PROBLEMAS RESUELTOS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS I
SEMESTRE 2013-II
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

JOSÉ ADRIÁN ORDÓEZ GÓMEZ

Problema 1. Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso estocástico con valores reales y $A \subset \mathbb{R}$ un boreliano. Pruebe que si

$$T_0 = 0 \quad \text{y} \quad T_{n+1} = \min\{k > T_n : X_k \in A\}$$

entonces T_n es un tiempo de paro para toda n y $T_n \to \infty$ puntualmente conforme $n \to \infty$.

Categorías: Tiempos de paro

P.D. T_n es tiempo de paro.
Demostración
Por inducción.
Caso $n = 1$
Sea $k \in \mathbb{N}$

$$\{T_1 = k\} = \{X_0 \notin A, X_1 \notin A, ..., X_k \in A,\}$$

Como $\{X_i \notin A\} \in \mathscr{F}_i$ $\forall i \in \{1, 2, ..., k-1\}$, $\{X_k \in A\} \in \mathscr{F}_k$ y $\mathscr{F}_i \subseteq \mathscr{F}_k$ para todo $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$ ya que $\mathscr{F}_n$ es una filtración $\Rightarrow \{T_1 = k\} \in \mathscr{F}_k \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $\{T_1 = k\} \in \mathscr{F}_k$

Por lo tanto T_1 es un tiempo de paro.

Supongamos caso $n = m$. T_m es un tiempo de paro, es decir:
$\{T_m = k\} \in \mathscr{F}_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
P.D Caso $n = m + 1$
Sea $k \in \mathbb{N}$

$$\{T_{m+1} = k\} = \bigcup_{i=m}^{k-1} \{T_m = i, X_{i+1} \notin A, X_{i+1} \notin A, ..., X_k \in A,\}$$

Por hipotesis de inducción $\{T_m = i\} \in \mathscr{F}_i$ para $i \in \{m, ..., k-1\}$. Además $\{X_i \notin A\} \in \mathscr{F}_i$ $\forall i \in \{m+1, m+2, ..., k-1\}$, $\{X_k \in A\} \in \mathscr{F}_k$ y $\mathscr{F}_i \subseteq \mathscr{F}_k$ $\forall i \in \{m, m+1, ..., k-1\}$ ya que $\mathscr{F}_n$ es una filtración $\Rightarrow \{T_m = k\} \in \mathscr{F}_m \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $\{T_m = k\} \in \mathscr{F}_k$.

Por lo tanto T_m es un tiempo de paro.

Por lo tanto T_n es un tiempo de paro para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora veamos que por la definición del tiempo de paro $T_n \geq n$, ya que para que suceda T_n al menos el proceso tuvo que haber estado n veces en el conjunto A.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} T_n \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} T_n = \infty$.

Problema 2 (Lo que siempre tiene una posibilidad razonable de suceder lo hará; (casi seguramente)– y pronto)**.** Suponga que T es un tiempo de paro tal que para algún $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(T \leq N + n | \mathscr{F}_n) > \varepsilon \text{ casi seguramente}$$

Al verificar la desomposición

$$\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N),$$

pruebe por inducción que para cada $k = 1, 2, \ldots$:

$$\mathbb{P}(T > kN) \leq (1-\varepsilon)^k.$$

Pruebe que $\mathbb{E}(T) < \infty$.

Categorías: Tiempos de paro.

Demostración

Para verificar la descomposición notemos que:

$$\{T > kN\} = \{T > kN, T > (k-1)N\},$$

Esto es debido a que si el tiempo de paro T no ha sucedido en un tiempo mayor a kN tampoo ha sucedido en un tiempo mayor a $(k-1)N$.

Por lo tanto $\mathbb{P}(T > kN) = \mathbb{P}(T > kN, T > (k-1)N)$.

Ahora verificaremos la igualdad:

$$\mathbb{P}(T > kN) \leq (1-\varepsilon)^k.$$

Para $k = 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leq N | \mathscr{F}_0) &> \varepsilon \\
\mathbb{P}(T > N | \mathscr{F}_0) &\leq 1 - \varepsilon \\
\mathbb{E}(\mathbf{1}_{T>N} \mid \mathscr{F}_0) &\leq 1 - \varepsilon \\
\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{T>N} \mid \mathscr{F}_0)) &\leq \mathbb{E}(1 - \varepsilon) \\
\mathbb{P}(T > N) &\leq 1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que se cumple para $k = n$:

$$\mathbb{P}(T > kN) \leq (1-\varepsilon)^k.$$

P.D. $\mathbb{P}(T > (k+1)N) \leq (1-\varepsilon)^{k+1}$.

Utilizando la descomposición tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > (k+1)N) &= \mathbb{P}(T > (k+1)N, T > kN) \\ &= \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{T>(k+1)N}\mathbf{1}_{T>kN}\big) \\ &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{T>(k+1)N}\mathbf{1}_{T>kN} \,\big|\, \mathscr{F}_{Nk}\big)\big)\end{aligned}$$

Ya que $\mathbf{1}_{T>kN}$ es $\mathscr{F}_k N$-medible:

$$= \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{T>kN}\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{T>(k+1)N} \,\big|\, \mathscr{F}_{Nk}\big)\big)$$

Como $\mathbb{P}\big(T_{(k+1)N} > (k+1)N \,|\, \mathscr{F}_{Nk}\big) > 1-\varepsilon$:

$$\leq \mathbb{E}(\mathbf{1}_{T>kN}(1-\varepsilon))$$

Utilizando hipotesis de inducción:

$$\leq (1-\varepsilon)^k(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{k+1}$$

Por lo tanto $\mathbb{P}(T > kN) \leq (1-\varepsilon)^k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

P.D. $\mathbb{E}(T) < \infty$

Sabemos que $\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq k)$. Por lo anterior sabemos que $\mathbb{P}(T > kN) \leq (1-\varepsilon)^k$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un k tal que $Nk \leq m \leq (k+1)N$. De donde $\mathbb{P}(T \geq M) \leq \mathbb{P}(T \geq kN)$ para $Nk \leq m \leq (k+1)N$, entonces $\sum_{m=kN}^{(k+1)N} \mathbb{P}(T \geq m) \leq N\mathbb{P}(T \geq kN)$.Sustituyendo tenemos que:

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq m) \leq N \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq kN) \leq N \sum_{k=1}^{\infty} \leq (1-\varepsilon)^k = N/\epsilon < \infty.$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(T) < \infty$.

Problema 3. *Tomado de Mathematical Tripos, Part III, Paper 33, 2012,* http://www.maths.cam.ac.uk/postgrad/mathiii/pastpapers/

Sean $(X_i, i \in \mathbb{N})$ variables aleatorias independientes con $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. Sean $S_0 = 0$ y $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(1) Sea $T_1 = \min\{n \geq 0 : S_n = 1\}$. Explique por qué T_1 es un tiempo de paro y calcule su esperanza. Demostración Por el ejercicio 1 si definimos a $A = 1$, T_1 concuerda con la definción del ejercicio 1. Por lo tanto T_1 es tiempo de paro.

Para el cálculo de la esperanza notemos que $T_1 \wedge T_{-n}$ es un tiempo de paro tal que $T_1 \wedge T_{-n} \to T_1$. Ademas utilizando el problema de la ruina sabemos que $\mathbb{E}(T_1 \wedge T_{-n}) = n$. Notemos ahora que la sucesion de variables aleatorias $T_1 \wedge T_{-n}$ es monótona, debido a que $T_1 \wedge T_{-n} = min\{k \geq 1 : S_k = 1 \text{ ó } S_k = -n\}$ y $\{k \geq 1 : S_k = 1 \text{ ó } S_k = -(n+1)\} \subseteq \{k \geq 1 : S_k = 1 \text{ ó } S_k = -n\}$, entonces $T_1 \wedge T_{-n+1} = min\{k \geq 1 : S_k = 1 \text{ ó } S_k = -(n+1)\} \geq min\{k \geq 1 : S_k = 1 \text{ ó } S_k = -n\}$ $T_1 \wedge T_{-n}$. Por lo tanto utilizando el teorema de convergencia monótona tenemos que:

$$\mathbb{E}(T_1) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(T_1 \wedge T_{-n}) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(T_1) = \infty$

(2) Mediante el inciso anterior, construya una martingala que converge casi seguramente pero no lo hace en L_1.

La martingala que proponemos es $S_{T_1 \wedge n}$ que converge a S_{T_1}, hay que demostrar que efectivamente es martingala:

(a) $S_{T_1 \wedge n}$ es adaptada debido a que $S_{T_1 \wedge n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{T \geq i} X_i$, sabemos que X_i son $\mathscr{F}_i$-medibles y $\mathbf{1}_{T \geq i}$ es $\mathscr{F}_{i-1}$-medibles para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por lo tanto $S_{T_1 \wedge n}$ es $\mathscr{F}_n$-medible.

(b) $S_{T_1 \wedge n} \in L_1$ ya que es la suma finita de variables aleatorias que pertenecen a L_1.

(c) La propiedad de martingala:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{T_1 \wedge n} \mid \mathscr{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{T_1 \geq i} X_i \,\middle|\, \mathscr{F}_{n-1} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{T_1 \geq i} X_i \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{T_1 \geq i} X_i \mid \mathscr{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{T_1 \geq n} X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{T_1 \geq i} X_i \mid \mathscr{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{T_1 > n-1} X_n \mid \mathscr{F}_{n-1})
\end{aligned}$$

Como $X_i, \mathbf{1}_{T_1 \geq i}$ son $\mathscr{F}_{n-1}$-medibles y $\mathbf{1}_{T_1 > n-1}$ es $\mathscr{F}_{n-1}$-medibles:

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{1}_{T_1 \geq i} X_i + \mathbf{1}_{T_1 > n-1} \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1})$$

ya que X_n es independiente de $\mathscr{F}_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{1}_{T_1 \geq i} X_i + \mathbf{1}_{T_1 > n-1} \mathbb{E}(X_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{1}_{T_1 \geq i} X_i \\
&= S_{T_1 \wedge (n-1)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(S_{T_1 \wedge n} \mid \mathscr{F}_{n-1}) = S_{T_1 \wedge (n-1)}$.

Ahora como $T_1 \wedge n$ es un tiempo de paro acotado y S_n es una martingala por el teorema de muestreo opcional de Doob tenemos que:

$$\mathbb{E}(S_{T_1 \wedge n}) = \mathbb{E}(S_1) = 0.$$

Por otro lado tenemos que $\mathbb{E}(S_{T_1}) = 1$.

Por lo tanto $S_{T_1 \wedge n}$ converge a S_{T_1} pero $\mathbb{E}(S_{T_1 \wedge n})$ no converge a $\mathbb{E}(S_{T_1})$.

(3) Sea M_n la martingala obtenida al detener a $-S$ en T_1. Utilice la solución al Problema de la Ruina para probar que $\mathbb{P}(\max_n M_n \geq M) = 1/(M+1)$ para todo $M \geq 1$. Concluya que $\mathbb{E}(\max_m M_m) = \infty$ y que por lo tanto $\mathbb{E}(\max_{m\leq n} M_n) \to \infty$ conforme $n \to \infty$. Finalmente, deduzca que no puede haber una desigualdad tipo Doob cuando $p = 1$.

Demostración

Sea $M \geq 1$ entonces

$$\mathbb{P}(max_n M_n \geq M) = 1 - \mathbb{P}(max_n M_n < M)$$

Pero $\{max_n M_n < M\} = \{T_1 < T_{-M}\}$:

$$= 1 - \mathbb{P}(T_1 < T_{-M})$$

Utilizando la solución del problema de la ruina:

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{M}{M+1} \\ &= 1/(M+1). \end{aligned}$$

Calculando la esperanza tenemos que:

$$\mathbb{E}\Big(\max_m M_m\Big) = \sum_{M=1}^{\infty} \mathbb{P}(max_n M_n \geq M) = \sum_{M=1}^{\infty} 1/(M+1) = \infty.$$

Como $\max_{m\leq n} M_n$ es una variable aleatoria monótona que converge $\max_n M_n$ entonces $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\max_{m\leq n} M_n) = \mathbb{E}(\max_n M_n) = \infty$.

Finalmente la desigualdad de Doob no se cumple para $p = 1$ ya que como $\mathbb{E}(\max_{m\leq n} M_n) \to \infty$ no podemos encontrar una constante que lo acote por arriba, es decir que no existe C tal que:

$$\mathbb{E}\left(\max_{m\leq n} M_n\right) \leq C\mathbb{E}(M_n)\,.$$

(4) Sea $T = \min\{n \geq 2 : S_n = S_{n-2} + 2\}$ y $U = T - 2$. ¿Son T y U tiempos de paro? Justifique su respuesta.

T si es un tiempo de paro.

Demostración Por inducción

$$\{T = 2\} = \{X_1 = 1, X_2 = 1\}\,,$$

Como $\{X_1 = 1\} \in \mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2$ y $\{X_2 = 1\} \in \mathscr{F}_2$ entonces $\{T = 2\} \in \mathscr{F}_2$.

Supongamos que para toda $k \leq n$ se cumple que $\{T = k\} \in \mathscr{F}_k$.

P.D. $\{T = n+1\} \in \mathscr{F}_{n+1}$

Podemos expresar a $\{T=n+1\}$ de la siguiente manera:

$$\{T=n+1\}=\bigcap_{i=k}^{n}(\{T\neq i\})\bigcap\{X_m=1,X_{m+1}=1\},$$

Por hipotesis de inducción sabemos que $\{T=k\}\in\mathscr{F}_k$ para toda $k\leq n\Rightarrow$ $\{T\neq i\}\in\mathscr{F}_k\subseteq\mathscr{F}_{n+1}$ para toda $k\leq n$. Además $\{X_m=1\}\in\mathscr{F}_k\subseteq\mathscr{F}_{n+1}$ y $\{X_{m+1}=1\}\in\mathscr{F}_{n+1}$.

Por lo tanto $\{T=n+1\}\in\mathscr{F}_{n+1}$.

Por lo tanto T es tiempo de paro.

U no es tiempo de paro ya que $\{U=n\}=\{T-2=n\}=\{T=n+2\}\in\mathscr{F}_{n+2}$ pero $\{T=n+2\}\notin\mathscr{F}_{n+2}$.

(5) Para la variable T que hemos definido, calcule $\mathbb{E}(T)$.

Para calcular la esperanza de T utilizaremos la sugerencia del Williams la cual nos dice que imaginemos a un mono que escribe letras en una maquina de escribir con dos digitos, 1 y -1, antes de que escriba una letra llega un apostador y apuesta un peso a que la letra que va escribir sera 1, si acierta al apostador le duplican su dinero apostado y apostara toda su ganancia en el siguiente intento a que sera 1 , si falla el apostador se retira y pierde todo su dinero y en cada unidad de tiempo llega un apostador nuevo con 1 peso y apuesta a que el mono escribirá 1, el juego termina cuando salen dos veces 1 de manera consecutiva.

Definamos a la variable aleatoria:

$Z_m^n=$ La cantidad de dinero que ha recibido el jugador n al tiempo m

Luego entonces Z_m^n queda definida de la siguiente manera:

$Z_m^n=0$ para $m<n$.

$Z_{m+1}^{(n)}=(Z_m^n+1)2X_{m+1}-1$ para $m\geq n$

$(X_i)_{i=1}^{\infty}$ son variables aleatorias Bernoulli($\frac{1}{2}$) independientes.

Notemos que Z_m^n es martingala respecto a la filtración $\mathscr{F}_m=\sigma(X_1,X_2,.....X_m)$:

(a) Z_m^n es $\mathscr{F}_m$ adaptado ya ques es una variable aleatria formada por X_i $i\in\{1,..,m\}$.

(b) $Z_m^n\in L_1$ ya que $-1\leq Z_m^n\leq 3$ ya que 3 es la máxima ganancia que puede tener el jugador y -1 es la minima ganancia del jugador. Por lo tanto $-1\leq\mathbb{E}(Z_m^n)\leq 3$.

(c) Propiedad de martingala:

$$\mathbb{E}\big(Z_{m+1}^n\;\big|\;\mathscr{F}_m\big)=\mathbb{E}(\,(Z_m^n+1)2X_{m+1}-1\mid\mathscr{F}_m)$$

Como Z_m^n es $\mathscr{F}_m$ medible:

$$=(Z_m^n+1)2\mathbb{E}(\,X_{m+1}\mid\mathscr{F}_m)-1$$

Como X_{m+1} es independiente de $\mathscr{F}_m$:

$$\begin{aligned} &= (Z^n_m + 1)2\mathbb{E}(X_{m+1}) - 1 \\ &= (Z^n_m + 1) - 1 \\ &= Z^n_m. \end{aligned}$$

Por lo tanto Z^n_m es martingala.

Luego entonce definimos a la variable aleatoria $Z_m = \sum_{n=1}^m Z^n_m$, esta nueva variable representa el dinero ganado por todos los jugadores hasta el tiempo m. Notemos que Z_m es una martingala:

(a) Z_m es $\mathscr{F}_m$ medible ya que es la suma de las primeras m martingalas y ellas ya son $\mathscr{F}_m$ medibles.
(b) $Z_m \in L_1$ ya que es la suma finita de elementos en L_1-
(c) La propiedad de marrtingalas se cumple ya que Z^n_m es martingala para toda m.

Por lo tanto Z_m es martingala.

Con la definición de T construimos a la martingala $Z_{T\wedge n}$. Aplicando el teorema de muestreo opcional de Doob obtenemos que $\mathbb{E}(Z_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(Z_1) = 0$. Ademas la martingala esta acotada por $-T \leq< Z_{T\wedge n} < 6$. Nos basta probar que $\mathbb{E}(T) < \infty$, esto se sigue de:

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq k) < 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T > 2k) \leq 2\sum_{k=1}^{n} (1/4)^k < \infty.$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(T) < \infty$.

Aplicando el teorema de convergencia dominada obtenemos que $\mathbb{E}(Z_{T\wedge n}) \to \mathbb{E}(Z_T)$. Por lo tanto $\mathbb{E}(Z_T) = 0$.Pero Z_T es el dinero ganado por todos los jugadores al tiempo T, $Z_T = 2^2 - 1 + 2 - 1 - (T-2)$. Esto es debido a que la ganancia del primer jugador es $2^2 - 1$, la ganancia del segundo jugar en juego es $2 - 1$, y han perdido en total $T - 2$ pesos los demas jugadores.

Por lo tanto $\mathbb{E}(T) = 6$.

Categorías: Tiempos de paro, problema de la ruina

Problema 4 (Extensiones del teorema de paro opcional)**.** Sea $M = (M_n, n \in \mathbb{N})$ una (super)martingala respecto de una filtración $(\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N})$ y sean S y T tiempos de paro.

(1) Pruebe que $S \wedge T$, $S + T$ y $S \vee T$ son tiempos de paro. Demostración Podemos escribir a cada uno de los tiempos de paro de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \{S \wedge T \leq n\} &= \{S \leq n\} \bigcup \{T \leq n\} \\ \{S + t = n\} &= \bigcup_{i=1}^{n} \{S = n - i\} \bigcap \{T = i\} \\ \{S \vee T \leq n\} &= \{S \leq n\} \bigcap \{T \leq n\} \end{aligned}$$

Utilizando la hipotesis de que S y T son tiempos de paro tenemos el resultado.

(2) Sea

$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \le n\} \in \mathscr{F}_n \text{ para toda } n\}$$

es una σ-álgebra, a la que nos referimos como la σ-álgebra detenida en τ. Comente qué puede fallar si T no es tiempo de paro. Pruebe que T es F_T-medible.
$\{T \le k\} \cap \{T \le n\} = \{T \le min\{k, n\}\} \in \mathscr{F}_{n\wedge k} \subseteq \mathscr{F}_n$
Por lo tanto T es $\mathscr{F}_T$-medible.

(3) Pruebe que si T es finito, entonces M_T es $\mathscr{F}_T$-medible.
Sea A un boreliano en $\mathbb{R}$. Basta mostrar que $\{X_T \in A\} \bigcap \{T \le n\} \in \mathscr{F}_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\{X_T \in A\} \bigcap \{T \le n\} &= \bigcup_{k=1}^{n} \{X_T \in A\} \bigcap \{T = k\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} \{X_k \in A\} \bigcap \{T = k\}\end{aligned}$$

pero sabemos que $\{X_k \in A\} | \bigcap \{T = k\} \in \mathscr{F}_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto X_T es $\mathscr{F}_T$-medible.

(4) Pruebe que si $S \le T \le n$ entonces $\mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$. Si además T es acotado entonces $X_S, X_T \in L_1$ y

$$\mathbb{E}(\, M_T \mid \mathscr{F}_S) \le M_S.$$

Demostración Sea $A \in \mathscr{F}_S$, entonces $A \bigcap \{T \le k\} = A \bigcap \{S \le k\} \{T \le k\}$, ya que $S \le T \Rightarrow \{T \le k\} \subseteq \{S \le k\}$. Como $A \in \mathscr{F}_S$ entonces $A \bigcap \{S \le F_k\}$ para todo $k \in \mathbb{N} \Rightarrow A \bigcap \{T \le k\} \in \mathscr{F}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $F_S \subseteq F_T$. Como T es acotado aplicando el teorema de muestreo opcional de Doob la $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_S) = \mathbb{E}(M_0) < \infty$, ya que M es martingala $M_n \in L_1$. Por lo tanto $M_S, M_T \in L_1$.

Ahora probaremos la igualdad $\mathbb{E}(\, M_T \mid \mathscr{F}_S) = M_S$ para el caso en el que M_n es martingala. Como T es acotado notemos que:

$$M_T - M_S = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{S \le i \le T}(M_i - M_{i-1})$$

Sea $A \in \mathscr{F}_S$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}(M_T - M_S \mathbf{1}_A) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{S<i\leq T}(M_i - M_{i-1})\mathbf{1}_A\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{S<i\leq T}(M_i - M_{i-1})\mathbf{1}_A) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{\{S<i\}\bigcap A}(M_i - M_{i-1})\mathbf{1}_{i\leq T}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{\{S<i\}\bigcap A}(M_i - M_{i-1})\mathbf{1}_{i\leq T}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{\{S<i\}\bigcap A}(M_i - M_{i-1})\mathbf{1}_{i\leq T} \bigm| F_{i-1}\big)\big)
\end{aligned}$$

Por defininción de F_S sabemos que $\mathbf{1}_{\{S<i\}\bigcap A}$ es F_{i-1}-medible:

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbf{1}_{\{S<i\}\bigcap A}\mathbf{1}_{i\leq T}\mathbb{E}(\,(M_i - M_{i-1}) \mid F_{i-1})\big)$$

Como M es martingala $\mathbb{E}(\,(M_i - M_{i-1}) \mid F_{i-1}) = 0$:

$$= 0$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(M_T \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(M_S \mathbf{1}_A)$.

Por lo tanto $\mathbb{E}(\,M_T \mid \mathscr{F}_S) = M_S$.

(5) Si $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ es un proceso estocástico $(\mathscr{F}_n)$-adaptado y tal que $X_n \in L_1$ y tal que para cualesquiera tiempos de paro acotados S y T se tiene que $\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_T)$ entonces X es una martingala. Sugerencia: considere tiempos de paro de la forma $n\mathbf{1}_A + (n+1)\mathbf{1}_{A^c}$ con $A \in \mathscr{F}_n$.

Demostración

Por hipótesis sabemos que X_n es adaptado y $X_n \in L_1$, solo nos basta la probar la propiedad de martingala. Como $\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{E}(X_T)$ para cualesquiera tiempos de paro acotados en particular nos tomamos $T = n\mathbf{1}_A + (n+1)\mathbf{1}_{A^c}$ con $A \in \mathscr{F}_n$ y $S = n+1$ entonces $\mathbb{E}((X_T)) = \mathbb{E}(X_{n+1}) \Rightarrow \mathbb{E}((X_T)) - \mathbb{E}(X_{n+1}) = 0$. Calculando la $\mathbb{E}((X_T))$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_T)) &= \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_A) + \mathbb{E}(X_{n+1}\mathbf{1}_{A^c}) \\
&= \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_A) + \mathbb{E}(X_{n+1}(1 - \mathbf{1}_A)) \\
&= \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_A) + \mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_{n+1}(\mathbf{1}_A))
\end{aligned}$$

Sustituyendo en $\mathbb{E}((X_T)) - \mathbb{E}(X_{n+1}) = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_A) + \mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_{n+1}(\mathbf{1}_A)) - \mathbb{E}(X_{n+1}) \\
\mathbb{E}(X_{n+1}(\mathbf{1}_A)) &= \mathbb{E}(X_n \mathbf{1}_A)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = X_n$.

Por lo tanto X_n es martingala.

