PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I
SEMESTRE 2013-II
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

GERÓNIMO URIBE BRAVO

Problema 1. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso estocástico con valores reales y $A\subset\mathbb{R}$ un boreliano. Pruebe que si

$$T_0 = 0 \quad \text{y} \quad T_{n+1} = \min\{k > T_n : X_k \in A\}$$

entonces T_n es un tiempo de paro para toda n y $T_n \to \infty$ puntualmente conforme $n \to \infty$.

Categorías: Tiempos de paro

Demostración. Sean $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Se demostrará por inducción. Sea $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.

$\Rightarrow$

$$T_0^{-1}(B) = \begin{cases} \Omega & \text{si} \quad 0 \in B \\ \emptyset & \text{si} \quad 0 \notin B \end{cases}$$

Por lo tanto, T_0 es $\mathscr{F}_0$-medible y en particular $\{T_0 = j\} \in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, de manera que T_0 es un tiempo de paro.

Ahora supongamos que T_n es tiempo de paro, es decir, $\{T_n = j\} \in \mathscr{F}_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Consideremos el evento $\{T_{n+1} = k\}$ y notemos que

$$\{T_{n+1} = k\} = \left(\cup_{j=1}^{k-1}\{T_n = j\} \cap \left(\cap_{i=j+1}^{k-1}\{X_i \notin A\}\right)\right) \cap \{X_k \in A\}.$$

Por hipótesis inductiva, cada $\{T_n = j\} \in \mathscr{F}_j \subset \mathscr{F}_k$. También $\{X_i \notin A\} \in \mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_k$ y por último $\{X_k \in A\} \in \mathscr{F}_k$. F_k es cerrado bajo intersecciones y uniones, por lo tanto $\{T_{n+1} = k\} \in \mathscr{F}_k$. Lo anterior es válido para cualquier $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto T_{n+1} es un tiempo de paro.

Para demostrar que $T_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, basta demostrar que $T_n \geq n$, de nuevo, por inducción.

Por definición, $T_0 \geq 0$. Ahora supongamos que $T_n \geq n$. Entonces pueden suceder 2 cosas.

$$\{k > T_n : X_k \in A\} = \emptyset \Rightarrow T_{n+1} = \infty \geq n + 1.$$

En caso contrario, $T_{n+1} = \min\{k > T_n : X_k \in A\} > T_n \geq n$. Por lo tanto, $T_{n+1} \geq n+1$.

En cualquier caso, la desigualdad se cumple y si hacemos $n \to \infty$, tenemos que $T_n \to \infty$. $\square$

Problema 2 (Lo que siempre tiene una posibilidad razonable de suceder lo hará; (casi seguramente)– y pronto)**.** *Tomado de* [**?**, E10.5, p.223]

Suponga que T es un tiempo de paro tal que para algún $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(T \leq N + n | \mathscr{F}_n) > \varepsilon \text{ casi seguramente}$$

Al verificar la desomposición

$$\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N),$$

pruebe por inducción que para cada $k = 1, 2, \ldots$:

$$\mathbb{P}(T > kN) \leq (1 - \varepsilon)^k .$$

Pruebe que $\mathbb{E}(T) < \infty$.

Categorías: Tiempos de paro.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Notemos que $\{T > kN\} \subset \{T > (k-1)N\}$ y por lo tanto, $\{T > (k-1)N, T > kN\} = \{T > kN\}$. Esto implica que $\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > (k-1)N, T > kN)$.

Queda por demostrar que $\mathbb{P}(T > kN) \leq (1-\varepsilon)^k$, lo cual se hará por inducción.

Consideremos el caso $k = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > N) &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(T > N + 0 | \mathscr{F}_0)) \\ &= \mathbb{E}(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

desmostrando que la desigualdad es válida en este caso.

Ahora supongamos que la desigualdad es válida para $k - 1 \in \mathbb{N}$, es decir, que $\mathbb{P}(T > (k-1)N) \leq (1-\varepsilon)^{k-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > kN) &= \mathbb{P}(T > (k-1)N, T > kN) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>(k-1)N} \mathbb{1}_{T>kN} | \mathscr{F}_{(k-1)N})) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>(k-1)N} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>kN} | \mathscr{F}_{(k-1)N})) \\ &\quad \text{(Por que } \{T > (k-1)N\} = \{T \leq (k-1)N\}^c \in \mathscr{F}_{(k-1)N}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>(k-1)N} \mathbb{P}(T > kN | \mathscr{F}_{(k-1)N})) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>(k-1)N} \mathbb{P}(T > N + (k-1)N | \mathscr{F}_{(k-1)N})) \\ &\leq \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T>(k-1)N}(1-\varepsilon)) \qquad \text{(Por monotonía)} \\ &= \mathbb{P}(T > (k-1)N)(1-\varepsilon) \leq (1-\varepsilon)^{k-1}(1-\varepsilon) \qquad \text{(Por hip. ind.)} \\ &= (1-\varepsilon)^k, \end{aligned}$$

finalizando la prueba inductiva.

Ahora intentemos acotar $\mathbb{E}(T)$. Notemos que para todo $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{P}(T > kN) \geq \mathbb{P}(T > kN + 1) \geq \mathbb{P}(T > kN + (N-1))$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq j) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > j) \\
&\leq \sum_{j=0}^{N-1} + \sum_{j=N}^{\infty} \mathbb{P}(T > j) \\
&\leq N - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} N\mathbb{P}(T > kN) \\
&= N - 1 + N \sum_{k=1}^{\infty} (1-\varepsilon)^k \\
&= N - 1 + N(1-\varepsilon)/\varepsilon < \infty.
\end{aligned}
$$

□

Problema 3. *Tomado de Mathematical Tripos, Part III, Paper 33, 2012,* http://www.maths.cam.ac.uk/postgrad/mathiii/pastpapers/

Sean $(X_i, i \in \mathbb{N})$ variables aleatorias independientes con $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. Sean $S_0 = 0$ y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Sea $T_1 = \min\{n \geq 0 : S_n = 1\}$. Explique por qué T_1 es un tiempo de paro y calcule su esperanza.

Demostración. Sea $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Consideremos

$$\{T_1 = n\} = \left(\cap_{j=0}^{n-1} \{S_j \neq 1\}\right) \cap \{S_n = 1\}.$$

Es claro que S_0, una función constante, es $\mathscr{F}_0$-medible. Como $S_j = f(X_1, \ldots, X_j)$, entonces S_j es $\mathscr{F}_j$-medible para todo $j \in \mathbb{N}$. Así pues, cada $\{S_j \neq 1\} \in \mathscr{F}_j \subset \mathscr{F}_n$ y $\{S_n = 1\} \in \mathscr{F}_n$. Como $\mathscr{F}_n$ es cerrada bajo intersecciones, entonces $\{T_1 = n\} \in \mathscr{F}_n$.

Para calcular $\mathbb{E}(T_1)$, definamos $T_x = \inf\{n \geq : S_n = x\}$. Para todo $a, b \in \mathbb{N}$, el resultado del Problema de la Ruina (visto en clase), dice que

$$\mathbb{E}(T_{-a} \wedge T_b) = ab.$$

Notemos que $T_{-(a+1)} > T_{-a}$ (antes de llegar al nivel $-(a+1)$, el proceso S debió haber pasado por el nivel $-a$), es decir $\{T_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de v.a. estrictamente creciente que toma valores en $\mathbb{N}$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} T_{-n} = \infty$. Así pues, $\lim_{n\to\infty} T_{-n} \wedge T_1 = T_1$. Ademas, $\{T_{-n} \wedge T_1\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente de v.a. y entonces, por TCM,

$$\mathbb{E}(T_1) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(T_{-n} \wedge T_1) = \lim_{n\to\infty} n \cdot 1 = \infty.$$

Para demostrar que $\mathbb{P}(T_1 < \infty) = 0$, utilizaremos el resultado obtenido en el Problema de la Ruina,

$$\mathbb{P}(T_b < T_{-a}) = a/(a+b),$$

de manera que por continuidad de la función de probabilidad,

$$\mathbb{P}(T_1 < \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_1 < T_{-n}) = \lim_{n\to\infty} n/(n+1) = 1,$$

terminando con la demostración. □

2. Mediante el inciso anterior, construya una martingala que converge casi seguramente pero no lo hace en L_1.

Demostración. Si T_1 es un tiempo de paro, entonces $T_1 \wedge n$ tambien será un tiempo de paro, para toda $n \in \mathbb{N}$. Definamos

$$M_n := S_{T_1 \wedge n}.$$

Sea $A \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Entonces,

$$\{M_n \in A\} = \left(\cup_{j=0}^{n}\{S_j \in A, T = j\}\right) \cup \{S_n \in A, T > n\}.$$

Cada $\{S_j \in A\} \in \mathscr{F}_j \subset \mathscr{F}_n$ y $\{T_1 > n\} = \{T_1 \leq n\}^c \in \mathscr{F}_n$. Como $\mathscr{F}_n$ es cerrado bajo intersecciones y uniones, $\{M_n \in A\} \in \mathscr{F}_n$, es decir, M_n es $\mathscr{F}_n$-medible.

Notemos que $|M_n| \leq \sum_{i=0}^{n} |S_i|$, y como cada S_i es una suma de funciones en L_1, $S_i \in L_1$ y por lo tanto $M_n \in Ł_1$.

Por último, veamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(S_{T_1\wedge n}|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \mathbb{1}_{i\leq T}|\mathscr{F}_n\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \mathbb{1}_{i-1<T}|\mathscr{F}_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{i-1<T} + \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_{n<T}|\mathscr{F}_n) \\
&\quad \text{(Por linealidad de la esp. cond. y } \mathscr{F}_n \text{ medibilidad de } X_i \text{ y } \mathbb{1}_{i-1<T}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{i-1<T} + \mathbb{1}_{n<T}\mathbb{E}(X_{n+1}) \\
&\quad \text{(Por } \mathscr{F}_n\text{-medibilidad de } \mathbb{1}_{n<T} \text{ e independencia de } X_{n+1} \text{ con } \mathscr{F}_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{i-1<T} + \mathbb{1}_{n<T} \cdot 0 \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{1}_{i-1<T} = S_{T_1\wedge n} = M_n,
\end{aligned}$$

de manera que M_n es una $\mathscr{F}_n$-martingala.

Notemos que $T_1 \wedge n$ es un tiempo de paro acotado, entonces aplicando el Teorema de Muestreo Opcional, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(S_{T_1\wedge n}) = \mathbb{E}(S_0) = 0.$$

Por otro lado, consideremos $N_n := -M_n + 1$. Claramente N_n es $\mathscr{F}_n$-medible debido a que se trata de una función continua de M_n y $\mathbb{E}(|N_n|) \leq \mathbb{E}(|M_n|) + 1 < \infty$, por lo tanto, $N_n \in L_1$. Además,

$$\mathbb{E}(N_{n+1}|\mathscr{F}_n) = -\mathbb{E}(M_{n+1}) + 1 = -M_n + 1 = N_n,$$

por lo tanto, N_n es una $\mathscr{F}_n$-martingala, que además será no negativa. Entonces, por el Teorema de Convergencia de Martingalas (TCMgls), existe $N_\infty \in L_1$ tal que $N_n \to N_\infty$ c.s., lo cual implica que existe $M_\infty \in L_1$ tal que $M_n \to M_\infty$ c.s.. Recordemos que $\{T_1 < \infty\}$ casi seguramente, de manera que de hecho $S_{T_1} = M_\infty$ c.s..

Para demostrar que $M_n \to S_{T_1}$ en L_1 no es válida, basta ver que $\mathbb{E}(S_{T_1}) = 1$ y $\mathbb{E}(M_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de manera que la convergencia en L_1 es imposible. $\square$

3. Sea M_n la martingala obtenida al detener a $-S$ en T_1. Utilice la solución al Problema de la Ruina para probar que $\mathbb{P}(\max_n M_n \geq M) = 1/M$ para todo $M \geq 1$. Concluya que $\mathbb{E}(\max_m M_m) = \infty$ y que por lo tanto $\mathbb{E}(\max_{m \leq n} M_n) \to \infty$ conforme $n \to \infty$. Finalmente, deduzca que no puede haber una desigualdad tipo Doob cuando $p = 1$.

