CAPITOLO 6

٦ [numerazione araba] ६ [numerazione devanagari] 六 [numerazione cinese]

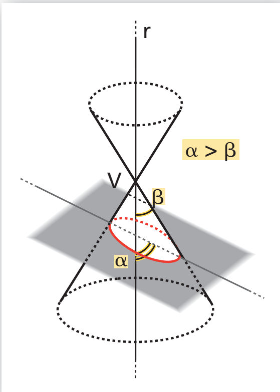
L'ELLISSE

L'ELLISSE DEL GIARDINIERE Nei giardini rinascimentali, ma prima ancora nei bellissimi giardini arabi, era facile imbattersi in aiuole ellittiche. L'ellisse infatti, con i suoi fuochi, è stata usata come simbolo di molte relazioni a due: uomo-Dio, maschio-femmina, tecnica-natura e così via.
Anche se un'ellisse non si disegna facilmente con riga e compasso, i giardinieri di un tempo sapevano disegnarne di perfette.

Come può fare un giardiniere per creare un'aiuola a forma di ellisse?

La risposta a pag. 401

1. L'ELLISSE E LA SUA EQUAZIONE



▲ **Figura 1** Consideriamo un cono di asse *r* con angolo al vertice 2β. Sezioniamo la superficie del cono con un piano che formi con l'asse del cono un angolo α tale che $\alpha > \beta$.
La figura che si ottiene dall'intersezione è un'ellisse.

Affrontiamo in questo capitolo lo studio di un'altra conica: l'*ellisse*.
Procediamo in modo analogo a quanto fatto nei capitoli precedenti per la circonferenza e la parabola, definendo l'ellisse come luogo geometrico e determinandone l'equazione algebrica.

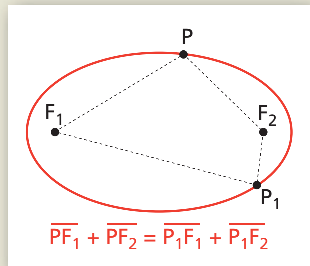
L'ellisse come luogo geometrico

DEFINIZIONE

Ellisse

Assegnati nel piano due punti, F_1 e F_2, detti **fuochi**, si chiama ellisse la curva piana luogo geometrico dei punti P tali che sia costante la somma delle distanze di P da F_1 e da F_2:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \textbf{costante}.$$



Consideriamo, dunque, un'ellisse di fuochi F_1 e F_2. Il punto medio del segmento F_1F_2 si chiama **centro** dell'ellisse.

Indichiamo con:

$2c$ la distanza tra F_1 e F_2, detta **distanza focale**;

$2a$ la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi.

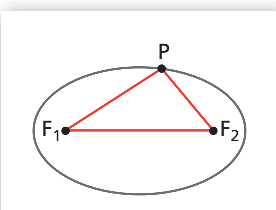
● a e c indicano due valori costanti e positivi.

Se P è un generico punto dell'ellisse, per definizione deve risultare:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a.$$

Poiché in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due, considerato il triangolo PF_1F_2, deve essere

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > \overline{F_1F_2},$$



▲ **Figura 2** In un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due.

e quindi

$$2a > 2c,$$

ossia la relazione tra a e c è:

$$\boldsymbol{a > c}.$$

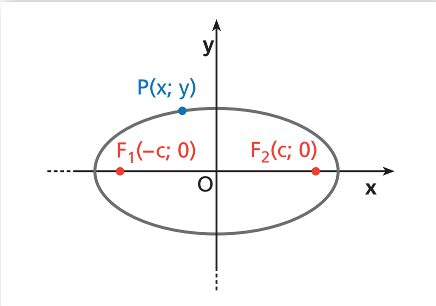
L'equazione dell'ellisse con i fuochi appartenenti all'asse x

L'equazione dell'ellisse, così come quella della parabola o della circonferenza, è diversa a seconda della posizione della curva rispetto al sistema di riferimento.

Esaminiamo il caso in cui il centro dell'ellisse è posto nell'origine degli assi e la retta passante per F_1 e F_2 è l'asse x.
Poiché abbiamo indicato la distanza focale con $2c$, le coordinate dei fuochi sono:

$$F_1(-c; 0), \quad F_2(c; 0).$$

● $2c$ è una distanza, quindi si ha $c > 0$.



◀ **Figura 3** Scegliamo come asse x la retta F_1F_2 e come asse y la perpendicolare condotta per il punto medio del segmento F_1F_2.

Indicato con $P(x; y)$ un generico punto del piano, calcoliamo le distanze del punto dai fuochi:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \qquad \overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Poiché P appartiene all'ellisse se e solo se

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a,$$

sostituendo in quest'ultima uguaglianza le espressioni di $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$, otteniamo:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

che è già l'equazione dell'ellisse. Cerchiamo ora di scriverla in una forma più semplice, in modo che non contenga radicali.

Isoliamo un radicale ed eleviamo entrambi i membri al quadrato:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = [2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}]^2.$$

Svolgendo i calcoli e semplificando, abbiamo:

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Isoliamo il radicale e dividiamo per 4:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri e riordiniamo i termini:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Poniamo:

$$\boldsymbol{a^2 - c^2 = b^2}.$$

L'equazione diventa:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividiamo tutti i termini per a^2b^2:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Questa è l'**equazione canonica** o **normale** dell'ellisse. Si ha:

$$a^2 - c^2 = b^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 > b^2 \rightarrow \boldsymbol{a > b}.$$

- $2a$ è una distanza, quindi si ha $a > 0$.
- Il secondo membro è positivo perché $2a$ è uguale alla somma dei due radicali.
- $a^2 - cx$ è positivo; infatti si ha $a > c$ e, per tutti i punti dell'ellisse, si ha anche $a \geq x$, quindi, moltiplicando membro a membro, si ha $a^2 > cx$.
- Ciò è possibile perché, essendo $a > c$, è anche $a^2 > c^2$ e quindi $a^2 - c^2 > 0$.
- **Canonica** deriva dal greco *kanón*, che significa «norma».

Abbiamo dimostrato che tutti i punti $P(x; y)$ dell'ellisse verificano l'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Viceversa, si può dimostrare che soltanto i punti del piano che verificano l'equazione appartengono all'ellisse.

