PROBLEMAS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I
SEMESTRE 2013-II
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

1. Tarea 1

Problema 1.1 *Sea* $(X_{n n \in \mathbb{N}})$ *un proceso estocástico con valores reales y* $A \subset \mathbb{R}$ *un boreliano. Pruebe que si*

$$T_0 = 0 \quad y \quad T_{n+1} = \min\{k > T_n : X_k \in A \subset \mathbb{R}\}$$

entonces T_n *es un tiempo de paro para toda* n *y* $T_n \to \infty$ *puntualmente conforme* $n \to \infty$.

Categorías: *Tiempos de paro.*

Demostración: Sea $B_{n,k} = \{T_n = k : n, k \in \mathbb{N}\}$. Queremos demostrar que $B_{n,k} \in \mathscr{F}_k$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

Para $n = 0$ no hay nada que demostrar. Pues $B_{n,k} = \Omega$ si $k = 0$ y $B_{n,k} = \emptyset$ en cualquier otro caso.

Problema 1.2 *Suponga que* T *es un tiempo de paro tal que para algún* $N \in \mathbb{N}$ *y* $\varepsilon > 0$ *se tiene que para toda* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$\mathbb{P}(T \leq N + n | F_n) > \varepsilon \text{ casi seguramente}$$

Al verificar la desomposición

$$\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N),$$

pruebe por inducción que para cada $k = 1, 2, \ldots$*:*

$$\mathbb{P}(T > kN) \leq (1 - \varepsilon)^k.$$

Pruebe que $\mathbb{E}(T) < \infty$.

Categorías: *Tiempos de paro.*

Demostración: Sea x una prueba...

Problema 1.3 Tomado de Mathematical Tripos, Part III, Paper 33, 2012, http://www.maths.cam.ac.uk/postgrad/mathiii/pastpapers/

Sean $(X_i, i \in \mathbb{N})$ *variables aleatorias independientes con* $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. *Sean* $S_0 = 0$ *y* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(1) *Sea* $T_1 = \min\{n \geq 0 : S_n = 1\}$. *Explique por qué* T_1 *es un tiempo de paro y calcule su esperanza.*
(2) *Mediante el inciso anterior, construya una martingala que converge casi seguramente pero no lo hace en* L_1.

(3) *Sea* $T = \min\{n \geq 2 : S_n = S_{n-2} + 2\}$ *y* $U = T - 2$. *¿Son* T *y* U *tiempos de paro? Justifique su respuesta.*
(4) *Para la variable* T *que hemos definido, calcule* $\mathbb{E}(T)$.

Categorías: *Tiempos de paro, problema de la ruina*

Demostración:

(1)
(2)
(3)
(4)

Problema 1.4 (Extensiones del teorema de paro opcional) *Sea* $M = (M_n, n \in \mathbb{N})$ *una (super)martingala respecto de una filtración* $(\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N})$ *y sean* S *y* T *tiempos de paro.*

(1) *Pruebe que* $S \wedge T$, $S + T$ *y* $S \vee T$ *son tiempos de paro.*
(2) *Sea*
$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n \text{ para toda } n\}$$
es una σ*-álgebra, a la que nos referimos como la* σ*-álgebra detenida en* τ. *Comente qué puede fallar si* T *no es tiempo de paro. Pruebe que* T *es* F_T*-medible.*
(3) *Pruebe que si* T *es finito, entonces* M_T *es* $\mathscr{F}_T$*-medible.*
(4) *Pruebe que si* $S \leq T \leq n$ *entonces* $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$. *Si además* T *es acotado entonces* $X_S, X_T \in L_1$ *y*
$$\mathbb{E}(\, M_T \mid \mathscr{F}_S) \leq M_S.$$
(5) *Si* $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ *es un proceso estocástico* $(\mathscr{F}_n)$*-adaptado y tal que* $X_n \in L_1$ *y tal que para cualesquiera tiempos de paro acotados* S *y* T *se tiene que* $\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_T)$ *entonces* X *es una martingala. Sugerencia: considere tiempos de paro de la forma* $n\mathbf{1}_A + (n+1)\mathbf{1}_{A^c}$ *con* $A \in \mathscr{F}_n$.

Categorías: *Tiempos de paro, Muestreo opcional*

2. Tarea 2