Demostración. Consideremos mejor la martingala $N_n := -M_n + 1$, donde N_n y M_n son como en el inciso anterior, la cual es positiva y por lo tanto, $N_n^+ = N_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemmos que

$$\begin{aligned}
\{\max_n N_n \geq M\} &= \{\max_n(-M_n) \geq M - 1\} \\
&= \cup_{i=0}^{\infty} \left(\{M_i = -(M-1)\} \cap_{j=0}^{i-1} \{M_j \neq -1\}\right) \\
&= \{T_{-(M-1)} < T_1\}
\end{aligned}$$

Utilizando el resultado correspondiente del Problema de la Ruina, tenemos que

$$\mathbb{P}(\max_n N_n \geq M) = \mathbb{P}(T_{-(M-1)} < T_1) = \frac{1}{(M-1)+1} = \frac{1}{M}.$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\max_n N_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\max_n N_n \geq i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty.$$

Por otra parte, notemos que $\max_{m \leq n} N_m$ es una función creciente respecto a n y por TCM,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(\max_{m \leq n} N_m) = \mathbb{E}(\max_n N_n) = \infty.$$

Por el inciso anterior (consecuencia del Teorema de Muestreo Opcional de Doob), $\mathbb{E}(N_m) = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y por lo tanto no existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbb{E}(\max_{m \leq n} N_m) \leq k\mathbb{E}(N_n) = k$$

(Debido a que $\mathbb{E}(\max_{m \leq n} N_m)$ tiende a ∞ cuando $n \to \infty$)

que correspondería a la Desigualdad L_p de Doob para el caso $p = 1$ (que justamente vimos, no se cumple). $\square$

4. Sea $T = \text{mín}\{n \geq 2 : S_n = S_{n-2} + 2\}$ y $U = T - 2$. ¿Son T y U tiempos de paro? Justifique su respuesta.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Es claro que si $k = 0$ o $k = 1$, $\{T \leq k\} = \emptyset$, el cual es elemento de cualquier σ-álgebra. Consideremos $k \geq 2$. Entonces

$$\begin{aligned}\{T \leq k\} &= \cup_{i=2}^{k}\{S_i = S_{i-2} + 2\} \\ &= \cup_{i=2}^{k}\{X_{i-1} = 1, X_i = 1\},\end{aligned}$$

donde los conjuntos $\{X_{i-1} = 1, X_i = 1\} \in \mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_k$, de manera que $\{T \leq k\} \in \mathscr{F}_k$ y por lo tanto, T es un tiempo de paro.

Por otro lado, de nuevo consideremos un $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}\{U \leq k\} &= \{T \leq k+2\} = \cup_{i=2}^{k+2}\{S_i = S_{i-2} + 2\} \\ &= \cup_{i=2}^{k+2}\{X_{i-1} = 1, X_i = 1\} \\ &= \left(\cup_{i=2}^{k}\{X_{i-1} = 1, X_i = 1\}\right) \cup \{X_k = 1, X_{k+1} = 1\} \cup \{X_{k+1} = 1, X_{k+2} = 1\}.\end{aligned}$$

Pero los eventos $\{X_{k+1} = 1\}$ y $\{X_{k+2} = 1\}$ no son (necesariamente) $\mathscr{F}_k$-medibles, y entonces $\{U \leq k\} \notin \mathscr{F}_k$. Por lo tanto, U no es un tiempo de paro. □

5. Para la variable T que hemos definido, calcule $\mathbb{E}(T)$.

Demostración. Para calcular $\mathbb{E}(T)$, antes decribiremos un juego que despues demostraremos corresponde a una martingala. Supongase que se tiene una sucesión de v.a. i. i. d.$\{X\}$ que valen -1 con probabilidad 1/2 y 1 con probabilidad 1/2. Notemos que si hacemos $Y_n = (X_n + 1)/2$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{Y\}$ son v.a.i.i.d. $Ber(1/2)$. Un casino basa un juego en este proceso; a cada tiempo i, llega un jugador (distinto) con un peso y lo apuesta a que $X_i = 1$. Si gana, recibe 2 pesos y si pierde, no se le regresa su dólar. En el caso en el gane, vuelve a apostar los 2 pesos que gano a que $X_{i+1} = 1$, de manera que si vuelve a atinarle, el casino le dará 4 pesos (momento en el que sucederá el tiempo de paro T y se detendrá el juego); si pierde, no se le regresarán los 2 pesos. Este proceso representa un juego justo e intuitivamente será una martingala. Para demostrarlo formalmente, sea entonces

$$M_n^i = \text{La ganancia del jugador } i\text{-ésimo al tiempo } n.$$

Bajo la explicación anterior (y suponiendo que el jugador no para de apostar lo que recibe)

$$M_n^i = (M_{n-1}^i + 1)2\mathbb{1}_{X_n=1} - 1, \text{ definida } \forall n > i$$

(se le resta 1 unidad al final porque estamos contando ganancias, y se le vuelve a sumar a M_{n-1} porque aunque técnicamente no es una ganancia, lo apostará en la siguiente ronda). Notemos que además, el jugador no tendrá una 'ganancia' al tiempo $i - 1$, de manera que si definimos $M_{i-1}^i := 0$,, podemos extender la igualdad dada arriba a todos los $n \geq i$. Esta ecuación también cumple la condición de que si en algún momento un jugador se queda sin dinero (es decir, tuvo una perdida de 1 peso), entonces se mantendrá con esa pérdida de ahí en adelante, pase lo que pase.

Queda por demostrar que este proceso es martingala para todo $i \in \mathbb{Z}_+$.

Para demostrar $\mathscr{F}_n$-medibilidad y que el proceso está en L_1, se debe hacer por inducción. Claramente M_{i-1}^i cumple ambas condiciones. Supongamos entonces que M_{n-1}^i es $\mathscr{F}_{n-1}$-medible y es un elemento de L_1.

Claramente M_n^i es una función continua de M_{n-1}^i y $\mathbb{1}_{X_n=1}$, los cuales son $\mathscr{F}_n$-medibles, por lo tanto, M_n^i es $\mathscr{F}_n$-medible.

Después,

$$\mathbb{E}(|M_n^i|) = \mathbb{E}(|(M_{n-1}^i + 1)2\mathbb{1}_{X_n=1} - 1|) \leq \mathbb{E}(|M_{n-1}^i|) + 1)2 + 1 < \infty,$$

por lo tanto, $M_n^i \in L_1$, terminando con la inducción.

Ahora,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n^i|\mathscr{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}((M_{n-1}^i + 1)2\mathbb{1}_{X_n=1} - 1|\mathscr{F}_{n-1}) \\
&= (M_{n-1}^i + 1)2\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_n=1}|\mathscr{F}_{n-1}) - 1 \\
&\quad \text{(Por } \mathscr{F}_{n-1}\text{-medibilidad de } M_{n-1}^i\text{)} \\
&= (M_{n-1}^i + 1)2\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_n=1}) - 1 \\
&\quad \text{(Por independencia de } X_n \text{ a } \mathscr{F}_{n-1}\text{)} \\
&= (M_{n-1}^i + 1)2\mathbb{P}(X_n = 1) - 1 \\
&= (M_{n-1}^i + 1)2 \cdot 0.5 - 1 = M_{n-1}^i,
\end{aligned}$$

por lo tanto, M^i es una martingala para todo $i \in \mathbb{Z}_+$.

Si sumamos la ganancia de los jugadores hasta el tiempo n, digamos M_n, entonces claramente M_n será $\mathscr{F}_n$-medible (es una suma de funciones F_n-medibles) y será un elemento de L_1 (lo mismo, es una suma de elementos en L_1). Tambien veamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n+1} M_{n+1}^i|\mathscr{F}_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(M_{n+1}^i|\mathscr{F}_n) + \mathbb{E}(M_{n+1}^{n+1}|\mathscr{F}_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_n^i + M_n^{n+1} \\
&\quad \text{(Porque } M^i \text{ es martingala)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_n^i + 0 = M_n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, M_n también es martingala. Entonces, el Teorema de Muestreo Opcional será válido para tiempos de paro de la forma $T \wedge n$, es decir,

$$\mathbb{E}(M_{T\wedge n} = \mathbb{E}M_1 = \mathbb{E}(2\mathbb{1}_{X_1=1} - 1) = 0.$$

Ahora, notemos que para cualquier tiempo n del proceso, la probabilidad de que salga una secuencia de (1,1) es exactamente 1/4 y en ese caso, $T = n + 2$. Lo anterior implica que

$$\mathbb{P}(T \leq n + 2 | \mathscr{F}_n) \geq 1/4,$$

y usando el Problema 2, tendremos que $\mathbb{E}(T) < \infty$.

El último paso será encontrar cotas para el proceso $M_{T\wedge n}$.Lo mejor que le podría pasar al casino es que todos los jugadores que hayan jugado hasta el tiempo $T \wedge n$ hayan perdido, y lo peor es que la combinación correcta haya salido al principio (de manera que el casino no ganará nada). Es decir, $M_{T\wedge n} \geq -(T \wedge n) \geq -T$ y $M_{T\wedge n} \leq 3 + 1$, es decir, $|M_{T\wedge n}| \leq T + 3$.

Por lo tanto, usando teorema de convergencia dominada (ya que $\mathbb{E}(T) < \infty$),

$$\mathbb{E}(M_T) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = 0,$$

donde tambien utilizamos que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ (por consecuencia de $\mathbb{E}(T) < \infty$). Pero al momento que ocurre T, el casino habrá recibido T pesos de los jugadores totales, y entregado 2 y 2^2 pesos a los ultimos 2 jugadores; el primero le atinó al par de 1's y el segundo solamente le atinó al último 1 de la secuencia. Es decir, $M_T = -T + 4 + 2$, por lo tanto, $\mathbb{E}(T) = -\mathbb{E}(M_T) + 6 = 6$, finalizando la demostración. □

Categorías: Tiempos de paro, problema de la ruina

Problema 4 (Extensiones del teorema de paro opcional)**.** Sea $M = (M_n, n \in \mathbb{N})$ una (super)martingala respecto de una filtración $(\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N})$ y sean S y T tiempos de paro.

1. Pruebe que $S \wedge T$, $S + T$ y $S \vee T$ son tiempos de paro.

Demostración. Para los siguientes sub-incisos, consideremos un $n \in \mathbb{N}$.

a)

$$\begin{aligned}\{S \wedge T \leq n\} &= \{S \wedge T > n\}^c \\ &= \{S > n, T > n\}^c.\end{aligned}$$

Como $\{S > n\} = \{S \leq n\}^c \in \mathscr{F}_n$ y $\{T > n\} = \{T \leq n\}^c \in \mathscr{F}_n$, entonces $\{S \wedge T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$, de manera que $S \wedge T$ es un tiempo de paro.

b)

$$\{S + T = n\} = \cup_{i=0}^{n} \{S = i, T = n - i\}.$$

Cada $\{S = i\} \in \mathscr{F}_i \subset \mathscr{F}_n$ y $\{T = n - i\} \in \mathscr{F}_{n-i} \subset \mathscr{F}_n$, entonces $\{S + T = n\} \in \mathscr{F}_n$, de manera que $S + T$ es un tiempo de paro.

c)

$$\{S \vee T \leq n\} = \{S \leq n, T \leq n\}.$$

Como $\{S \leq n\}$ y $\{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$, entonces $\{S \vee T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$, de manera que $S \vee T$ es un tiempo de paro.

□

2. Sea
$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n \text{ para toda } n\}$$
es una σ-álgebra, a la que nos referimos como la σ-álgebra detenida en τ. Comente qué puede fallar si T no es tiempo de paro. Pruebe que T es F_T-medible.

Demostración. Si T no es tiempo de paro, puede que $\mathscr{F}_T$ no sea σ-álgebra. Para verificar este hecho, supongamos entonces que T no es un tiempo de paro (es decir, existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{T \leq n_0\} \notin \mathscr{F}_{n_0}$) y que F_T sí es una σ-álgebra. Entonces, sea $A \in \mathscr{F}_T, \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}_T$ (por que F_T es σ-álgebra), es decir,
$$A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n \text{ y } A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero F_n es cerrada bajo uniones, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$,
$$(A \cap \{T \leq n\}) \cup (A^c \cap \{T \leq n\}) \in \mathscr{F}_n$$
$$\Rightarrow (A \cup A^c) \cap \{T \leq n\} = \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n,$$
lo cual contradice el hecho de que $\{T \leq n_0\} \notin \mathscr{F}_{n_0}$. Por lo tanto F_T no sería una σ-álgebra si T no es un tiempo de paro.