(6) Pruebe que el proceso M^T obtenido al detener a M al instante T y dado por $M_n^T = M_{T\wedge n}$ es una martingala respecto de $(\mathscr{F}_{T\wedge n}, n \geq 0)$ pero también respecto de $(\mathscr{F}_n, n \geq 0)$. Sugerencia: basta probar el resultado respecto de $(\mathscr{F}_n)$ y para esto es útil el inciso anterior.

Demostración

Para ver que $M_n^T = M_{T\wedge n}$ es martingala respecto a $(\mathscr{F}_{T\wedge n}, n \geq 0)$ tenemos que:

(a) Ya que $T \wedge n$ es un tiempo de paro acotado, utilizando el inciso (4) obtenemos que $M_{T\wedge n} \in L_1$.

(b) Como $T \wedge n$ es finito, utilizando el inciso (3) tenemos que $M_{T\wedge n}$ es $\mathscr{F}_{T\wedge n}$-medible.

(c) Ya que $T \wedge (n-1) \leq T \wedge n$ y son tiempos de paro acotados, utilizando el inciso (4) obtenemos que $\mathbb{E}\big(M_{T\wedge n} \bigm| \mathscr{F}_{T\wedge(n-1)}\big) = M_{T\wedge(n-1)}$.

Por lo tanto $M_{T\wedge n}$ es una martingala respecto a $F_{T\wedge n}$.

Para ver que $M_n^T = M_{T\wedge n}$ es martingala respecto a $(\mathscr{F}_n, n \geq 0)$ tenemos que:

(a) Ya que $T \wedge n$ es un tiempo de paro acotado, utilizando el inciso (4) obtenemos que $M_{T\wedge n} \in L_1$.

(b) $M_{T\wedge n} = \sum_{i=1}^{T} \mathbf{1}_{k=i} M_k$ como M_n es martingala entonces M_i es $\mathscr{F}_i$-medible, para todo $i \leq n$ tenemos que M_i es $\mathscr{F}_n$-medible. Ademas $\mathbf{1}_{k=i}$ son F_i medibles , para todo $i \leq n$ tenemos que $\mathbf{1}_{k=i}$ es $\mathscr{F}_n$-medible. Por lo tanto $M_{T\wedge n}$ es $\mathscr{F}_n$-medible.

(c) Si nos tomamos dos tiempos de paro acotados S, U, utilizando el teorema de muestreo opcional de Doob obtenemos que $\mathbb{E}(M_{T\wedge U}) = \mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_{T\wedge S})$.

Por lo tanto utilizando el inciso (5) obtenemos que $M_{T\wedge n}$ es una martingala con respecto a $\mathscr{F}_n$.

Categorías: Tiempos de paro, Muestreo opcional

Problema 5. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ una caminata aleatoria con saltos $X_i \in \{-1, 0, 1, \ldots\}$. Sea C_p una variable aleatoria geométrica de parámetro p independiente de S y definimos

$$M_p = -\min_{n\leq C_p} S_n.$$

El objetivo del ejercicio es determinar la distribución de M_p.

(A las caminatas aleatorias como S se les ha denominado Skip-free random walks Para aplicaciones de este tipo de procesos. También aparecen en el estudio de Procesos Galton-Watson. Este ejercicio es el resultado básico del estudio de sus extremos, denominado teoría de fluctuaciones.)

(1) Sea

$$g(\lambda) = E(e^{-\lambda X_1}).$$

Pruebe que $g(\lambda) \in (0, \infty)$ y que

$$M_n = e^{-\lambda S_n} g(\lambda)^{-n}, n \geq 0$$

es una martingala.

Primero notemos que $e^{-\lambda X_1} > 0$ entonces $\mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_1}\big) > 0$. Ademas como $X_1 > -1$ entonces $e^{-\lambda X_1} < e^{\lambda}$. Por lo tanto $\mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_1}\big) < e^{\lambda}$ entonces $g(\lambda) \in (0, \infty)$. Por las notas sabemos que $M_n = e^{-\lambda S_n} g(\lambda)^{-n}, n \geq 0$ es martingala.

(2) Pruebe que g es log-convexa al aplicar la desigualdad de Hölder. Pruebe que si $P(X_1 = -1) > 0$ (hipótesis que se utilizará desde ahora) entonces $g(\lambda) \to \infty$ conforme $\lambda \to \infty$. Utilice esta información para esbozar la gráfica de g. Defina $f(s) = \inf\{\lambda > 0 : g(\lambda)^{-1} < s\}$. Note que $1/g \circ f = Id$ en $(0, 1)$. Pruebe que si $g(\lambda) > 1$, la martingala M es acotada hasta el tiempo de arribo de S a $-k$ dado por

$$T_k = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = -k\}$$

(donde se utiliza la convención $\inf \emptyset = \infty$). Aplique el teorema de muestreo opcional de Doob para mostrar que

$$E(s^{T_k}) = e^{-kf(s)}.$$

Justifique MUY bien por qué la fórmula es vlida aun cuando T_k puede tomar el valor ∞ y deduzca que de hecho $\mathbb{P}(T_k = \infty) = 0$.

Para probar que g es log convexa tenemos que:

$$\begin{aligned} log(g(t\lambda_1 X_1 + (1-t)\lambda_2 X_1)) &= log(\mathbb{E}\Big(e^{t\lambda_1 X_1 + (1-t)\lambda_2 X_1}\Big)) \\ &= log(\mathbb{E}\Big(e^{t\lambda_1 X_1} e^{(1-t)\lambda_2 X_1}\Big)) \end{aligned}$$

Aplicando desigualdad de Holder:

$$\begin{aligned} &\leq log(\mathbb{E}\big(e^{\lambda_1 X_1}\big)^t \, \mathbb{E}\Big(e^{(1-t)\lambda_2 X_1}\Big)^{1-t}) \\ &= log(\mathbb{E}\big(e^{\lambda_1 X_1}\big)^t) + log(\mathbb{E}\Big(e^{(1-t)\lambda_2 X_1}\Big)^{1-t}) \\ &= tlog(\mathbb{E}\big(e^{\lambda_1 X_1}\big)) + (1-t)log(\mathbb{E}\Big(e^{(1-t)\lambda_2 X_1}\Big)) \end{aligned}$$

Por lo tanto g es log convexa.

Si $P(X_1 = -1) > 0$ entonces:

$$g(\lambda) = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_1}\big) = \sum_{k=-1}^{\infty} e^{-\lambda k}\mathbb{P}(X = k) \geq e^{\lambda}\mathbb{P}(X = -1) > 0$$

Tomando limites de ambos lados de la desigualdad se obtiene que $g(\lambda) \to \infty$.

Sea $s \in (0, 1)$ y supongamos que $a = f(s)$, por definición de infimo a es una cota inferior, entonces para toda n se tiene que: $\frac{1}{s} < g(a + \frac{1}{n})$. Tomando el limite se obtiene que $\frac{1}{s} \leq g(a)$. Supongamos que $g(a) < \frac{1}{s}$. Por continuidad de g sabemos que exite una vecindad tal que para todo x en esa vecindad $g(x) > \frac{1}{s}$. Tomamos $x = a - \epsilon/2$ entonces tendriamos que $a \leq x = a - \epsilon/2 < a$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $1/s = a$. Sea $a = f(s)$ y $g(f(s)) = 1/s$, esto implica que $\frac{1}{g(f(s))} = s$. Por lo tanto $1/g \circ f = I$.

Si suponemos que $g(\lambda) > 1$, por definición de T_k si $n \leq T_k$ entonces $S_n \geq -k$, ya que S_n solo disminuye en una unidad, entonces $e^{-\lambda S_n} \leq e^{\lambda}k$. Por lo tanto $M_n \leq e^{\lambda k}/g(\lambda) < e^{\lambda k}$.

Si nos fijamos en la martingala $M_{T_k \wedge n}$, notamos que $M_{T_k \wedge n} < e^{\lambda k}$. Por el teorema de convergencia acotada $\mathbb{E}(M_{T_k \wedge n}) \to \mathbb{E}(M_{T_k})$ conforme $n \to \infty$. Por teorema de muestreo opcional de Doob $\mathbb{E}(M_{T_k \wedge n}) = \mathbb{E}(M_1) = 1$, luego entonces $1 = \mathbb{E}(M_{T_k}) = \mathbb{E}\Big(e^{-\lambda S_k g(\lambda)^{-T_k}}\Big)$. Haciendo el cambio de variable $\lambda = f(s)$ tenemos que :

$$1 = e^{\lambda k}\mathbb{E}\big(g(\lambda)^{-T_k}\big) = e^{f(s)k}\mathbb{E}\big(s^{-T_k}\big)\,.$$

Por lo tanto $E(s^{T_k}) = e^{-kf(s)}$.

(3) Argumente que

$$P(M_p \geq n) = P(T_n \leq C_p) = E((1-p)^{T_n})$$

para demostrar que M_p tiene distribución geométrica de parámetro $1 - e^{-f(1-p)}$

Fijemonos que:

$$\begin{aligned}
\{M_p \geq n\} &= \{\min_{k \leq C_p} S_k \geq n\} \\
&= \{\min_{k \leq C_p} S_k \leq -n\} \\
&= \{\min\{k \in \mathbb{N} : S_k = -n\} \leq C_p\} \\
&= \{T_n \leq C_p\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{P}(\{M_p \geq n\}) = \mathbb{P}(\{T_n \leq C_p\})$.

Luego entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{T_n \leq C_p\}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \leq C_p \,|T_n = k)\, \mathbb{P}(T_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(k \leq C_p)\, \mathbb{P}(T_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}(C_p = k)\, \mathbb{P}(T_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} (1-p)^j p \mathbb{P}(T_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n = k)\, p(1/p + (1-(1-p)^k))/p \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n = k)\, (1-p)^k \\
&= \mathbb{E}\big((1-p)^{T_n}\big)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{P}(\{T_n \leq C_p\}) = \mathbb{E}\big((1-p)^{T_n}\big)$.
Sabemos por el inciso anterior que $\mathbb{E}\big((1-p)^{T_n}\big) = e^{-kf(1-p)}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{M_p = n\}) &= \mathbb{P}(\{M_p \leq n\}) - \mathbb{P}(\{M_p \leq n-1\}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\{M_p \geq n+1\}) - 1 + \mathbb{P}(\{M_p \geq n\}) \\
&= e^{-nf(1-p)} - e^{-(n+1)f(1-p)} \\
&= e^{-nf(1-p)}(1 - e^{-f(1-p))}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto M_p tiene una distribución geométrica con parametro $1-e^{-f(1-p))}$.

(4) Tome el lmite conforme $p \to 0$ para mostrar que la variable aleatoria

$$M = -\min_{n\geq 0} S_n$$

tiene una distribución geométrica de parámetro $1 - e^{-f(1)}$. Interprete esto cuando $f(1) = 0$.

Categorías: Caminatas aleatorias, muestreo opcional, fluctuaciones.

Ejercicio 1.

(1) Instale Octave en su computadora
(2) Échele un ojo a la documentacin
(3) Ejecute el siguiente código linea por linea:
(4) Lea las secciones sobre simple examples, ranges, random number generation y comparison operators y escriba su interpretación de lo que hace el código anterior. Nota: está relacionado con uno de los ejemplos del curso.
(5) Vuelva a correr el código varias veces y escriba sus impresiones sobre lo que está sucediendo.

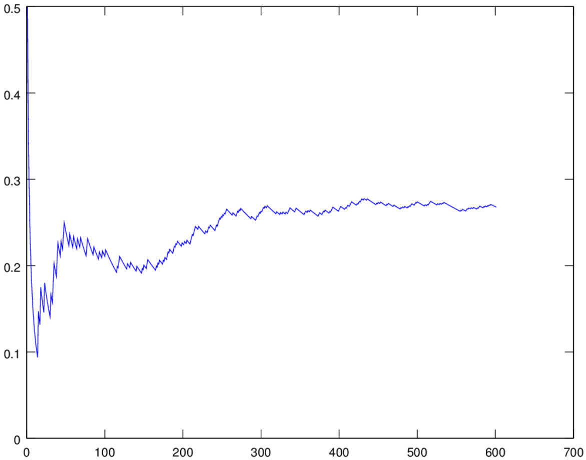

FIGURE 1. Urna de Poyla

En esta gráfica se muestra la simulación de las urnas de Poyla. Como vimos en clase la proporción de bolas rojas convergen, en esta gráfica se ilustra como la proporción se tiende a estabilizar. Esto se debe al teorema de convergencia de martingalas ya que la martingala es positiva.

Problema 6 (Ejercicios sueltos sobre martingalas)**.**

(1) Sea $(X_n, n \geq 0)$ una sucesión $(\mathscr{F}_n)$-adaptada. Pruebe que

$$\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}), \quad n \geq 0$$

es una $(\mathscr{F}_n)$-martingala.

Demostración.

Denotemos a $M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}), \quad n \geq 0$.

(a) Como X_k es $\mathscr{F}_k$-medible para todo $k \leq n$ entonces X_k es $\mathscr{F}_n$-medible,ya que X es $\mathscr{F}_n$-adaptada. Tambien sabemos por definición de esperanza condicional que $\mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ es $\mathscr{F}_{k-1}$-medible, entonces $\mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ es $\mathscr{F}_n$-medible para todo $k \leq n$. Por lo tanto M_n es $\mathscr{F}_n$-medible.

(b) Por hipótesis $X_k \in L_1$ esto tambien nos indica que $\mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \in L_1$, como M_n es suma finita de variables aleatorias en L_1 entonces $M_n \in L_1$.

(c) Propiedad de Martingala:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \,\middle|\, \mathscr{F}_{n-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \mid \mathscr{F}_{n-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{n-1}) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \mid \mathscr{F}_{n-1})
\end{aligned}$$

Ya que X_k es $\mathscr{F}_{n-1}$-medible para todo $k \leq n-1$

$$= \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \mid \mathscr{F}_{n-1})$$

Como $\mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1})$ es $\mathscr{F}_{n-1}$-medible para toda $k \leq n$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} X_k - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) \\
&= M_{n-1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto M_n es martingala.

(2) Descomposición de Doob para submartingalas: Sea Sea $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una submartingala. Pruebe que X se puede descomponer de manera única como $X = M + A$ donde M es una martingala y A es un proceso previsible con $A_0 = 0$. Sugerencia: Asuma que ya tiene la descomposición y calcule esperanza condicional de X_{n+1} dada X_n.

Como X_n es submartingala podemos utilizar el inciso anterior para construir una martingala que dependa de X_n. A esa la denotaremos como $M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) + X_0$, al aadirle el X_0 sigue siendo martingala el proceso. Si suponemos que ya conocemos la descomposición tenemos que:

$$X_n = M_n + A_n = \sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) + X_0 + A_n$$

Despejando a A_n tenemos que:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) - X_{k-1}$$

Efectivamente A_n es un proceso previsible ya que $\mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}), X_{k-1}$ son $\mathscr{F}_{n-1}$-medibles.

Como X_n es sub-martingala entonces $\mathbb{E}(X_k \mid \mathscr{F}_{k-1} \geq X_{k-1})$. Por lo tanto A_n es un proceso positivo. Por lo tanto las A_n son crecientes.

La unicidad se da ya que si existen dos descomposiciones $M_n^1, A_n^1, M_n^2, A_n^2$ y si definimos $Y_n = M_n^1 - M_n^2 = A_n^1 - A_n^2$. Por una parte tenemos que cumple la propiedad de Martingala y por otra parte cumple la propiedad de previsibilidad, es decir:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) &= Y_{n-1}\\ \mathbb{E}(Y_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) &= Y_n\end{aligned}$$

Si restamos las ecuaciones tenemos que:

$$\begin{aligned}0 &= Y_n - Y_{n-1}\\ 0 &= A_n^1 - A_{n-1}^1 - (A_n^2 - A_{n-1}^2)\end{aligned}$$

Como $A_0^1 = 0 = A_0^2$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}0 &= A_1^1 - A_1^2\\ A_1^1 &= A_1^2\end{aligned}$$

Recursivamente $A_n^1 = A_n^2 \Rightarrow Y = 0$:

$$M_n^1 = M_n^2$$

Por lo tanto la descomposición es única.

(3) Sea $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ donde las variables ξ son independientes y ξ_i tiene media cero y varianza finita σ_i^2. Pruebe que si $\sum_i \sigma_i^2 < \infty$ entonces S_n converge casi seguramente y en L_2 conforme $n \to \infty$. Construya un ejemplo de variables aleatorias ξ_i tales que la serie $\sum_i \xi_i$ sea casi seguramente absolutamente divergente y casi seguramente condicionalmente convergente (considere ejemplos simples!). Explique heurísticamente por qué cree que suceda esto.

Sea $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Hemos visto anteriormente que $(X_n)_{n=1}^\infty$ es una martingala respecto a $(\mathscr{F}_n)_{n=1}^\infty$. Además por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, sabemos que

$$\mathbb{E}(|X_n|) \leq \big(\mathbb{E}\big(X_n^2\big)\big)^{1/2} = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)^2\right)^{1/2}$$

y como las variables aleatorias $(\xi_i)_{i-1}^\infty$ son independientes y tienen media cero, su segundo momento es igual a su varianza y la varianza de la suma (que corresponde también a su segundo momento) es igual a la suma de las varianzas, por lo que

$$\mathbb{E}(|X_n|) \leq \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(\xi_i)\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^\infty \operatorname{Var}(\xi_i)\right)^{1/2} < \infty,$$

por lo que la martingala $(X_i)_{i=1}^\infty$ satisface las condiciones del teorema de convergencia casi segura de martingalas y por lo tanto, converge casi seguramente a una variable aleatoria que pertenece a L_1.

El ejemplo es el siguiente:

Sea ξ_i una variable aleatoria que toma los valores -1 y 1 con probabilidad 1/2 Definimos la serie $X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i / i$, esta serie es casi seguramente absolutamente divergente debido a que.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| / i = \sum_{i=1}^{\infty} 1/i = \infty.$$

(4) Sean X y Y dos martingalas (respecto de la misma filtración) y tales que $\mathbb{E}(X_i), \mathbb{E}(Y_i) < \infty$ para toda i. Pruebe la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}((X_i - X_{i-1})(Y_i - Y_{i-1})).$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}((X_i - X_{i-1})(Y_i - Y_{i-1})) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i Y_i - X_{i-1} Y_i - X_i Y_{i-1} + X_{i-1} Y_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i Y_i) - \mathbb{E}(X_{i-1} Y_i) - \mathbb{E}(X_i Y_{i-1}) + \mathbb{E}(X_{i-1} Y_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i Y_i) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{i-1} Y_i \mid \mathscr{F}_{i-1})) \\
&\quad - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_i Y_{i-1} \mid \mathscr{F}_{i-1})) + \mathbb{E}(X_{i-1} Y_{i-1})
\end{aligned}$$

Como X_{i-1}, Y_{i-1} son F_{i-1}-medibles:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i Y_i) - \mathbb{E}(X_{i-1} \mathbb{E}(Y_i \mid \mathscr{F}_{i-1})) \\
&\quad - \mathbb{E}(Y_{i-1} \mathbb{E}(X_i \mid \mathscr{F}_{i-1})) + \mathbb{E}(X_{i-1} Y_{i-1})
\end{aligned}$$

Como X_i, Y_i son martingalas:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i Y_i) - \mathbb{E}(X_{i-1} Y_{i-1}) \\
&\quad - \mathbb{E}(Y_{i-1} X_{i-1}) + \mathbb{E}(X_{i-1} Y_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i Y_i) - \mathbb{E}(X_{i-1} Y_{i-1}) \\
&= \mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0). \qquad (1)
\end{aligned}$$

(5) Desigualdad de Azema-Hoeffding

(a) Muestre que si Y es una variable aleatoria con valores en $[-c,c]$ y media cero entonces, para $\theta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left(e^{\theta Y}\right) \leq \cosh(\theta c) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2 c^2\right).$$

Como $e^{\theta y}$ es una función convexa tenemos que:

$$e^{\theta y} \leq \frac{c-y}{2c}e^{-\theta c} + \frac{c+y}{2c}e^{\theta c} = \frac{e^{\theta c}+e^{-\theta c}}{2} + y(\frac{e^{\theta c}-e^{-\theta c}}{2c})$$

Calculando la esperanza de ambos lados de la desiguadad obtenemos que:

$$\mathbb{E}\left(e^{\theta Y}\right) \leq \mathbb{E}\left(\frac{e^{\theta c}+e^{-\theta c}}{2} + Y\frac{e^{\theta c}-e^{-\theta c}}{2c}\right)$$

Como la $\mathbb{E}(Y)=0$, se sigue el resultado $\mathbb{E}\left(e^{\theta Y}\right) \leq \cosh(\theta c)$.

Para la segunda parte de la desigualdad, nos fijamos en la expansion de Taylor de $\cosh(\theta c)$:

$$\begin{aligned}\cosh(\theta c) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\theta c)^{2k}}{2k!} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\theta c)^{2k}}{2^k (k!)} \\ &= e^{\frac{\theta^2 c^2}{2}}.\end{aligned}$$

(b) Pruebe que si M es una martingala nula en cero tal que para algunas constantes $(c_n, n \in \mathbb{N})$ se tiene que

$$|M_n - M_{n-1}| \leq c_n \quad \forall n$$

entonces, para $x > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{k\leq n} M_k \geq x\right) \leq \exp\left(\frac{x^2}{2\sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

En esta parte utilizaremos una desigualdad de Doob que viene en las notas y dice que para una sub-martingala M_n se tiene:

$$\lambda \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} M_i^+ > \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left(M_n^+\right)$$

En nuestro caso M_n es martingala por lo que $e^{\theta M_n}$ es una sub-martingala positiva, aplicando la desigualdad de la proposición anterior a esta sub-martingala y tomando $\lambda = e^{\theta x}$ obtenemos que:

$$e^{\theta x}\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} e^{\theta M_i} > e^{\theta x}\right) \leq \mathbb{E}\left(e^{\theta M_n}\right)$$

Como $\left\{\max_{1\leq i\leq n} e^{\theta M_i} > e^{\theta x}\right\} = \left\{\max_{1\leq i\leq n} M_i > x\right\}$, entonces:

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} M_i > x\right) \leq e^{-\theta x}\mathbb{E}\left(e^{\theta M_n}\right)$$

Acotando a la martingala M_n la cual es nula en 0:

$$\begin{aligned}|M_n| &= \left|\sum_{i=1}^{n} M_i - M_{i-1}\right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} |M_i - M_{i-1}| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} c_i = c^*\end{aligned}$$

Entonces $|M_n|$ es acotada por c^* por lo que podemos aplicar la desigualdad del ejercicio anterior

$$\mathbb{E}\Big(e^{\theta M_n}\Big) \leq e^{\frac{1}{2}\theta^2 (c^*)^2}$$

Por lo tanto $\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} M_i > x\right) \leq e^{-\theta x} e^{\frac{1}{2}\theta^2(c^*)^2}$.Tomando a $\theta = \frac{x}{(c^*)^2} > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} M_i > x\right) &\leq exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{(c^*)^2}\right) \\ &= exp\left(\frac{-x^2}{2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2}\right)\end{aligned}$$

(2)

Problema 7. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ donde $X_1, X_2, \ldots$ son iid. Sea

$$\phi(\lambda) = \mathbb{E}\Big(e^{\lambda S_n}\Big) \in (0, \infty].$$

(1) Pruebe que si existen $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ tales que $\phi(\lambda_i) < \infty$ entonces $\phi(\lambda) < \infty$ para toda $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Sugerencia: escriba $\lambda = a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2$ para algún $a \in [0,1]$ y aplique la desigualdad de Hölder. A partir de ahora se asume la premisa de este inciso.

Sea $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ entonces $\exists\ a \in [0,1]$ $\lambda = a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2$.

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &= \mathbb{E}\Big(e^{\lambda S_n}\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(e^{(a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2)S_n}\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(e^{(a\lambda_1)S_n} e^{(1-a)\lambda_2 S_n}\Big)\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Holder:

$$\leq \mathbb{E}\Big(e^{(\lambda_1)S_n}\Big)^a \mathbb{E}\Big(e^{\lambda_2 S_n}\Big)^{1-a}$$

Como la $\mathbb{E}\Big(e^{(\lambda_1)S_n}\Big)^a, \mathbb{E}\Big(e^{\lambda_2 S_n}\Big)^{1-a} < \infty$ tenemos que $\phi(\lambda) < \infty$ para toda $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

(2) Pruebe que $\mathbb{E}\big(|S_n|^{\,k}\big) < \infty$ para toda $k \geq 0$.