ESEMPIO

Verifichiamo che l'equazione seguente rappresenta un'ellisse:

$$4x^2 + 9y^2 = 16.$$

Poiché $9y^2 = \dfrac{y^2}{\frac{1}{9}}$, se dividiamo ambo i membri per 16, otteniamo:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{16}{9}} = 1.$$

L'equazione è quella di un'ellisse, con $a^2 = 4$ e $b^2 = \dfrac{16}{9}$, ossia $a = 2$ e $b = \dfrac{4}{3}$.

La circonferenza può essere considerata come una particolare ellisse. Infatti, se nell'equazione di un'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ abbiamo $a = b$, ossia $a^2 = b^2$, l'equazione diventa:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

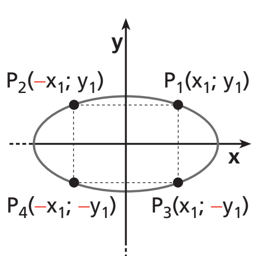
Questa è l'equazione della circonferenza che ha centro nell'origine degli assi e raggio a.
In questo caso $c = 0$, quindi i due fuochi coincidono con il centro della circonferenza.

Ricordiamo che $a^2 - c^2 = b^2$, ovvero $a^2 - b^2 = c^2$. Se $a^2 = b^2$, allora $a^2 - b^2 = 0$, $c^2 = 0$, $c = 0$.

Le simmetrie nell'ellisse

Nell'equazione dell'ellisse le variabili x e y compaiono solo elevate al quadrato. Se consideriamo un punto dell'ellisse $P_1(x_1; y_1)$, appartiene all'ellisse anche il punto $P_2(-x_1; y_1)$, che ha la stessa ordinata e l'ascissa opposta. Per verificarlo, basta osservare che, poiché $x_1^2 = (-x_1)^2$, se

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \text{anche} \quad \frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$



Dal punto di vista geometrico, ciò significa che *l'ellisse ha come asse di simmetria l'asse y.*

Analogamente, se $P_1(x_1; y_1)$ è un punto dell'ellisse, lo è anche il punto P_3 di coordinate $(x_1; -y_1)$, che ha la stessa ascissa e ordinata opposta. *L'ellisse ha come asse di simmetria anche l'asse x.*

Allo stesso modo, se $P_1(x_1; y_1)$ è un punto dell'ellisse, lo è anche il punto $P_4(-x_1; -y_1)$, che ha ascissa e ordinata opposte. Quindi, poiché P_1 e P_4 sono simmetrici rispetto all'origine, *l'ellisse ha come centro di simmetria l'origine degli assi.*

Si dice anche che l'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ rappresenta un'ellisse riferita al centro e ai suoi assi di simmetria.

L'intersezione dell'ellisse con gli assi cartesiani

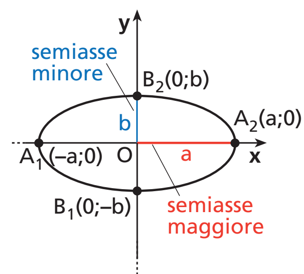
Per determinare le intersezioni di un'ellisse con l'asse x, mettiamo a sistema l'equazione dell'ellisse e l'equazione dell'asse x, cioè risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \end{cases}$$

I punti

$$A_1(-a; 0) \quad \text{e} \quad A_2(a; 0)$$

sono le intersezioni dell'ellisse con l'asse x.



Analogamente, per determinare le intersezioni con l'asse y, risolviamo:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Otteniamo $x = 0$ e $y = \pm b$, cioè i punti

$$B_1(0; -b) \quad \text{e} \quad B_2(0; b)$$

sono le intersezioni dell'ellisse con l'asse y.

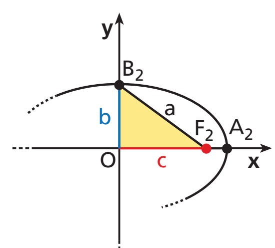
I punti A_1, A_2, B_1 e B_2 si chiamano **vertici** dell'ellisse.

I segmenti A_1A_2 e B_1B_2 sono detti **assi** dell'ellisse. La distanza $\overline{A_1A_2}$ misura $2a$, mentre $\overline{B_1B_2}$ misura $2b$, quindi a e b rappresentano le misure dei semiassi. Poiché $a > b$, risulta anche $\overline{A_1A_2} > \overline{B_1B_2}$. Per questo, il segmento A_1A_2 è detto **asse maggiore** e B_1B_2 è detto **asse minore**.

● La parola *asse* è usata per indicare sia i segmenti A_1A_2 e B_1B_2, sia le relative rette (che sono gli assi di simmetria).

La distanza fra uno dei vertici sull'asse y e un fuoco è sempre uguale ad a. Per esempio, se consideriamo il vertice B_2 e il fuoco F_2, poiché $\overline{OB_2} = b$ e $\overline{OF_2} = c$, per il teorema di Pitagora, si ha:

$$\overline{B_2F_2} = \sqrt{b^2 + c^2} = a.$$



Il grafico dell'ellisse

Disegniamo il rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani, ognuno passante per uno dei quattro vertici A_1, A_2, B_1 e B_2: tutti i punti dell'ellisse sono all'interno di questo rettangolo. Per verificare questa affermazione, nell'equazione canonica isoliamo y^2. Otteniamo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

I membri dell'uguaglianza ottenuta devono essere entrambi positivi o nulli. In particolare, al secondo membro deve essere:

$$a^2 - x^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -a \leq x \leq a.$$

● Infatti:

$$-x^2 + a^2 \geq 0$$
$$x^2 - a^2 \leq 0.$$

Poiché $x^2 - a^2 = 0$ per $x = \pm a$ e la disequazione è verificata per valori interni, si ha:

$$-a \leq x \leq a.$$

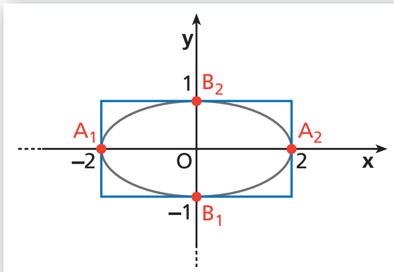
Con ragionamenti analoghi, isolando x^2, si ottiene:

$$-b \leq y \leq b.$$

L'ellisse è quindi inscritta nel rettangolo che ha i lati di equazioni

$$x = \pm a, \qquad y = \pm b.$$

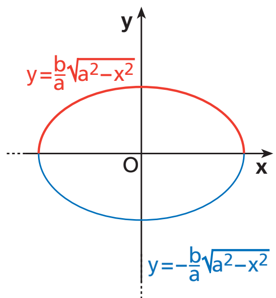
ESEMPIO



Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, si ha $a = 2$ e $b = 1$.