Para demostrar que T es F_T-medible, fijemos un $n \in \mathbb{N}$. Sea $m \in \mathbb{N}, m > n$,
$$\Rightarrow \{T = m\} \cap \{T \leq n\} = \emptyset \in \mathscr{F}_n.$$
Sea ahora $m \in \mathbb{N}, m \leq n$,
$$\Rightarrow \{T = m\} \cap \{T \leq n\} = \{T = m\} \in \mathscr{F}_m \subset \mathscr{F}_n.$$
Es decir, $\{T = m\} \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Lo anterior es válido para cualquier $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\{T = m\} \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto,
$$\{T = m\} \in \mathscr{F}_T \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Los conjuntos $\{T = m\}$ generan a $\sigma(T) \Rightarrow \sigma(T) \subset \mathscr{F}_T$ y por lo tanto, T es $\mathscr{F}_T$-medible. □

3. Pruebe que si T es finito, entonces M_T es $\mathscr{F}_T$-medible.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$. El siguiente paso será demostrar que $\{M_T \leq a\} \in \mathscr{F}_T$ o equivalentemente, que $\{M_T \leq a\} \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$,
$$\Rightarrow \{T \leq n\} = \cup_{j=0}^{n} \{T = j\}.$$
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \{M_T \leq a\} \cap \{T \leq n\} &= \{M_T \leq a\} \cap \left(\cup_{j=0}^{n} \{T = j\}\right) \\
&= \cup_{j=0}^{n} \{M_T \leq a, T = j\} \\
&= \cup_{j=0}^{n} \{M_j \leq a, T = j\}.
\end{aligned}$$
Cada $\{M_j \leq a, T = j\} \in \mathscr{F}_j \subset \mathscr{F}_n$ y por lo tanto $\{M_T \leq a\} \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ y en consecuencia, $\{M_T \leq a\} \in \mathscr{F}_T$. Esto es válido para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

El conjunto $\{M_T \leq a\}_{a \in \mathbb{R}}$ genera a $\sigma(M_T)$, de manera que $\sigma(M_T) \subset \mathscr{F}_T$ y por lo tanto, M_T será $\mathscr{F}_T$ -medible.

□

4. Pruebe que si $S \leq T \leq n$ entonces $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$. Si además T es acotado entonces $X_S, X_T \in L_1$ y

$$\mathbb{E}(M_T \mid \mathscr{F}_S) \leq M_S.$$

Demostración. Primero se demostrará que $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$. Entonces, sea $A \in \mathscr{F}_S = \{B : B \cap \{S \leq n\} \in \mathscr{F}_n\}$. Consideremos un $n \in \mathbb{N}$ fijo. Como $S \leq T$ c.s., $\{T \leq n\} \subset \{S \leq n\}$,

$$\Rightarrow A \cap \{T \leq n\} = A \cap (\{T \leq n\} \cap \{S \leq n\}) = (A \cap \{S \leq n\}) \cap \{T \leq n\}.$$

Por definición de F_S, $\{A \cap \{S \leq n\}\} \in \mathscr{F}_n$. Además, $\{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ (por que T es tiempo de paro). Lo anterior es válido para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, que a su vez implica que $A \in \mathscr{F}_T$ y en consecuencia, $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$.

A continuación se mostrará la propiedad de martingala (en lugar de supermartingala, pero se señalará donde vaya la desigualdad correspondiente). Supongamos que $S \leq T \leq n$.

Para demostrar que $\mathbb{E}(M_T | \mathscr{F}_S) = (\leq) M_S$, basta demostrar que para cualquier $A \in \mathscr{F}_S$,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(M_T | \mathscr{F}_s) \mathbb{1}_A) = (\leq) \mathbb{E}(M_S \mathbb{1}_A),$$

o equivalentemente, que

$$\mathbb{E}(M_T \mathbb{1}_A) = (\leq) \mathbb{E}(M_S \mathbb{1}_A)$$

o que

$$\mathbb{E}((M_T - M_S) \mathbb{1}_A) = (\leq) 0.$$

Para ello, desarrollemos

$$\begin{aligned} M_T - M_S &= \sum_{i=S+1}^{T} (M_i - M_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - M_{i-1}) \mathbb{1}_{S+1 \leq i} \mathbb{1}_{i \leq T}. \end{aligned}$$

Notemos que $\{T \geq i\} = \{T \leq i-1\}^c \in \mathscr{F}_{i-1}$ y $\{S+1 \leq i\} = \{S \leq i-1\} \in \mathscr{F}_{i-1}$. Además, como $A \in \mathscr{F}_S$,

$$\Rightarrow A \cap \{S \leq i-1\} \in \mathscr{F}_{i-1},$$

$$\Rightarrow A \cap \{S+1 \leq i\} \cap \{T \geq i\} = (A \cap \{S \leq i-1\}) \cap \{T \leq i-1\}^c \in \mathscr{F}_{i-1},$$

válido para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces por la propiedad de (super)martingala de M_n,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((M_T - M_S)\mathbb{A}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(M_i - M_{i-1})\mathbb{1}_{A\cap\{S+1\le i\}\cap\{T\ge i\}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}(M_i\mathbb{1}_{A\cap\{S+1\le i\}\cap\{T\ge i\}}) - \mathbb{E}(M_{i-1}\mathbb{1}_{A\cap\{S+1\le i\}\cap\{T\ge i\}})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\{\mathbb{E}(\mathbb{E}(M_i|\mathscr{F}_{i-1})\mathbb{1}_{A\cap\{S+1\le i\}\cap\{T\ge i\}}) \\
&\quad - \mathbb{E}(M_{i-1}\mathbb{1}_{A\cap\{S+1\le i\}\cap\{T\ge i\}})\} \\
&\quad \text{(Usando propiedad torre y } \mathscr{F}_{i-1}\text{-medibilidad de} \\
&\quad A\cap\{S+1\le i\}\cap\{T\ge i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}(M_{i-1}\mathbb{1}_{A\cap\{S+1\le i\}\cap\{T\ge i\}}) - \mathbb{E}(M_{i-1}\mathbb{1}_{A\cap\{S+1\le i\}\cap\{T\ge i\}})\right) \\
&\quad \text{(Por propiedad de martingala, si fuera super-martingala, sería } \le) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

finalizando la demostración. □

5. Si $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ es un proceso estocástico $(\mathscr{F}_n)$-adaptado y tal que $X_n \in L_1$ y tal que para cualesquiera tiempos de paro acotados S y T se tiene que $\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_T)$ entonces X es una martingala. Sugerencia: considere tiempos de paro de la forma $n\mathbf{1}_A + (n+1)\mathbf{1}_{A^c}$ con $A \in \mathscr{F}_n$.

Demostración. Sea $A \in \mathscr{F}_n$. Definamos $T_n^A := n\mathbb{A} + (n+1)\mathbb{A}$. Vemos que

$$\begin{aligned}
\{T_n^A = n\} &= A \in \mathscr{F}_n, \\
\{T_n^A = n+1\} &= A^c \in \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_n + 1, \\
\{T_n^A = j\} &= \emptyset \in \mathscr{F}_j, \forall j \notin \{n, n+1\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, T_n^A es un tiempo de paro. Queda por demostrar que $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n$ o equivalentemente, que para todo $A \in \mathscr{F}_n$, $\mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_A)$.

Sea $S = n+1$ (un tiempo de paro 'trivial') y $T = T_n^A$, de manera que por hipotesis, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_{T_n^A})$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{T_n^A}) &= \mathbb{E}(X_{T_n^A}\sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{1}_{T_n^A=i}) \\
&= \mathbb{E}(X_{T_n^A}\mathbb{1}_{T_n^A=n} + X_{T_n^A}\mathbb{1}_{T_n^A=n+1}) \\
&= \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_{T_n^A=n} + X_{n+1}\mathbb{1}_{T_n^A=n+1}) \\
&= \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_A + X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c}).
\end{aligned}$$

Como $\{X_n\} \in \text{Ł}_1$ y usando la hipótesis,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_{T_n^A}) = \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_{A^c}),$$

restando el último sumando de la ecuación, tenemos que

$$\mathbb{E}(X_{n+1}\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_n\mathbb{1}_A),$$

finalizando la demostración. □

6. Pruebe que el proceso M^T obtenido al detener a M al instante T y dado por $M_n^T = M_{T\wedge n}$ es una martingala respecto de $(\mathscr{F}_{T\wedge n}, n \geq 0)$ pero también respecto de $(\mathscr{F}_n, n \geq 0)$. Sugerencia: basta probar el resultado respecto de $(\mathscr{F}_n)$ y para esto es útil el inciso anterior.

Demostración. $T \wedge n$ es un tiempo de paro acotado, por lo tanto, por el inciso 4, la propiedad de $\mathscr{F}_{T\wedge n}$-martingala esta demostrada.

Para demostrar que M^T es $\mathscr{F}_n$-martingala, notemos que $\mathscr{F}_{T\wedge n} \subset \mathscr{F}_n$, entonces M_n^T que es $\mathscr{F}_{T\wedge n}$-medible, será también $\mathscr{F}_n$-medible. Por lo tanto, usando el inciso 5, basta con demostrar que

$$\mathbb{E}(M_R^T) = \mathbb{E}(M_S^T)$$

o equivalentemente

$$\mathbb{E}(M_{T\wedge R}) = \mathbb{E}(M_{T\wedge S})$$

para cualquier tiempos de paro R y S acotados. Notemos que $T \wedge R$ y que $T \wedge S$ son tiempos de paro acotados, por lo tanto, usando el Teorema de Muestreo Opcional,

$$\mathbb{E}(M_R^T) = \mathbb{E}(M_0^T) = \mathbb{E}(M_0)$$

y

$$\mathbb{E}(M_S^T) = \mathbb{E}(M_0^T) = \mathbb{E}(M_0),$$

finalizando la demostración. □

Categorías: Tiempos de paro, Muestreo opcional

Problema 5. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ una caminata aleatoria con saltos $X_i \in \{-1, 0, 1, \ldots\}$. Sea C_p una variable aleatoria geométrica de parámetro p independiente de S y definimos

$$M_p = -\min_{n\leq C_p} S_n.$$

El objetivo del ejercicio es determinar la distribución de M_p.

(A las caminatas aleatorias como S se les ha denominado Skip-free random walks Para aplicaciones de este tipo de procesos, ver [**?**]. También aparecen en el estudio de Procesos Galton-Watson. Este ejercicio es el resultado básico del estudio de sus extremos, denominado teoría de fluctuaciones.)

1. Sea

$$g(\lambda) = E(e^{-\lambda X_1}).$$

Pruebe que $g(\lambda) \in (0, \infty)$ y que

$$M_n = e^{-\lambda S_n} g(\lambda)^{-n}, n \geq 0$$

es una martingala.

Demostración. Hago la suposición de que $\lambda \geq 0$. Entonces, se tiene que $-1 \leq X_1 \Rightarrow \lambda \geq -\lambda X_1 \Rightarrow e^{\lambda} \geq e^{-\lambda X_1}$,

$$\Rightarrow g(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda X_1}) \leq e^{\lambda} < \infty.$$

Por otro lado, dado que $X_1 \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$, considere el conjunto $\{n : \mathbb{P}(X_1 = n) > 0\}$. Este conjunto es distinto del vacío (si fuera vacío, esto querría decir que $\mathbb{P}(X_1 = \infty) = 1$). Entonces, sea $n_0 = \text{ínf}\{n : \mathbb{P}(X_1 = n) > 0\} \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} g(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda X_1}) &= \sum_{i=-1}^{\infty} e^{-\lambda i}\mathbb{P}(X_1 = i) \\ &\geq e^{-\lambda n_0}\mathbb{P}(X_1 = n_0) > 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, $g(\lambda) \in (0, \infty)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Notemos que la función $e^{-\lambda S_n}$ es continua respecto a S_n. S_n es una función $\mathscr{F}_n$-medible, por lo tanto, $e^{-\lambda S_n}$ es $\mathscr{F}_n$-medible. Si dividimos entre la función $g(\lambda)$ (que no depende de S_n), concluimos que M_n es $\mathscr{F}_n$-medible.