Sea $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, definimos $X_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{|\lambda S_n|^{\,k}}{k!}$. Expresando como serie de taylor a $e^{|\lambda S_n|}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(e^{|\lambda S_n|}\Big) &= \mathbb{E}\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{|\lambda S_n|^{\,k}}{k!}\right) \\ &= \mathbb{E}(\lim X_m) \end{aligned} \tag{3}$$

Como X_m es una sucesión creciente, ya que los terminos de la suma son positivos, se tiene por el teorema de la convergencia monótona que:

$$\begin{aligned} &= \lim_{m\to\infty} \mathbb{E}(X_m) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{\,k}\mathbb{E}\big(|S_n|^{\,k}\big)}{k!} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(e^{|\lambda S_n|}\Big) &= \mathbb{E}\big(e^{\lambda S_n}\mathbf{1}_{\lambda S_n \geq 0}\big) + \mathbb{E}\big(e^{-\lambda S_n}\mathbf{1}_{\{\lambda S_n < 0\}}\big) \\ &\leq \mathbb{E}\big(e^{\lambda S_n}\big) + \mathbb{E}\big(e^{-\lambda S_n}\big) \end{aligned}$$

Por inciso anterior tenemos que:

$$= \phi(\lambda) + \phi(-\lambda) < \infty.$$

Por lo tanto $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^{\,k}\mathbb{E}\big(|S_n|^{\,k}\big)}{k!} < \infty$.

Por lo tanto $\mathbb{E}\big(|S_n|^{\,k}\big) < \infty$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

(3) Sea $M_t^\lambda = e^{\lambda S_t}/\phi(\lambda)$. Argumente que si M^n es el proceso dado por

$$M_t^n = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\bigg|_{\lambda=0} M_t^\lambda,$$

entonces M^n es una martingala para toda n.

Para demostrar esto primero mostraremos que el operador derivada sale de la esperanza condicional de una martingala si la derivada de la martingala esta acotada. En general esto tambien sucede para el caso de variables aleatorias que no necesariamente son martingalas.

Si definimos $X_n = n\left(M_t^{\lambda+\frac{1}{n}} - M_t^\lambda\right)$ y cuando $n \to \infty$ entonces X_n converge a $\frac{\partial^1}{\partial \lambda^1} M_t^\lambda$. Por hipótesis tenemos que $\left|\frac{\partial^1}{\partial \lambda^1} M_t^\lambda\right| < m(\omega)$ donde $m : \Omega \to R$ es integrable y notemos que:

$$\begin{aligned}
|X_n| &= n\left|\left(M_t^{\lambda+\frac{1}{n}} - M_t^{\lambda}\right)\right| \\
&= n\left|\int_{\lambda}^{\lambda+\frac{1}{n}} \frac{\partial^1}{\partial\lambda^1} M_t^{\lambda} d\lambda\right| \\
&\leq n\int_{\lambda}^{\lambda+\frac{1}{n}} \left|\frac{\partial^1}{\partial\lambda^1} M_t^{\lambda}\right| d\lambda \\
&\leq n\int_{\lambda}^{\lambda+\frac{1}{n}} m(\omega) d\lambda \\
&= m(\omega)n\left(\lambda + \frac{1}{n} - \lambda\right) = m(\omega)
\end{aligned}$$

Por lo tanto X_n es dominada por $m(\omega)$.

Ahora aplicando el teorema de convergencia dominada para la integral

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{\partial^1}{\partial\lambda^1} M_t^{\lambda} \;\middle|\; \mathscr{G}\right) &= \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} X_n \;\middle|\; \mathscr{G}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{G}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(n\left(M_t^{\lambda+\frac{1}{n}} - M_t^{\lambda}\right) \;\middle|\; \mathscr{G}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\mathbb{E}\left(M_t^{\lambda+\frac{1}{n}} \;\middle|\; \mathscr{G}\right) - \mathbb{E}(M_t^{\lambda} \mid \mathscr{G})\right) \\
&= \frac{\partial^1}{\partial\lambda^1}\mathbb{E}(M_t^{\lambda} \mid \mathscr{G})
\end{aligned}$$

Ya demostrado esto procederemos a probar la propiedad de martingala por induccion sobre n. Para el caso $n = 1$, sabemos que M_t^{λ} es martingala por ejercicio 5 de la tarea. Entonces, suponiendo que existe una variablea leatoria Y tal que $\left|\frac{\partial^1}{\partial\lambda^1} M_t^{\lambda}\right| < Y$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{\partial^1}{\partial\lambda^1} M_t^{\lambda} \;\middle|\; \mathscr{F}_{t-1}\right) &= \frac{\partial^1}{\partial\lambda^1}\mathbb{E}(M_t^{\lambda} \mid \mathscr{F}_{t-1}) \\
&= \frac{\partial^1}{\partial\lambda^1} M_{t-1}^{\lambda}
\end{aligned}$$

Suponiendo que el caso $n = k$ es martingala. Demostraremos caso $n = k+1$:

$$\mathbb{E}\left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial\lambda^{k+1}} M_t^{\lambda} \;\middle|\; \mathscr{F}_{t-1}\right) = \frac{\partial^1}{\partial\lambda^1}\mathbb{E}\left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} M_t^{\lambda} \;\middle|\; \mathscr{F}_{t-1}\right)$$

Utilizando hipotesis de inducción:

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^1}{\partial\lambda^1}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}M_{t-1}^{\lambda} \\ &= \frac{\partial^{k+1}}{\partial\lambda^{k+1}}M_{t-1}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{\partial^{k+1}}{\partial\lambda^{k+1}}M_t^{\lambda}$ es martingala.
Por lo tanto $\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}M_t^{\lambda}$ es martingala para toda $n \in \mathbb{N}$.
En particular si se evalúa en $\lambda = 0$ se obtiene el resultado.

(4) Calcule las primeras 4 martingalas resultantes si $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. Utilícelas para calcular el valor de $\mathbb{E}(T^2)$ donde

$$T = \min\{n \geq 0 : S_n \in \{-a, a\}\}$$

y $a > 0$.
Si derivamos y evaluamos en $\lambda = 0$, obtenemos que:

$$\left.\frac{\partial^{(k)}}{\partial\lambda^k}\right|_{\lambda=0}\phi(\lambda) = \mathbb{E}\left(\left.\frac{\partial^{(k)}}{\partial\lambda^k}\right|_{\lambda=0} e^{\lambda S_n}\right) = \mathbb{E}(S_n^k) < \infty$$

Esto nos índica que podemos obtener los momentos de S_n. Como estamos en una caminata aleatoria obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n) &= 0 = \left.\frac{\partial^{(1)}}{\partial\lambda^1}\right|_{\lambda=0}\phi(\lambda) \\ \mathbb{E}(S_n^2) &= n = \left.\frac{\partial^{(2)}}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0}\phi(\lambda) \\ \mathbb{E}(S_n^3) &= 0 = \left.\frac{\partial^{(3)}}{\partial\lambda^3}\right|_{\lambda=0}\phi(\lambda) \\ \mathbb{E}(S_n^4) &= 3n^2 - 2n = \left.\frac{\partial^{(4)}}{\partial\lambda^4}\right|_{\lambda=0}\phi(\lambda) \end{aligned}$$

De aqui obtenemos las martingalas:

$$\begin{aligned} M_t^1 &= \left.\frac{\partial^1}{\partial\lambda^1}\right|_{\lambda=0} M_t^{\lambda} = S_t \\ M_t^2 &= \left.\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right|_{\lambda=0} M_t^{\lambda} = S_t^2 - t \\ M_t^3 &= \left.\frac{\partial^3}{\partial\lambda^3}\right|_{\lambda=0} M_t^{\lambda} = S_t^3 - 3tS_t \\ M_t^4 &= \left.\frac{\partial^4}{\partial\lambda^4}\right|_{\lambda=0} M_t^{\lambda} = S_t^4 - 6tS_t^2 + 3t^2 + 2t \end{aligned}$$

Luego entonces podemos S_T es una variable que toma un valor ya que $a = b$:

$$\mathbb{P}(S_T = -a) = \frac{a}{2a}$$
$$\mathbb{P}(S_T = a) = \frac{a}{2a}$$

Entonces:

$$\mathbb{E}(S_T) = 0$$
$$\mathbb{E}\big(S_T^2\big) = a^2$$
$$\mathbb{E}\big(S_T^3\big) = 0$$
$$\mathbb{E}\big(S_T^4\big) = \frac{a^2(2a^3)}{2a}.$$

Por el muestro opcional de Doob y como las martingalas obtenidas tiene media cero:

$$0 = \mathbb{E}\big(S_T^4 - 6TS_T^2 + 3T^2 + 2T\big) = \mathbb{E}\big(S_T^4\big) - 6\mathbb{E}\big(TS_T^2\big) + 3\mathbb{E}\big(T^2\big) + 2\mathbb{E}(T)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\big(T^2\big) = \frac{6\mathbb{E}\big(TS_T^2\big) - \frac{a^2(2a^3)}{2a} - 2a^2}{3}$$

Ya que $a = b$ entonces S_T^2 solo toma una valor que es a^2:

$$\mathbb{E}\big(T^2\big) = \frac{6\mathbb{E}\big(Ta^2\big) - \frac{a^2(2a^3)}{2a} - 2a^2}{3} = \frac{a^2(5a^2-2)}{3}$$

Categorías: Caminatas aleatorias, muestreo opcional, ejemplos de martingalas.

Problema 8. Sea M una $(\mathscr{F}_n)$-martingala. Pruebe que si T es un tiempo de paro finito entonces $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$ bajo cada una de las siguientes condiciones:

(1) M es acotada.

Si M es acotada entonces $|M_n| \leq K$ para toda $n \in \mathbb{N}$ esto implica que $M_{T\wedge n}$ tambien es acotada. Además como $T \wedge n$ es un tiempo de paro acotado por el teorema de muestreo opcional de Doob entonces $\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0)$. Ya que $M_{T\wedge n}$ converge a M_T, aplicande el teorema de convergencia acotada tenemos que $\mathbb{E}(M_{T\wedge n})$ converge a $\mathbb{E}(M_T)$ pero la esperanza de $\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$.

(2) T es integrable y la sucesión $(M_n - M_{n-1})$ es acotada.

Como la sucesión $(M_n - M_{n-1})$ es acotada entonces $|(M_n - M_{n-1})| \leq K$.

$$|(M_{T\wedge n} - M_0)| = \left|\sum_{i=1}^{T\wedge n}(M_i - M_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{T\wedge n}|(M_i - M_{i-1})| \leq TK.$$

Entonces la sucesión $M_{T\wedge n} - M_0$ dominada por KT. Utilizando el teorema de muestreo opcinal de Doob sabemos que $\mathbb{E}(M_{T\wedge n} - M_0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Podemos utiliar el teorema e convergencia dominada ya que KT es integrable entonces $\mathbb{E}(M_T - M_0) = 0$. Por lo tanto $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$.

(3) $(M_{n\wedge T})$ es uniformemente integrable.

Sabemos que $M_{n\wedge T}$ converge a M_T, ademas como $M_{n\wedge T}$ es uniformemente integrable sabemos que M_T es integrable y $\mathbb{E}(M_{n\wedge T})$ converge a $\mathbb{E}(M_T)$. Pero por el teorema de muestreo opcional de Doob como $T\wedge n$ es un tiempo de paro acotado la $\mathbb{E}(M_{T\wedge n}) = \mathbb{E}(M_0)$. Por lo tanto $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$.

Categorías: Muestreo opcional.

Problema 9. Sea M una $(\mathscr{F}_n)$-martingala con saltos acotados. Sean

$$C = \{\limsup M_n = \liminf M_n \in \mathbb{R}\} \quad \text{y.}$$

Pruebe que $\mathbb{P}(C\cup D) = 1$. Deduzca que las caminatas aleatorias centradas con saltos acotados oscilan. Sugerencia: Para cada $K > 0$ defina

$$T = \min\{n \geq 0 : |M_n| \geq K\}$$

y aplique el teorema de convergencia de martingalas a M^T.

Sea M una caminata aleatoria no trivial con saltos integrables en $-1, 0, 1, \ldots$ y media cero. Pruebe que $\mathbb{P}(M \text{ converge en } \mathbb{N}) = 0$ y concluya que $\liminf M_n = -\infty$ casi seguramente. (Este resultado permitirá dar una prueba adicional de que un Galton-Watson crítico se extingue). Sugerencia: proceda como en el párrafo anterior y pruebe la integrabilidad uniforme de $M_{T\wedge n}, n \in \mathbb{N}$.

Categorías: Teoremas de convergencia de martingalas

Sea:

$$T_q = \min\{n > 0 : M_n \leq -q\} \; q \in \mathbb{Q}$$

T_q es un tiempo de paro ya que:

$$\{T_q = n\} = \{M_i \geq -q \text{ para todo } i \in \{1, 2, 3, .., n-1\}, M_n \leq -q\}$$

como M_n es martingala entonces $\{T_q = n\} \in \mathscr{F}_n$.

Por hipótesis tenemos que $|M_i - M_{i-1}| < C$ para algún $C > 0$, de aqui obtenemos que $M_{T_q\wedge n} \geq -q - C \Rightarrow M_{T_q\wedge n} + q + C \geq 0$ para toda n. Por ser $M_{T_q\wedge n}$ martingala, entonces $M_{T_q\wedge n}+q+C$ es una martingala positiva. Por lo tanto $M_{T_q\wedge n}+q+C$ converge. Por lo tanto $M_{T_q\wedge n}$ converge. En el conjunto $\{T_q = \infty\}$ se tiene que M_n converge. Si nos fijamos en el conjunto $\{\liminf_n M_n > -\infty\}$ también M_n converge ya que:

$$\bigcup_q \{T_q = \infty\} = \left\{\liminf_n M_n > -\infty\right\}.$$

Utilizando el mismo argumento para el tiempo de paro $T_q = \min\{n > 0 : M_n \geq q\}$ obtenemos que en el conjunto $\limsup_n M_n = \infty$ M_n converge. Por lo tanto $\mathbb{P}(C\bigcup D) = 1$.

Si tomamos una caminata aleatoria $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ con saltos acotados tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_N = k, S_{N+1} = k, S_{N+2} = k, ..., S_{N+n} = k) \\
&= \mathbb{P}(S_N = k)\,\mathbb{P}(\xi_{N+1} = 0, \xi_{N+2} = 0, ..., \xi_{N+n} = 0) \\
&= \mathbb{P}(S_N = k)\,\mathbb{P}(\xi_1 = 0)^n.
\end{aligned}$$

Como es una caminata aleatoria no trivial $\mathbb{P}(\xi_1 = 0)^n > 0$ entonces Cuando $n \to \infty$ entonces notamos que S_n no converge. Por lo tanto las caminatas aleatorias con saltos acotados oscilan.

Si tenemos una martingala que tienes saltos integrables y definimos el tempo de paro $T_q = \min\{n > 0 : |M_n| > q\}$, entonces tenemos que $\left|M_{T_q \wedge n}\right| < \xi_{T_q \wedge n} + q$.De aqui:

$$\begin{aligned}
\left|M_{T_q \wedge n}\right| \mathbf{1}_{M_{T_q \wedge n} > c} &< \left(\xi_{T_q \wedge n} + q\right) \mathbf{1}_{\xi_{T_q \wedge n} > c} \\
\Rightarrow \sup_n \mathbb{E}\Big(\left|M_{T_q \wedge n}\right| \mathbf{1}_{M_{T_q \wedge n} > c}\Big) &< \sup_n \mathbb{E}\Big(\left(\xi_{T_q \wedge n} + q\right) \mathbf{1}_{\xi_{T_q \wedge n} > c}\Big) \\
\Rightarrow \lim_{c \to \infty} \sup_n \mathbb{E}\Big(\left|M_{T_q \wedge n}\right| \mathbf{1}_{M_{T_q \wedge n} > c}\Big) &< \lim_{c \to \infty} \sup_n \mathbb{E}\Big(\left(\xi_{T \wedge n} + q\right) \mathbf{1}_{\xi_{T_q \wedge n} > c}\Big) \\
&= \lim_{c \to \infty} q\mathbb{P}(\xi_1 > c) + \mathbb{E}(\xi_1 \mathbf{1}_{\xi_1 > c}) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $M_{T_q \wedge n}$ es uniformemente integrable. Por lo tanto la martingala $M_{T_q \wedge n}$ converge.

Haciendo el mismo razonamiento que en el caso de saltos acotados tenemos que la martingala M_n converge en el conjunto $\{T_q = \infty\}$. En caso contrario la martingala diverge.

Por lo tanto en el caso de martingalas con saltos integrables $\mathbb{P}(C \bigcup D) = 1$.

Por el mismo argumento que en el caso de las caminatas aleatorias con saltos acotados las caminatas aleatorias con satos integrables oscilan. Por lo tanto el $\liminf M_n = -\infty$ casi seguramente.

Problema 10. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias intercambiables:

$$(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_{\pi_1}, \ldots, X_{\pi_n})$$

para cada permutación σ de $\{1, \ldots, n\}$.

(1) Para $\mathscr{G}, \mathscr{H}$ subσ-álgebras de $\mathscr{F}$ definimos a $\mathscr{G} \vee \mathscr{H} = \sigma(\mathscr{G} \cup \mathscr{H})$. Sea

$$\mathscr{G}^n = \sigma(f(X_1, \ldots, X_n) : f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ es simétrica}) \vee \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)\,.$$

Pruebe que $\mathscr{G}^n, n \geq 1$ es una filtración al revés. Sea $\mathscr{G}$ su intersección.

(2) Para cada $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, defina a

$$\Xi_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \in A}.$$

Pruebe que

$$\mathbb{P}(X_1 \in A \,|\mathscr{G}^n) = \Xi_n(A)\,.$$

¿Por qué puede definir a $\Xi(A) = \lim_{n \to \infty} \Xi_n(A)$?

Si definimos las variables, $Y_1 = \mathbf{1}_{\{X_1 \in A\}}$, $Y_2 = \mathbf{1}_{\{X_2 \in A\}}$, ..., entonces $Y_i \in \{0, 1\}$ y además son intercambiables ya que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1 = i_1, ..., Y_n = i_n) &= \mathbb{P}(\mathbf{1}_{X_1 \in A} = i_1, ..., \mathbf{1}_{X_n \in A} = i_n) \\
&= \mathbb{P}\big(\mathbf{1}_{X_{\pi(1)} \in A} = i_1, ..., \mathbf{1}_{X_{\pi(n)} \in A} = i_n\big) \\
&= \mathbb{P}\big(Y_{\pi(1)} = i_1, ..., Y_{\pi(n)} = i_n\big)
\end{aligned}$$

Por teorema visto en clase sabemos que para cual quier función h medible:

$$\mathbb{E}(\, h(Y_1, ..., Y_n) \mid \mathscr{G}_n) = \mathbb{E}\big(\, h(Y_{\pi(1)}, ..., Y_{\pi(n)}) \,\big|\, \mathscr{G}_n\big)$$

Entonces si tomamos h como $h(Y_1, \dots, Y_n) = Y_1$ tenemos que:

$$\mathbb{E}(\, Y_j \mid \mathscr{G}_n) = \mathbb{E}(\, Y_1 \mid \mathscr{G}_n)$$

para toda $j \le n$ Si definimos la función $f(Y_1, ..., Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ es simétrica entonces $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$ es $\mathscr{G}^n$-medible y además:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i \,\middle|\, \mathscr{G}^n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\, Y_i \mid \mathscr{G}^n) = \mathbb{E}(\, Y_1 \mid \mathscr{G}^n)$$

Por lo tanto:

$$\Xi_n(A) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \in A} = \mathbb{E}(\, \mathbf{1}_{X_1 \in A} \mid \mathscr{G}^n) = \mathbb{P}(X_1 \in A | \mathscr{G}^n)$$

Ahora definamos:

$$M_n = \mathbb{E}(\, Y_1 \mid \mathscr{G}^n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \in A},$$

y demostremos que es martingala reversa:

(a) Por construcción M_n es $\mathscr{G}_n$-medible
(b) M_n es integrable ya que:

$$\mathbb{E}(|M_n|) = \mathbb{E}(|\mathbb{E}(\, Y_1 \mid \mathscr{G}^n)|) \le \mathbb{E}(\mathbb{E}(\, |Y_1| \mid \mathscr{G}^n)) = \mathbb{E}(|Y_1|) < \infty$$

Por lo tanto M_n es integrable.

(c) Propiedad de martingala reversa:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\, M_n \,\big|\, \mathscr{G}^{n+1}\big) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \in A} \,\middle|\, \mathscr{G}^{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big(\, Y_i \,\big|\, \mathscr{G}^{n+1}\big)\\ &= \mathbb{E}\big(\, Y_1 \,\big|\, \mathscr{G}^{n+1}\big)\\ &= M_{n+1}\end{aligned}$$

Por lo tanto M_n es martingala reversa. Por teorema visto en clase M_n es uniformemente integrable y por tanto converge casi seguramente y en L_1. Por lo tanto podemos definir $\Xi(A) = \lim_{n\to\infty} \Xi_n(A)$

(3) Al considerar a la martingala

$$\frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbf{1}_{X_i \in A} \mathbf{1}_{X_j \in A},$$

pruebe que $\mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A \,|\mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1 \in A \,|\mathscr{G})\,\mathbb{P}(X_2 \in A \,|\mathscr{G})$. Extienda la afirmación de independencia condicional anterior a $X_1, \dots, X_n$.

Por inciso anterior sabemos que:

$$\mathbb{P}(X_1 \in A \,|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_1 \in A} \,|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(Y_1 \,|\mathscr{G}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \in A}$$

Ahora si tomamos $h(Y_1, ..., Y_n) = Y_2$ obtenemos que:

$$\mathbb{P}(X_2 \in A \,|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_2 \in A} \,|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(Y_2 \,|\mathscr{G}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \in A}$$

Ahora notemos que $f(Y_1, \ldots, Y_n) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leq i\neq j\leq n} Y_iY_j$ es simétrica entonces $\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leq i\neq j\leq n} Y_iY_j$ es $\mathscr{G}^n$-medible. Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\,(n-1)}\sum_{1\leq i\neq j\leq n} Y_iY_j &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n\,(n-1)}\sum_{1\leq i\neq j\leq n} Y_iY_j \,\middle|\, \mathscr{G}^n\right)\\ &= \mathbb{E}(Y_1Y_2 \,|\mathscr{G}^n)\end{aligned}$$

sPor lo tanto $M_n = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leq i\neq j\leq n} Y_iY_j$ es martingala reversa entonces converge casi seguramente y en L_1. M_n converge a $M_\infty = \mathbb{E}(Y_1Y_2 \,|\mathscr{G}^\infty) = \mathbb{E}(Y_1Y_2 \,|\mathscr{G})$. De aqui obtenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A \,|\mathscr{G}) &= \mathbb{E}(Y_1Y_2 \,|\mathscr{G})\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\,(n-1)}\sum_{1\leq i\neq j\leq n} Y_iY_j\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\,(n-1)}(\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) - \sum_{i=1}^{n} Y_i^2)\end{aligned}$$

Ya que $Y_i^2 = (\mathbf{1}_{X_i \in A})^2 = \mathbf{1}_{X_i \in A} = Y_i$:

$$\begin{aligned}&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\,(n-1)}(\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j - 1\right))\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right)\left(\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n-1}\right)\\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right)\left(\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\right) - \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}\right)\right)\\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}\right)\\ &= \mathbb{P}(X_1 \in A \,|\mathscr{G})\,\mathbb{P}(X_2 \in A \,|\mathscr{G})\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in A \,|\mathscr{G}) = \mathbb{P}(X_1 \in A \,|\mathscr{G})\, \mathbb{P}(X_2 \in A \,|\mathscr{G})$$

Cagegorías: Teorema de convergencia de martingalas, teorema de de Finetti.

Ejercicio 2.

(1) Ejecute y explique la función del siguiente código en Octave. Comente qué teoremas del curso (y del curso de probabilidad) son importantes para interpretar la figura.
(2) Ejecute y explique la función del siguiente código en Octave. Incluya una gráfica en la que la longitud de la variable k sea mayor a 1000. (Puede modificar el programa...) En la gráfica observara un esbozo de la trayectoria de un proceso de ramificación continuo (en una escala distinta...).

Problema 11. Sean $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$ y $\mathscr{G}$ subσ-fields de $\mathscr{F}$. Decimos que $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ si para cualquier H_i que sea $\mathscr{F}_i$ medible y acotada se tiene que

$$\mathbb{E}(\, H_1 \cdots H_n \;|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(\, H_1 \;|\mathscr{G}) \cdots \mathbb{E}(\, H_n \;|\mathscr{G})\,.$$

(1) ¿Qué quiere decir la independencia condicional cuando $\mathscr{G} = \{\Omega, \emptyset\}$?