I vertici sono $A_1(-2;\ 0)$, $A_2(2;\ 0)$, $B_1(0; -1)$, $B_2(0; 1)$. Tutti i punti dell'ellisse sono all'interno del rettangolo i cui lati passano per i vertici e misurano 4 e 2.

▶ Figura 4



L'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ non rappresenta una funzione perché a ogni $x \in \mathbb{R}$ corrispondono due valori di y.

Esplicitando l'equazione rispetto alla variabile y si ha:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Il grafico dell'ellisse può essere visto come unione di due semiellissi di equazioni

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

che invece rappresentano due funzioni.

Le coordinate dei fuochi di un'ellisse di equazione nota

Ricordiamo che i fuochi si trovano sull'asse x e hanno coordinate $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$.

Data l'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ di un'ellisse, è possibile determinare le coordinate dei fuochi.

Partendo dall'uguaglianza $a^2 - c^2 = b^2$, isoliamo c^2 al primo membro:

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Poiché c è un numero positivo si ha

$$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 - b^2}},$$

quindi:

$$\boldsymbol{F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0), \quad F_2(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)}.$$

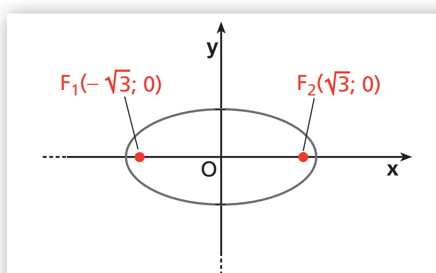
ESEMPIO

Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, essendo $a = 2$ e $b = 1$, si ha

$$c = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

I fuochi sono:

$$F_1(-\sqrt{3}; 0),\ F_2(\sqrt{3}; 0).$$



▶ Figura 5 $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ e $F_2(\sqrt{3}; 0)$ sono i fuochi dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

L'eccentricità

Il rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse maggiore di un'ellisse è detto **eccentricità** ed è solitamente indicato con la lettera e:

$$e = \frac{\textbf{distanza focale}}{\textbf{lunghezza dell'asse maggiore}}.$$

L'eccentricità e indica la forma più o meno schiacciata dell'ellisse.
Nell'ellisse con i fuochi sull'asse x la distanza focale è $2c$, mentre la lunghezza dell'asse maggiore è $2a$, quindi l'eccentricità è data dal rapporto $\frac{2c}{2a}$, ossia:

$$\boldsymbol{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}.$$

Poiché $c < a$, si ha:

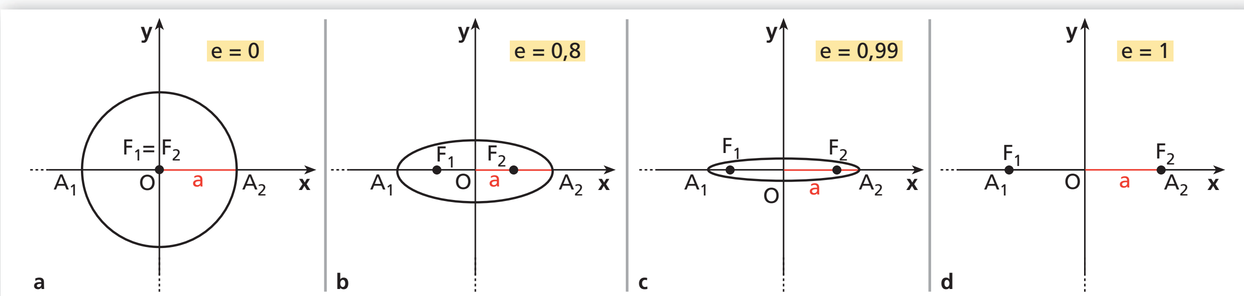
$$0 < e < 1.$$

Se $\boldsymbol{e = 0}$ (figura 6a), si ha $\frac{c}{a} = 0$, cioè $c = 0$: i fuochi coincidono con il centro.
Inoltre dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$, essendo $c = 0$, si ha $a^2 = b^2$ e l'equazione dell'ellisse diventa $x^2 + y^2 = a^2$, che rappresenta una circonferenza con il centro nell'origine e raggio a.
Se l'eccentricità aumenta, l'ellisse risulta più schiacciata sull'asse maggiore.
Nel caso limite di $\boldsymbol{e = 1}$ (figura 6d), si ha $c = a$ (fuochi nei due vertici) e $b = 0$.
L'ellisse, riducendosi all'asse maggiore, diventa *degenere*.
Concludendo, per l'eccentricità vale la relazione:

$$\boldsymbol{0 \leq e < 1}.$$

● Un'ellisse è **degenere** quando si riduce a un segmento, oppure a un punto (il centro).

▼ **Figura 6**



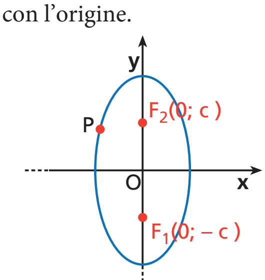
L'ellisse con i fuochi sull'asse y

Determiniamo l'equazione generica dell'ellisse con i fuochi sull'asse y. Il procedimento è analogo a quello seguito per l'ellisse con i fuochi sull'asse x.
In questo caso, diversamente dal precedente, indichiamo con $2b$ la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi.
Le coordinate dei fuochi sono $F_1(0; -c)$ e $F_2(0; c)$.

Indichiamo con $P(x; y)$ un generico punto dell'ellisse.
Per quanto abbiamo supposto, P deve verificare la relazione:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b.$$

● Anche in questo caso prendiamo in esame solo ellissi il cui centro coincide con l'origine.



Con calcoli analoghi a quelli effettuati per l'ellisse con i fuochi sull'asse x si ottiene l'equazione:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

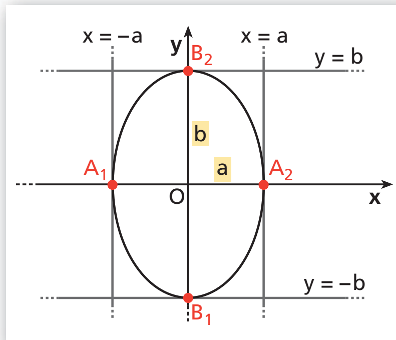
L'equazione ottenuta è uguale a quella dell'ellisse che ha i fuochi sull'asse x, in questo caso però si pone $\boldsymbol{b^2 - c^2 = a^2}$.
Da quest'ultima relazione segue che:

$$b^2 = a^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad b^2 > a^2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b > a}.$$

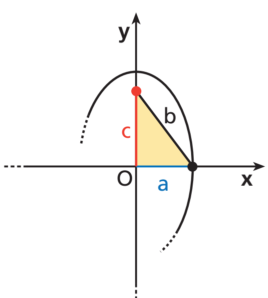
▶ Figura 7

Anche l'ellisse con i fuochi sull'asse y:

- è simmetrica rispetto agli assi cartesiani;
- ha vertici nei punti $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$;
- è inscritta nel rettangolo che ha i lati di equazioni $x = \pm a$, $y = \pm b$.



