$=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}}\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}}\mathbb{1}_{\{X_T=a\}}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}}\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}}\right)\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{1}_{\{X_T=a\}}\right)$$

Por lo tanto;

$$\mathbb{P}^p(X_T=a)=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}}\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T=a)\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}}\right)\tag{7}$$

De forma analoga obtenemos que;

$$\mathbb{P}^p(X_T=-a)=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T=-a)\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}}\right)\tag{8}$$

Como $\mathbb{P}^p(X_T=-a)+\mathbb{P}^p(X_T=a)=1$ y además como sabemos que $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T=-a)=\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T=a)=\frac{1}{2}$ obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}}\right)\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}}+\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}\right)=1$$

Depejando:

$$\mathbb{E}^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}}\right)=\frac{2}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}}+\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}}$$

sustituyendo esto ultimo en (7) y (8) tenemos:

$$\mathbb{P}^p(X_T=a)=\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}}}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}}+\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}}\tag{9}$$

$$\mathbb{P}^p(X_T=-a)=\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}}+\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}}\tag{10}$$

Por otro lado calcularemos $\mathbb{P}^p(T=k)$

$$\mathbb{P}^p(T=k)=\mathbb{P}^p(X_T=a,T=k)+\mathbb{P}^p(X_T=-a,T=k)$$

Usando (6)

$$\mathbb{P}^p(T=k)=(2q)^k\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k}{2}}\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T=k)\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T=a)\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}}+\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}\right)\tag{11}$$

Por lo tanto usando (6), (11) y (9) obtenemos que en efecto:

$$\mathbb{P}^p(X_T=a,T=k)=\mathbb{P}^p(X_T=a)\mathbb{P}^p(T=k)$$

Y de forma similar

$$\mathbb{P}^p(X_T = -a, T = k) = \mathbb{P}^p(X_T = -a)\mathbb{P}^p(T = k)$$

Y como lo anterior fue para k arbitrario se sigue que X_T y T son independientes bajo $\mathbb{P}^p$, luego por lo anterior se concluye que X_T^2 y T son independientes, entonces usando el ejercicio 4 de la tarea 2

$$\mathbb{E}\left(S_T^2\right) = ab = \mathbb{E}(T)$$

$$\mathbb{E}\left(T^2\right) = \frac{6\mathbb{E}\left(TS_T^2\right) - \frac{ab\left(a^3+b^3\right)}{a+b} - 2ab}{3}$$

Dada la independencia de T con S_T

$$\mathbb{E}\left(TS_T^2\right) = \mathbb{E}(T)\,\mathbb{E}\left(S_T^2\right) = (ab)^2$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}\left(T^2\right) = \frac{6(ab)^2 - \frac{ab\left(a^3+b^3\right)}{a+b} - 2ab}{3}$$

□

Categorías: Cambio de medida, Caminata aleatoria simple.