Proof. Si $\mathscr{G} = \{\Omega, \emptyset\}$ entonces $\mathbb{E}(\, X \;|\mathscr{G}) = \mathbb{E}(X)$. Pir lo tanto la defininción de de independecia condicional se convierte en la propiedad de independencia:

$$\mathbb{E}(H_1 ... H_n) = \mathbb{E}(H_1) ... \mathbb{E}(H_n)\,.$$

□

(2) Pruebe que F_1 y $\mathscr{F}_2$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ (denotado $\mathscr{F}_1 \perp_{\mathscr{G}} \mathscr{F}_2$) si y sólo si para cualquier H que sea $\mathscr{F}_1$-medible y acotada se tiene que

$$\mathbb{E}(\, H \;| \mathscr{F}_2, \mathscr{G}) = \mathbb{E}(\, H \;|\mathscr{G})\,.$$

Primero supondremos F_1 y $\mathscr{F}_2$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$. La demostración la haremos utilizando el lema de clases monótonas. Definiremos a nuestro π-sistema $C = \{A \bigcap B : A \in \mathscr{G} B \in \mathscr{F}_2\}$, evientemente es π-sistema, nuestro λ-sistema $L = \{A \in \sigma(F_2 \bigcup \mathscr{G}) : \mathbb{E}(H \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\, H \;|\mathscr{G})\, \mathbf{1}_A)\}$ donde H es $\mathscr{F}_1$-medible. Primero demonstraremos que $C \subseteq L$, sea $A \bigcap B \in C$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(H\mathbf{1}_{A\bigcap B}\right) &= \mathbb{E}(H\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\,H\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B\mid\mathscr{G}))\\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A\mathbb{E}(\,H\mathbf{1}_B\mid\mathscr{G}))\\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A\mathbb{E}(\,H\mid\mathscr{G})\,\mathbb{E}(\,\mathbf{1}_B\mid\mathscr{G}))\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\,\mathbf{1}_A\mathbb{E}(\,H\mid\mathscr{G})\,\mathbf{1}_B\mid\mathscr{G}))\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\,H\mid\mathscr{G})\,\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B)\end{aligned}$$

Por lo tanto $C\subseteq L$.

Ahora mostrartemos que L es λ-sistema. Sea $(A_i)\in L$ creciente, entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(H\mathbf{1}_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i}\right) &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(H\mathbf{1}_{A_n})\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\mathbb{E}(\,H\mid\mathscr{G})\,\mathbf{1}_{A_n})\\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\,H\mid\mathscr{G})\,\mathbf{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in L$.

Sea $A,B\in\mathbb{N}$ $A\subseteq B$, entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H\mathbf{1}_{B-A}) &= \mathbb{E}(H(\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A))\\ &= \mathbb{E}(H\mathbf{1}_B)-\mathbb{E}(H\mathbf{1}_A)\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\,H\mid\mathscr{G})\,\mathbf{1}_B)-\mathbb{E}(\mathbb{E}(\,H\mid\mathscr{G})\,\mathbf{1}_A)\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\,H\mid\mathscr{G})\,\mathbf{1}_{B-A})\end{aligned}$$

Por lo tanto $B-A\in L$.

Por lo tanto L es λ-sistema.

Utilizando el teorema de clases monótonas se obtiene el resultado.

Ahora supondremos que para cualquier H que sea $\mathscr{F}_1$-medible y acotada se tiene que

$$\mathbb{E}(\,H\mid\mathscr{F}_2,\mathscr{G})=\mathbb{E}(\,H\mid\mathscr{G})\,.$$

Sea $A\in\mathscr{G}$ entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H_1H_2\mathbf{1}_A) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\,H_1H_2\mathbf{1}_A\,\middle|\,\sigma\left(\mathscr{F}_2\bigcup\mathscr{G}\right)\right)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(H_2\mathbf{1}_A\mathbb{E}\left(\,H_1\,\middle|\,\sigma\left(\mathscr{F}_2\bigcup\mathscr{G}\right)\right)\right)\\ &= \mathbb{E}(H_2\mathbf{1}_A\mathbb{E}(\,H_1\mid\mathscr{G}))\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\,H_2\mathbf{1}_A\mathbb{E}(\,H_1\mid\mathscr{G})\mid\mathscr{G}))\\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_A\mathbb{E}(\,H_1\mid\mathscr{G})\,\mathbb{E}(\,H_2\mid\mathscr{G}))\end{aligned}$$

Por lo tanto F_1 y F_2 son condicionalmente independientes dado $\mathscr{G}$.

(3) Pruebe que $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots,$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$ si y sólo si para cada $n \geq 1$, $\mathscr{F}_{n+1}$ es condicionalmente independiente de $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n$ dada $\mathscr{G}$.

Proof. Supongamos que $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots,$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$. Utilizando el ejercicio anterior basta probar que para H_{n+1} que sea $\mathscr{F}_{n+1}$ medible y acotada entonces:

$$\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \sigma(\mathscr{F}_1 \cup ... \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G})) = \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})$$

Lo demostraremos utilizando el lema de clases monótonas. Sea $C = \{A \in \sigma(\mathscr{F}_1 \cup$. claramente es un π-sistema, y sea $L = \{A \in \sigma(\mathscr{F}_1 \cup ... \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G}) : \mathbb{E}(H_{n+1}\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}($ para checar que es λ-sistema se hace una prueba similar al inciso anterior. Solo nos falta probar que $C \subseteq L$, sea $C \in C$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H_{n+1}\mathbf{1}_C) &= \mathbb{E}(H_{n+1}\mathbf{1}_{A_1}\mathbf{1}_{A_2}...\mathbf{1}_{A_n}\mathbf{1}_G)\\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_G\mathbb{E}(H_{n+1}\mathbf{1}_{A_1}\mathbf{1}_{A_2}...\mathbf{1}_{A_n} \mid \mathscr{G}))\end{aligned}$$

Como $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \ldots,$ son condicionalmente independientes dada $\mathscr{G}$:

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_G\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})\,\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_1}\mathbf{1}_{A_2}...\mathbf{1}_{A_n} \mid \mathscr{G}))\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_G\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})\,\mathbf{1}_{A_1}\mathbf{1}_{A_2}...\mathbf{1}_{A_n} \mid \mathscr{G}))\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})\,\mathbf{1}_C \mid \mathscr{G}))\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})\,\mathbf{1}_C)\end{aligned}$$

Por lo tanto $C \subseteq L$.Utilizando el lema de clases monótonas se obtiene el resultado para cualquier $A \in \sigma(\mathscr{F}_1 \cup ... \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G})$.

Ahora supondremos que para cada $n \geq 1$, $\mathscr{F}_{n+1}$ es condicionalmente independiente de $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n$ dada $\mathscr{G}$. La demostración se hará por inducción, para el caso $n = 1$ se cumple, ya que por la hipótesis sabemos que $\mathscr{F}_2$ es condicionalmente independiente de $\mathscr{F}_1$ dado $\mathscr{G}$. Ahora supongamos que $\mathscr{F}_1, ..., \mathscr{F}_n$ son condicionalmente independientes. Por demostrar que $\mathscr{F}_1, ..., \mathscr{F}_n, \mathscr{F}_{n+1}$ son condicionalmente independientes. Por el ejercicio anterior sabemos que:

$$\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \sigma(\mathscr{F}_1 \cup .... \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G})) = \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G}).$$

Sea $A \in \mathscr{G}$ entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(H_1...H_{n+1}\mathbf{1}_A) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_1...H_{n+1}\mathbf{1}_A \mid \sigma(\mathscr{F}_1 \cup .... \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G})))\\ &= \mathbb{E}(H_1...H_n\mathbf{1}_A\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \sigma(\mathscr{F}_1 \cup .... \cup \mathscr{F}_n \cup \mathscr{G})))\\ &= \mathbb{E}(H_1...H_n\mathbf{1}_A\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G}))\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_1...H_n\mathbf{1}_A\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G}) \mid \mathscr{G}))\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})\,\mathbf{1}_A\mathbb{E}(H_1...H_n \mid \mathscr{G}))\end{aligned}$$

Utilizando hipótesis de inducción:

$$= \mathbb{E}(\mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})\, \mathbf{1}_A \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G}) \ldots \mathbb{E}(H_n \mid \mathscr{G}))$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(H_1 \ldots H_{n+1} \mid \mathscr{G}) = \mathbb{E}(H_{n+1} \mid \mathscr{G})\, \mathbb{E}(H_1 \mid \mathscr{G}) \ldots \mathbb{E}(H_n \mid \mathscr{G})$. Por lo tanto $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_n, \mathscr{F}_{n+1}$ son condicionalmente independientes.

□

Categorías: Esperanza condicional, Independencia condicional.

Problema 12. Sea μ una distribución de progenie y defina $\tilde{\mu}_j = \mu_{j+1}$. Sea $S = (S_n)$ una caminata aleatoria con distribución de salto $\tilde{\mu}$. Sea k un entero no-negativo y defina recursivamente

$$Z_0 = k = C_0, \quad Z_{n+1} = k + S_{C_n} \quad \mathrm{y} C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}.$$

(1) Pruebe que $Z_n \geq 0$ para toda n y que si $Z_n = 0$ entonces $Z_{n+1} = 0$.

Proof. Primero notemos que $S_n = \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i$ donde $\tilde{\xi}_i$ toma valores en $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Demostraremos por inducción que $Z_n \geq 0$. Para $n = 0$ $Z_0 = k \geq 0$. Supongamos que $Z_n \geq 0$. Por demostrar que $Z_{n+1} \geq 0$.

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= k + S_{C_n} \\ &= k + S_{C_{n-1}+Z_n} \\ &= k + S_{C_{n-1}} + \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i \\ &= Z_n + \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i \end{aligned}$$

Como $\tilde{\xi}_i$ toma valores en $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ tenemos que $\sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i \geq -Z_n$:

$$Z_n + \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i \geq Z_n - Z_n = 0$$

Por lo tanto $Z_{n+1} \geq 0$.

Por lo tanto $Z_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$

Si $Z_n = 0$ entonces $0 = Z_n = k + S_{C_{n-1}}$, de aqui obtenemos que $S_{C_n} = -k$. Como $C_n = C_{n-1} + Z_n$ en tonces $C_n = C_{n-1}$.

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= k + S_{C_n} \\ &= k + S_{C_{n-1}} \\ &= k - k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $Z_{n+1} = 0$. □

(2) Pruebe que C_n es un tiempo de paro para la filtración canónica asociada a S.

Proof. Sabemos que $C_n = C_{n-1} + Z_n$,utilizando la formula recursivamente obtenemos que $C_n = k + \sum_{i=1}^{n} Z_i$. Notemos que $\{C_n = m\} = \emptyset$ si $m < k$. Si $m \geq k$, como $Z_n \geq 0$ entonces C_n es no decreciente. De aqui obtenemos que S_{C_i} es $\mathscr{F}_m$-medible para $0 \leq i \leq n$, ya que $C_i \leq k$ para $0 \leq i \leq n$ y $S_{C_i} = \sum_{i=1}^{C_i} \tilde{\xi}_i$. Como $Z_i = k + S_{C_{i-1}}$ entonces Z_i es $\mathscr{F}_m$- medible para $0 \leq i \leq n$. Por lo tanto $\{C_n = m\} = \{C_n = k + \sum_{i=1}^{n} Z_i = m\} \in \mathscr{F}_m$. Por lo tanto C_n es tiempo de paro. ☐

(3) Pruebe que Z es un proceso de Galton-Watson con ley de progenie μ.

Proof. Para probar que es un proceso de Galton-Watson tenemos que ver que es un proceso que cumple con las siguientes características: $X_0 = k \geq 0$ y $X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} \xi_{i,n}$ donde $\xi_{i,n}$ son variables aleatorias con distribución μ, $\mu = (\mu_k, k \geq 0)$ y μ_k es la probabilidad de tener k hijos.

Ya sabemos que $Z_0 = k \geq 0$. Tambien sabemos que $Z_{n+1} = Z_n + \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \tilde{\xi}_i$, por definición del proceso sabemos que $\tilde{\xi}_i = \xi_i - 1$ donde ξ_i se distribuye μ y ξ_i toma valores en $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ entonces $Z_{n+1} = Z_n + \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} (\xi_i - 1) = \sum_{i=C_{n-1}+1}^{C_{n-1}+Z_n} \xi_i$. Tomando a $\xi_{i,n} = \xi_{C_{n-1}+i}$ obtenemos que $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{i,n}$. Por lo tanto Z es un proceso de Galton Watson. ☐

(4) Pruebe que si S alcanza -1 entonces existe n tal que $Z_n = 0$. Deduzca que si la media de μ es 1 entonces Z se extingue. (Sugerencia: utilice un ejercicio anterior sobre martingalas con saltos acotados hacia abajo.)

Proof. Como $\mu = 1$ entonces $\mathbb{E}(\xi) = 1$ esto nos indica que $\mathbb{E}\left(\tilde{\xi} + 1\right) = 1$, por lo tanto $\mathbb{E}\left(\tilde{\xi}\right) = 0$. Entoces S_n es una caminata alaeatoria no trivial con media cero, por ejercicio anterior de la tarea sabemos que la caminata oscila. Por lo tanto $\liminf S_n = -\infty$. Por lo tanto existe n tal que $S_{C_n} = -k$. Por lo tanto el proceso se Z extingue. ☐

Categorías: Caminatas aleatorias, Procesos de Galton-Watson

Problema 13. El objetivo de este ejercicio es ver ejemplos de cadenas de Markov X y de funciones f tales que $f(X) = (f(X_n), n \in \mathbb{N})$ sean o no cadenas de Markov.

(1) Considere el hipercubo n-dimensional $E = \{0, 1\}^n$. A E lo pensaremos como la composición de la primera de dos urnas que tienen en total n bolas etiquetadas del 1 al n. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, interpretaremos $x_i = 1$ como que la bola i está en la urna 1. Considere el siguiente experimento aleatorio: inicialmente la composición de las urnas está dada por x y a cada instante de tiempo escogemos una bola al azar y la cambiamos de urna. Modele esta situación por medio de una cadena de Markov X en E. Sea $f : E \to \{0, \ldots, n\}$ dada por $f(x) = \sum_i x_i$. Pruebe que $f(X) = (f(X_n), n \in \mathbb{N})$ es una cadena de Markov cuya matriz de transición determinará.

Proof. El espacio de estados esta conformado por vectores de $\Re^n$ donde cada entrada toma valores en $\{0, 1\}$. Dado $k \in E$ solo existen n estados a los cuales es posible cambiarse, ya que cada cada entrada del vector k nos dice si la la bola se encuentra o no se encuentra en la urna y en cada unidad de tiempo solo se puede cambiar la localización de una bola. Por lo tanto la probabilidad de transicion queda de la siguiente manera:

$$p_{i,j} = \mathbf{1}_{\{i-j=e_k\}\cup\{i-j=e_{-k}\}} \frac{1}{n} \geq 0.$$

Y además:

$$\sum_j p_{i,j} = \sum \mathbf{1}_{\{i-j=e_k\}\cup\{i-j=e_{-k}\}} \frac{1}{n} = 1.$$

Como empezamos en el estado x_0 la distribución $\nu(j) = \mathbf{1}_{j=x_0}$.

Lo que nos determina $f(x) = \sum_i x_i$ es el numero de bolas totales que hay en la urna. Por lo tanto este modelo es el mismo que el de la urnda de Ehrenfest. Por lo tanto $f(x)$ es una cadena de Markov con matriz de transición:

$$p_{i,j} = \mathbf{1}_{j=i+1} \frac{n-i}{n} + \mathbf{1}_{j=i-1} \frac{i}{n}$$

□

(2) Sea $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de Markov con espacio de estados $\mathbb{Z}$ y matriz de transición

$$P_{i,i+1} = p \quad P_{i,i-1} = 1-p$$

donde $p \in [0,1]$. Dé una condición necesaria y suficiente para que $(|S_n|, n \in \mathbb{N})$ sea una cadena de Markov.

Proof. Notemos que:

$$p_{0,1} = \mathbb{P}(S_1 = 1 \,|\, S_0 = 0) = 1.$$

Para calcular $p_{i,i+1}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= \mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \,|\, |S_n| = i) \\ &= \mathbb{P}(S_{n+1} = i+1 \,|\, |S_n| = i) + \mathbb{P}(S_{n+1} = -i-1 \,|\, |S_n| = i) \end{aligned}$$

Calculemos $\mathbb{P}(S_{n+1} = i+1 \,|\, |S_n| = i)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = i+1 \,|\, |S_n| = i) &= \frac{\mathbb{P}(S_{n+1} = i+1, |S_n| = i)}{\mathbb{P}(|S_n| = i)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(S_{n+1} = i+1, S_n = i) + \mathbb{P}(S_{n+1} = i+1, S_n = -i)}{\mathbb{P}(|S_n| = i)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(S_{n+1} = i+1 \,|S_n = i)\, \mathbb{P}(S_n = i)}{\mathbb{P}(|S_n| = i)} \\
&= \frac{p\mathbb{P}(S_n = i)}{\mathbb{P}(|S_n| = i)}
\end{aligned}$$

Analogamente podemos obtener que $\mathbb{P}(S_{n+1} = -i-1 \,|\, |S_n| = i) = \frac{(1-p)\mathbb{P}(S_n=-i)}{\mathbb{P}(|S_n|=i)}$ y sustituyendo obtenemos que:

$$p_{i,i+1} = \frac{p\mathbb{P}(S_n = i) + (1-p)\mathbb{P}(S_n = -i)}{\mathbb{P}(|S_n| = i)}.$$

Utilizando el resultado del libro ”introducción a los procesos estocástocos” y suponiendo que la caminata aleatoria comienza en x_0:

Si los números n y $i - x_0$ son ambos pares o ambos impares, entonces para $-n \le i - x_0 \le n$,

$$\mathbb{P}(S_n = i \,|S_0 = x_0) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n + i - x_0)} p^{\frac{1}{2}(n+i-x_0)}(1-p)^{\frac{1}{2}(n-i+x_0)}$$

en otro caso la probabilidad es cero.

Condicionando que la caminata aleatoria inicia en x_0, es decir que $\mathbb{P}(S_n = i) = \mathbb{P}(S_n = i \,|S_0 = x_0)$, podemos sustituir el resultado anterior obteniendo que:

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1} == &\frac{p\binom{n}{\frac{1}{2}(n+i-x_0)}p^{\frac{1}{2}(n+i-x_0)}(1-p)^{\frac{1}{2}(n-i+x_0)}}{\mathbb{P}(|S_n| = i)} \\
&+ \frac{(1-p)\binom{n}{\frac{1}{2}(n-i-x_0)}p^{\frac{1}{2}(n-i-x_0)}(1-p)^{\frac{1}{2}(n+i+x_0)}}{\mathbb{P}(|S_n| = i)}
\end{aligned}$$

Para el denominador utilizamos el hecho de que $\mathbb{P}(|S_n| = i) = \mathbb{P}(S_n = i) + \mathbb{P}(S_n = -i)$ utilizando de nuevo la proposición y factorizando $p^{\frac{1}{2}(n-x_0)}(1-p)^{\frac{1}{2}(n+x_0)}$ se tiene que:

$$\mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \,|\, |S_n| = i) = \frac{\binom{n}{\frac{1}{2}(n+i-x_0)}p^{\frac{1}{2}i+1}q^{-\frac{1}{2}i} + \binom{n}{\frac{1}{2}(n-i-x_0)}p^{-\frac{1}{2}i}q^{\frac{1}{2}i+1}}{\binom{n}{\frac{1}{2}(n+i-x_0)}p^{\frac{1}{2}i}q^{-\frac{1}{2}i} + \binom{n}{\frac{1}{2}(n-i-x_0)}p^{-\frac{1}{2}i}q^{\frac{1}{2}i}}$$

donde $q = 1 - p$.

Notemos que $\frac{\binom{n}{\frac{1}{2}(n-i-x_0)}}{\binom{n}{\frac{1}{2}(n+i-x_0)}} = \frac{(\frac{1}{2}(n-i+x_0))!(\frac{1}{2}(n+i-x_0)!}{(\frac{1}{2}(n+i+x_0))!(\frac{1}{2}(n-i-x_0))!}$. Si $x_0 = 0$ entonces $\frac{\binom{n}{\frac{1}{2}(n-i-x_0)}}{\binom{n}{\frac{1}{2}(n+i-x_0)}} = 1$. Por lo tanto si la caminata aleatoria comienza en $x_0 = 0$

tenemos que:

$$\mathbb{P}(|S_{n+1}| = i+1 \,|\, |S_n| = i) = \frac{p^{\frac{1}{2}i+1}q^{-\frac{1}{2}i} + p^{-\frac{1}{2}i}q^{\frac{1}{2}i+1}}{p^{\frac{1}{2}i}q^{-\frac{1}{2}i} + p^{-\frac{1}{2}i}q^{\frac{1}{2}i}},$$

lo cual no depende de n. Por lo tanto $|S_n|$ es una cadena de Markov homogenea si $x_0 = 0$.

□

Categorías: proyecciones de cadenas de Markov

Problema 14. Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos medidas de probabilidad en el espacio canónico $E^{\mathbb{N}}$ para sucesiones con valores en un conjunto a lo más numerable E. Decimos que $\mathbb{Q}$ es **localmente absolutamente continua** respecto de $\mathbb{P}$ si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n} \ll \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}$. Sea

$$D_n = \frac{d\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_n}}{d\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n}}.$$

(1) Pruebe que D es una martingala bajo $\mathbb{P}$. Pruebe que si D es uniformemente integrable entonces $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.

Proof. (a) D_n por el teorema de Radon-Nykodin es $\mathscr{F}_n$-medible.

(b) Por el teorema de Radon-Nykodin $D_n \in [0, \infty)$ y es integrable respecto a $\mathbb{P}$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|D_n|) &= \mathbb{E}(D_n) \\ &= \int_\Omega D_n d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{Q}(\Omega) = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto D_n es integrable.

(c) Propiedad de Martingala:
Sea $A \in \mathscr{F}_n$ entonces $A \in F_{n+1}$ ya que F_n es filtración. Luego entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_n \mathbf{1}_A) &= \int_A D_n d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{Q}(A) \\ &= \int_A D_{n+1} d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}(D_{n+1}\mathbf{1}_A). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(D_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = D_n$.

Por lo tanto D_n es martingala.

Si D_n es uniformemente integrable entonces D_n converge a D_∞ casi seguramente y en L_1. También sabemos que $D_n = \mathbb{E}(D_\infty \mid \mathscr{F}_n)$. Utlizaremos el lema de clases monótonas para demostrar qque $\mathbb{Q}(A) = \int_A D_\infty$ para toda $A \in \sigma(\cup_{n=1}^\infty \mathscr{F}_n)$.Definiremos a $\pi = \{A \in \sigma(\cup_{n=1}^\infty \mathscr{F}_n) : A \in \cup_{n=1}^\infty \mathscr{F}_n\}$ y a $\lambda = \left\{A \in \sigma(\cup_{n=1}^\infty \mathscr{F}_n) : \mathbb{Q}(A) = \int_A D_\infty\right\}$.

Para ver que π es un π-sistema notemos que:

Sea $A, B \in \pi$ entonces existe n y m tal que $A \in \mathscr{F}_n$ y $B \in \mathscr{F}_m$ sin perdida de genrealidad supongamos que $n \leq m$ entonces $A \in \mathscr{F}_m$ y de aqui obtenemos que $A \cap B \in \mathscr{F}_m$. Por lo tanto $A \cap B \in \pi$. Por lo tanto π es π-sistema.

Veamos que λ es λ-sistema:

Sea $A, B \in \lambda$ tal que $A \subseteq B$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}\left(B \backslash A\right) &= \mathbb{Q}\left(B\right) - \mathbb{Q}\left(A\right) \\
&= \int_B D_\infty d\mathbb{P} - \int_A D_\infty d\mathbb{P} \\
&= \int_{B \backslash A} D_\infty d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $B \backslash A \in \lambda$.

Sea $A_n \in \lambda$ tal que $A_n \subseteq A_{n+1}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}\left(\cup_{n=1}^\infty A_n\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{Q} A_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{1}_{A_n} D_\infty d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

Por teorema de convergencia monótona:

$$\begin{aligned}
&= \int \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{A_n} D_\infty d\mathbb{P} \\
&= \int \mathbf{1}_{\cup_{n=1}^\infty A_n} D_\infty d\mathbb{P} \\
&= \int_{\cup_{n=1}^\infty A_n} D_\infty d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \lambda$.

Por lo tanto λ es un λ-sistema.

Ahora notemos que $\pi \subseteq \lambda$, sea $A \in \pi$ entonces existe n tal que $A \in \mathscr{F}_n$. Como D_n es unformemente integrable entonces $D_n = \mathbb{E}(D_\infty \mid \mathscr{F}_n)$. De aqui obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D_n \mathbf{1}_A) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(D_\infty \mid F_n)\, \mathbf{1}_A) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(D_\infty \mathbf{1}_A \mid F_n)) \\
&= \mathbb{E}(D_\infty \mathbf{1}_A)
\end{aligned}$$

Luego entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}\left(A\right) &= \int_A D_n d\mathbb{P} \\
&= \int_A D_\infty d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\pi \subseteq \lambda$.