Poiché $b > a$, risulta $\overline{B_1B_2} > \overline{A_1A_2}$ e quindi B_1B_2 è detto **asse maggiore** e A_1A_2 è detto **asse minore**.



Poiché $b^2 - c^2 = a^2$, si ha $c^2 = b^2 - a^2$, da cui $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, quindi le coordinate dei fuochi sono:

$$\boldsymbol{F_1(0; -\sqrt{b^2 - a^2})},$$

$$\boldsymbol{F_2(0; \sqrt{b^2 - a^2})}.$$

L'eccentricità per l'ellisse con i fuochi sull'asse y, essendo $2b$ la lunghezza dell'asse maggiore, è:

● Per definizione, e è il rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse maggiore.

$$\boldsymbol{e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}}.$$

ESEMPIO

▶ Figura 8

Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$,

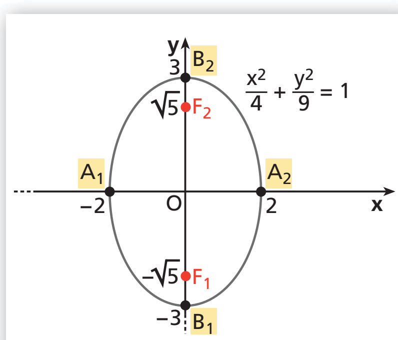
$a = 2$, $b = 3$, i vertici dell'ellisse sono $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$.

La semidistanza focale è:

$$c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

I fuochi sono $F_1(0; -\sqrt{5})$, $F_2(0; \sqrt{5})$.

L'eccentricità è $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.



ESPLORAZIONE

L'ellisse in architettura

Il fuoco del presidente

La National Statuary Hall, situata all'interno del Campidoglio di Washington (sede dei due rami del Congresso degli Stati Uniti), ospita una collezione di cento statue donate dagli stati dell'Unione, che rappresentano importanti personalità della storia del Paese.
In origine era la sede della Camera dei rappresentanti (l'equivalente della nostra Camera dei deputati), ma nel 1857, per i problemi acustici dovuti alla sua forma ellittica, i parlamentari si trasferirono in un'altra sala del Campidoglio.
Si racconta che John Quincy Adams, sesto presidente degli Stati Uniti (1825-1829), quando tornò a frequentare la Hall come membro del Congresso, scelse una posizione che corrispondeva a uno dei fuochi dell'ellisse che costituiva la pianta della sala. In questo modo poteva sfruttare la sua acustica per origliare i discorsi dei deputati che avevano i propri banchi nei pressi dell'altro fuoco.
Un metodo ingegnoso e lecito di spionaggio politico, molto prima del Watergate.

L'ellisse nel Barocco

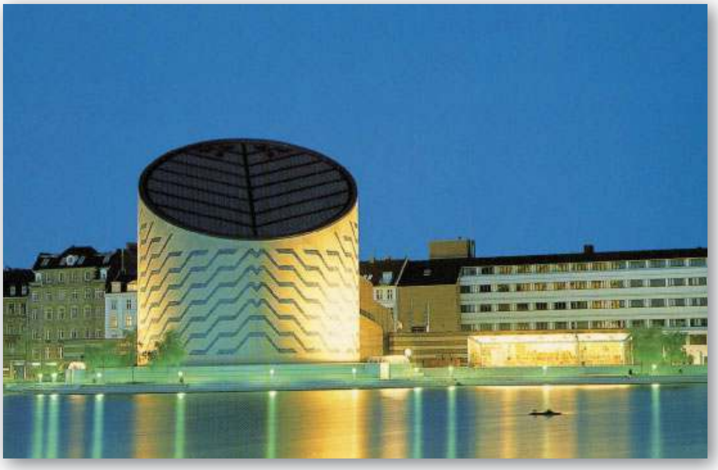
Nell'epoca del Barocco l'ellisse venne usata dagli architetti sia nella pianta delle chiese sia in quella delle piazze. L'esempio più famoso è piazza San Pietro a Roma, opera del Bernini. Nel centro di simmetria della sua parte ellittica c'è un obelisco e poco distante, nella pavimentazione, c'è una pietra circolare che segna uno dei due fuochi. Stando su quella pietra, il colonnato, che è composto da quattro file di colonne, per un gioco prospettico appare come se fosse formato da una sola fila.

Attività

Ellissi moderne

Anche in epoca moderna, l'ellisse viene ampiamente utilizzata in architettura.
Per esempio, l'architetto svizzero Mario Botta ha usato l'ellisse nella ristrutturazione della Scala (2002-2004).
Nella foto puoi osservare come nel Tycho Brahe Planetarium di Copenaghen (1980) si sfrutti la proprietà geometrica che la sezione di un cilindro è un'ellisse.

- Cerca altri esempi di ellissi in architettura.



Cerca nel Web:
ellisse, architettura, Zenith Music Hall (puoi utilizzare l'opzione *Immagini* del tuo motore di ricerca)

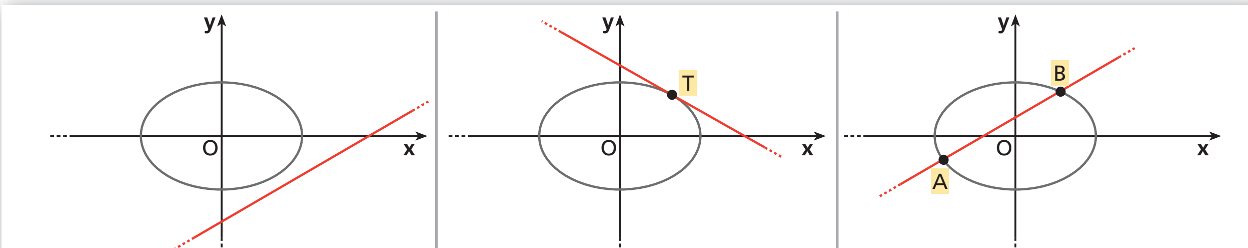
2. LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UN'ELLISSE

Se vogliamo studiare la posizione di una retta di equazione $a'x + b'y + c' = 0$ rispetto a un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, procediamo in maniera analoga a quanto fatto per la circonferenza e la parabola, determinando quante sono le soluzioni del sistema costituito dalle due equazioni.