Tambien notemos que la caminata esta acotada por abajo para cada n, es decir, $S_n \geq -n$,

$$\Rightarrow \frac{e^{-\lambda S_n}}{g(\lambda)^n} \leq \frac{e^{\lambda n}}{g(\lambda)^n} < \infty.$$

Como $M_n \geq 0$,

$$\Rightarrow \mathbb{E}(|M_n|) = \mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{-\lambda S_n}}{g(\lambda)^n}\right) \leq \frac{e^{\lambda n}}{g(\lambda)^n} < \infty,$$

y por lo tanto, $M_n \in L_1$.

Después,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{e^{-\lambda S_{n+1}}}{g(\lambda)^{n+1}}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{-\lambda S_n + X_{n+1}}}{g(\lambda)^{n+1}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{e^{-\lambda S_n} \cdot e^{-\lambda X_{n+1}}}{g(\lambda)^n \cdot g(\lambda)}\right) \\ &= \frac{e^{-\lambda S_n}}{g(\lambda)^n} \cdot \frac{\mathbb{E}(e^{-\lambda X_{n+1}}|\mathscr{F}_n)}{g(\lambda)} \qquad \text{(Por } \mathscr{F}_n\text{-medibilidad de } S_n) \\ &= M_n \cdot \frac{\mathbb{E}(e^{-\lambda X_{n+1}})}{g(\lambda)} \qquad \text{(Por independencia de } X_{n+1} \text{ a } \mathscr{F}_n) \\ &= M_n \cdot \frac{g(\lambda)}{g(\lambda)} = M_n, \end{aligned}$$

por lo tanto, el proceso $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala. □

2. Pruebe que g es log-convexa al aplicar la desigualdad de Hölder. Pruebe que si $P(X_1 = -1) > 0$ (hipótesis que se utilizará desde ahora) entonces $g(\lambda) \to \infty$ conforme $\lambda \to \infty$. Utilice esta información para esbozar la gráfica de g. Defina $f(s) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : g(\lambda)^{-1} < s\}$. Note que $1/g \circ f = Id$ en $(0, 1)$. Pruebe que si

$g(\lambda) > 1$, la martingala M es acotada hasta el tiempo de arribo de S a $-k$ dado por

$$T_k = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = -k\}$$

(donde se utiliza la convención $\inf \emptyset = \infty$). Aplique el teorema de muestreo opcional de Doob para mostrar que

$$E(s^{T_k}) = e^{-kf(s)}.$$

Justifique MUY bien por qué la fórmula es v?lida aun cuando T_k puede tomar el valor ∞ y deduzca que de hecho $\mathbb{P}(T_k = \infty) = 0$.

Demostración. Sean $a, b \geq 0$ y $t \in [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\log(g(ta-(1-t)b) &= \log\left(\mathbb{E}\left(e^{-taX_1} \cdot e^{-(1-t)bX_1}\right)\right) \\
&\leq \log\left(\mathbb{E}\left(e^{-aX_1}\right)^t \mathbb{E}\left(e^{-bX_1}\right)^{1-t}\right) \\
&\qquad \text{(Usando que log es creciente, y la desigualdad} \\
&\qquad \text{de Holder con } p = 1/t \text{ y } q = 1/(1-t)) \\
&= t\log\left(\mathbb{E}\left(e^{-aX_1}\right)\right) + (1-t)\log\left(\mathbb{E}\left(e^{-bX_1}\right)\right) \\
&= t(\log(g(a)) + (1-t)(\log(g(b)),
\end{aligned}$$

en conclusión, $g(\cdot)$ es una función log-convexa. Para demostrar que $g(\cdot)$ es continua, basta ver que como $\log(g(\cdot))$ es convexa, $\exp(\log(g(\cdot))) = g(\cdot)$ también lo será, y en consecuencia, será continua.

Si $\mathbb{P}(X_1 = -1) \geq 0$,

$$\Rightarrow g(\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda X_1}) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda i}\mathbb{P}(X_1 = i) \geq e^{\lambda}\mathbb{P}(X_1 = -1),$$

que tiende a ∞ cuando $\lambda \to \infty$.

Si añadimos el hecho de que $g(0) = 1$, entonces $\forall s \in (0,1)$,

$$\{\lambda > 0 : g(\lambda)^{-1} < s\} = \{\lambda > 0 : g(\lambda) > 1/s\} \neq \emptyset.$$

Más aún, como $g(\cdot)$ es continua y $g(0) = 1$, $g\left(\inf\{\lambda > 0 : g(\lambda) > 1/s\}\right) = 1/s$, es decir $g(f(s)) = 1/s$ y entonces $(1/g) \circ f = Id$ para todo $s \in (0,1)$.

La variable aleatoria T es un tiempo de paro (la demostración es exactamente igual que la del la variable T_1 del ejercicios 3.1). Ahora consideremos el caso $g(\cdot) > 1$. Sea $\lambda \geq 0$ y definamos

$$T_k^n := T_k \wedge n,$$

que corresponde a un tiempo de paro acotado. Por el Teorema de Muestreo Opcional,

$$\mathbb{E}(M_{T_k^n}) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{-\lambda S_{T_k^n}}}{g(\lambda)^{T_k^n}}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{-\lambda S_1}}{g(\lambda)}\right) = \frac{g(\lambda)}{g(\lambda)} = 1.$$

Como $g(\lambda) > 1$, entonces

$$\frac{e^{-\lambda S_{T_k^n}}}{g(\lambda)^{T_k^n}} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto, por TCA,

$$\mathbb{E}(M_{T_k}) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{-\lambda S_{T_k}}}{g(\lambda)^{T_k}}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{e^{-\lambda S_{T_k^n}}}{g(\lambda)^{T_k^n}}\right) = 1.$$

Supongamos que $T_k < \infty$ (después se demostrará que sucede c.s.).

$$\Rightarrow e^{-\lambda S_{T_k}} = e^{\lambda k}.$$

Tomemos un $s \in (0,1)$, y tomemos un valor de λ particular en $\lambda_s := f(s)$, de manera que

$$\begin{aligned}
1 = \mathbb{E}(M_{T_k}) &= \mathbb{E}\left(\frac{e^{-\lambda_s S_{T_k}}}{g(\lambda_s)^{T_k}}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{\lambda_s k}}{g(\lambda_s)^{T_k}}\right) \\
&= e^{\lambda_s k}\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{g(\lambda_s)}\right)^{T_k}\right) = e^{\lambda_s k}\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{g(f(s))}\right)^{T_k}\right) \\
&= e^{\lambda_s k}\mathbb{E}\left(s^{T_k}\right) \qquad \text{(Por que } 1/g\circ f = Id\text{)},
\end{aligned}$$

demostrando que

$$\mathbb{E}(s^{T_k}) = e^{-\lambda_s k} = e^{-f(s)k}.$$

Para demostrar que la fórmula sigue siendo válida cuando $\{T_k = \infty\}$, supongamos que sucede este evento. Entonces,

$$S_n > -k \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(e^{-\lambda X_1})^n = \mathbb{E}(e^{-\lambda S_n}) \le e^{\lambda r}$$

$$\Rightarrow g(\lambda) \le e^{\lambda r/n} \to 1 \text{ cuando } n \to \infty$$

$$\Rightarrow g(\lambda) \le 1.$$

Esto quiere decir que para todo $s \in (0,1)$,

$$\lambda > 0 : g(\lambda)^{-1} < s = \emptyset,$$

y por lo tanto, $f(s) = \infty$. En estos casos, $\mathbb{E}(s^{T_k}) = \mathbb{E}(0) = 0$ y $e{-}f(s)k = 0$, de manera que la igualdad se mantiene. Cabe destacar que en algún momento de esta demostración, se obtuvo que $g(\lambda) \le 1$ (según nuestra hipótesis sucede lo contrario), de manera que $\mathbb{P}(T_k = \infty) = 0$. □

3. Argumente que

$$P(M_p \ge n) = P(T_n \le C_p) = E((1-p)^{T_n})$$

para demostrar que M_p tiene distribución geométrica de parámetro $1 - e^{-f(1-p)}$

Demostración. Para cada realización de la caminata aleatoria,

$$\{M_p \geq n\} = \{\min_{i \leq C_p} S_i \leq -n\} = \{\exists k : k \leq C_p, S_k = -n\} = \{T_n \leq C_p\},$$

y en consecuencia $\mathbb{P}(M_p \geq n) = \mathbb{P}(T_n \leq C_p)$. Así pues, (recordando que $\mathbb{P}(T_k = \infty) = 0$),

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n \leq C_p) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T_n \leq C_p}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{T_n \leq C_p} | \mathscr{F}_{T_n})) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_n = j} \mathbb{1}_{j \leq C_p} | \mathscr{F}_{T_n})) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T_n = j} \mathbb{1}_{j \leq C_p} | \mathscr{F}_{T_n})) \qquad \text{(Por TCM)} \\
&= \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_n = j} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{j \leq C_p} | \mathscr{F}_{T_n})) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_n = j} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{j \leq C_p})) \qquad \text{(Por independencia de } C_p \text{ a } \mathscr{F}_{T_n}) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_n = j} \mathbb{P}(C_p \geq j)) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{T_n = j} (1-p)^j) \qquad \text{(Por que } C_p \sim Geo(p)) \\
&= \mathbb{E}((1-p)^{T_n}),
\end{aligned}$$

demostrando la igualdad. Usando el resultado del inciso anterior,

$$\mathbb{P}(M_p \geq n) = \mathbb{P}(T_n \leq C_p) = \mathbb{E}((1-p)^{T_n}) = e^{-nf(1-p)} = (e^{-f(1-p)})^n,$$

lo cual corresponde a la distribución de la cola de una v.a. $Geo(1 - e^{-f(1-p)})$. □

4. Tome el l?mite conforme $p \to 0$ para mostrar que la variable aleatoria

$$M = -\min_{n \geq 0} S_n$$

tiene una distribución geométrica de parámetro $1 - e^{-f(1)}$. Interprete esto cuando $f(1) = 0$.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{p \to 0} f(1-p) &= \lim_{q \uparrow 1} \inf\{\lambda > 0 : g(\lambda) > 1/q\} = \lim_{r \downarrow 1} \inf\{\lambda > 0 : g(\lambda) > r\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 : g(\lambda) > 1\} = f(1),
\end{aligned}$$

por la continuidad de la función $g(\cdot)$. Además, $C_p \to \infty$ cuando $p \to 1$, debido a que $\mathbb{P}(C_p > n) = (1-p)^n$. De esta manera, $M = M_{1-}$ tiene como distribución el límite de la función de distribución de M_p cuando $p \to 1$, que corresponde a una distribución $Geo(1 - e^{-f(1)})$. □

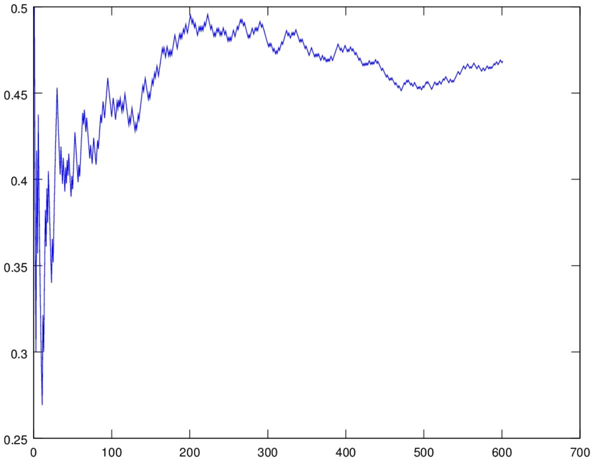

FIGURA 1. Simulación de urna de Polya

Categorías: Caminatas aleatorias, muestreo opcional, fluctuaciones.

Ejercicio 1.

1. Instale Octave en su computadora
2. Échele un ojo a la documentaci?n
3. Ejecute el siguiente código linea por linea:
4. Lea las secciones sobre simple examples, ranges, random number generation y comparison operators y escriba su interpretación de lo que hace el código anterior. Nota: está relacionado con uno de los ejemplos del curso.

   Demostración. El código simula 600 veces el experimento de las urnas de Polya, el cual demostramos en clase es una martingala y además converge a una v.a. Beta. Al simularlo, podemos apreciar que los primeros 100 realizaciones la gráfica tiene bastante movimiento, y de ahí en adelante parece estabilizarse un poco. Este mismo comportamiento, algunas veces con más rapidez, se observó al repetir la simulación varias veces. □

5. Vuelva a correr el código varias veces y escriba sus impresiones sobre lo que está sucediendo.

Problema 6 (Ejercicios sueltos sobre martingalas)**.**

1. Sea $(X_n, n \geq 0)$ una sucesión $(\mathscr{F}_n)$-adaptada. Pruebe que

$$\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(\, X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}\,)\,, \quad n \geq 0$$

   es una $(\mathscr{F}_n)$-martingala.