Utilizando el lema de clases monotonas obtenemos que para todo $A \in \sigma\left(\cup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n\right)$:

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A D_\infty d\mathbb{P}.$$

Por lo tanto $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. □

(2) Pruebe que si T es un tiempo de paro finito entonces $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_T} \ll \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$.

Proof. Recordemos que $\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n \forall n \in \mathbb{N}\}$. Por ejercicio 4 sabemos que D_T es $\mathscr{F}_T$-medible. Además tenemos que:

$$\int_A D_T D\mathbb{P} = \int_A \sum_{n=1}^{\infty} D_n \mathbf{1}_{T=n} d\mathbb{P}$$

Por teorema de convergencia monótona tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_A D_n \mathbf{1}_{T=n} d\mathbb{P} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{T=n\}\cap A} D_n \{T=n\} \cap A d\mathbb{P} \end{aligned}$$

Pero sabemos que $\{T=n\} \cap A \in \mathscr{F}_n$, entonces:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}\left(\{T=n\} \cap A\right) \\ &= \mathbb{Q}\left(\cup_{n=1}^{\infty}\{T=n\} \cap A\right) \\ &= \mathbb{Q}\left(A\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{Q}\left(A\right) = \int_A D_T D\mathbb{P}$.
Por lo tanto $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_T} \ll \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$.

□

(3) Sea $\mathbb{P}^p$ la distribución de una caminata aleatoria simple que comienza en 0 y va de k a $k+1$ con probabilidad p, donde $p \in (0,1)$. Pruebe que $\mathbb{P}^p$ es localmente absolutamente continua respecto de $\mathbb{P}^{1/2}$ y encuentre la martingala D_n asociada.

Proof. Sea $A = \{X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\} \in \mathscr{F}_n$, entonces tenemos que:

$$\mathbb{P}^{1/2}\left(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

y

$$\mathbb{P}^p\left(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\right) = p^k q^{n-k}$$

Expresando a $\mathbb{P}^p$ en terminos de $\mathbb{P}^{1/2}$:

$$= (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Entonces:

$$\mathbb{P}^p(A) = (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Como estamos en una caminata aleatoria simple y el n-ésimo estado es x_n, entonces el numero de saltos hacia arriba esta determinado como $k = \frac{x_n+n}{2}$, de aqui:

$$\begin{aligned}
&= (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{x_n+n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= E^{1/2}[(2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} \mathbf{1}_A] \quad = \int_A (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} \mathbb{P}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Como queremos que sea valido para todo $A \in \mathscr{F}_n$, utilizaremos el teorema de las clases monotonas con $\pi = \{A \in \mathscr{F}_n : A = \{X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\}\}$, claramente es un π-sistema, y a $\lambda = \left\{A \in \mathscr{F}_n : \mathbb{P}^p(A) = \int_A (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} \mathbb{P}^{1/2}\right\}$. Por lo anterior demostramos que $\pi \subseteq \lambda$, solo nos falta demostrar que λ es un λ-sistema:

(a) Sea $A, B \in \mathscr{F}_n$ tal que $A \subseteq B$ entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^p(B\backslash A) &= \mathbb{P}^p(B) - \mathbb{P}^p(A) \\
&= \int_B (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}} - \int_A (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}} \\
&= \int_{B\backslash A} (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $B\backslash A \in \lambda$.

(b) Sea $A_k \in \mathscr{F}_n$ tal que $A_k \subseteq A_{k+1}$ entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^p(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) &= \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}^p(A_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} d\mathbb{P}^{1/2} \\
&= \lim_{k\to\infty} \int (2q)^n \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}} \mathbf{1}_{A_k} d\mathbb{P}^{1/2}
\end{aligned}$$

Como $(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}}\mathbf{1}_{A_k}\uparrow(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}}\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{\infty}A_k}$, por teorema de convergencia monótona tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&=\int(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}}\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{\infty}A_k}d\mathbb{P}^{1/2}\\
&=\int_{\cup_{k=1}^{\infty}A_k}(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}}d\mathbb{P}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\cup_{k=1}^{\infty}A_k\in\lambda$.

Por lo tanto λ es un λ-sistema.

Por lo tanto por el lema de las clases monótonas se tiene que para todo $A\in\mathscr{F}_n$ $\mathbb{P}^p(A)=\int_A(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}}\mathbb{P}^{1/2}$. Como $(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}}$ es $\mathscr{F}_n$-medible entonces la martingala asociada es $D_n=\mathbb{P}^p(A)=\int_A(2q)^n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_n+n}{2}}\mathbb{P}^{1/2}$ y $\mathbb{P}^p$ es absolutmanete continua con respecto a $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}$.

$\square$

(4) Para $a,b>0$, sea $T=\min\{n\in\mathbb{N}:X_n\in\{-a,b\}\}$. Pruebe que T y X_T son independientes bajo $\mathbb{P}^{1/2}$. Al utilizar la continuidad absoluta local, pruebe que T y X_T también son independientes bajo $\mathbb{P}^p$. Utilice alguna martingala de ejercicios anteriores para calcular $\mathbb{E}\big(T^2\big)$.

Se probara la independencia de X_T con T cuando $a=b$. Recordemos que $\mathbb{P}(X_T=a)=\frac{1}{2}$. Por lo tanto solo nos basta con demostrar $\mathbb{P}(X_T=a\,|T=k)=\frac{1}{2}$. Entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T=a|T=k)&=\frac{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T=a,T=k)}{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T=k)}\\
&=\frac{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_k=a,T=k)}{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T=k)}
\end{aligned}
$$

El evento $\{X_k=a,T=k\}$ es igual al evento de que la primer visita al estado a sea en el paso k, denotando a $\rho_{0,a}(k)$ como la probabilidad de que la caminata alcance por primera vez al estado a en el paso k, tenemos que :

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T=a|T=k)=\frac{\rho_{0,a}(k)}{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T=k)}$$

Analogamente tenemos que para el caso $T=-a$:

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T=-a|T=k)=\frac{\rho_{0,-a}(k)}{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T=k)}$$

Ya que X_T toma los valores $\{-a, a\}$:

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a | T = k\right) + \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = -a | T = k\right) = 1$$
$$\frac{\rho_{0,a}(k)}{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k)} + \frac{\rho_{0,-a}(k)}{\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k)} = 1$$

Por lo tanto $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k) = \rho_{0,a}(k) + \rho_{0,-a}(k)$. Entonces sustituyendo:

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a | T = k\right) = \frac{\rho_{0,a}(k)}{\rho_{0,a}(k) + \rho_{0,-a}(k)}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\rho_{0,a}(k) &= \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1} \neq a} \mathbb{P}_0^{\frac{1}{2}}\left(X_1 = i_1, \ldots, X_{k-1} = i_{k-1}, X_k = a\right) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1} \neq a} \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

y tambien:

$$\begin{aligned}
\rho_{0,-a}(k) &= \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1} \neq -a} \mathbb{P}_0^{\frac{1}{2}}\left(X_1 = i_1, \ldots, X_{k-1} = i_{k-1}, X_k = -a\right) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1} \neq -a} \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

Como $\sum_{i_1,\ldots,i_{k-1} \neq a} 1$ nos indica el número de las distintas trayectorias de la caminata aleatoria de 0 a a en k pasos pero por simetría es igual a $\sum_{i_1,\ldots,i_{k-1} \neq -a} 1$ que es el número de las distintas trayectorias de la caminata de aleatoria 0 a $-a$ entonces $\rho_{0,a}(k) = \rho_{0,-a}(k)$.De aqui obtenemos que $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a | T = k\right) = \frac{\rho_{0,a}(k)}{\rho_{0,a}(k)+\rho_{0,-a}(k)} = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a | T = k\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = a\right)$$

Analogamente:

$$\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = -a | T = k\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}\left(X_T = -a\right)$$

Por lo tanto X_T y T son independientes.

Solo nos falta demostrar que X_T y T son independientes bajo $\mathbb{P}^p$. Primero recordemos que T es tiempo de paro finito entonces $\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_T} \ll \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_T}$ por el inciso 2. Tambien sabemos que X_T y T son $\mathscr{F}_T$-medibles entonces $\{X_T = a, T = k\} \in \mathscr{F}_T$ y por el inciso anterior:

$$\mathbb{P}^p|_{\mathscr{F}_T}(\{X_T = a, T = k\}) = \int \mathbf{1}_{\{X_T=a,T=k\}}(2q)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_T}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_T}$$
$$= E^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_T}{2}} \mathbf{1}_{\{X_T=a\}}\mathbf{1}_{\{T=k\}}\right)$$

Utilizando la independencia de X_T y T bajo $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}$:

$$= E^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}} \mathbf{1}_{\{T=k\}}\right) E^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_T}{2}} \mathbf{1}_{\{X_T=a\}}\right)$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}^p(X_T = a, T = k) = (2q)^k \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}} \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k)\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T = a).$$

Ahora calcularemos $\mathbb{P}^p(X_T = a)$ y sabemos que $\{X_T = a\} \in \mathscr{F}_T$ y utilizando el inciso anterior:

$$\mathbb{P}^p(X_T = a) = \int_{\{X_T=a\}} (2q)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{X_T}{2}} d\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{F}_T}$$
$$= \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}} E^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}} \mathbf{1}_{X_T=a}\right)$$
$$= \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}} E^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}}\right) E^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{1}_{X_T=a}\right)$$

De aqui obtenemos que:

$$\mathbb{P}^p(X_T = a) = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}} \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T = a) E^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}}\right)$$

Analogamente:

$$\mathbb{P}^p(X_T = -a) = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}} \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T = -a) E^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}}\right).$$

Ya que $\mathbb{P}^p(X_T = a) + \mathbb{P}^p(X_T = -a) = 1$ y $\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T = -a) = \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T = a) = \frac{1}{2}$ obtenemos que:

$$E^{\frac{1}{2}}\left((2q)^T \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{T}{2}}\right) = \frac{2}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}} + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}^p(X_T = a) = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}}}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}} + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}}$$

$$\mathbb{P}^p(X_T = -a) = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}} + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}}.$$

Solo nos falta calcular $\mathbb{P}^p(T = k)$, sabemos que:

$\mathbb{P}^p(T = k) = \mathbb{P}^p(X_T = a, T = k) + \mathbb{P}^p(X_T = -a, T = k)$

Utilizando resultado anterior

$$= (2q)^k \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k}{2}} \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k)\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T = a) \left(\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}} + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}\right).$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}^p(X_T = a)\mathbb{P}^p(T = k) = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}}}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}} + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-a}{2}}}$$

$$(2q)^k \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k}{2}} \mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(T = k)\mathbb{P}^{\frac{1}{2}}(X_T = a) \left(\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}} + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{a}{2}}\right)$$

$$= \mathbb{P}^p(X_T = -a, T = k).$$

Analogamente se obtiene que:

$$\mathbb{P}^p(X_T = -a, T = k) = \mathbb{P}^p(X_T = -a)\mathbb{P}^p(T = k).$$

Por lo tanto X_T y T son independienres bajo $\mathbb{P}^p$.

Categorías: Cambio de medida, Caminata aleatoria simple.

Problema 15. Sea N un proceso Poisson de parámetro λ y sea T_n el tiempo de su enésimo salto.

(1) Pruebe que condicionalmente a T_2, T_1 es uniforme en $[0, T_2]$.

Proof. Ya que N es un proceso Poisson λ sabemos que T_1 se distribuye $exp(\lambda)$, $T_2 = S_1 + S_2$ se distribuye $gamma(2, \lambda)$ y $T_2 - T_1 = S_2$ se distribuye $exp(\lambda)$, también T_1 es independiente de $T_2 - T_1$. Entonces:

$$f_{T_1|T_2}(t_1|t_2) = \frac{f_{T_1,T_2}(t_1, t_2)}{f_{T_2}(t_2)}$$

Para calcular $f_{T_1,T_2}(t_1, t_2)$ primero notemos que como T_1 es independiente de $T_2 - T_1$:

$$f_{T_1,T_2-T_1}(x,y) = \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{x>0,y>0} = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\mathbf{1}_{x>0,y>0}$$

Haciendo el cambio de variable $X = T_1, Y = T_2 - T_1$ despejando $T_1 = X, T_2 = Y - X$ y calculando el jacobiano podemos calcular la conjunta de T_1 y T_2:

$$f_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = \lambda^2 e^{-\lambda t_2}\mathbf{1}_{0\le t_1\le t_2}$$

Sustituyendo en la densidad condicional $f_{T_1|T_2}(t_1|t_2)$:

$$\begin{aligned} f_{T_1|T_2}(t_1|t_2) &= \frac{\lambda^2 e^{-\lambda t_2}\mathbf{1}_{0\le t_1\le t_2}}{\lambda t_2 e^{-\lambda t_2}\lambda\mathbf{1}_{0\le t_2}} \\ &= \frac{1}{t_2}\mathbf{1}_{0\le t_1\le t_2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} F_{T1|T_2}(x) &= \mathbb{P}(T_1 \le x\,|T_2) \\ &= \mathbb{E}(\,\mathbf{1}_{T_1\le x}\;|\,T_2) \end{aligned}$$

Por propiedades se esperanza condicional sabemos que $\mathbb{E}(\,f(X)\,|\,Y) = g(Z)$ donde $g(z) = \int f(x)f_{X|Z}(x|z)dx$, entonces:

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^z \mathbf{1}_{t_1\le x} f_{T_1|T_2}(t_1|z)dt_1 \\ &= \int_0^x \frac{1}{z}dt_1 \\ &= \frac{x}{z} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$F_{T1|T_2}(x) = \frac{x}{T_2}.$$

□

(2) Pruebe que si W_1 y W_2 son exponenciales de parámetro λ independientes entre si y de una variable uniforme U, entonces $U\,(W_1 + W_2)$ es una variable aleatoria exponencial de parámetro λ.

Proof. Sabemos que $W_1 + W_2$ se distribuye $\Gamma(2,\lambda)$ Utilizando la independencia de U con $W_1 + W_2$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
f_{U(W_1+W_2)}(u) &= \int f_U(u/w) f_{W_1+W_2}(w) \frac{1}{w} dw \\
&= \int \mathbf{1}_{u/w \leq 1} \mathbf{1}_{0 \leq w} \lambda^2 w e^{-\lambda w} \frac{1}{w} dw \\
&= \int_u^\infty \lambda^2 e^{-\lambda w} dw \\
&= \lambda e^{-\lambda u}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $U(W_1 + W_2)$ es una variable aleatoria exponencial de parámetro λ.

□

(3) Conjeture cómo se generaliza lo anterior con T_n y T_1.

Proof. Analogamente como en el inciso 1, primero sabemos que $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, ...T_n - T_{n-1}$ son variables independientes e idénticamente distribuidas como Exponenciales de parámetro λ y tambien sabemos que $T_n = \sum_i^n S_i$ y como S_i son independientes exponenciales de parámetro λ entonces T_n se distribuye $\Gamma(n, \lambda)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
f_{T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}}(t_1, \ldots, t_n) &= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda t_i} \\
&= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n u_i}
\end{aligned}$$

Si definimos $X_1 = T_1, X_2 = T_2 - T_1, ..., X_n = T_n - T_{n-1}$ tenemos que:

$$f_{T_1, T_2, \ldots, T_n}(t_1, ..., t_n) = f_{T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}}(t_1, t_2 - t_1, ..., t_n - t_{n-1})$$

Como el jacobiano de la transformación es 1 tenemos que:

$$\begin{aligned}
&= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=2}^n t_i - t_{i-1}} \\
&= \lambda^n e^{-\lambda t_n}
\end{aligned}$$

Calculando la densidad de $T_1, ..., T_{n-1} | T_n$:

$$\begin{aligned}
f_{T_1, \ldots, T_{n-1} | T_n}(t_1, ..., t_{n-1} | t_n) &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda t_n}}{\frac{\lambda^n t_n^{n-1} e^{-\lambda t_n}}{(n-1)!}} \\
&= \frac{(n-1)!}{t_n^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Lo cual es la distribución conjunta de los estadisticos de orden $n-1$ variables aleatorias uniformes independientes en el intervalo $(0, t_n)$. Esto nos dice que T_1 dado T_n tiene la misma distribución que el primer estadístico de orden:

$$f_{T_1 | T_n}(t_1 | t_n) = (n-1) \left(1 - \frac{t_1}{t_n}\right)^{n-2} \frac{1}{t_n} \mathbf{1}_{0 \leq t_1 \leq t_n}$$

□

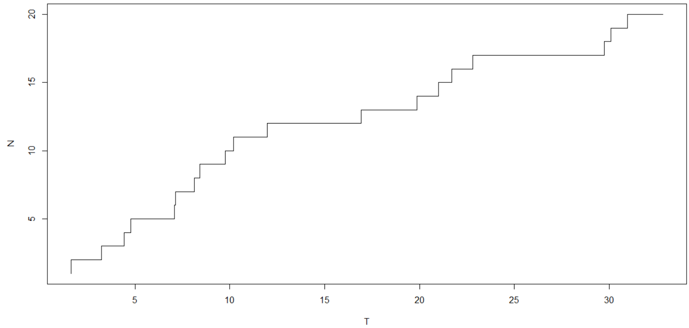

FIGURE 2. Simulación del proceso Poisson mediante variables exponenciales

(4) Escriba dos programas en Octave que simulen al proceso de Poisson de parámetro λ en el intervalo $[0,1]$. En uno utilizará sólo variables exponenciales y en el otro puede utilizar una variable Poisson.

```
Progama que utliza variables exponenciales
n=30
T=rexp(1,l)
l=.5
N=seq(1:n)
for(i in 2:n){
T[i]=T[i-1]+rexp(1,l)
}
plot (T,N , type ="S")

Programa que simula un Proceso Poisson con una
   variable Poisson
t=30
l=.5
N_t=rpois(1,l*t)
T=runif(N_t,0,t)
T=sort(T)
N=seq(1,N_t)
plot (T,N , type ="S")
N_t
T
N
```

.

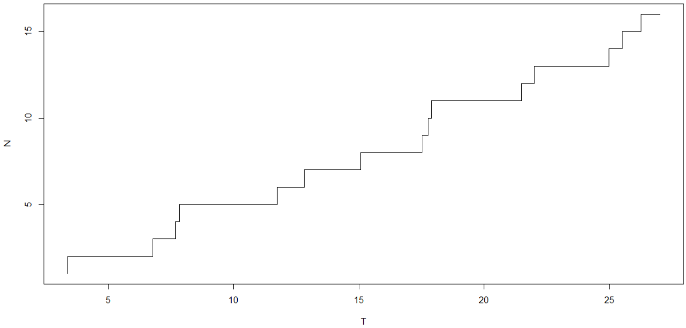

FIGURE 3. Simulación del proceso Poisson mediante una variable Poisson

Problema 16. Sea Ξ una medida de Poisson aleatoria en $(0,\infty)\times(0,\infty)$ cuya medida de intensidad ν está dada por $\nu(ds,dx) = \mathbf{1}_{s<t}\mathbf{1}_{x>0}C/x^{1+\alpha}\,ds\,dx$.

(1) Determine los valores de α para los cuales $\int 1\wedge x\,\nu(dx) < \infty$.

Proof. Tenemos que:

$$\int 1\wedge x\nu(ds,dx) = \int_0^t\int_0^1 xC/x^{1+\alpha}dxds + \int_0^t\int_1^\infty C/x^{1+\alpha}dxds$$

Veamos las condiciones para que la primera integral sea finita, primero notemos que $\alpha\neq 1$, ya que en caso contrario tendriamos $\int_0^1 xC/x^{1+\alpha}dx = \int_0^1 C/xdx = \lim_{x\to 0} -ln(x) = \infty$.Entonces si $\alpha\neq 1$:

$$\int_0^1 xC/x^{1+\alpha}dx = \frac{C}{1-\alpha} - C\lim_{x\to 0}\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}.$$

Entonces $C\lim_{x\to 0}\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$ existe siempre que $\alpha < 1$. Ahora veamos las condiciones para que la segunda integral se finita, notemos que $\alpha\neq 0$ por el mismo argumento que en el caso anterior. Entonces si $\alpha\neq 0$:

$$\int_1^\infty C/x^{1+\alpha}dx = \frac{C}{\alpha} - C\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-\alpha}}{\alpha}$$

En este caso $\alpha > 0$.

Por lo tanto si $\alpha\in(0,1)$ entonces $\int 1\wedge x\,\nu(dx) < \infty$. □

Nos restringimos ahora a valores de α para los cuales la integral anterior sea finita. Sean $f_t(s,x) = \mathbf{1}_{s\leq t}x$ y $X_t = \Xi f_t$.

(2) Determine los valores de α para los cuales $X_t < \infty$ para toda $t\geq 0$ casi seguramente.

Proof. Por proposición vista en clase sabemos que $X_t < \infty$ si la integral $\int 1 \wedge f_t dv$ es finita, entonces:

$$\begin{aligned}
\int 1 \wedge f_t dv &= \int_0^1 \int_0^\infty \mathbf{1}_{s \leq t} x C/x^{1+\alpha} ds dx + \int_1^\infty \int_0^\infty \mathbf{1}_{s \leq t} C/x^{1+\alpha} ds dx \\
&= \int_0^1 \int_0^t x C/x^{1+\alpha} ds dx + \int_1^\infty \int_0^t C/x^{1+\alpha} ds dx \\
&= Ct \left(\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^{1+\alpha}} \right)
\end{aligned}$$

Analogamente que en el ejercicio anterior $\alpha \in (0,1)$ para que $\int 1 \wedge f_t dv < \infty$. Por lo tanto $X_t < \infty$ casi seguramente si $\alpha \in (0,1)$. Además si $\alpha \in (0,1)$ tenemos que:

$$\int 1 \wedge f_t dv = Ct \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{Ct}{\alpha(1-\alpha)}.$$

□

(3) Calcule $\mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big)$ y pruebe que X_t tiene la misma distribución que $t^{1/\alpha} X_1$.

Proof. Utilizando teorema visto en clase sabemos que:

$$\mathbb{E}\big(e^{-\Xi f}\big) = \exp\left(- \int \left(1 - e^{-f}\right) d\nu \right)$$

Entonces:

$$\mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big) = \exp\left(- \int \left(1 - e^{-\lambda f_t}\right) d\nu \right)$$

Ahora calculando la integral tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int \left(1 - e^{-\lambda f_t}\right) d\nu &= C \int_0^\infty \int_0^t \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \frac{1}{x^{1+\alpha}} ds dx \\
&= Ct \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \frac{1}{x^{1+\alpha}} dx \\
&= Ct \int_0^\infty \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} \frac{1}{x^{1+\alpha}} dy dx \\
&= Ct \int_0^\infty \int_y^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda y}}{x^{1+\alpha}} dx dy \\
&= \frac{Ct}{\alpha} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} y^{-\alpha} dy
\end{aligned}$$

Completando par que nos quede una Gamma:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{Ct\lambda^\alpha}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\lambda y}(\lambda y)^{-\alpha}\lambda dy \\
&= \frac{Ct\lambda^\alpha}{\alpha}\Gamma(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big) = \exp\left(-\frac{C\lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)t}{\alpha}\right)$

Para verificar que tiene la misma distribución que $t^{1/\alpha}X_1$ nos basta con verificar que $\mathbb{E}\Big(e^{-\lambda t^{1/\alpha}X_1}\Big) = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big)$. Luego entonces definamos $\phi(\lambda,t) = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big) = \exp\left(-\frac{C\lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)t}{\alpha}\right)$. Evaluando en $t=1$ tenemos que:

$$\phi(\lambda,1) = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_1}\big) = \exp\left(-\frac{C\lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\right).$$

Evaluando en $\lambda t^{1/\alpha}$:

$$\phi(\lambda t^{1/\alpha},1) = \mathbb{E}\Big(e^{-\lambda t^{1/\alpha}X_1}\Big) = \exp\left(-\frac{C(\lambda t^{1/\alpha})^\alpha\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\right) = \exp\left(-\frac{C\lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)t}{\alpha}\right).$$

Por lo tanto como $\mathbb{E}\Big(e^{-\lambda t^{1/\alpha}X_1}\Big) = \mathbb{E}\big(e^{-\lambda X_t}\big)$ entonces X_t se distribuye igual que $t^{1/\alpha}X_1$. □

(4) Diga por qué el siguiente código en Octave simula la trayectoria aproximada del proceso X en el intervalo $[0,1]$.

Problema 17. Pruebe que si X tiene incrementos independientes entonces el proceso X^t dado por $X_s^t = X_{t+s} - X_t$ es independiente de $\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s : s \geq 0)$.

Calcular la esperanza y varianza del proceso de Poisson y de Poisson compuesto (en términos de la intensidad y la distribución de salto).