Ricaviamo la x (o, indifferentemente, la y) dall'equazione della retta e sostituiamo l'espressione trovata nell'altra equazione. Otteniamo così un'equazione di secondo grado detta **equazione risolvente**.

Studiamo il segno del discriminante Δ dell'equazione risolvente:

- $\boldsymbol{\Delta < 0}$, il sistema non ha soluzioni reali, la retta è **esterna** all'ellisse;
- $\boldsymbol{\Delta = 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e coincidenti, la retta è **tangente** all'ellisse in un punto;
- $\boldsymbol{\Delta > 0}$, il sistema ha due soluzioni reali, la retta è **secante** l'ellisse in due punti.



a. La retta è esterna all'ellisse. Non vi sono punti di intersezione.

b. La retta è tangente all'ellisse. L'unico punto di intersezione è il punto di tangenza.

c. La retta è secante l'ellisse. I punti di intersezione sono due.

▲ **Figura 9**

ESEMPIO

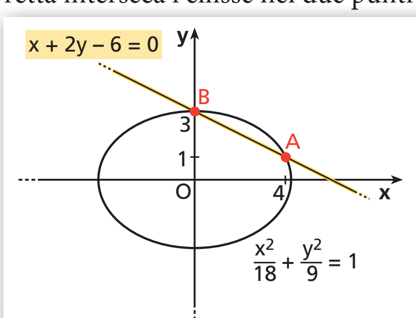
Studiamo che posizione ha la retta di equazione $x + 2y - 6 = 0$ rispetto all'ellisse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Ricaviamo la x dalla seconda equazione, sostituiamo in quella di secondo grado e svolgiamo i calcoli. Otteniamo l'equazione risolvente:

$$6y^2 - 24y + 18 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 - 4y + 3 = 0.$$

Il discriminante dell'equazione è $\Delta = 4 > 0$.
L'equazione ha perciò le due soluzioni distinte $y_1 = 1$ e $y_2 = 3$, e dunque la retta interseca l'ellisse nei due punti $A(4; 1)$ e $B(0; 3)$.

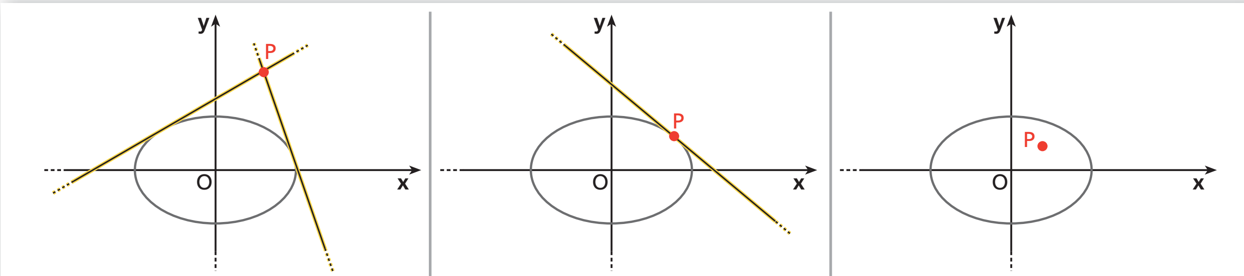


◀ **Figura 10** La retta $x + 2y - 6 = 0$ è secante l'ellisse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ nei punti $A(4; 1)$ e $B(0; 3)$.

Le equazioni delle tangenti a un'ellisse

Le rette per un punto P e tangenti a un'ellisse possono essere due, una o nessuna, a seconda della posizione di P rispetto all'ellisse.

▼ Figura 11



a. P è esterno all'ellisse: esistono due rette tangenti per P.
b. P appartiene all'ellisse: esiste una sola retta tangente per P.
c. P è interno all'ellisse: non esistono rette tangenti per P.

Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti condotte da un punto $P(x_0; y_0)$ alla generica ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, si deve annullare il discriminante dell'equazione risolvente il sistema tra l'equazione della retta generica passante per P e l'equazione dell'ellisse:

$$\boldsymbol{\Delta = 0}.$$

ESEMPIO

Determiniamo le equazioni delle eventuali rette tangenti condotte dal punto $P(6; -2)$ all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Scriviamo l'equazione del fascio di rette di centro P:

$$y + 2 = m(x - 6).$$

Scriviamo il sistema formato dalle equazioni del fascio e dell'ellisse:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y + 2 = m(x - 6) \end{cases}$$

Ricaviamo la y dall'equazione della retta, la sostituiamo nell'equazione dell'ellisse e otteniamo l'equazione risolvente:

$$(1 + 3m^2)x^2 - 12(3m^2 + m)x + 108m^2 + 72m = 0.$$

Imponiamo la condizione di tangenza $\frac{\Delta}{4} = 0$ e otteniamo l'equazione in m:

$$36(3m^2 + m)^2 - (1 + 3m^2)(108m^2 + 72m) = 0.$$

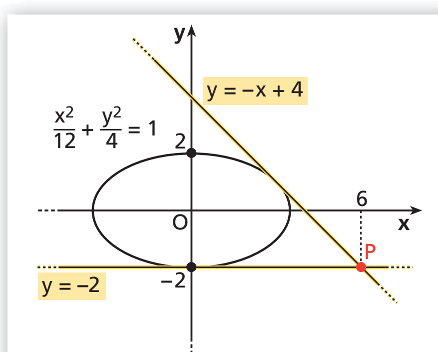
Risolvendola otteniamo:

$$m_1 = 0, m_2 = -1.$$

Sostituiamo i valori di m nell'equazione del fascio di rette e troviamo le equazioni delle due tangenti:

$$t_1: y = -2, \ t_2: y = -x + 4.$$

▼ Figura 12



La formula di sdoppiamento

Se si deve determinare l'equazione della retta *tangente all'ellisse in un suo punto* $P(x_0; y_0)$, si può utilizzare la seguente **formula di sdoppiamento**:

● La formula si può applicare *solo se il punto P appartiene all'ellisse.*

$$\boldsymbol{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1},$$

che si ottiene dall'equazione canonica dell'ellisse sostituendo il termine x^2 con xx_0 e il termine y^2 con yy_0.