Demostración. Añadiremos la suposición de que $(X_n, n \geq 0) \in L_1$. Definamos

$$M_n := \sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(\, X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \,,$$

de manera que $M_0 = 0$ y

$$M_n = M_{n-1} + X_n - \mathbb{E}(X_n | \mathscr{F}_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

M_0 es $\mathscr{F}_0$-medible y es un elemento de L_1. Se demostrará lo mismo para M_n con $n \in \mathbb{Z}_+$ por inducción. Así que, asumamos que M_n es $\mathscr{F}_n$-medible y es un elemento de L_1. Entonces

$$M_{n+1} = M_n + X_n - \mathbb{E}(X_n | \mathscr{F}_{n-1}),$$

donde $\mathbb{E}(X_n|\mathscr{F}_{n-1})$ es $\mathscr{F}_{n-1}$-medible y por lo tanto es $\mathscr{F}_n$-medible. Por hipótesis, M_n es $\mathscr{F}_n$-medible, y lo mismo sucede con X_n. La suma de funciones $\mathscr{F}_n$-medibles es $\mathscr{F}_n$-medible y en consecuencia, M_{n+1} es $\mathscr{F}_n$-medible. También,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|M_{n+1}|) &\leq \mathbb{E}(|M_n|) + \mathbb{E}(|X_n|) + \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X_n|\mathscr{F}_{n-1})|) \\
&\leq \mathbb{E}(|M_n|) + \mathbb{E}(|X_n|) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X_n||\mathscr{F}_{n-1})) \\
&\leq \mathbb{E}(|M_n|) + \mathbb{E}(|X_n|) + \mathbb{E}(|X_n|) < \infty,
\end{aligned}$$

por lo tanto, $M_{n+1} \in L_1$, terminando con la inducción.

Ahora,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(M_n + X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)|\mathscr{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(M_n|\mathscr{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)|\mathscr{F}_n) \\
&= M_n + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) - \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) \\
&\quad \text{(Por la } \mathscr{F}_n\text{-medibilidad de } M_n \text{ y } \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)) \\
&= M_n,
\end{aligned}$$

y en consecuencia, M es una $\mathscr{F}_n$-martingala. □

2. Descomposición de Doob para submartingalas: Sea $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una submartingala. Pruebe que X se puede descomponer de manera única como $X = M + A$ donde M es una martingala y A es un proceso previsible con $A_0 = 0$. Sugerencia: Asuma que ya tiene la descomposición y calcule esperanza condicional de X_{n+1} dada X_n.

Demostración. Como X es una submartingala, entonces es $\mathscr{F}_n$ adaptado y está en L_1. Por lo tanto, podemos aplicar el inciso anterior, es decir, hacer

$$N_n := \sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(\, X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$$

o equivalentemente, $N_0 = 0$ y

$$N_n = N_{n-1} + X_n - \mathbb{E}(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

que será una $\mathscr{F}_n$-martingala. Si definimos $M_n := N_n + X_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces M_n sigue siendo $\mathscr{F}_n$-medible (X_0 es $\mathscr{F}_n$-medible para todo $n \in \mathbb{N}$), está en L_1 y

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(N_{n+1} + X_0|\mathscr{F}_n) = N_n + X_0 = M_n,$$

por lo tanto, M_n también es $\mathscr{F}_n$-martingala.

Si definimos un proceso A tal que

$$\begin{aligned}
A_n &:= -M_n + X_n \\
&= -\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) + X_0\right) + X_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) - X_k + X_n - X_0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) - X_{k-1}
\end{aligned}$$

Para demostrar que A es previsible, notemos que todos los términos $\mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ y X_{k-1} son $\mathscr{F}_{k-1}$-medibles (más generalmente, serán $\mathscr{F}_{n-1}$-medibles, ya que $\mathscr{F}_{k-1} \subset \mathscr{F}_{n-1} n$), la suma de ellos sigue siendo $\mathscr{F}_{n-1}$-medible y por lo tanto, A_n es $\mathscr{F}_{n-1}$-medible.

Equivalentemente, podemos decir que $A_0 = 0$ y

$$A_n = A_{n-1} + \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1}.$$

Para demostrar que esta sucesión de A_n es no-decreciente, veamos que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned}
A_n - A_{n-1} &= \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1} \qquad \geq X_{n-1} - X_{n-1} \\
&\qquad \text{(Por que } X \text{ es sub-martingala)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

es decir, sus incrementos son no negativos (c.s.), y por lo tanto, A será no decreciente.

De la definición inicial de A, es fácil notar que $X_n = M_n + A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para demostrar la unicidad de esta representación, supongamos que existen otros procesos M' y A' que cumplen las mismas características y $X_n = M'_n + A'_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$M'_n + A'_n = M_n + A_n$$

$$\Rightarrow (M'_n - M'_{n+1}) + (A'_n - A'_{n+1}) = (M_n - M_{n+1}) + (A_n - A_{n+1})$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}((M'_n - M'_{n+1}) + (A'_n - A'_{n+1})|\mathscr{F}_n) = \mathbb{E}((M_n - M_{n+1}) + (A_n - A_{n+1})|\mathscr{F}_n)$$

y usando la propiedad de martingala de M y M' y la previsibilidad de A,

$$\Rightarrow A'_n - A'_{n+1} = A_n - A_{n+1},$$

es decir, los incrementos en A' y A son los mismos, y como $A'_0 = A_0 = 0$, entonces $A'_n = A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además,

$$M'_n = X_n - A'_n = X_n - A_n = M_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

demostrando la unicidad (casi segura) de esta descomposición. $\square$

3. Sea $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ donde las variables ξ son independientes y ξ_i tiene media cero y varianza finita σ_i^2. Pruebe que si $\sum_i \sigma_i^2 < \infty$ entonces S_n converge casi seguramente y en L_2 conforme $n \to \infty$. Construya un ejemplo de variables aleatorias ξ_i tales que la serie $\sum_i \xi_i$ sea casi seguramente absolutamente divergente y casi seguramente condicionalmente convergente (considere ejemplos simples!). Explique heurísticamente por qué cree que suceda esto.

Demostración. Consideraremos $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Notemos que $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, de manera que S_n es una caminata aleatoria centrada en cero, con $\xi_i \in L_1$, y por lo demostrado en clase, será una $\mathscr{F}_n$-martingala. Tambien notemos que $Var(\xi_i) = \mathbb{E}((\xi_i - \mathbb{E}(\xi_i))^2) = \mathbb{E}(\xi_i^2)$, es decir, la varianza es exactamente igual al segundo momento. Lo mismo es cierto para X_n (ya que de nuevo, es una caminata aleatoria centrada en cero y $\mathbb{E}(X_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n^2) &= Var(S_n) = Var(\xi_1 + \cdots + \xi_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var(\xi_i) \qquad \text{(Por independencia de las } \xi_i\text{'s)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} Var(\xi_i).
\end{aligned}$$

Lo anterior es válido para toda $n \in \mathbb{N}$, de manera que

$$\sup_n S_n \leq \sum_{i=1}^{\infty} Var(\xi_i) < \infty.$$

Aplicando el Teorema de convergencia de martingalas acotadas en L_p con $p = 2$, entonces S_n converge c.s. y en L_2 a un $S_\infty \in \mathrm{L}_2$.

Para un ejemplo, considerese v.a.i. ξ_i que toman los valores $-1/i$ ó $1/i$, cada una con probabilidad $1/2$. Es claro que $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ y $Var(\xi_i) = \mathbb{E}(\xi_i^2) = (-1/i)^2 \cdot 0.5 + (1/i)^2 \cdot 0.5 = 1/i^2$. Después,

$$\sum_{i=1}^{\infty} Var(\xi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty,$$

y en consecuencia de la demostración anterior, S_n converge c.s. y en L_2 a un elemento $S_\infty \in L_2$.

Para ver que la serie no es absolutamente convergente, basta ver que $|\xi_i| = 1/i$, de manera que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(|\xi_i|) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty,$$

por lo tanto, diverge. $\square$

4. Sean X y Y dos martingalas (respecto de la misma filtración) y tales que $\mathbb{E}(X_i)\,, \mathbb{E}(Y_i) < \infty$ para toda i. Pruebe la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(X_0Y_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}((X_i - X_{i-1})\,(Y_i - Y_{i-1}))\,.$$

Demostración. Se necesitara que $Y_i, X_i \in L_2$, y de esta manera, $\mathbb{E}(X_iY_j) < \infty$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ (por desigualdad de Cauchy-Schwarz) y el problema está bien definido. La demostración se hará por inducción.

Así pues, cuando $n = 0$, ambos lados de la igualdad serán igual a 0, por lo que ésta se cumple. Ahora, supngamos que la igualdad es válida para n. Entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1}\mathbb{E}((X_i - X_{i-1})\,(Y_i - Y_{i-1}))\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}((X_i - X_{i-1})\,(Y_i - Y_{i-1})) + \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)\,(Y_{n+1} - Y_n))\\
&= \mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(X_0Y_0) + \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)\,(Y_{n+1} - Y_n))\\
&= \mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(X_0Y_0) + (\mathbb{E}(X_{n+1}Y_{n+1}) - \mathbb{E}(X_nY_{n+1}) - \mathbb{E}(X_{n+1}Y_n) + \mathbb{E}(X_nY_n))\\
&= 2\mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(X_0Y_0) + \mathbb{E}(X_{n+1}Y_{n+1}) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_nY_{n+1}|\mathscr{F}_n)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}Y_n|\mathscr{F}_n))\\
&= 2\mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(X_0Y_0) + \mathbb{E}(X_{n+1}Y_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathscr{F}_n)) - \mathbb{E}(Y_n\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n))\\
&\quad \text{(Por } \mathscr{F}_n\text{-medibilidad de } X_n \text{ y } Y_n\text{)}\\
&= 2\mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(X_0Y_0) + \mathbb{E}(X_{n+1}Y_{n+1}) - \mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(Y_nX_n)\\
&\quad \text{(Por que } Y \text{ y } X \text{ son martingalas)}\\
&= 2\mathbb{E}(X_nY_n) - \mathbb{E}(X_0Y_0) + \mathbb{E}(X_{n+1}Y_{n+1}) - 2\mathbb{E}(X_nY_n)\\
&= \mathbb{E}(X_{n+1}Y_{n+1}) - \mathbb{E}(X_0Y_0)\,,
\end{aligned}$$

terminando con la inducción y la demostración. □

5. Desigualdad de Azema-Hoeffding, tomado de [?, E14.2, p.237]
   a) Muestre que si Y es una variable aleatoria con valores en $[-c, c]$ y media cero entonces, para $\theta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left(e^{\theta Y}\right) \leq \cosh(\theta c) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 c^2\right).$$

Demostración. Definamos la función $f(y) = e^{y\theta}$. $f(\cdot)$ es una función convexa. Además notemos que las siguientes igualdades se cumplen

$$\frac{(c+Y)}{2c} + \frac{(c-Y)}{2c} = 1,$$

donde cada sumando es ≤ 1 debido a que $|Y| \leq c$ (esto nos servirá mas adelante al usar la convexidad de f). También notemos que se cumple la igualdad

$$\theta Y = (c\theta)\frac{(c+Y)}{2c} + (-c\theta)\frac{(c-Y)}{2c},$$

y así pues, tendremos que

$$\begin{aligned}\exp(\theta Y) &= \exp\left((c\theta)\frac{(c+Y)}{2c} + (-c\theta)\frac{(c-Y)}{2c}\right)\\ &\leq \frac{(c+Y)}{2c}\exp(c\theta) + \frac{(c-Y)}{2c}\exp(-c\theta)\end{aligned}$$

(Usando la definición de convexidad sobre los puntos $f(c)$ y $f(-c)$).