Proof. Como N_t se distribuye Poisson(λt) entonces $\mathbb{E}(N_t) = \mathrm{Var}(N_t) = \lambda t$.

Ahora si tenenemos un proceso Poisson compuesto, $X_t = \sum_{i=0}^{N_t}\xi_i$ donde ξ_i son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N_t} \xi_i\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N_t} \xi_i \,\middle|\, N_t\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{N_t} \xi_i \,\middle|\, N_t = k\right) \mathbf{1}_{N_t=k}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k} \xi_i\right) \mathbf{1}_{N_t=k}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{E}(\xi_1)\, \mathbf{1}_{N_t=k}\right) \\
&= \mathbb{E}(\xi_1)\, \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbf{1}_{N_t=k}\right) \\
&= \mathbb{E}(\xi_1)\, \mathbb{E}(N_t) \\
&= \mathbb{E}(\xi_1)\, \lambda t
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\xi_1)\, \lambda t$. Ahora calcularemos la varianza:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_t) &= \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X_t|N_t)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(\,X_t \mid N_t)) \\
&= \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X_t|N_t)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(\xi_1)\, N_t) \\
&= \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X_t|N_t)) + \mathbb{E}(\xi_1)^2\, \mathrm{Var}(N_t) \\
&= \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X_t|N_t)) + \mathbb{E}(\xi_1)^2\, \lambda t
\end{aligned}
$$

Solo nos falta calcular el primer sumando lo cual lo haremos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X_t|N_t) &= \mathbb{E}\big(\, X_t^2 \;\big|\, N_t\big) - \mathbb{E}(\, X_t \mid N_t)^2 \\
&= \mathbb{E}\big(\, X_t^2 \;\big|\, N_t\big) - {N_t}^2 \mathbb{E}(\xi_i)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{N_t} \xi_i\right)^2 \,\middle|\, N_t \right) - {N_t}^2 \mathbb{E}(\xi_i)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{N_t} \xi_i\right)^2 \,\middle|\, N_t = k \right) \mathbf{1}_{N_t=k} - {N_t}^2 \mathbb{E}(\xi_i)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{k} \xi_i\right)^2 \right) \mathbf{1}_{N_t=k} - {N_t}^2 \mathbb{E}(\xi_i)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(k\mathbb{E}\big(\xi_1^2\big) + k(k-1)\mathbb{E}(\xi_1)^2 \right) \mathbf{1}_{N_t=k} - {N_t}^2 \mathbb{E}(\xi_i)^2 \\
&= N_t\mathbb{E}\big(\xi_1^2\big) + N_t(N_t-1)\mathbb{E}(\xi_1)^2 - {N_t}^2 \mathbb{E}(\xi_i)^2 \\
&= N_t \left(\mathbb{E}\big(\xi_1^2\big) - \mathbb{E}(\xi_1)^2 \right) \\
&= N_t \left(\operatorname{Var}\big(\xi_1^2\big) \right)
\end{aligned}
$$

Entonces sustituyendo obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X_t) &= \mathbb{E}\big(N_t \left(\operatorname{Var}\big(\xi_1^2\big)\right)\big) + \mathbb{E}(\xi_1)^2 \,\lambda t \\
&= \operatorname{Var}\big(\xi_1^2\big)\,\lambda t + \mathbb{E}(\xi_1)^2 \,\lambda t \\
&= \lambda t \mathbb{E}\big(\xi_1^2\big)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\xi_1)\,\lambda t$ y $\operatorname{Var}(X_t) = \mathbb{E}\big(\xi_1^2\big)\,\lambda t$.

$\square$

Probar que si X es

$$
\mathbb{E}\big(e^{iuZ_t}\big) = e^{-\lambda t(1-\psi(u))} \quad \text{donde} \quad \psi(u) = \mathbb{E}\big(e^{iu\xi_1}\big)\,.
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(e^{iuX_t}\big) &= \mathbb{E}\Big(e^{iu\sum_{i=0}^{N_t}\xi_i}\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(\, e^{iu\sum_{i=0}^{N_t}\xi_i} \;\Big|\, N_t\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

Nos enfocaremos en calcular $\mathbb{E}\Big(\, e^{iu\sum_{i=0}^{N_t}\xi_i} \;\Big|\, N_t\Big)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(e^{iu\sum_{i=0}^{N_t}\xi_i}\ \Big|\ N_t\Big) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\Big(e^{iu\sum_{i=0}^{N_t}\xi_i}\ \Big|\ N_t = k\Big)\,\mathbf{1}_{Nt=k}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\Big(e^{iu\sum_{i=0}^{k}\xi_i}\Big)\,\mathbf{1}_{Nt=k}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{k}e^{iu\xi_i}\right)\mathbf{1}_{Nt=k}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\big(e^{iu\xi_1}\big)^k\,\mathbf{1}_{Nt=k}\\
&= \mathbb{E}\big(e^{iu\xi_1}\big)^{N_t}\\
&= \psi(u)^{N_t}
\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(e^{iuX_t}\big) &= \mathbb{E}\Big(\psi(u)^{N_t}\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\psi(u)^k\,\mathbb{P}(N_t = k)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\psi(u)^k\,\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\\
&= e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\psi(u)\,\lambda t)^k}{k!}\\
&= e^{-\lambda t}e^{\psi(u)\lambda t}\\
&= e^{-\lambda t(1-\psi(u))}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{E}\big(e^{iuX_t}\big) = e^{-\lambda t(1-\psi(u))}$. □

Sea N un proceso de Lévy tal que N_t tiene distribución de parámetro λt.

(1) Pruebe que casi seguramente las trayectorias de N son no-decrecientes.

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_{t+s} \geq N_t) &= \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t \geq 0)\\
&= \mathbb{P}(N_t - N_0 \geq 0)\\
&= \mathbb{P}(N_t \geq 0) = 1
\end{aligned}$$

ya que por hipótesis sabemos que N_t tiene distribución de parámetro λt.
Por lo tanto $N_{t+s} \geq N_t$ casi seguramente. □

(2) Sea Ξ la única medida en $\mathscr{B}_{\mathbb{R}_+}$ tal que $\Xi([0,t]) = N_t$. Pruebe que Ξ es una medida de Poisson aleatoria de intensidad $\lambda \cdot \mathrm{Leb}$.

Proof. Por proposición 4.5 de las notas se obtiene el resultado. □

(3) Concluya que N es un proceso de Poisson de intensidad λ.

Proof. El inciso anterior nos indíca que N es un proceso de conteo y además como es proceso de Levy por teorema visto en clase N es un proceso de Poisson de intensidad λ. □

Problema 18. Sea P_t la probabilidad de transición en t unidades de tiempo para el proceso de Poisson de parámetro λ.

Al utilizar el teorema del biniomio, pruebe directamente que las probabilidades de transición del proceso de Poisson satisfacen las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov $P_{t+s} = P_t P_s$. Dé además un argumento probabilístico, basado en condicionar con lo que sucede al tiempo s, para probar dicha ecuación.

Sea

$$Q(i,j) = \begin{cases} -\lambda & j = i \\ \lambda & j = i+1 \\ 0 & j \neq i, i+1 \end{cases}.$$

Pruebe directamente que se satisfacen las ecuaciones de Kolmogorov

$$\frac{d}{dt} P_t(i,j) = QP_t(i,j) = P_t Q(i,j)\,,$$

donde QP_t es el producto de las matrices Q y P_t.

Proof. Como estamos en un proceso Poisson de parámettro λ tenemo que:

$$P_t(i,j) = \mathbb{P}(N_t = j-i) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P_{t+s}(i,j) &= e^{-\lambda(t+s)}\frac{(\lambda(t+s))^{j-i}}{(j-i)!} \\ &= e^{-\lambda(t+s)}\frac{\lambda^{j-i}(t+s)^{j-i}}{(j-i)!} \\ &= e^{-\lambda(t+s)}\frac{\lambda^{j-i}\sum_{k=0}^{j-i}\binom{j-i}{k}s^k t^{j-i-k}}{(j-i)!} \\ &= e^{-\lambda(t+s)}\lambda^{j-i}\sum_{k=0}^{j-i}\frac{s^k t^{j-i-k}}{(k)!(j-i-k)!}. \end{aligned}$$

Ahora veamos el producto de matrices entrada por entrada:

$$
\begin{aligned}
(P_tP_s)(i,j) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_t(i,k)P_s(k,j) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{j-k}}{(j-k)!}
\end{aligned}
$$

Como el proceso Poisson es creciente tenemos que $i \leq k \leq j$:

$$
= e^{-\lambda(t+s)}\lambda^{j-i}\sum_{k=i}^{j}\frac{s^{j-k}t^{k-i}}{(k-i)!(j-k)!}
$$

Haciendo $h = k - i$:

$$
= e^{-\lambda(t+s)}\lambda^{j-i}\sum_{h=0}^{j-i}\frac{s^{j-h-i}t^{h}}{(h)!(j-h-i)!}
$$

Por lo tanto:

$$
P_{s+t} = P_sP_t.
$$

El argumento probabilistico es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
P_{t+s}(i,j) &= \mathbb{P}(N_{t+s} = j-i) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(N_{t+s} = j-i, N_s = k) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Como $N_{t+s} \geq N_s$ entonces $j - i \geq k$:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{j-i}\mathbb{P}(N_{t+s} = j-i, N_s = k) \\
&= \sum_{k=0}^{j-i}\mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = j-i-k, N_s = k)
\end{aligned}
$$

Haciendo h=$k+i$:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{h=i}^{j} \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = j-h, N_s = h-i) \\
&= \sum_{h=i}^{j} \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = j-h)\, \mathbb{P}(N_s = h-i) \\
&= \sum_{h=i}^{j} \mathbb{P}(N_t = j-h)\, \mathbb{P}(N_s = h-i) \\
&= \sum_{h=i}^{j} P_s(i,h) P_t(h,j) \\
&= (P_s P_t)(i,j).
\end{aligned}
$$

Ahora probaremos que se cumplen las ecuaciones de Kolmogorov. Calculando la derivada:

$$
\frac{d}{dt} P_t(i,j) = \frac{d}{dt} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} = -\lambda P_t(i,j) + \lambda P_t(i+1,j)
$$

Ahora fijemonos en la multiplicación de matrices:

$$
\begin{aligned}
QP_t(i,j) &= \sum_{k=0}^{\infty} Q(i,k) P_t(k,j) \\
&= Q(i,i) P_t(i,j) + Q(i,i+1) P_t(i+1,j) \\
&= -\lambda P_t(i,j) + \lambda P_t(i+1,j) \\
&= \frac{d}{dt} P_t(i,j)\,.
\end{aligned}
$$

Ahora notemos que:

$$
\begin{aligned}
P_t Q(i,j) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_t(i,k) Q(k,j) \\
&= P_t(i,j) Q(j,j) + P_t(i,j-1) Q(j-1,j) \\
&= -\lambda P_t(i,j) + \lambda P_t(i,j-1) \\
&= -\lambda P_t(i,j) + \lambda \mathbb{P}(N_t = j-1-i) \\
&= -\lambda P_t(i,j) + \lambda \mathbb{P}(N_t = j-(i+1)) \\
&= -\lambda P_t(i,j) + \lambda P_t(i+1,j) \\
&= \frac{d}{dt} P_t(i,j)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se cumplen las ecuaciones backward y forward de Kolmogorov. □

Problema 19 (Tomado del examen general de probabilidad del Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM, Febrero 2011)**.** Una planta de producción toma su energía de dos generadores. La cantidad de generadores al tiempo t está representado por una cadena de Markov a tiempo continuo $\{X_t, t \geq 0\}$ con espacio de estados $E = \{0, 1, 2\}$ y matriz infinitésimal Q dada por

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Encuentre la matriz de transición de la cadena de Markov de los estados distintos que toma X, clasifique los estados, diga si existe una única distribución invariante y en caso afirmativo, encuéntrela. Calcule explícitamente las potencias de la matriz de transición. (Recuerde que de ser posible diagonalizar, esta es una buena estrategia.)

Proof. Sabemos que $-c(x) = Q(x, x)$ y que $\alpha(x, y) = Q(x, y) = c(x)P(x, y)$, obtenrmos que la matriz de transción es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 6/7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Todos los estados son recurrentes y P es irrecucible. Por lo tanto existe la distribución invariante:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 6/7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}$$

Con la condición de que $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ entonces $\pi = (1/14, 1/2, 3/7)$. Como P tiene distribución invariante entonces P_t tiene distibución invariante. Caculando la distribución invariante de P_t:

$$\begin{pmatrix} 6\pi_1 & 7\pi_2 & 2\pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 6/7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\pi_1 & 7\pi_2 & 2\pi_3 \end{pmatrix}$$

Con la condición de que $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ entonces $\pi = (1/25, 6/25, 18/25)$. Para encontrar P^n hay que diagonalizar:

$$P = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$P^n = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 6/7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 6/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/7 & 0 & 6/7 \end{pmatrix}$$

□

(2) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos generadores estén trabajando al tiempo t si sólo uno trabaja al tiempo cero?

Proof. Calcualremos P_t para encontrar la probabilidad deseada. Sabemos que $P_t = e^{Qt}$, primero diagonalizaremos Q.

$$Q = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 18 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$P_t = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-10t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 & 18 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $P_t(1,2) = \frac{1}{25}(18 - 6e^{-5t} - 12e^{-10t})$ □

(3) Si ρ_2 denota la primera vez que ambos generadores están trabajando al mismo tiempo, encuentre la distribución de ρ_2 cuando sólo un generador está trabajando al tiempo cero.

Proof. Para encontrar a ρ_2 hacemos al segundo estado absorbente, entonces la matriz Q se transforma de la siguiente manera:

$$Q = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 1 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Diagonalizando Q para encontrar P_t tenemos que:

$$Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculando P_t mediante la ecuación forward de Kolmogorov:

$$P_t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-9t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Como el estado 2 es absorbente entonces:

$$\mathbb{P}(\rho_2 \leq t) = P_t(1,2) = \frac{1}{5}(5 - 3e^{-4t} - 2e^{-9t})$$

(4) Encuentre la proporción de tiempo asintótica en que los dos generadores están trabajando. Si cada generador produce 2.5 MW de energía por unidad de tiempo, ¿Cuál es la cantidad promedio de energía producida a largo plazo por unidad de tiempo?

Proof. La proporción de tiempo asintótica de que ambos generadores esten trabajando es: $\pi_3 = 18/25$. La cantidad promedio es $5 * \pi_3 + 2.5 * \pi_2 = 5 * 18/25 + 2.5 * 6/25 = 4.2$. □

Problema 20 (Procesos de ramificación a tiempo continuo)**.** Sea μ una distribución en $\mathbb{N}$. A μ_k lo interpretamos como la probabilidad de que un individuo tenga k hijos. Nos imaginamos la dinámica de la población como sigue: a tasa λ, los individuos de una población se reproducen. Entonces tienen k hijos con probabilidad μ_k. Se pueden introducir dos modelos: uno en que el individuo que se reproduce es retirado de la población (nos imaginamos que muere) y otro en que no es retirado de la población (por ejemplo cuando se interpreta a la población como especies y a sus descendientes como mutaciones). En el caso particular del segundo modelo en que $\mu_1 = 1$, se conoce como proceso de Yule.

(1) Especifique un modelo de cadenas de Markov a tiempo continuo para cada uno de los modelos anteriores. A estos procesos se les conoce como procesos de ramificación a tiempo continuo.

Proof. Si empezamos con k hijos la distribución inicial sera $X_0 = k$. Para el primer caso, la muerte de un individuo y que tenga n hijos es equivalente a que no se muera y tenga $n-1$ hijos, además eliminaremos el caso en el que el individuo tiene 1 hijo debido a que no cambio de estado. Entonces $\alpha(0,x) = 0$, $\alpha(x,y) = 0$ si $y < x-1$, $\alpha(x,x) = 0$, $\alpha(x,x-1) = \lambda x \mu_0$ y $\alpha(x,x+k) = \lambda x \mu_{k+1}$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

En el segundo caso no hay muerte y además también eliminaremos el caso en el que el individuo no tiene hijos de a que tiene que cambiar de estado , entonces $\alpha(0,x) = 0$, $\alpha(x,y) = 0$ si $y \leq x$ y $\alpha(x,x+k) = \lambda x \mu_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

De aqui podemos calcular la matriz P, $c(x) = \sum_{y \in E} \alpha(x,y) = \lambda$ y $P(x,y) = \alpha(x,y)/c(x)$.

Por lo tanto para el primer caso tenemos que:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_0 & 0 & \mu_2 & \mu_3 & \dots \\ 0 & \mu_0 & 0 & \mu_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

y para el segundo caso:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Entonces sean $S_1, S_2, ...$ variables aleatorias exponenciales de parámaetro 1 y una cadena de markov Z_n a tiempo discreto con matriz de transición P. Definimos $T_0 = 0$ y $T_{n+1} = T_n + S_n/c(Z_n)$, definiendo a $X_t = Z_n$ si $[T_n, T_{n+1}]$ entonces X_t es una cadena de Markov a tiempo continuo.

□

Nuestro primer objetivo será encontrar una relación entre procesos de ramificación a tiempo continuo y procesos de Poisson compuestos. Sea N un proceso de Poisson y S una caminata aleatoria independiente de N tal que $\mathbb{P}(S_1 = j) = \mu_{j-1}$ ó μ_j dependiendo de si estamos en el primer caso o en el segundo. Sea $k \geq 0$ y definamos a $X_t = k + S_{N_t}$.

(2) Diga brevemente por qué X es una cadena de Markov a tiempo continuo e identifique su matriz infinitesimal para ambos modelos.

Proof. Si definimos al proceso $W_n = X_{T_n} = k + S_n$. Mostraremos que W_n es una cadena de Markov a tiempo discreto, sean ϵ_i las variables aleatorias independientes de la caminata aleatoria, entonces:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_n = i_n \,|W_{n-1} = i_{n-1}, ..., W_1 = i_1) \\
&= \frac{\mathbb{P}(W_n = i_n, W_{n-1} = i_{n-1}, ..., W_1 = i_1)}{\mathbb{P}(W_{n-1} = i_{n-1}, ..., W_1 = i_1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(W_n - W_{n-1} = i_n - i_{n-1}, ..., W_2 - W_1 = i_2 - i_1, W_1 = i_1)}{\mathbb{P}(W_{n-1} - W_{n-2} = i_{n-1} - i_{n-2}, ..., W_2 - W_1 = i_2 - i_1, W_1 = i_1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\epsilon_n = i_n - i_{n-1}, ..., \epsilon_2 = i_2 - i_1, \epsilon_1 = i_1 - k)}{\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}, ..., \epsilon_2 = i_2 - i_1, \epsilon_1 = i_1 - k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\epsilon_n = i_n - i_{n-1}) \,...\mathbb{P}(\epsilon_2 = i_2 - i_1)\, \mathbb{P}(\epsilon_1 = i_1 - k)}{\mathbb{P}(\epsilon_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}) \,...\mathbb{P}(B_2 = i_2 - i_1)\, \mathbb{P}(B_1 = i_1 - k)} \\
&= \mu_{i_n - i_{n-1}} \\
&= \mathbb{P}(W_n = i_n \,|W_{n-1} = i_n - 1)
\end{aligned}$$

Ademas los tiempos $T_n - T_{n-1}$ se distribuyen $exp(\lambda)$ por ser los mismos del Proceso Poisson. Por lo tanto X_t es una cadena de Markov a tiempo continuo.

Para el primer caso la matriz infinitesimal esta dada por (suponiendo que $\mu_1 = 0$):

$$Q = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \\ \dots & \lambda\mu_0 & -\lambda & \lambda\mu_2 & \lambda\mu_3 & \dots & \\ \dots & 0 & 2\lambda\mu_0 & -2\lambda & 2\lambda\mu_2 & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & 3\lambda\mu_0 & -3\lambda & 3\lambda\mu_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

y para el segundo caso (suponiendo que $\mu_0 = 0$):

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & -\lambda & \lambda\mu_1 & \lambda\mu_2 & \lambda\mu_3 & \dots & \\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda\mu_1 & 2\lambda\mu_2 & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda\mu_1 & 3\lambda\mu_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

□

Sea ahora $\tau = \min\{t \geq 0 : X_t = 0\}$ y $Y_t = X_{t\wedge\tau}$.

(3) Argumente por qué Y es una cadena de Markov a tiempo continuo e identifique su matriz infinitesimal.

Proof. En el segundo caso tenemos que $X_t = Y_t$ ya que la población nunca llega al estado 0. Para el primer caso sus tiempos de salto siguen siendo independientes y además al llegar al estado 0 el proceso se quda ahí, por lo cual el estado = se convierte en estado absorbente. Por lo tanto el proceso Y_t es un proceso de Markov con matriz infintesimal:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & \lambda\mu_0 & -\lambda & \lambda\mu_2 & \lambda\mu_3 & \dots & \\ \dots & 0 & 2\lambda\mu_0 & -2\lambda & 2\lambda\mu_2 & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & 3\lambda\mu_0 & -3\lambda & 3\lambda\mu_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

□

(4) Argumente por qué existe un único proceso Z que satisface

$$Z_t = Y_{\int_0^t Z_s\, ds}$$

y que dicho proceso es un proceso de ramificación a tiempo continuo. Sugerencia: Recuerde que las trayectorias de Y son constantes por pedazos.

Proof. Construiremos Z de manera que cumpla la hipótesis. Como Y_t es un proceso constante por pedazos. Nos basta con verificar donde Y_t cambia, el primer cambio se da em T_1, por lo que si $t < T_1$ entonces Y_t integra kt. Entonces para $t < T_1/k$ definfimos $Z_t = k$.Por lo tanto $\int_0^t Z_s ds = kt < T_1$. Por lo tanto $Y_{\int_0^t Z_s ds} = k = Z_t$.

Para el segundo salto de Y_t, el cual se obtiene en T_2, tenemos que $Y_t = k + S_1$ cuando $t \in [T_1, T_2)$. Entonces para $t \in [T_1, T_2)$ queremos que $Z_t = k + S_1 = Y_{\int_0^{\frac{T_1}{k}} k\,ds + \int_{\frac{T_1}{k}}^t k+S_1}$. Entonces necesitamos que:

$$T_1 \leq \int_0^{\frac{T_1}{k}} k\,ds + \int_{\frac{T_1}{k}}^t k + S_1 < T_2$$

Desarrolando tenemos que:

$$\frac{T_1}{k} \leq t < \frac{T_1}{k} + \frac{T_2 - T_1}{k + S_1}$$

Por lo tanto $Z_t = k + S_1$ cuando $t \in [\frac{T_1}{k}, \frac{T_1}{k} + \frac{T_2 - T_1}{k+S_1})$.

Siguiendo el procedimiento obtenemos que en el n-ésimo salto del proceso Y_t toma lugar en T_n y $Y_t = k + S_{n-1}$ en $[T_{n-1}, T_n)$. Entonces para que $Z_t = Y_{\int_0^t Z_s ds}$, necesitamos que:

$$T_{n-1} \leq \int_0^{\frac{T_1}{k}} kds + \int_{\frac{T_1}{k}}^{\frac{T_1}{k} + \frac{T_2 - T_1}{k+S_1}} k + S_1 + ... + \int_{\frac{T_1}{k} + ... + \frac{T_{n-1} - T_{n-2}}{k + S_{n-2}}}^t k + S_{n-1} < T_n$$

Esto implica que:

$$\frac{T_1}{k} + \frac{T_2 - T_1}{k + S_1} + ... + \frac{T_{n-1} - T_{n-2}}{k + S_{n-2}} \leq t < \frac{T_1}{k} + \frac{T_2 - T_1}{k + S_1} + ... + \frac{T_n - T_{n-1}}{k + S_{n-1}}$$

Por lo tanto $Z_t = k + S_{n-1} = Y_{\int_0^t Z_s\,ds}$ si $t \in [\frac{T_1}{k} + ... + \frac{T_{n-1} - T_{n-2}}{k+S_{n-2}}, \frac{T_1}{k} + ... + \frac{T_n - T_{n-1}}{k + S_{n-1}})$ Por lo tanto $Z_t = k + S_{n-1}$ si $t \in [A_{n-1}, A_n)$ donde:

$$A_n = \frac{T_1}{k} + \frac{T_2 - T_1}{k + S_1} + ... + \frac{T_n - T_{n-1}}{k + S_{n-1}}$$

Notemos que:

$$A_n - A_{n-1} = \frac{T_n - T_{n-1}}{k + S_{n-1}}$$

Como T_i proviene de un proceso Poisson N entonces $T_n - T_{n-1}$ se distribuye exponencial λ. Por lo tanto $\frac{T_n - T_{n-1}}{k+S_{n-1}}$ se distribuye exponencial $\lambda(k + S_{n-1})$. Por lo tanto Z_t es una cadena de Markov a tiempo continuo. Por lo tanto Z_t es un proceso de ramificación.