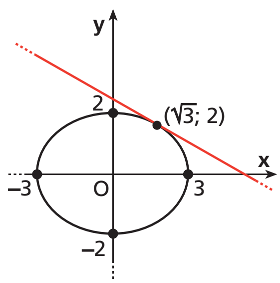
ESEMPIO

Troviamo la retta t tangente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ nel suo punto di coordinate $(\sqrt{3}; 2)$. Applichiamo la formula di sdoppiamento e otteniamo:

$$\frac{\sqrt{3}\,x}{9} + \frac{2y}{6} = 1.$$

Semplificando, abbiamo l'equazione della retta t:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3.$$



IN PRATICA
▶ Videolezione 21

3. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UN'ELLISSE

Abbiamo visto che l'equazione di un'ellisse con centro di simmetria nell'origine e fuochi su uno degli assi cartesiani è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Per determinarla basta conoscere i valori di a e b. Quindi occorrono due informazioni (condizioni) sull'ellisse che permettano di impostare un sistema di due equazioni nelle incognite a e b.

Alcune condizioni possibili sono le seguenti:

- sono note le lunghezze dei due semiassi;
- sono note le coordinate di un fuoco e di un vertice (o semiasse);
- l'ellisse passa per un punto noto e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice);
- l'ellisse passa per un punto noto e si conosce l'eccentricità;
- l'ellisse passa per due punti noti;
- è nota l'eccentricità e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice);
- è nota l'equazione di una retta tangente all'ellisse e sono note le coordinate di un vertice (o di un fuoco, o di un punto dell'ellisse).

● La lunghezza di un semiasse è uguale, a meno del segno, alla coordinata non nulla dei vertici che si trovano su tale asse. Quindi le coordinate di un vertice e la lunghezza di un semiasse forniscono la stessa condizione.

● Le coordinate di un fuoco o di un vertice corrispondono a una sola condizione.

La conoscenza di un vertice (o semiasse) fornisce direttamente il valore di a o b. Gli altri tipi di condizioni forniscono invece delle equazioni nelle incognite a e b, che si ottengono dalle formule dell'eccentricità e delle coordinate dei fuochi oppure sostituendo le coordinate di un punto noto nell'equazione dell'ellisse.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione di un'ellisse con fuochi sull'asse y che passa per il punto $P\left(2; \frac{5}{3}\sqrt{5}\right)$ e ha eccentricità $e = \frac{4}{5}$.

Sostituiamo le coordinate del punto P nell'equazione canonica dell'ellisse:

$$\frac{4}{a^2} + \frac{125}{9b^2} = 1.$$

Poiché i fuochi appartengono all'asse y, la formula dell'eccentricità è:

$$e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{125}{9b^2} = 1 & \text{conoscenza delle coordinate di un punto} \\ \dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = \dfrac{4}{5} & \text{conoscenza dell'eccentricità} \end{cases}$$

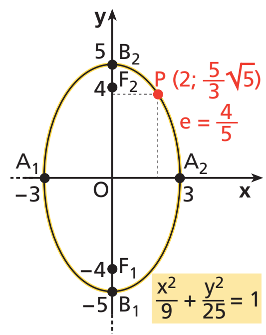
dal quale si ricava:

$$\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 25 \end{cases}$$

L'equazione dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

● Esaminiamo gli altri casi negli esercizi.



4. L'ELLISSE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

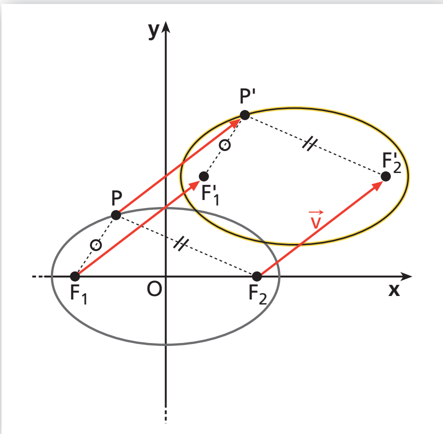
IN PRATICA
▶ Videolezione 22

L'ellisse traslata

Se trasformiamo un'ellisse con una traslazione di vettore $\vec{v}$, la curva ottenuta è ancora un'ellisse. Infatti, indicando con P' il corrispondente di un punto P dell'ellisse e con F_1' e F_2' i corrispondenti dei fuochi F_1 e F_2 dell'ellisse, vale ancora:

$$\overline{P'F_1'} + \overline{P'F_2'} = 2a.$$

L'ellisse trasformata però non ha più il centro coincidente con l'origine degli assi cartesiani.



◀ **Figura 13** Traslazione di vettore $\vec{v}$ di un'ellisse.

● Una traslazione lascia invariate le distanze fra punti, perciò $\overline{PF_1} = \overline{P'F_1'}$ e $\overline{PF_2} = \overline{P'F_2'}$.

Determiniamo l'equazione dell'ellisse ottenuta applicando alla generica ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ la traslazione di vettore $\vec{v}(p;q)$.

Le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(p;q)$ sono:

$$\begin{cases} x' = x+p \\ y' = y+q \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = x'-p \\ y = y'-q \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ alla x e alla y le espressioni trovate:

$$\frac{(x'-p)^2}{a^2}+\frac{(y'-q)^2}{b^2}=1.$$

Eliminando gli apici otteniamo l'equazione dell'ellisse cercata:

$$\boldsymbol{\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1}.$$

● Il centro dell'ellisse traslata ha coordinate $(p;q)$. L'equazione ottenuta diventa quella di un'ellisse con centro nell'origine quando $p=q=0$.

Possiamo scrivere l'equazione anche in altro modo. Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$b^2(x^2-2px+p^2)+a^2(y^2-2qy+q^2)=a^2b^2$$

$$b^2x^2-2b^2px+b^2p^2+a^2y^2-2a^2qy+a^2q^2-a^2b^2=0$$

$$b^2x^2+a^2y^2-2b^2px-2a^2qy+b^2p^2+a^2q^2-a^2b^2=0.$$

Ponendo

$$a'=b^2,\quad b'=a^2,\quad c'=-2b^2p,\quad d'=-2a^2q,$$
$$e'=b^2p^2+a^2q^2-a^2b^2,$$

otteniamo l'equazione scritta in modo più semplice:

$$\boldsymbol{a'x^2+b'y^2+c'x+d'y+e'=0}.$$

● Questa equazione è di secondo grado nelle incognite x e y, come l'equazione della circonferenza. Al contrario di questa, però, i coefficienti di x^2 e y^2, a' e b', sono fra loro diversi, pur avendo lo stesso segno.