Sacando esperanza y usando que $\mathbb{E}(Y) = 0$, tenemos que

$$\mathbb{E}(\exp(\theta Y)) \leq \frac{c}{2c}\exp(c\theta) + \frac{c}{2c}\exp(-c\theta) = \frac{e^{c\theta} + e^{-c\theta}}{2} = \cosh(\theta c).$$

La segunda desigualdad notemos que desarrollando cada serie de Taylor de $e^x + e^{-x}$, los términos impares de las series se anularán mientras que los pares coincidirán y se sumarán 2 veces. Cuando dividimos entre 2 para obtener la función $\cosh(x)$, al final quedara la suma de los términos pares (hablando acerca de la serie de Taylor de e^x). Es decir,

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n(n!)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2/2)^n}{n!} = e^{x^2/2},$$

donde se usó la desigualdad $2n! \leq 2^n(n!)$, que es fácil de notar debido a que $2n!$ es toda la multiplicación de los números 1 hasta $2n$, mientras que $2^n(n!)$ corresponde a la multiplicación de solamente los números pares anteriores (e iguales a) $2n$. □

b) Pruebe que si M es una martingala nula en cero tal que para algunas constantes $(c_n, n \in \mathbb{N})$ se tiene que

$$|M_n - M_{n-1}| \leq c_n \quad \forall n$$

entonces, para $x > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{k\leq n} M_k \geq x\right) \leq \exp\left(\frac{x^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right).$$

Demostración. Si M es una martingala, entonces si le aplicamos la función convexa $f(M_n) = e\theta M_n$, este nuevo proceso será sub-martingala no negativa (por clase. Supongamos que $\theta > 0$ (de hecho, después se elegirá un valor conveniente para θ), entonces la función f es invertible y entonces los eventos $\{\max_{k\leq n} M_x > x\}$ es equivalente a $\{\max_{k\leq n} e^{\theta M_k} > e^{\theta x}\}$. Usando la Desigualdad máximal de Doob para este último evento, tenemos que que

$$\mathbb{P}(\max_{k\leq n} M_x > x) = \mathbb{P}(\max_{k\leq n} e^{\theta M_k} > e^{\theta x}) \leq e^{-\theta x}\mathbb{E}(e^{\theta M_n}).$$

Veamos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\theta M_n}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{\theta M_n}|\mathscr{F}_{n-1}))\\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{\theta M_{n-1}}e^{\theta(M_n-M_{n-1})}|\mathscr{F}_{n-1}))\\
&= \mathbb{E}(e^{\theta M_{n-1}}\mathbb{E}(e^{\theta(M_n-M_{n-1})}|\mathscr{F}_{n-1}))\\
&\leq \mathbb{E}(e^{\theta M_{n-1}}\cosh(\theta c_n)) \qquad (*)\\
&= \cosh(\theta c_n)\mathbb{E}(e^{\theta M_{n-1}})\\
&\leq \exp(\theta^2 c_n^2/2),
\end{aligned}$$

donde (*) es válido por que en la demostración del inciso anterior pudimos haber sacado esperanza condicional en lugar de esperanza y en lugar de usar la propiedad $\mathbb{E}(Y)=0$, usaríamos la propiedad $\mathbb{E}(Y|\mathscr{F})=0$. Pero justamente, como en este caso tenemos que por ser martingala, $\mathbb{E}(M_n - M_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1})=0$, de manera que la desigualdad se sigue cumpliendo.
Si repetimos este procedimiento n pasos, llegaríamos a que

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}) \leq \prod_{i=1}^{n}\exp(\theta^2 c_i^2/2) = \exp\left(\left(\theta^2\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)/2\right).$$

Entonces,

$$\mathbb{P}(\max_{k\leq n} M_x > x) \leq e^{-\theta x}\mathbb{E}(e^{\theta M_n}) = \exp\left(-\theta x + \left(\theta^2\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)/2\right).$$

Recordemos que esto es válido para toda $\theta>0$. De esta manera, si $x>0$, podemos tomar a

$$\theta := \frac{x}{\sum_{i=1}^{n}c_i},$$

y así,

$$-\theta x + \frac{\theta^2\sum_{i=1}^{n}c_i^2}{2} = \frac{-x^2}{\sum_{i=1}^{n}c_i} + \frac{x^2}{2\sum_{i=1}^{n}c_i} = \frac{-x^2}{2\sum_{i=1}^{n}c_i},$$

y en resumen,

$$\mathbb{P}(\max_{k\leq n} M_x > x) \leq \exp\left(\frac{-x^2}{2\sum_{i=1}^{n}c_i}\right)$$

□

Problema 7. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ donde $X_1, X_2, \ldots$ son iid. Sea

$$\phi(\lambda) = \mathbb{E}\left(e^{\lambda S_n}\right) \in (0,\infty].$$

1. Pruebe que si existen $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ tales que $\phi(\lambda_i)<\infty$ entonces $\phi(\lambda)<\infty$ para toda $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$. Sugerencia: escriba $\lambda = a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2$ para algún $a\in[0,1]$ y aplique la desigualdad de Hölder. A partir de ahora se asume la premisa de este inciso.

Demostración. Sea $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ con representación $\lambda = a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2$ p.a. $a \in [0,1]$. Entonces, usando la desigualdad de Holder con $p = 1/a$ y $q = 1/(1-a)$,

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &= \mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) = \mathbb{E}(e^{a\lambda_1 S_n + (1-a)\lambda_2 S_n}) = \mathbb{E}(e^{a\lambda_1 S_n} e^{(1-a)\lambda_2 S_n}) \\ &\leq \mathbb{E}(e^{\lambda_1 S_n})^a \mathbb{E}(e^{\lambda_2 S_n})^{1-a} = \phi(\lambda_1)^a \phi(\lambda_2)^{1-a} < \infty,\end{aligned}$$

domostrando la finitud de $\phi(\lambda)$ para cualquier $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. □

2. Pruebe que $\mathbb{E}\big(|S_n|^{\,k}\big) < \infty$ para toda $k \geq 0$.

Demostración. Sea $\lambda_0 \in (0, \text{mín}(-\lambda_1, \lambda_2))$. Notemos que

$$(0, \text{mín}(-\lambda_1, \lambda_2)) \subset [\lambda_1, \lambda_2]$$

y

$$(-\text{mín}(-\lambda_1, \lambda_2), 0) \subset [\lambda_1, \lambda_2],$$

entonces por el inciso anterior, $\phi(\lambda_0) < \infty$ y $\phi(-\lambda_0) < \infty$. Consideremos la expansión de Taylor de la función $\exp(\cdot)$ evaluada en $|\lambda_0 S_n|$, es decir

$$e^{|\lambda_0 S_n|} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\lambda_0 S_n|^i}{i!} \geq \frac{\lambda_0^k |S_n|^k}{k!}$$

de manera que

$$|S_n|^k \leq \frac{e^{|\lambda_0 S_n|} k!}{\lambda_0^k} \leq \frac{(e^{\lambda_0 S_n} + e^{-\lambda_0 S_n})k!}{\lambda_0^k},$$

y tomando esperanzas

$$\mathbb{E}(|S_n|^k) \leq \frac{(\mathbb{E}(e^{\lambda_0 S_n}) + \mathbb{E}(e^{-\lambda_0 S_n}))k!}{\lambda_0^k} = \frac{(\phi(\lambda_0) + \phi(-\lambda_0))k!}{\lambda_0^k} < \infty,$$

finalizando la demostración. □

3. Sea $M_t^\lambda = e^{\lambda S_t}/\phi(\lambda)$. Argumente que si M^n es el proceso dado por

$$M_t^n = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\bigg|_{\lambda=0} M_t^\lambda,$$

entonces M^n es una martingala para toda n.

Demostración. Debemos demostrar la integrabilidad, medibilidad y propiedad de martingala para cada $n \in \mathbb{N}$. Por ahora, asumamos que M^n es integrable para toda n (ese problema lo dejaremos para el final). Definamos

$$\tilde{M}_t^n = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} M_t^\lambda$$

En clase se demostró que el caso $\tilde{M}^0$ era martingala. Siguiendo los pasos de una inducción, supongamos que el caso $\tilde{M}^n$ también es una martingala. Si por ahora suponemos que el operador derivada puede salir de la esperanza condicional, tendremos entonces que para todo $s < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\tilde{M}_t^{n+1}|\mathscr{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{\partial^{n+1}}{\partial\lambda^{n+1}}M_t^\lambda|\mathscr{F}_s\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\mathbb{E}\left(\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}M_t^\lambda|\mathscr{F}_s\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\tilde{M}_s^n\right) \qquad \text{(Por hip. de inducción)} \\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{M}_s^n = \tilde{M}_s^{n+1},
\end{aligned}$$

lo cual tambien será cierto para el proceso $M^n = \tilde{M}^n|_{\lambda=0}$.

A continuación se dará una explicación de porque es posible intercambiar el operador derivada con la esperanza condicional que dará también como resultado auxiliar, la medibilidad de las derivadas de orden n. La derivada (por la derecha) de una función f medible derivable, está definida por

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(\lambda+1/n)-f(\lambda)}{1/n}.$$

(En nuestro caso, la función será M_t^λ, que es integrable y está correctamente definida para una vecindad de del 0, por lo que si nos tomamos $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, podemos tomar en lugar de de la sucesión $\lambda + 1/n$, alguna subsucesión que esté contenida en (λ_1, λ_2) y así no tendremos problemas con integrabilidad). Notemos que esta derivada es un limite de funciones medibles, por lo tanto, ésta será también medible (de aquí es donde se demuestra la medibilidad de cada M^n). Si la derivada de f es integrable, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada para esperanza condicional para intercambiar la esperanza condicional con el límite, aplicar definición de derivada de nuevo y tendríamos como conclusión que podemos cambiar el operador derivada con la esperanza condicional.

Por lo tanto, bastará con demostrar que cada

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}M_t^\lambda$$

es integrable para toda n. Para ello, enunciemos la expansión de Taylor respecto a λ de M_t^λ alrededor de a, donde $a \in (\lambda_1, \lambda_2)$,

$$M_t^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda-a)^n}{n!}\left.\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\right|_{\lambda=a}M_t^\lambda \geq 0.$$

Si aplicamos esperanza, la anterior igualdad será válida para todo $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)\backslash\{a\}$ y más aún, utilizando el teorema de convergencia acotada para intercambiar suma con esperanza, tendremos que

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda-a)^n}{n!}\mathbb{E}\left(\left.\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\right|_{\lambda=a}M_t^\lambda\right).$$

Como se tiene que $\lambda \neq a$, esto implica que

$$-\infty < \mathbb{E}\left(\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\bigg|_{\lambda=a} M_t^\lambda \right) < \infty.$$

Para concluir correctamente, deberíamos demostrar una de 2 cosas que el valor absoluto de la función

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\bigg|_{\lambda=a} M_t^\lambda$$

es integrable; sin embargo, no me fue posible deducirlo correctamente. □

4. Calcule las primeras 4 martingalas resultantes si $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. Utilícelas para calcular el valor de $\mathbb{E}\big(T^2\big)$ donde

$$T = \text{mín}\,\{n \geq 0 : S_n \in \{-a, b\}\}$$

Demostración. Usando los 3 incisos anteriores, mediante cálculos auxiliados por computadora (las derivadas se ponen feas en el tercer y cuarto paso), tenemos que

$$\begin{aligned} M_t^1 &= S_t \\ M_t^2 &= S_t^2 - t \\ M_t^3 &= S_t^3 - 3tS_t \\ M_t^4 &= S_t^4 - 6tS_t^2 + 3t^2 + 2t. \end{aligned}$$

Es justamente M_t^4 la martingala que nos interesa utilizar como medio para calcular $\mathbb{E}(T^2)$. El resultado visto en clase del Problema de la Ruina, nos dice que $\mathbb{P}(S_T = -a) = b/(a+b)$, $\mathbb{P}(S_T = -b) = a/(a+b)$ y que $\mathbb{E}(T) = ab$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_T) &= 0 \\ \mathbb{E}(S_T^2) &= ab \\ \mathbb{E}(S_T^3) &= ab(a-b) \\ \mathbb{E}(S_T^4) &= (ab(a^3+b^3))/(a+b). \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de Muestreo Opcional de Doob para la cuarta martingala, tendremos que

$$\mathbb{E}(S_T^4 - 6TS_T^2 + 3T^2 + 2T) = 0$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(T^2\big) & \frac{\mathbb{E}(-S_T^4 + 6TS_T^2 - 2T)}{3} \\ &= \frac{-(ab(a^3+b^3))/(a+b) + 6\mathbb{E}(TS_T^2) - 2ab}{3}. \end{aligned}$$

Se resolvió el problema en el caso $a = b$, de manera que tendremos que $\mathbb{E}(TS_T^2) = a^2\mathbb{E}(T) = a^4$, y la fórmula se reduce a

$$\mathbb{E}(T^2) = \frac{5a^4 - 2a^2}{3}.$$

No fue posible calcular $\mathbb{E}(TS_T^2)$ en general. □

Categorías: Caminatas aleatorias, muestreo opcional, ejemplos de martingalas.