□

Ahora nos enfocaremos en el proceso de Yule.

(5) Escriba las ecuaciones backward de Kolmogorov para las probabilidades de transición $P_t(x, y)$. Al argumentar por qué $P_t(x, x) = e^{-\lambda x}$, resuelva las ecuaciones backward por medio de la técnica de factor integrante (comenzando con

$P_t(x, x+1)$) y pruebe que

$$P_t(x,y) = \binom{y-1}{y-x} e^{-\lambda x t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{y-x}.$$

Proof. Nos enfocaremos en el segundo caso ya que en el primer caso si $\mu_1 = 1$ entonces tenemos un proceso constante ya que siempre que un individuo se reproduce es retirado de la población y con probabilidad 1 tiene un hijo.

Las ecuaciones backward son:

$$\frac{d}{dt} P_t(x,y) = \sum_{s \in E} Q(x,s) P_t(s,y)$$

Luego entonces para el segundo caso se tiene que la matriz infinitesimal esta dada por:

$$Q(x,y) = \begin{cases} \lambda x & y = x+1 \\ -\lambda x & x = y \end{cases}$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt} P_t(x,y) = \lambda x P_t(x+1,y) - \lambda x P_t(x,y).$$

Para el caso $x = y$ tenemos que:

$$\frac{d}{dt} P_t(x,x) = -\lambda x P_t(x,x)$$

(5) $$P_t(x,x) = e^{-\lambda x t} = \binom{x-1}{x-x} e^{-\lambda x t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{x-x}$$

Si $x < y$ entonces $y = x + k$, resolveremos las utilizando inducción sobre k.
Caso $k = 1$

$$\frac{d}{dt} P_t(x,x+1) = \lambda x P_t(x+1,x+1) - \lambda x P_t(x,x+1)$$

Como $P_t(x+1,x+1) = e^{-\lambda(x+1)t}$ entonces:

$$\frac{d}{dt} P_t(x,x+1) = \lambda x e^{-\lambda(x+1)t} - \lambda x P_t(x,x+1)$$

Mutiplicando por el factor integrante $e^{\lambda x t}$:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{\lambda x t} P_t(x,x+1)\right) = \lambda x e^{-\lambda t}$$

Integrando y utilizando la condición inicial de $P_0(x,x+1) = 0$:

$$e^{\lambda x t} P_t(x,x+1) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda s} ds = x(1 - e^{\lambda t})$$

Por lo tanto:

$$P_t(x,x+1) = xe^{-\lambda xt}(1-e^{\lambda t}) = \binom{x}{1} e^{-\lambda xt}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{x+1-x}.$$

Supongamos que la igualdad es válida para $y = x+k$ y demostremos que es válida para $y = x+k+1$. Entonces:

$$\frac{d}{dt}P_t(x,x+k+1) = \lambda x P_t(x+1,x+k+1) - \lambda x P_t(x,x+k+1)$$

Por hipótesis de inducción tenemos que:

$$P_t(x+1,x+k+1) = P_t((x+1),(x+1)+k) = \binom{x+k}{k} e^{-\lambda(x+1)t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^k$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}P_t(x,x+k+1) = \lambda x \binom{x+k}{k} e^{-\lambda(x+1)t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^k - \lambda x P_t(x,x+k+1)$$

Multiplicando por el factor integrante tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda xt}P_t(x,x+k+1)\right) = \lambda x \binom{x+k}{k} e^{-\lambda t}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^k$$

Integrando

$$P_t(x,x+k+1) = \frac{x}{k+1}\binom{x+k}{k} e^{-\lambda xt}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k+1}.$$

Por lo tanto:

$$P_t(x,x+k+1) = \binom{x+k}{k+1} e^{-\lambda xt}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{k+1}$$

Por lo tanto la formúla es válida para $k+1$.
Por lo tanto:

$$P_t(x,y) = \binom{y-1}{y-x} e^{-\lambda xt}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{y-x}$$

□

(6) Al utilizar la fórmula para la esperanza de una variable binomial negativa, pruebe que

$$\mathbb{E}_x(Z_t) = xe^{\lambda t}.$$

Proof. Por lo anterior sabemos que condicionado al que el proceso inicia en x, Z_t se distribuye binomial negativa con parámetros $p = e^{-\lambda t}$ y $r = x$.
Por lo tanto:

$$\mathbb{E}_x(Z_t) = \frac{x}{e^{-\lambda t}} = xe^{\lambda t}$$

□

(7) Pruebe que $e^{-\lambda t}Z_t$ es una martingala no-negativa y que por lo tanto converge casi seguramente a una variable aleatoria W.

Proof.
- Utlizando la filtracion natural $e^{-\lambda t}Z_t$ es $\mathscr{F}_t$-médible.
- Utilizando el inciso anterior $e^{-\lambda t}Z_t \in L_1$
- Propiedad de juego justo, sea $s \leq t$:

$$\mathbb{E}\left(e^{-\lambda t}Z_t \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) = e^{-\lambda t}\mathbb{E}(\,Z_t \mid \mathscr{F}_s)$$

Utilizando la propiedad de Markov:

$$= e^{-\lambda t}\mathbb{E}_{Z_s}(Z_{t-s})$$

Utilizando el ejercicio anterior:

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda t}Z_s e^{-\lambda(t-s)} \\ &= e^{-\lambda s}Z_s. \end{aligned}$$

Por lo tanto $e^{-\lambda t}Z_t$ es martingala.

Por lo tanto por ser martingala no negativa por el teorema de convergencia de martingalas el preoceso converge a una variable aleatoria W casi seguramente.

□

(8) Al calcular la transformada de Laplace de $e^{-\lambda t}Z_t$, pruebe que W tiene distribución exponencial. Por lo tanto, argumente que casi seguramente Z crece exponencialmente.

Proof. La transformada de Laplace de una distrsibución Binomial Negativa es:

$$\mathbb{E}\left(e^{uZ_t}\right) = \left(\frac{pe^u}{1-(1-p)e^u}\right)^r$$

En particular en nuestro caso, suponiendo que la población inicial es 1, tenemos que:

$$\mathbb{E}\left(e^{uZ_t}\right) = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-u} - (1-e^{-\lambda t})}.$$

Evaluando en $u = ve^{-\lambda t}$ se obtiene la transformada de Laplace para $e^{-\lambda t}Z_t$:

$$\mathbb{E}\left(e^{ve^{-\lambda t}Z_t}\right) = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-ve^{-\lambda t}} - (1-e^{-\lambda t})}$$

Cuando $t \to \infty$ tenemos que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-ve^{-\lambda t}} - (1-e^{-\lambda t})} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{-sx} - (1-x)}$$

Utilizando L'Hopital:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{-se^{-sx} + 1}$$
$$= \frac{1}{1 - s}$$

Por lo tanto W tiene distribución exponencial de parametro 1. □

Problema 21. (Tomado del examen general de conocimientos del área de Probabilidad del Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM, Agosto 2011)

Sea N un proceso de Poisson homogéneo de parámetro λ. Sea $E = (-1, 1)$ y X_0 una variable aleatoria con valores en E independiente de N. Se define el proceso

$$X_t = X_0 \times (-1)^{N_t}, \quad t \geq 0.$$

(1) Explique por qué X es una cadena de Markov a tiempo continuo con valores en E.

Proof. Definamos el proceso $W_n = X_{T_n}$ donde T_n el tiempo en el que sucede el n-esimo evento del proceso Poisson entonces $W_n = X_0 \times (-1)^n$ si $t \in [T_n, T_{n+1})$. Demostraremos que W_n wa cadena de Markov a tiempo discreto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_n = i_n \,|W_{n-1} = i_{n-1}, ..., W_0 = i_0) &= \mathbb{P}\Big(X_0 \times (-1)^n = i_n \,|X_0 \times (-1)^{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = \\
&= \mathbb{P}\Big(-i_{n-1} = i_n \,|X_0 \times (-1)^{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\Big) \\
&= \mathbf{1}_{-i_{n-1} = i_n} \\
&= \mathbb{P}(W_n = i_n \,|W_{n-1} = i_{n-1})
\end{aligned}$$

Por lo tanto W_n es cadena de Markov a tiempo discreto, y ademas los tiempos entre sucesos se distribuyen exponencial de parámetro λ, ya que N_t es un proceso Poisson.

Por lo tanto X es cadena de Markov.

□

(2) Calcule sus probabilidades de transición y su matriz infinitesimal.

Proof. Por el inciso anterior sabemos que:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ya que los tiempos entre sucesos se distribuyen exponencial λ tenemos que:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

De aqui podemos calcular P_t. Diagonalizando a Q:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$P_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

□

(3) ¿Existe una distribución estacionaria para esta cadena? En caso afirmativo ?'Cuál es?

Proof. Si existe una distribución estacionaria ya que la matriz de transición de la cadena de Markov de los estados distintos que toma X es positivo recurrente, por lo tanto tiene distribución estacionaria. Por lo tanto X tiene distribución estacionaria. Calculando la distribución estacionaria:

$$\begin{pmatrix} \lambda\pi_{-1} & \lambda\pi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\pi_{-1} & \lambda\pi_1 \end{pmatrix}$$

Condicionado a que $\pi_{-1} + \pi_1 = 1$ obtenemos que $\pi = (1/2, 1/2)$. □

Problema 22. Sea

$$Q = \begin{matrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{matrix}.$$

(1) Haga un programa en octave que permita simular las trayectorias de una cadena de Markov a tiempo continuo X con matriz infinitesimal Q.

```
n=10
X=0
p=.5
if(runif(1)<p){
X=0
T=rexp(1,2)
}else{
X=1
T=rexp(1,3)
}
for(i in 2:n){
if(X[i-1]==0){
X[i]=1
T[i]=T[i-1]+rexp(1,3)
}else{
X[i]=0
T[i]=T[i-1]+rexp(1,2)
}
}
plot (T,X , type ="S")
```

.

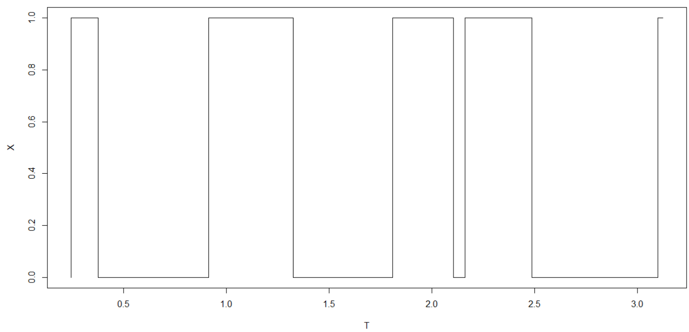

FIGURE 4. Simulación de Cadena de Markov con matriz infinitesimal Q

(2) Utilice su programa para generar 10000 trayectorias en el intervalo de tiempo $[0, 10]$ comenzando con probabilidad $1/2$ en cada estado y obtenga la distribución empírica de X_{10}.

```
cont=0
for(j in 1:10000){
X=0
p=.5
if(runif(1)<p){
X=0
T=rexp(1,2)
}else{
X=1
T=rexp(1,3)
}
i=2
while(T[i-1]<=10){
if(X[i-1]==0){
X[i]=1
T[i]=T[i-1]+rexp(1,3)
}else{
X[i]=0
T[i]=T[i-1]+rexp(1,2)
}
i=i+1
}
if(X[i-1]==0){
cont=cont+1
```

```
}
}

p0=cont/10000
p1=1-p0
p0
p1

Distribuci\'on emp\'irica
> p0
[1] 0.6084
> p1
[1] 0.3916
```

.

(3) Calcule e^{10Q} (utilizando algún comando adecuado) y contraste con la distribución empírica del inciso anterior.

```
library(Matrix)
Q= cbind(c(-2,3),c(2,-3))
P_10=expm(10*Q)
P_10

> P_10
2 x 2 Matrix of class "dgeMatrix"
     [,1] [,2]
[1,]  0.6  0.4
[2,]  0.6  0.4
```

.

(4) Codifique el siguiente esquema numérico, conocido como método de Euler, para aproximar a e^{10Q}: escoja $h > 0$ pequeño, defina a P_0^h como la matriz identidad y recursivamente

$$P_{i+1}^h = P_i^h + hQP_i^h.$$

corra hasta que $i = \lfloor 10/h \rfloor$ y compare la matriz resultante con e^{10Q}. Si no se parecen escoja a h más pequeño. ¿Con qué h puede aproximar a e^{10Q} a 6 decimales?

```
options(digits=6)
Q= cbind(c(-2,3),c(2,-3))
h=.3
P=diag(1,2)
k=floor(10/h)
for(i in 1:k){
```

```
P=P+h*(Q%*%P)
}
P
> P
      [,1] [,2]
[1,]   0.6  0.4
[2,]   0.6  0.4

Por lo tanto con h=.3 se puede aproximar a P con 6
    decimales.
```

.

Problema 23. Un proceso estocástico $B = (B_t, t \geq 0)$ es un movimiento browniano en ley si y sólo si es un proceso gaussiano centrado y $\mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t$.

Proof. Supongamos que $B = (B_t, t \geq 0)$ es un movimiento browniano en ley. Tenemos que demostrar que $(B_{t_1}, B_{t_2}, ..., B_{t_n})$ en vector gausssino con $(t_1 < t_2 ... < t_n)$, como B es un movimiento Browniano sabemos que $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ es un vector gaussiano ya que son variables aleatorias normales independientes y cualquier combinación lineal de normales independientes es normal. Entonces cualquier combinación lineal la podemes escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{t_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

donde $(B_{t_0}) = 0$.

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{t_i}$ se distribuye normal y $\mathbb{E}(B_{t_i}) = 0$.

Por lo tanto B es un proceso gaussiano centrado.

Y ademas como es un movimiento browniano sabemos que $\mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t$ por ser movimiento Browniano.

Ahora supongamos que es un proceso gaussiano centrado y $\mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t$. Luego entonces como $\mathbb{E}(B_0) = 0$ y ya que $\mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t$ entonces $\mathrm{Var}(B_0) = \mathbb{E}(B_0 B_0) = 0$. Por lo tanto $B_0 = 0$. Por el mismo argumento que en la necesidad cualquier combinación lineal la podemos escrbir de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{t_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Por lo tanto los incrementos del proceso gaussiano centrado tambien forman un proceso gaussiano.

Ahora para ver que tiene incrementos independientes como estamos en un proceso gaussiano solo nos basta verificar que la correlacion es cero. Sea $t_i < t_j$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\big) &= \mathbb{E}\big(B_{t_i}B_{t_j} - B_{t_i}B_{t_{j-1}} - B_{t_{i-1}}B_{t_j} + B_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}}\big)\\
&= \mathbb{E}\big(B_{t_i}B_{t_j}\big) - \mathbb{E}\big(B_{t_i}B_{t_{j-1}}\big) - \mathbb{E}\big(B_{t_{i-1}}B_{t_j}\big) + \mathbb{E}\big(B_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}}\big)\\
&= t_i - t_i - t_{i-1} + t_{i-1}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto B tiene incrementos independientes.

Ahora veamos que B tiene incrementos estacionarios, es decir $B_{t+s} - B_t = B_s$ en distribución. como $B_{t+s} - B_t$ es una combinación lineal del proceso gaussianos entonces sabemos que es normal. Además como es un proceso gaussiano sabemos que $\mathbb{E}(B_{t+s} - B_t) = 0$. Ahora calculemos la varianza:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(B_{t+s} - B_t) &= \mathbb{E}\big((B_{t+s} - B_t)^2\big)\\
&= \mathbb{E}(B_{t+s}B_{t+s}) - \mathbb{E}(B_{t+s}B_t) - \mathbb{E}(B_tB_{t+s}) + \mathbb{E}(B_tB_t)\\
&= t + s - t - t + t\\
&= s
\end{aligned}$$

Por lo tanto $B_{t+s} - B_t$ se distribuye $N(0, s)$.

Por lo tanto $B_{t+s} - B_t = B_s$ en distribución.

Para concluir como B es un proceso gaussiano centrado y ademas la $\mathrm{Var}(B_t) = \mathbb{E}(B_tB_t) = t$. Por lo tanto B_t se distribuye $N(0, t)$.

Por lo tanto B es un movimiento browniano en ley. □

Problema 24. El objetivo de este problema es construir, a partir de movimientos brownianos en $[0, 1]$, al movimiento browniano en $[0, \infty)$.

(1) Pruebe que existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ en el que existe una sucesión $B^1, B^2, \ldots$ de movimientos brownianos en $[0, 1]$ independientes. (Sugerencia: utilice la construcción del movimiento browniano de Lévy para que la solución sea corta.)

Proof. En la construcción del movimiento Browniano de Levy se utiliza el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ donde estan definidas las variables aleatorias $\xi_{i,n}$ donde $0 \leq i \leq 2^n$, tal que $\xi_{i,n}$ se distribuye Normal(0,1). Sabemos que dicho espacio existe por lo visto en clase. Si tomamos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ donde estan definidas las variables aleatorias $\xi^m_{i,n}$ donde $0 \leq i \leq 2^n$ y $m \geq 1$, tal que se distribuyen Normal (0,1) y son independientes. Para cada m podemos construir el movimiento Browniano B^m tal que sea independiente de los otros movimientos Brownianos. □

(2) Defina a $B_t = B^1_1 + \cdots + B^{\lfloor t \rfloor}_1 + B^{\lceil t \rceil}_{t - \lfloor t \rfloor}$ para $t \geq 0$. Pruebe que B es un movimiento browniano.

Proof. Primero notemos que $B_0 = 0$ ya que $B_0 = B^1_0 = 0$.

Utilizaremos el ejercicio anterior para ver que es un movimento browniano. Primero demostraremos que B_t es un proceso gaussiano. Si nos tomamos una combinacion lineal $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{t_i}$ se distribuye normal ya que cada B_{t_i} esta conformado de normanles independientes en el caso en el que t_{i_k} se encuentren en el intervalo $[m, m+1]$ sabemos que $B^m_{t_{i_1}}, ..., B^m_{t_{i_n}}$ es un proceso gaussiano ya que B^m es un movimiento Browniano y ademas es independiente de los otros movimientos brownianos. Por lo tanto es un Proceso Gaussiano.

Ahora veamos que es un proceso gaussiano centrado:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_t) &= \mathbb{E}\Big(B_1^1 + \cdots + B_1^{\lfloor t\rfloor} + B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lceil t\rceil}\Big) \\
&= \mathbb{E}\big(B_1^1\big) + \cdots + \mathbb{E}\Big(B_1^{\lfloor t\rfloor}\Big) + \mathbb{E}\Big(B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lceil t\rceil}\Big) \\
&= 0. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Calculemos la varianza:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(B_t) &= \mathrm{Var}\Big(B_1^1 + \cdots + B_1^{\lfloor t\rfloor} + B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lceil t\rceil}\Big) \\
&= \mathrm{Var}\big(B_1^1\big) + \cdots + \mathrm{Var}\Big(B_1^{\lfloor t\rfloor}\Big) + \mathrm{Var}\Big(B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lceil t\rceil}\Big) \\
&= \lfloor t\rfloor + t - \lfloor t\rfloor \\
&= t
\end{aligned}$$

Por lo tanto B_t se distribuye $N(0,t)$.

Ahora verificaremos que $\mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t$:

Si $s = t$ tenemos que $\mathbb{E}(B_t B_s) = \mathbb{E}\big(B_t^2\big) = t = t \wedge s$. Supongamos que $t < s$:

Supongamos primero que $\lfloor t\rfloor \leq t < s \leq \lceil t\rceil$. Entonces:

$$\begin{aligned}
B_t &= B_1^1 + \cdots + B_1^{\lfloor t\rfloor} + B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lceil t\rceil} \\
B_s &= B_1^1 + \cdots + B_1^{\lfloor t\rfloor} + B_{s-\lfloor t\rfloor}^{\lceil t\rceil}
\end{aligned}$$

Utilizando el hecho de que B^n son independientes obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_t B_s) &= \mathbb{E}\big((B_1^1)^2\big) + ... + \mathbb{E}\Big((B_1^{\lfloor t\rfloor})^2\Big) + \mathbb{E}\Big(B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lceil t\rceil} B_{s-\lfloor t\rfloor}^{\lceil t\rceil}\Big) \\
&= \lfloor t\rfloor + \mathbb{E}\Big(B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lceil t\rceil} B_{s-\lfloor t\rfloor}^{\lceil t\rceil}\Big) \\
&= \lfloor t\rfloor + (t - \lfloor t\rfloor) \wedge (s - \lfloor t\rfloor \\
&= \lfloor t\rfloor + t - \lfloor t\rfloor \\
&= t
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $\lfloor t\rfloor \leq t \leq \lceil t\rceil < s$. Entonces:

$$B_t = B_1^1 + ... + B_1^{\lfloor t\rfloor} + B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lceil t\rceil} B_s \quad = B_1^1 + ... + B_1^{\lfloor t\rfloor} + B_1^{\lceil t\rceil} + B_1^{\lceil t\rceil+1} + ... + B_1^{\lfloor s\rfloor} + B_{s-\lfloor s\rfloor}^{\lceil s\rceil} \qquad (7)$$

Como B^n son independientes tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_tB_s) &= \mathbb{E}\big((B_1^1)^2\big) + ... + \mathbb{E}\Big((B_1^{\lfloor t\rfloor})^2\Big) + \mathbb{E}\Big(B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lceil t\rceil}B_1^{\lceil t\rceil}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{\lfloor t\rfloor}\mathbb{E}\big((B_1^i)^2\big) + t - \lfloor t\rfloor\\
&= \lfloor t\rfloor + t - \lfloor t\rfloor = t
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{E}(B_tB_s) = s \wedge t$.

Por lo tanto por el ejercicio anterior obtenemos que B_t es un movimiento browniano en ley.

Y ademas como cada B^n es continua y además $B_0^n =$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces B_t es continua.

□

Problema 25. Pruebe que si $\tilde{X}$ es una modificación de X entonces ambos procesos tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales. Concluya que si B es un movimiento browniano en ley y $\tilde{B}$ es una modificación de B con trayectorias continuas entonces $\tilde{B}$ es un movimiento browniano.

Proof. Sea $0 \leq t_1 < t_2 < t_3... < t_n$. Primeros veamos que $A_n = \{X_{t_1} = \hat{X_{t_1}}, X_{t_2} = \hat{X_{t_2}}, ..., X_{t_n} = \hat{X_{t_n}}\}$ tiene probabilidad 1. Lo haremos por inducción.

Por definicin de modificacion de X sabemos que $\mathbb{P}(A_1) = 1$.

Supongamos caso $n = k$, es decir que $\mathbb{P}(A_k) = 1$.

Demostraremos caso $n = k + 1$:

$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}\Big(A_k \cap \{X_{_{k+1}} = \hat{X_{t_{k+1}}}\}\Big)$$

Como los dos eventos tienen probabilidad 1 entonces:

$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = 1.$$

Por lo tanto $\mathbb{P}(A_n) = 1$.

Ahora demostraremos la proposición:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, ..., X_{t_n} \leq x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, ..., X_{t_n} \leq x_n, A_n \cup A_n^c)\\
&= \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, ..., X_{t_n} \leq x_n, A_n) + \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, ..., X_{t_n} \leq x_n, A_n^c)
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(A_n) = 1$ entonces $\mathbb{P}(A_n^c) = 0$, entonces:

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(\mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, ..., X_{t_n} \leq x_n, A_n)) \\
&= \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, ..., X_{t_n} \leq x_n \,|A_n)\, \mathbb{P}(A_n) \\
&= \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, ..., X_{t_n} \leq x_n \,|A_n) \\
&= \mathbb{P}\Big(\hat{X_{t_1}} \leq x_1, ..., \hat{X_{t_n}} \leq x_n \,|A_n\Big) \\
&= \frac{\mathbb{P}\Big(\hat{X_{t_1}} \leq x_1, ..., \hat{X_{t_n}} \leq x_n, A_n\Big)}{\mathbb{P}(A_n)} \\
&= \mathbb{P}\Big(\hat{X_{t_1}} \leq x_1, ..., \hat{X_{t_n}} \leq x_n, A_n\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\hat{X_{t_1}} \leq x_1, ..., \hat{X_{t_n}} \leq x_n, A_n\Big) + \mathbb{P}\Big(\hat{X_{t_1}} \leq x_1, ..., \hat{X_{t_n}} \leq x_n, A_n^c\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\hat{X_{t_1}} \leq x_1, ..., \hat{X_{t_n}} \leq x_n, A_n \cup A_n^c\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\hat{X_{t_1}} \leq x_1, ..., \hat{X_{t_n}} \leq x_n\Big).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto ambos procesos tienen las mismas distribuciones finito-dimensionales.