Dalle relazioni $a'=b^2$, $b'=a^2$, $c'=-2b^2p$, $d'=-2a^2q$ si possono ricavare le coordinate $(p;q)$ del centro dell'ellisse traslata in funzione dei coefficienti dell'equazione dell'ellisse. Valgono infatti le uguaglianze:

$$p=-\frac{c'}{2a'},\qquad q=-\frac{d'}{2b'}.$$

Viceversa, data un'equazione $a'x^2+b'y^2+c'x+d'y+e'=0$, si può dimostrare che, se a' e b' hanno lo stesso segno e se l'equazione ammette soluzioni reali, allora rappresenta un'ellisse con il centro di coordinate

$$\boldsymbol{O'\left(-\frac{c'}{2a'};-\frac{d'}{2b'}\right)},$$

con assi di simmetria di equazioni

$$\boldsymbol{x=-\frac{c'}{2a'},\quad y=-\frac{d'}{2b'}}$$

e con vertici le cui coordinate si ottengono mettendo a sistema l'equazione dell'ellisse con le equazioni degli assi di simmetria.

● Per rappresentare un'ellisse traslata, negli esercizi vedremo il *metodo del completamento del quadrato*.

ESEMPIO

Rappresentiamo l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$.

Abbiamo: $a' = 1, \quad b' = 4, \quad c' = -6, \quad d' = -8, \quad e' = -3.$

Le coordinate del centro di simmetria O' dell'ellisse sono:

$$x_{O'} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3, \qquad y_{O'} = -\frac{-8}{2 \cdot 4} = 1.$$

Le equazioni degli assi di simmetria sono perciò $x = 3,\ y = 1$.

Calcoliamo le coordinate dei vertici:

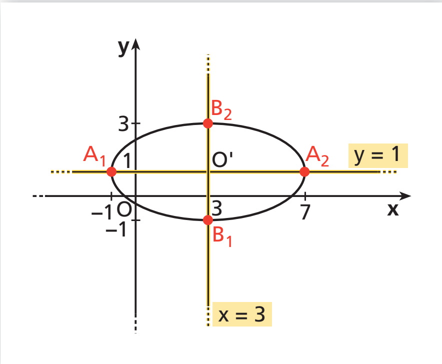
Intersechiamo gli assi di simmetria con l'ellisse.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

Due vertici sono quindi i punti $A_1(-1; 1)$ e $A_2(7; 1)$.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ x = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y_2 = 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Gli altri due vertici sono i punti $B_1(3; -1)$ e $B_2(3; 3)$.



◄ **Figura 14**

● Per determinare l'equazione della tangente a un'ellisse traslata in un suo punto $(x_0; y_0)$ è possibile usare la formula di sdoppiamento che si ottiene a partire dall'equazione dell'ellisse con le seguenti sostituzioni:

$$x^2 \rightarrow x_0 x, \qquad y^2 \rightarrow y_0 y, \qquad x \rightarrow \frac{x + x_0}{2}, \qquad y \rightarrow \frac{y + y_0}{2}.$$

● La dilatazione

Dato il punto $P(x; y)$, chiamiamo **dilatazione** la trasformazione geometrica che gli associa il punto $P'(x'; y')$ con:

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{R}^+.$$

La dilatazione e le funzioni

Data la funzione $y = f(x)$, l'equazione della sua immagine f' nella dilatazione si ottiene ricavando x e y dalle equazioni della trasformazione e sostituendo in $y = f(x)$. Si ha:

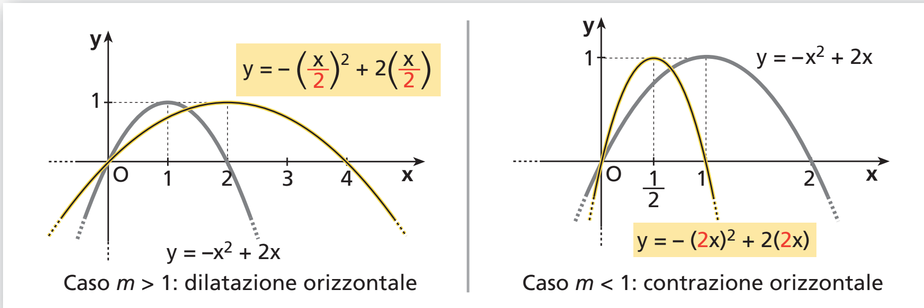
$$\boldsymbol{y = nf\left(\frac{x}{m}\right)}.$$

Casi particolari

1. Dilatazione o contrazione orizzontale

Se $\boldsymbol{n} = \mathbf{1}$, si ha $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{m}}\right)$.

▶ Figura 15



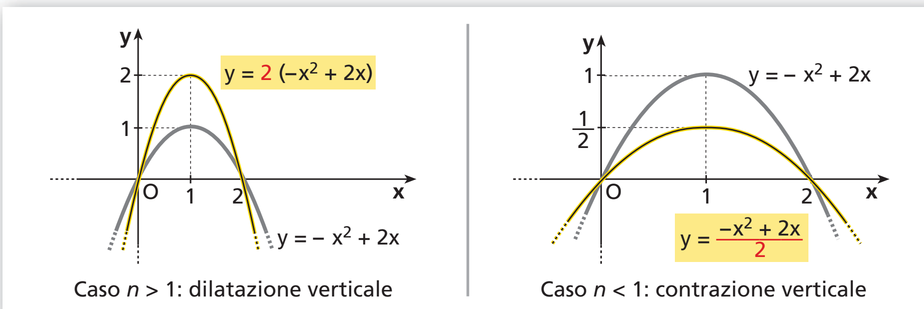
Caso $m > 1$: dilatazione orizzontale

Caso $m < 1$: contrazione orizzontale

2. Dilatazione o contrazione verticale

Se $\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$, si ha $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

▶ Figura 16



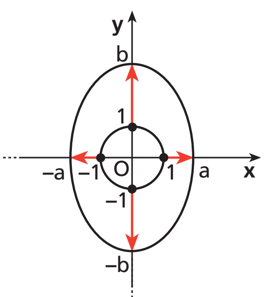
Caso $n > 1$: dilatazione verticale

Caso $n < 1$: contrazione verticale

L'ellisse come dilatazione della circonferenza

Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e la dilatazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x'}{a} \\[2mm] y = \dfrac{y'}{b} \end{cases}$$



sostituiamo in $x^2 + y^2 = 1$, eliminando gli apici:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Abbiamo ottenuto l'equazione generica dell'ellisse, che può quindi essere vista come l'immagine della circonferenza nella dilatazione.