Problema 8. Sea M una $(\mathscr{F}_n)$-martingala. Pruebe que si T es un tiempo de paro finito entonces $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$ bajo cada una de las siguientes condiciones:

1. M es acotada.

   Demostración. $T \wedge n$ es un tiempo de paro acotado, así que usando Teorema de Muestreo Opcional, tenemos que $\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0)$. Además, como T es finito, entonces $M_{T\wedge n} \to M_T$ c.s. cuando $n \to \infty$, hecho que se utilizará en las siguientes demostraciones. Si M es acotada, entonces existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $M_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión $M_{T\wedge n} < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así pues, usando TCA,

   $$\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} M_{T\wedge n}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0).$$

   □

2. T es integrable y la sucesión $(M_n - M_{n-1})$ es acotada.

   Demostración. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $|M_i - M_{i-1}| < c$ para toda $i \in \mathbb{Z}_+$, lo cual es posible por que las diferencias son acotadas. De nuevo, como $T \wedge n$ es un tiempo de paro, por Teorema del Muestreo Opcional, se tiene que $\mathbb{E}(M_{T\wedge n} - M_0) = 0$. Entonces

   $$|M_{T\wedge n} - M_0| = |\sum_{i=1}^{T\wedge n}(M_i - M_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{T\wedge n} |(M_i - M_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{T\wedge n} c = c \cdot T \wedge n \leq c \cdot T.$$

   Pero $\mathbb{E}(c\cdot T) = c\cdot\mathbb{E}(T) < \infty$, de manera que tenemos una cota para $|M_{T\wedge n} - M_0|$ que es integrable. Aplicando TCD,

   $$\mathbb{E}(M_T - M_0) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_{T\wedge n} - M_0) = 0.$$

   □

3. $(M_{n\wedge T})$ es uniformemente integrable.

   Demostración. Se usará que $T \wedge n$ es un tiempo de paro finito y que por Teorema de Muestreo Opcional, $\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0)$. Por que T es un tiempo de paro finito, entonces $M_{T\wedge n} \to M_T$ c.s. cuando $n \to \infty$. Como tenemos que $(M_{n\wedge T})$ es uniformemente integrable, esto implica que $M_{T\wedge n} \to M_T$ en L_1 cuando $n \to \infty$. Esto implica que $\mathbb{E}(M_T) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0)$. □

Categorías: Muestreo opcional.

Problema 9. Sea M una $(\mathscr{F}_n)$-martingala con saltos acotados. Sean

$$C = \{\limsup M_n = \liminf M_n \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad D = \{\limsup M_n = -\infty \text{ y } \limsup M_n = \infty\}.$$

Pruebe que $\mathbb{P}(C \cup D) = 1$. Deduzca que las caminatas aleatorias centradas con saltos acotados oscilan. Sugerencia: Para cada $K > 0$ defina

$$T = \min\{n \geq 0 : |M_n| \geq K\}$$

y aplique el teorema de convergencia de martingalas a M^T.

Sea M una caminata aleatoria no trivial con saltos integrables en $-1, 0, 1, \ldots$ y media cero. Pruebe que $\mathbb{P}(M \text{ converge en } \mathbb{N}) = 0$ y concluya que $\liminf M_n = -\infty$ casi seguramente. (Este resultado permitirá dar una prueba adicional de que un Galton-Watson crítico se extingue). Sugerencia: proceda como en el párrafo anterior y pruebe la integrabilidad uniforme de $M_{T\wedge n}, n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea T_a el tiempo de paro correspondiente a la primera vez que el proceso M_n cruza por debajo del nivel $-a$ o por arriba el nivel a, es decir,

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : M_t \leq -a \text{ ó } M_t \geq a\}.$$

Notemos que el evento $\{T_a = n\}$ depende solamente de los primeros n pasos del proceso M_n, por lo tanto efectivamente es un tiempo de paro. Si se tienen saltos acotados, digamos por C, entonces se tiene que $|M_{T_a\wedge n}| < a + C$, y así $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|M_{T_a\wedge n}|) \leq a + C < \infty$. Si se tienen saltos integrables, digamos X_i, entonces $|M_{T_a\wedge n}| \leq a + |X_{T_a\wedge n}|$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|M_{T_a\wedge n}| \mathbb{1}_{|M_{T_a\wedge n}|>t}) &\leq \lim_{t\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}((a + |X_{T_a\wedge n}|)\mathbb{1}_{|X_{T_a\wedge n}|>t-a}) \\
&= \lim_{t\to\infty} a\mathbb{P}(|X_1| > t-a) + \mathbb{E}(|X_1|\mathbb{1}_{|X_1|>t-a}) \qquad \text{(Por que las } X_i \text{ son i.i.d.)} \\
&= 0 \qquad \text{(Por la integrabilidad de los saltos)},
\end{aligned}$$

es decir, $M_{T_a\wedge n}$ es uniformemente integrable. En consecuencia, para cualquiera de los 2 casos (saltos acotados o integrables), se tendrá que $M_{T_a\wedge n}$ converge c.s. a una v.a. en L_1.

Ahora, estudiaremos el proceso M_n bajo los únicos 2 eventos posibles;

$$\{\liminf M_n > -\infty \text{ ó } \limsup M_n < \infty\}$$

y

$$\{\limsup M_n = -\infty \text{ y } \limsup M_n = \infty\}$$

(de hecho, éste último corresponde a al evento D). Para el primero, notemos que bajo el evento $\{T_a = \infty\}$, $M_{T_a\wedge n} = M_n$ y como $M_{T_a\wedge n}$ converge, M_n también lo hará. Esto es cierto para cualquier $a \in \mathbb{N}$ y entonces M_n también convergerá sobre el evento

$$\{\liminf M_n > -\infty \text{ ó } \limsup M_n < \infty\} = \cup_{a\in\mathbb{N}} \{T_a = \infty\}.$$

Notemos que la convergencia de M_n a un elemento de L_1 implica que M_n no puede converger a ∞ ó $-\infty$. En conclusión se tendrá que el evento $\{\liminf M_n > -\infty \text{ ó } \limsup M_n < \infty$ es igual al evento C definido inicialmente. Como esos son lás únicas 2 posibilidades, se tendrá que $\mathbb{P}(C \cup D) = 1$.

Falta demostrar que cualquier caminata aleatoria (no trivial) centrada debe de oscilar. Se ha demostrado en clase que una caminata de este tipo es una martingala. Como es no trivial, existe un $l \neq 0$ tal que $\mathbb{P}(X_i = l) = \epsilon > 0$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_i = l) = \infty,$$

y por BC, el evento $\{X_i = l\}$ sucederá i.o. con probabilidad 1, de manera que es imposible que la caminata se estabilice en algún nivel. Por lo tanto se tendrá que $\mathbb{P}(C) = 0$ y por lo tanto la caminata oscila.

Nota: la discusión anterior es válida para cualquier tipo de caminata centrada no trivial, ya sea con saltos acotados o integrables. □

Categorías: Teoremas de convergencia de martingalas

Problema 10. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias intercambiables:

$$(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_{\pi_1}, \ldots, X_{\pi_n})$$

para cada permutación σ de $\{1, \ldots, n\}$.

1. Para $\mathscr{G}, \mathscr{H}$ subσ-álgebras de $\mathscr{F}$ definimos a $\mathscr{G} \vee \mathscr{H} = \sigma(\mathscr{G} \cup \mathscr{H})$. Sea

$$\mathscr{G}^n = \sigma(f(X_1, \ldots, X_n) : f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ es simétrica}) \vee \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots).$$

Pruebe que $\mathscr{G}^n, n \geq 1$ es una filtración al revés. Sea $\mathscr{G}$ su intersección.

Demostración. Se hará una demostración parcial de este hecho, ya que no conozco la manera correcta de generar a la familia de funciones medibles y simetricas. Analizando los incisos posteriores y el uso que se le da a $\mathscr{G}^n$, es preferible definir la σ-álgebra

$$\mathscr{G}^n = \sigma\left(f(X_1, \ldots, X_n) : f(x_1, \ldots x_n) = \sum_{\beta \in \Theta_n} f_1(x_{\beta_1}) \cdots f_n(x_{\beta_n})\right) \vee \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots),$$

donde Θ_n es el conjunto de todas las permutaciones de los primeros n elementos y cada f_i es una función real medible. Claramente la función f definida de esa manera es simétrica; el problema es que al parecer no se generan a todas las funciones simétricas mediante esta construcción, por ejemplo, no se puede generar a la función $\max(x_1, \ldots, x_n)$; sin embargo, cubre una buena parte de las funciones con las que usualmente trabajamos.

Bajo esta nueva definición, basta con demostrar que los elementos que generan a $\mathscr{G}_{n+1}$ también se encuentran en $\mathscr{G}_n$. El conjunto $\sigma(X_{n+2}, X_{n+2}, \ldots)$ obviamente se encuentra en $\sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) \subset \mathscr{G}_n$. Entonces, para cada sucesión de funciones medibles $\{f_i(\cdot)\}$, tomemos su función simétrica de las primeras $n+1$ v.a., de manera que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta\in\Theta_{n+1}} f_1(X_{\beta_1})\cdots f_{n+1}(X_{\beta_{n+1}})\\
&\qquad= \sum_{\beta\in\Theta_{n+1}} f_{\beta_1}(X_1)\cdots f_{\beta_{n+1}}(X_{n+1})\\
&\qquad= \sum_{i=1}^{n+1}\left(\sum_{\beta\in\Theta_n^i} f_{\beta_1}(X_1)\cdots f_{\beta_n}(X_n)f_i(X_{n+1})\right)\\
&\qquad\qquad\text{(Donde } \Theta_n^i \text{ son las permutaciones de 1 a } n+1 \text{ excluyendo } i\text{)}\\
&\qquad= \sum_{i=1}^{n+1}\{f_i(X_{n+1})\sum_{\beta\in\Theta_n^i} f_{\beta_1}(X_1)\cdots f_{\beta_n}(X_n),
\end{aligned}$$

de donde notamos que esta función se puede expresar como una función simétrica de las primeros n v.a. por una función medible de la v.a. X_{n+1} y por lo tanto, tambien es $\mathscr{G}_n$ medible. De esta manera, acabamos de demostrar que $\mathscr{G}_{n+1}\subset\mathscr{G}_n$ y entonces G es una filtración al revés. □

2. Para cada $A\in\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, defina a

$$\Xi_n(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{X_i\in A}.$$

Pruebe que

$$\mathbb{P}(X_1\in A\,|\mathscr{G}^n)=\Xi_n(A)\,.$$

¿Por qué puede definir a $\Xi(A)=\lim_{n\to\infty}\Xi_n(A)$?

Demostración. Claramente la función $\Xi_n(A)$ es una función simétrica, dado que permutar el orden de los sumandos no cambia el total. Esto implica que $\Xi_n(A)$ es $\mathscr{G}^n$-medible y

$$\Xi_n(A)=\mathbb{E}(\Xi_n(A)|\mathscr{G}^n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_i\in A}|\mathscr{G}^n).$$

Para demostrar que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_i\in A}|\mathscr{G}^n)=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_1\in A}|\mathscr{G}^n)$ para todo $i\in\mathbb{N}$, tendremos que demostrar que para cualquier función simétrica $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(g(X_1,X_2,\dots,X_n)\mathbb{1}_{X_i\in A})=\mathbb{E}(g(X_1,X_2,\dots,X_n)\mathbb{1}_{X_1\in A}).$$

Así pues, sea $\beta(\cdot)$ una permutación que manda la entrada i a 1. La intercambiabilidad en distribución de $X_1,X_2,\dots,X_n$ implica que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X_1,X_2,\dots,X_n)\mathbb{1}_{X_i\in A}) &= \mathbb{E}(g(X_{\beta(1)},X_{\beta(2)},\dots,X_{\beta(n)})\mathbb{1}_{X_{\beta(i)}\in A})\\
&= \mathbb{E}(g(X_{\beta(1)},X_{\beta(2)},\dots,X_{\beta(n)})\mathbb{1}_{X_1\in A})\\
&= \mathbb{E}(g(X_1,X_2,\dots,X_n)\mathbb{1}_{X_i\in A}) \qquad \text{(Por que } g \text{ es simétrica),}
\end{aligned}$$

de manera que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_i\in A}|\mathscr{G}^n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_1\in A}|\mathscr{G}^n)$ y en consecuencia $\mathbb{P}(X_i \in A|\mathscr{G}^n) = \mathbb{P}(X_1 \in A|\mathscr{G}^n)$, concluyendo que

$$\Xi_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_i\in A}|\mathscr{G}^n) = \mathbb{P}(X_1 \in A|\mathscr{G}^n).$$

Entonces se tendrá que $\Xi_n(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_1\in A}|\mathscr{G}^n)$, donde $\mathbb{1}_{X_1\in A} \in Ł_1$ y $\mathscr{G}^n$ es una filtración al revés, entonces, por el Teorema de Levy Hacia Abajo, existirá un limite cuando $n \to \infty$, y de hecho, el límite, al cual llamaremos $\Xi(A)$, será $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_1\in A}|\cap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{G}^n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_1\in A}|\mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1 \in A|\mathscr{G})$.