Para demostrar que $\tilde{B}$ es un movimiento browniano sabemos que B es un movimiento browniano entonces B es un proceso gaussiano centrado tal que $\mathbb{E}(B_s B_t) = s \wedge t$. Por lo que acabamos de demostrar tenemos que $\tilde{B}$ es un proceso gaussiano centrado tal que $\mathbb{E}\Big(\tilde{B}_s \tilde{B}_t\Big) = s \wedge t$. Por lo tanto $\tilde{B}$ es un movimiento browniano en ley con trayectorias continuas. Por lo tanto $\tilde{B}$ es un movimiento browniano.

□

Problema 26. Sea

$$M_t^\lambda = e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}.$$

(1) Explique y pruebe formalmente por qué, para toda $n \geq 1$, $\partial^n M_t^\lambda / \partial \lambda^n$ es una martingala.

Proof. Observemos que M_t^λ es martingala.

- Ya que suponemos que estamos en la filtración canónica entonces M_t^λ es adaptado
- Como $M_t^\lambda = e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2} \leq e^{\lambda B_t}$, entonces:

$$\mathbb{E}(M_t^\lambda) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda B_t}) = e^{\frac{t\lambda^2}{2}}.$$

Por lo tanto M_t^λ es integrable.

- Propiedad de juego justo. Sea $s \leq t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(M_t^\lambda \bigm| \mathscr{F}_s\big) &= \mathbb{E}\Big(e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2} \Bigm| \mathscr{F}_s\Big) \\
&= e^{-\lambda^2 t/2}\mathbb{E}\big(e^{\lambda B_t} \bigm| \mathscr{F}_s\big) \\
&= e^{-\lambda^2 t/2}\mathbb{E}\Big(e^{\lambda (B_t - B_s + B_s)} \Bigm| \mathscr{F}_s\Big) \\
&= e^{-\lambda^2 t/2 + \lambda B_s}\mathbb{E}\Big(e^{\lambda (B_{t-s})}\Big) \\
&= e^{-\lambda^2 t/2 + \lambda B_s} e^{(t-s)\lambda^2/2} \\
&= e^{\lambda B_s - s\lambda^2/2} \\
&= M_s^\lambda
\end{aligned}$$

Por lo tanto M_t^λ es martingala.

Ahora veamos que $\partial^n M_t^\lambda / \partial \lambda^n$ es martingala, para esto utulizaremos el resultado que nos permite intercambiar la esperanza condicional con la derivada, el cual fue demostrado anterioremente. Utilizando inducción:

Caso n=1:

- $\partial M_t^\lambda / \partial \lambda$ es $\mathscr{F}_t$-medible ya que es limite de funciones $\mathscr{F}_t$- medibles.
- Verifiquemos que $\partial M_t^\lambda / \partial \lambda$ es integrable:

$$\begin{aligned}
\left|\partial M_t^\lambda / \partial \lambda\right| &= e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2} \left|(B_t - \lambda t)\right| \\
&\leq e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2} \left|B_t\right| + e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2} \left|\lambda t\right| \\
&\leq e^{\lambda B_t} \left|B_t\right| + e^{\lambda B_t} \left|\lambda t\right|
\end{aligned}$$

Luego entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(abs \partial M_t^\lambda / \partial \lambda\big) &\leq \mathbb{E}\big(e^{\lambda B_t} \left|B_t\right|\big) + \mathbb{E}\big(e^{\lambda B_t} \left|\lambda t\right|\big) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |u|\, e^{\lambda u} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{u^2}{2t}} du + |\lambda t|\, e^{t\lambda^2/2} \\
&= e^{t\lambda^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} |u|\, \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(u - t\lambda)^2}{2t}} du + + |\lambda t|\, e^{t\lambda^2/2} < \infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\partial M_t^\lambda / \partial \lambda$ es integrable. Ademas tambien concluimos $\partial M_t^\lambda / \partial \lambda$ esta dominada por $e^{\lambda B_t} \left|B_t\right| + e^{\lambda B_t} \left|\lambda t\right|$ que pertenece a L_1.

- La propiedad de juego justo.Ya que $\partial M_t^\lambda / \partial \lambda$ esta dominada entonces podemos intercambiar la derivada con la esperanza:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} M_t^\lambda \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right) &= \frac{\partial}{\partial \lambda}\mathbb{E}\big(M_t^\lambda \bigm| \mathscr{F}_s\big) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} M_s^\lambda
\end{aligned}$$

Por lo tanto satsiface la propiedad de juego justo.

Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial\lambda}M_t^\lambda$ es martingala.
Ahora supongamos $\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}M_t^\lambda$ es martingala.
Por demostrar $\frac{\partial^{k+1}}{\partial\lambda^{k+1}}M_t^\lambda$ es martingala.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial\lambda^{k+1}}M_t^\lambda \;\middle|\; \mathscr{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}M_t^\lambda \;\middle|\; \mathscr{F}_s\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbb{E}\left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}M_t^\lambda \;\middle|\; \mathscr{F}_s\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}M_s^\lambda\\
&= \frac{\partial^{k+1}}{\partial\lambda^{k+1}}M_s^\lambda
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}M_t^\lambda$ cumple la propiedad de juego justo.

□

(2) Sea $H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}$. A H_n se le conoce como enésimo polinomio de Hermite. Calcúlelo para $n \leq 5$. Pruebe que H_n es un polinomio para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $\partial^n M_t^\lambda/\partial\lambda^n = t^{n/2}H_n\big(B_t/\sqrt{t}\big)\, M_t^\lambda$.

Proof. Para $n \leq 5$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1\\
H_1(x) &= x\\
H_2(x) &= x^2 - 1\\
H_3(x) &= x^3 - 3x\\
H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3\\
H_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x
\end{aligned}$$

Veamos que H_n es un polinomio de grado n para toda $n \in \mathbb{N}$. La demostración se sea hara por inducción.

Para el caso $n = 1$ tenemos que: $H_1(x) = x$. Por lo tanto es un polinomio de grado 1. Supongamos caso $n = k$, es decir que H_k es polinomio de grado k.

Por demostrar caso $n = k + 1$. Por hipótesis de incucción tenemos que:

$$(-1)^k\, e^{x^2/2}\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2/2} = (a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_0)$$

Entonces tenemos que:

(8)
$$\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2/2} = (-1)^n\, e^{-x^2/2}(a_n x^n + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_0)$$

Ahora demostraremos caso $n = k+1$. Primero derivaremos la expresión anterior:

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}e^{-x^2/2} = (-1)^k\, e^{-x^2/2}(a_k k x^{k-1} + a_{k-1}(k-1)x^{k-2} + ... + a_1)$$
$$+ (-1)^k\,(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_0)e^{-x^2/2}(-x)$$

Si factorizamos $(-1)^{k+1}\, e^{-x^2/2}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} H_{k+1}(x) &= (-1)^k\, e^{x^2/2}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}e^{-x^2/2} \\ &= \big(a_k x^{k+1} + a_{k-1}x^n + ... + a_0 x - a_k k x^{k-1} - a_{k-1}(k-1)x^{k-2} - .... - a_1\big) \end{aligned}$$

Por lo tanto H_{k+1} es un polinomio.

Por lo tanto para toda $n \in \mathbb{N}$ es un polinomio de grado n.

Solo nos falta verificar que $\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} M_t^\lambda\big|_{\lambda=0} = t^{n/2}H_n\big(B_t/\sqrt{t}\big)\, M_t^\lambda\big|_{\lambda=0} = t^{n/2}H_n\big(B_t/\sqrt{}$
Veamos el polinomio de Taylor alreededor del 0:

$$f(\lambda) = M_t^\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}M_t^\lambda\bigg|_{\lambda=0}$$

Por la definición de M_t^λ:

$$\begin{aligned} M_t^\lambda &= e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\left(-2\lambda B_t + \lambda^2 t\right)} \\ &= e^{\frac{B_t^2}{2t} - \frac{1}{2}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t}\right)^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en el polinomio de Taylor:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^{\frac{B_t^2}{2t} - \frac{1}{2}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t}\right)^2}\Bigg|_{\lambda=0} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{\frac{B_t^2}{2t}}\, \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t}\right)^2}\Bigg|_{\lambda=0} \end{aligned}$$

Si definimos $g(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$ y $h(\lambda) = \left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t}\right)$ entonces $\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t}\right)^2} = \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} g(h(\lambda))$. Por inducción demostraremos que:

$$\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n} g(h(\lambda)) = \left(h^{(1)}(\lambda)\right)^n g^{(n)}(h(\lambda))$$

Para el caso $n = 1$ tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} g(h(\lambda)) = g^{(1)}(h(\lambda))h^{(1)}(\lambda)$$

Supongamos caso $n = k$. Por demostrar caso $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{k+1}}{\partial \lambda^{k+1}} g(h(\lambda)) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} g(h(\lambda)) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(h^{(1)}(\lambda)\right)^k g^{(k)}(h(\lambda)) \\
&= \left(h^{(1)}(\lambda)\right)^k \frac{\partial}{\partial \lambda} g^{(k)}(h(\lambda)) + g^{(k)}(h(\lambda)) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(h^{(1)}(\lambda)\right)^k
\end{aligned}$$

Pero $\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(h^{(1)}(\lambda)\right)^n = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
&= \left(h^{(1)}(\lambda)\right)^k \frac{\partial}{\partial \lambda} g^{(k)}(h(\lambda)) \\
&= \left(h^{(1)}(\lambda)\right)^{k+1} g^{(k+1)}(h(\lambda))
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} g(h(\lambda)) = \left(h^{(1)}(\lambda)\right)^n g^{(n)}(h(\lambda))$.

Por lo tanto $\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t}\right)^2} = \left(-\sqrt{t}\right)^n g^{(n)}\left(h(\lambda)\right)$.

Utilizando la definición de H_n:

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} - \lambda\sqrt{t}\right)^2} = \left(-\sqrt{t}\right)^n (-1)^n H_n(h(\lambda)) e^{-h(\lambda)^2/2}$$

Sustituyendo en el polinomio de Taylor obtenemos que:

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (t)^{n/2} H_n(B_t/\sqrt{t})$$

Por lo tanto por la unicidad del Polinomio de Taylor tenemos que:

$$\left.\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} M_t^{\lambda}\right|_{\lambda=0} = (t)^{n/2} H_n(B_t/\sqrt{t})$$

□

(3) Pruebe que $t^{n/2} H_n\left(B_t/\sqrt{t}\right)$ es una martingala para toda n y calcúlela para $n \leq 5$.

Proof. Por el inciso 1 sabemos que $\left.\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} M_t^{\lambda}\right|_{\lambda=0}$ es martingala entonces $(t)^{n/2} H_n(B_t/\sqrt{t})$ es martingala. Las primeras cinco martingalas son:

$$\begin{aligned}
&B_t \\
&B_t^2 - t \\
&B_t^3 - 3B_t t \\
&B_t^4 - 6B_t^2 t + 3t^2 \\
&B_t^5 - 10B_t^3 t + 15B_t t^2
\end{aligned}$$

□

(4) Aplique muestreo opcional a las martingalas anteriores al tiempo aleatorio $T_{a,b} = \min\{t \geq 0 : B_t \in \{-a, b\}\}$ (para $a, b > 0$) con $n = 1, 2$ para calcular $\mathbb{P}\big(B_{T_{a,b}} = b\big)$ y $\mathbb{E}(T_{a,b})$, Qué concluye cuando $n = 3, 4$? ¿ Cree que $T_{a,b}$ tenga momentos finitos de cualquier orden? Justifique su respuesta.

Proof. Empezemos con la martingala B_t. Sabemos que $T_{a,b} \wedge s$ es tiempo de paro acotado y además $B_{T_{a,b}\wedge s}$ es martingala acotada entonces tenemos que $\mathbb{E}\big(B_{T_{a,b}\wedge s}\big) = \mathbb{E}(B_0) = 0$. Como $B_{T_{a,b}\wedge s}$ es una martingala acotada y $B_{T_{a,b}\wedge s} \to B_{T_{a,b}}$ por teorema de la convergencia acotada se obtiene que $\mathbb{E}\big(B_{T_{a,b}\wedge s}\big) \to \mathbb{E}\big(B_{T_{a,b}}\big)$. Por lo tanto $\mathbb{E}\big(B_{T_{a,b}}\big) = \mathbb{E}(B_0) = 0$. Luego entonces $\mathbb{E}\big(B_{T_{a,b}}\big) = -a\mathbb{P}(B_{T_{a,b}} = -a) + b\mathbb{P}(B_{T_{a,b}} = b) = 0$. Por lo tanto $\mathbb{P}(B_{T_{a,b}} = -a) = \frac{b}{a+b}$ y $\mathbb{P}(B_{T_{a,b}} = b) = \frac{a}{a+b}$. Si tomamos a la martingala $B_t^2 - t$ de igual manera obtenemos que:

$$0 = \mathbb{E}\Big(B_{T_{a,b}}^2 - T_{a,b}\Big) = a^2\mathbb{P}(B_{T_{a,b}} = -a) + b^2\mathbb{P}(B_{T_{a,b}} = b) - \mathbb{E}(T_{a,b})$$

Entonces:

$$\mathbb{E}(T_{a,b}) = \frac{a^2 b}{a+b} + \frac{b^2 a}{a+b} = ab$$

Para la martingala $B_t^3 - 3B_t t$ al aplicar muestreo opcional tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}\Big(B_{T_{a,b}}^3 - 3B_{T_{a,b}}T_{a,b}\Big) \\ &= \frac{b^3 a - a^3 b}{a+b} - 3\mathbb{E}\big(B_{T_{a,b}}T_{a,b}\big) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\mathbb{E}\big(B_{T_{a,b}}T_{a,b}\big) = \frac{b^3 a - a^3 b}{3(a+b)}.$$

Pero sabemos que $B_{T_{a,b}} = -a\mathbf{1}_{B_{T_{a,b}}=-a} + b\mathbf{1}_{B_{T_{a,b}}=b}$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{b^3 a - a^3 b}{3(a+b)} &= \mathbb{E}\big(B_{T_{a,b}}T_{a,b}\big) \\ &= -a\mathbb{E}\Big(T_{a,b}\mathbf{1}_{B_{T_{a,b}}=-a}\Big) + b\mathbb{E}\Big(T_{a,b}\mathbf{1}_{B_{T_{a,b}}=b}\Big) \end{aligned}$$

Tambien sabemos que $T_{a,b} = T_{a,b}\mathbf{1}_{B_{T_{a,b}}=-a} + T_{a,b}\mathbf{1}_{B_{T_{a,b}}=b}$ entonces:

$$\begin{aligned} ab &= \mathbb{E}(T_{a,b}) \\ &= \mathbb{E}\Big(T_{a,b}\mathbf{1}_{B_{T_{a,b}}=-a}\Big) + \mathbb{E}\Big(T_{a,b}\mathbf{1}_{B_{T_{a,b}}=b}\Big) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\mathbb{E}\Big(T_{a,b}\mathbf{1}_{B_{T_{a,b}}=b}\Big) = \frac{b^3 a - a^3 b}{3(a+b)} + \frac{a^2 b}{a+b}$$

$$\mathbb{E}\Big(T_{a,b}\mathbf{1}_{B_{T_{a,b}}=-a}\Big) = ab - \frac{b^3 a - a^3 b}{3(a+b)} - \frac{a^2 b}{a+b}$$

Para la martingala $B_t^4 - 6B_t^2 t + 3t^2$ obtenemos que:

$$0 = \mathbb{E}\Big(B_{T_{a,b}}^4 - 6B_{T_{a,b}}^2 T_{a,b} + 3T_{a,b}^2\Big)$$

Entonces:

$$\mathbb{E}\big(T_{a,b}^2\big) = 2\mathbb{E}\Big(B_{T_{a,b}}^2 T_{a,b}\Big) - \frac{a^4 b + b^4 a}{3(a+b)}$$

Pero sabemos que $B_{T_{a,b}}^2 = a^2 \mathbf{1}_{B_{T_{a,b}}=-a} + b^2 \mathbf{1}_{B_{T_{a,b}}=b}$ Por lo tanto;

$$\mathbb{E}\Big(B_{T_{a,b}}^2 T_{a,b}\Big) = a^2 \left(ab - \frac{b^3 a - a^3 b}{3(a+b)} - \frac{a^2 b}{a+b}\right) + b^2 \left(\frac{b^3 a - a^3 b}{3(a+b)} + \frac{a^2 b}{a+b}\right).$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{E}\big(T_{a,b}^2\big) = 2\left(a^2 \left(ab - \frac{b^3 a - a^3 b}{3(a+b)} - \frac{a^2 b}{a+b}\right) + b^2 \left(\frac{b^3 a - a^3 b}{3(a+b)} + \frac{a^2 b}{a+b}\right)\right) - \frac{a^4 b + b^4 a}{3(a+b)}.$$

□

(5) Aplique el teorema de muestreo opcional a la martingala M^λ al tiempo aleatorio $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq a\}$ si $\lambda > 0$. Diga por qué es necesaria la última hipótesis y calcule la transformada de Laplace de T_a.

Proof. Sabemos que $T_a \wedge s$ es tiempo de paro acotado por el muestreo opcional tenemos que $\mathbb{E}\big(M_{T_a \wedge s}^\lambda\big) = \mathbb{E}\big(M_0^\lambda\big) = 1$. Utilizando la hipótesis $\lambda > 0$, si $s \leq T_a$ entonces $M_{T_a \wedge s}^\lambda = M_s^\lambda = e^{\lambda B_s - \lambda^2 s/2} \leq e^{\lambda a}$ y si $s > T_a$ entonces $M_{T_a \wedge s}^\lambda = M_{T_a}^\lambda = e^{\lambda a - \lambda^2 s/2} \leq e^{\lambda a}$. Por lo tanto $M_{T_a \wedge s}^\lambda$ es una martingala acotada. Por lo tanto dado que $M_{T_a \wedge s}^\lambda \to M_{T_a}^\lambda$ por el teorema de convergencia acotada $1 = \mathbb{E}\big(M_{T_a \wedge s}^\lambda\big) \to \mathbb{E}\big(M_{T_a}^\lambda\big)$. Por lo tanto $\mathbb{E}\Big(e^{\lambda a - \lambda^2 T_a/2}\Big) = 1$.

Por lo tanto $\mathbb{E}\Big(e^{-\lambda^2 T_a/2}\Big) = e^{-\lambda a}$

Haciendo el cambio de varibale $u = \lambda^2/2$ entonces $\mathbb{E}\big(e^{-uT_a}\big) = e^{-a\sqrt{2u}}$. □

(6) Opcional (para subir calificación en esta u otra tarea):
  (a) Modifique el ejercicio para que aplique al proceso Poisson.
  (b) Resuélva el ejercicio modificado.

Problema 27.

(1) Al aplicar la desigualdad maximal de Doob sobre los racionales de orden n y pasar al límite conforme $n \to \infty$, pruebe que $\sup_{t\leq} |B_t - B_1|$ es cuadrado integrable.

Proof. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ a la martingala a tiempo discreto $(B_k^n : k \in D_n)$ donde D_n es la partición diádica, es decir $D_n = \left\{\frac{k}{2n} : k = 0, 1..., n\right\}$. Ya que el valor absoluto una función convexa sabemos que $(|B_k^n| : k \in D_n)$ es una submartingala. Al aplicar la desigualdad maximal de Doob obtenemos que:

$$\| \max_{k \in D_n} |B_k^n| \|_2 \leq \frac{2}{2-1} \| |B_1^n| \|_2$$

De aqui obtenemos que:

$$\mathbb{E}\Big((\max_{k \in D_n} |B_k^n|)^2 \Big) \leq 4\mathbb{E}\big(|B_1^n|^{\,2} \big) = 4(\mathrm{Var}(B_1)) = 4$$

Ahora como sabemos que $\max_{k \in D_n} |B_k^n|$ es una sucesión creciente de eventos que converge a $\sup_{t \in [0,1]} |B_t|$ casi seguramente entonces por teorema de convergencia monótona tenemos que:

$$\mathbb{E}\left(\left(\sup_{t \in [0,1]} |B_t| \right)^2 \right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\Big((\max_{k \in D_n} |B_k|)^2 \Big) \leq 4$$

Por lo tanto $\sup_{t \leq} |B_t - B_1|$ es cuadrado integrable. □

(2) Pruebe que la sucesión de variables aleatorias

$$\left(\sup_{t \in [0,1]} |B_{n+t} - B_n| \,, n \in \mathbb{N} \right)$$

son independientes, idénticamente distribuidas y de media finita. (Utilice la propiedad de Markov.)

Proof. Sabemos que $B_{n+t} - B_n = B_t$ en distribución entonces $|B_{n+t} - B_n| = |B_t|$ en distribución. Como la función máximo es una función medible y en nuestro caso es igual al supremo obtnenemos que $\sup_{t \in [0,1]} |B_{n+t} - B_n| = \sup_{t \in [0,1]} |B_t|$ en distribución. Por lo tanto $\left(\sup_{t \in [0,1]} |B_{n+t} - B_n| \,, n \in \mathbb{N} \right)$ son identicamente distribuidas.

Utilizando el inciso anterior y el hecho que $\left(\sup_{t \in [0,1]} |B_{n+t} - B_n| \,, n \in \mathbb{N} \right)$ son identicamente distribuidas tenemos que:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0,1]} |B_{n+t} - B_n| \right) = \mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0,1]} |B_t| \right) < \infty$$

Por lo tanto $\left(\sup_{t \in [0,1]} |B_{n+t} - B_n| \,, n \in \mathbb{N} \right)$ tiene media finita.

Ahora veamos que $\sup_{t \in [0,1]} |B_{n+t} - B_n|$, $n \in \mathbb{N}$ son independientes. Sabemos que $B_{n+t} - B_n, n \in \mathbb{N}$ son procesos estocásticos independientes al ser B un movimiento Browniano.Utilizando la propiedad de Markov sabemos que $B_{n+t} - B_n$ es independiente a $\sigma(B_s : s \leq n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomando los supremos obtenemos que $\sup_{t \in [0,1]} |B_{n+t} - B_n|$, $n \in \mathbb{N}$ son variable aleatorias independientes. □

(3) Al utilizar Borel-Cantelli, pruebe que, para cualquier $C > 0$ fija

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |B_{n+t} - B_n| / n \leq C$$

casi seguramente.

Proof. Sea $A_n = \left\{\sup_{t\in[0,1]} |B_{n+t} - B_n| / n \leq C\right\}$. Utilizando la desigualdad de Markov obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n^c) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |B_{n+t} - B_n| / n > C\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |B_{n+t} - B_n| > nC\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |B_t| > nC\right) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\left(\left(\sup_{t\in[0,1]} |B_t|\right)\right)^2}{(nc)^2}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left(\left(\sup_{t\in[0,1]} |B_t|\right)\right)^2}{(nc)^2} < \infty$$

Por lo tanto por Borel-Cantelli obtenenemos que $\mathbb{P}(\limsup A_n^c) = 0$.
Por lo tanto $\limsup_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |B_{n+t} - B_n| / n \leq C$ casi seguramente. □

(4) Pruebe que $(B_n/n, n \geq 1)$ converge casi seguramente a 0 y deduzca que

$$\lim_{t\to\infty} B_t/t = 0.$$

Proof. Notando que $B_n = B_n - B_{n-1} + B_{n-1} - B_{n-2} + \ldots + B_2 - B_1 + B_1 - B_0$ y también que $B_k - B_{k-1}$ se distribuye $N(0,1)$, utilizando la ley fuerte de los grandes números obtenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} B_k - B_{k-1}}{n} = 0$.

Para todo $t \in \mathbb{R}^+$ podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ y $s \in [0,1]$ tal que $t = n + s$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{|B_t|}{t} &= \frac{|B_n + s|}{n+s} \\
&\leq \frac{|B_{n+s}|}{n} \\
&= \frac{|B_{n+s} - B_n + B_n|}{n} \\
&\leq \frac{|B_{n+s} - B_n|}{n} + \frac{|B_n|}{n} \\
&\leq \frac{\sup_{s\in[0,1]} |B_{n+s} - B_n|}{n} + \frac{|B_n|}{n}
\end{aligned}$$

Tomando lim sup y utilizando el inciso anterior:

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \frac{|B_t|}{t} &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\sup_{s\in[0,1]} |B_{n+s} - B_n|}{n} + \frac{|B_n|}{n} \right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\sup_{s\in[0,1]} |B_{n+s} - B_n|}{n} \right) + \limsup_{n\to\infty} \frac{|B_n|}{n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\sup_{s\in[0,1]} |B_{n+s} - B_n|}{n} \right) < C
\end{aligned}$$

Por lo tanto para toda $C > 0$ $0 \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{|B_t|}{t} \leq C$.

Por lo tanto $\lim_{t\to\infty} \frac{|B_t|}{t} = 0$. □