Nota:Este resultado bien pudo ser obtenido para demostrar la igualdad a $\mathbb{P}(X_l \in A|\mathscr{G})$ para cualquier $l \in \mathbb{N}$. □

3. Al considerar a la martingala

$$\frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbf{1}_{X_i\in A}\mathbf{1}_{X_j\in A},$$

pruebe que $\mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A\,|\mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1 \in A\,|\mathscr{G})\,\mathbb{P}(X_2 \in A\,|\mathscr{G})$. Extienda la afirmación de independencia condicional anterior a $X_1,\ldots,X_n$.

Demostración. El primer paso, será demostrar que para todo $i \neq j$,

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_i\in A}\mathbb{1}_{X_j\in A}|\mathscr{G}^n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_1\in A}\mathbb{1}_{X_2\in A}|\mathscr{G}^n).$$

Es decir, tendremos que demostrar que para cualquier función simétrica $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(g(X_1,X_2,\ldots,X_n)\mathbb{1}_{X_i\in A}\mathbb{1}_{X_j\in A}) = \mathbb{E}(g(X_1,X_2,\ldots,X_n)\mathbb{1}_{X_1\in A}\mathbb{1}_{X_2\in A}).$$

Así pues, sea $\beta(\cdot)$ una permutación que manda la entrada i a 1 y j a 2. La intercambiabilidad en distribución de $X_1,X_2,\ldots,X_n$ implica que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X_1,X_2,\ldots,X_n)\mathbb{1}_{X_i\in A}\mathbb{1}_{X_j\in A}) &= \mathbb{E}(g(X_{\beta(1)},X_{\beta(2)},\ldots,X_{\beta(n)})\mathbb{1}_{X_{\beta(i)}\in A}\mathbb{1}_{X_{\beta(j)}\in A})\\
&= \mathbb{E}(g(X_{\beta(1)},X_{\beta(2)},\ldots,X_{\beta(n)})\mathbb{1}_{X_1\in A X_1\in A})\\
&= \mathbb{E}(g(X_1,X_2,\ldots,X_n)\mathbb{1}_{X_i\in A}\mathbb{1}_{X_2\in A}) \quad \text{(Por que } g \text{ es simétrica)},
\end{aligned}$$

de manera que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_i\in A}\mathbb{1}_{X_j\in A}|\mathscr{G}^n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_1\in A X_i\in A}|\mathscr{G}^n)$ y en consecuencia $\mathbb{P}(X_i \in A, X_j \in A|\mathscr{G}^n) = \mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A|\mathscr{G}^n)$, concluyendo que

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{0<i\neq j\leq n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_i\in A}\mathbb{1}_{X_j\in A}|\mathscr{G}^n) = \mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A|\mathscr{G}^n),$$

ya que existirán $n(n-1)$ sumandos idénticos.

Notemos que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_1\in A}\mathbb{1}_{X_2\in A}|\mathscr{G}^n)$ es una martingala reversa (respecto a n), donde $\mathbb{1}_{X_1\in A}\mathbb{1}_{X_2\in A} \in Ł_1$ y $\mathscr{G}^n$ es una filtración al revés, entonces, por el Teorema de Levy Hacia Abajo, existirá un limite cuando $n \to \infty$ que será

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_1\in A}\mathbb{1}_{X_2\in A}|\cap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{G}^n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_1\in A}\mathbb{1}_{X_2\in A}|\mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A|\mathscr{G}).$$

En conclusión, se demostró que efectivamente la suma propuesta es una martingala y esta tiene como limite a $\mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A|\mathscr{G})$. La demostración de estas propiedades para el caso general $X_1, X_2, \cdots, X_k$ es totalmente análoga.

Ahora,

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i\in A}}{n}\frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{X_j\in A}}{n} = \frac{\sum_{0<i\neq j\leq n} \mathbb{1}_{X_i\in A}\mathbb{1}_{X_j\in A}}{n^2} + \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}^2_{X_i\in A}}{n^2}$$
$$= \frac{n-1}{n}\frac{\sum_{0<i\neq j\leq n} \mathbb{1}_{X_i\in A}\mathbb{1}_{X_j\in A}}{n(n-1)} + \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i\in A}}{n^2}.$$

Notemos que todos los límites cuando $n\to\infty$ existen (por el inciso anterior y por lo demostrado inicialmente) , y de hecho la última sumatoria está acotada por n, de manera que al ser dividida por n^2, en el límite la última fracción será igual a 0. Es decir, se tendrá que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i\in A}}{n}\frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{X_j\in A}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\frac{\sum_{0<i\neq j\leq n} \mathbb{1}_{X_i\in A}\mathbb{1}_{X_j\in A}}{n(n-1)}$$
$$\Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i\in A}}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{X_j\in A}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{0<i\neq j\leq n} \mathbb{1}_{X_i\in A}\mathbb{1}_{X_j\in A}}{n(n-1)}$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_1\in A|\mathscr{G})\mathbb{P}(X_2\in A|\mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1\in A, X_2\in A|\mathscr{G}).$$

Para demostrar el caso general, se hará por inducción, es decir, se supondrá que la formula es válida para $k-1$ y por lo tanto bastará demostrar que

$$\mathbb{P}(X_1\in A, X_2\in A,\ldots,X_k\in A\,|\mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1\in A,\ldots,X_{k-1}\,|\mathscr{G})\,\mathbb{P}(X_k\in A\,|\mathscr{G}).$$

Entonces

$$\frac{\sum_{i_1\neq\cdots\neq i_{k-1}} \mathbb{1}_{X_{i_1}\in A,\ldots,X_{i_{k-1}}\in A}}{n(n-1)\cdots(n-k+2)}\frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{X_j\in A}}{n}$$
$$= \frac{\sum_{i_1\neq\cdots\neq i_{k-1}\neq i_k} \mathbb{1}_{X_{i_1}\in A,\ldots,X_{i_{k-1}}\in A,X_{i_k}\in A}}{n\cdot n(n-1)\cdots(n-k+2)}$$
$$+ \frac{\sum_{i_1\neq\cdots\neq i_{k-1}\wedge i_k=i_l} \mathbb{1}_{X_{i_1}\in A,\ldots,X_{i_{k-1}}\in A,X_{i_k}\in A}}{n\cdot n(n-1)\cdots(n-k+2)}$$
$$= \frac{n-k+1}{n}\frac{\sum_{i_1\neq\cdots\neq i_{k-1}\neq i_k} \mathbb{1}_{X_{i_1}\in A,\ldots,X_{i_{k-1}}\in A,X_{i_k}\in A}}{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}$$
$$+ \frac{\sum_{i_1\neq\cdots\neq i_{k-1}} \mathbb{1}_{X_{i_1}\in A,\ldots,X_{i_{k-1}}\in A}}{n\cdot n(n-1)\cdots(n-k+2)}$$

(Por que como $i_k=i_l$, existe un evento que esta repetido).

La última sumatoria tiene $n(n-1)\cdots(n-k+2)$ elementos, por lo tanto estará acotada por ese número, de manera que dividiendo entre $n\cdot n(n-1)\cdots(n-k+2)$ y haciendo $n\to\infty$, esta última fracción será 0. Los demás limites existen y en conclusión tendremos que

$$\mathbb{P}(X_1\in A,\ldots,X_{k-1}\,|\mathscr{G})\,\mathbb{P}(X_k\in A\,|\mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1\in A, X_2\in A,\ldots,X_k\in A\,|\mathscr{G}),$$

finalizando la demostración. $\square$

Cagegorías: Teorema de convergencia de martingalas, teorema de de Finetti.

Ejercicio 2.

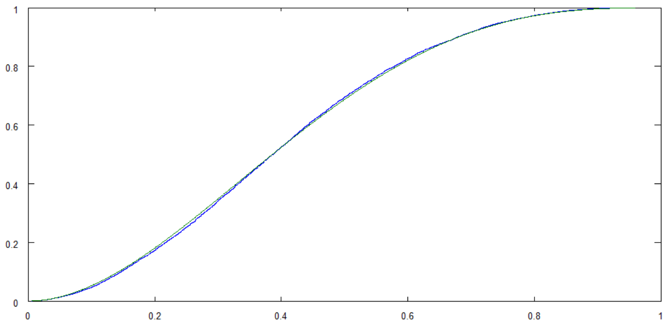

FIGURA 2. Polya vs. Beta

1. Ejecute y explique la función del siguiente código en Octave. Comente qué teoremas del curso (y del curso de probabilidad) son importantes para interpretar la figura.

   Demostración. El programa realiza 10000 trayectorias del experimento de as urnas de Polya y localiza los resultados. Cada una de estas trayectorias se compone de sacar y meter bolas 1000 veces en total. En clase se demostró que cuando hacemos tender al infinito el número de veces que sacamos y metemos bolas, la proporción de bolas tendía a una v.a. con distribución Beta. Y esto es justamente lo que sucede en el programa; se compara la distribución empírica de las 10000 realizaciones con la distribución de una v.a. Beta. □

2. Ejecute y explique la función del siguiente código en Octave. Incluya una gráfica en la que la longitud de la variable k sea mayor a 1000. (Puede modificar el programa...) En la gráfica observara un esbozo de la trayectoria de un proceso de ramificación continuo (en una escala distinta...).

   Demostración. Se trata de una población donde cada individuo tiene 0 o 2 hijo con probabilidad $1/2$ para cada opción. Es decir, a media de la progenie es 1; entonces este proceso de ramificación se arruinará con probabilidad 1. En la figura 3 se presenta una reaización del código propuesto.

   A continuación se presenta el código modificado que permite obtener una población que haya durado más de 1000 generaciones.

```
k=[10];
aux=k(length(k));
while (length(k)<1000)
k=[10];
aux=k(length(k));
while (aux>0 && length(k)<1100)
k=[k;2*binornd(aux,.5)];
aux=k(length(k));
```

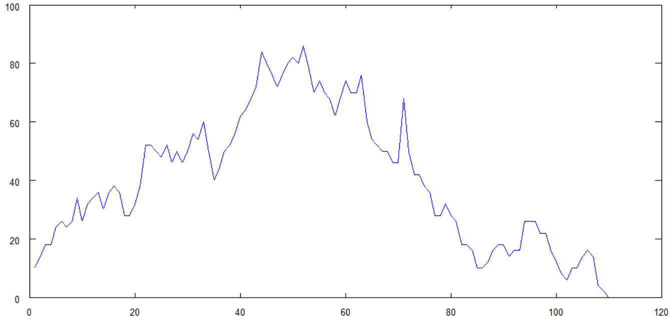

Figura 3. GW

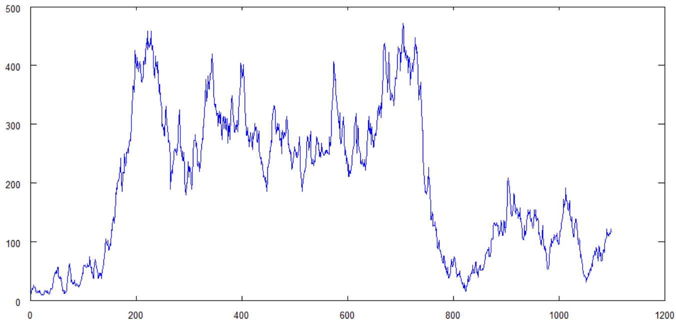

Figura 4. GW > 1000

```
endwhile
endwhile
plot(k)
```

.

y la Figura 4 es una realización del anterior código. □