L'area racchiusa da un'ellisse

Si può dimostrare che in una dilatazione si conserva il rapporto tra le aree e che il rapporto tra l'area s' della figura trasformata e l'area s di quella non trasformata è uguale ad ab. Se chiamiamo s l'area del cerchio e s' quella racchiusa dall'ellisse, abbiamo $s = \pi \cdot 1^2 = \pi$ e $\frac{s'}{s} = ab$, quindi:

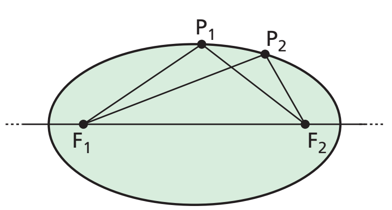
$$\boldsymbol{s' = \pi ab}.$$

L'ELLISSE DEL GIARDINIERE

Come può fare un giardiniere per creare un'aiuola a forma di ellisse?

▶ Il quesito completo a pag. 385

Prendiamo un punto qualsiasi dell'ellisse e consideriamo la sua distanza da ciascuno dei due fuochi.
Abbiamo visto che, se si cambia il punto sull'ellisse, la somma di queste due distanze rimane la stessa.
Questa proprietà viene utilizzata per disegnare un'ellisse sul terreno.



$$\overline{P_1F_1} + \overline{P_1F_2} = \overline{P_2F_1} + \overline{P_2F_2}$$

Il compasso del giardiniere

Lo strumento che si usa per disegnarla è composto da due paletti legati alle estremità di una corda e da un terzo paletto libero.
Si piantano i due paletti legati nel terreno in corrispondenza dei due fuochi, poi si fa girare il terzo paletto in modo da percorrere la corda tenendola sempre tesa; la curva disegnata è un'ellisse.

Puoi utilizzare anche tu la stessa tecnica per disegnare un'ellisse su un foglio, sostituendo i due paletti con due puntine, la corda con uno spago e il terzo paletto con una matita.
La lunghezza della corda che si utilizza per disegnare l'ellisse è uguale all'asse maggiore, cioè all'asse che passa per i due fuochi. Infatti, sappiamo che

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a,$$

dove P è un punto dell'ellisse e a è la lunghezza del semiasse maggiore.

Due casi limite

Se mettiamo i due paletti vicinissimi (possiamo pensarli coincidenti), otteniamo una circonferenza. Man mano che allontaniamo i due paletti, l'aiuola diventa sempre più oblunga.
Ovviamente, se la corda viene tirata per tutta la sua lunghezza, i due paletti finiscono nei vertici dell'ellisse, alle estremità dell'asse maggiore, e l'ellisse si riduce a un segmento.

La più grande aiuola ellittica

Si trova a Padova nella piazza del Prato della Valle. Nei tempi antichi era un luogo paludoso, ma nel 1775, per ordine del provveditore della città Andrea Memmo, iniziarono i lavori di sistemazione. Fu previsto un grande giardino a forma ellittica, circondato da un canale e da due file di statue. Si ottenne così un'isola, chiamata Isola Memmia, che occupa circa 20 000 m². Sui due assi dell'ellisse ci sono due viali e quattro ponti, e nel centro di simmetria c'è una fontana.
Lo spazio è sistemato in gran parte a prato e viene utilizzato per mercati e spettacoli. È un luogo di incontro e di aggregazione, un'ampia area verde nel centro della città.

Un'ellisse nel gelato

Con un cono di cialda e con un coltello realizza una sezione come quella nella foto. Come puoi verificare che la curva che ottieni è proprio un'ellisse?
Con un pennarello riporta la sezione su un foglio e poi misura i due assi.
Con i valori che trovi, calcola la distanza focale e segnala sul foglio.
Adesso prendi un punto qualsiasi della curva e con opportune misure verifica che vale la proprietà fondamentale dell'ellisse.

LABORATORIO DI MATEMATICA

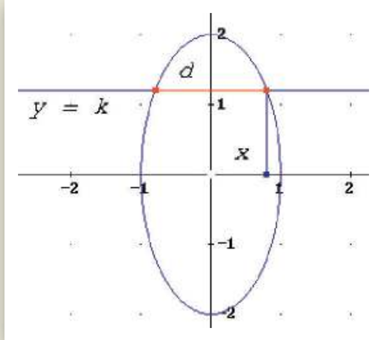
L'ELLISSE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo una funzione di Derive che in ingresso richieda un valore d e in uscita dia l'equazione dell'eventuale retta $y=k$ che intercetta, sulla semiellisse che fa parte dell'ellisse di equazione $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ ed è costituita da punti posti al di sopra e sull'asse x, una corda lunga d.
Proviamo la funzione assegnando rispettivamente a d i valori 0, 1 e 3.

L'analisi del problema

Ricaviamo l'equazione della semiellisse che sta sopra e sull'asse x, esplicitando la y dall'equazione dell'ellisse: $y = 2\sqrt{1-x^2}$.
Abbozziamo un disegno dell'ellisse data, della retta generica $y = k$ e della corda lunga d (figura 1).
Da esso deduciamo che il valore di k si ricava sostituendo $\frac{d}{2}$ a x nell'equazione della semiellisse, e dopo alcuni calcoli troviamo $y = \sqrt{4-d^2}$.
Osserviamo infine che la retta esiste se vengono assegnati dei valori di d appartenenti all'intervallo [0; 2].



▲ Figura 1

La sessione di lavoro

- Attiviamo Derive e definiamo la funzione tenendo conto dell'analisi svolta, pertanto nella riga di editazione, scriviamo:
Ret_Cor(d) : = If(d < 0 ∨ d > 2, "La retta non esiste", y = SQRT(4 − d^2))
e la immettiamo nella #1 (figura 2).
- La facciamo poi operare con i valori proposti, ottenendo le risposte che leggiamo in figura 2.

```
        Ret_Cor(d) :=
          If d < 0 ∨ d > 2
#1:         "La retta non esiste"
            y = √(4 - d^2)

#2:     Ret_Cor(0)

#3:     y = 2

#4:     Ret_Cor(1)

#5:     y = √3

#6:     Ret_Cor(3)

#7:     La retta non esiste
```

► Figura 2

Nel sito: ► 1 esercitazione guidata ► 8 esercitazioni in più

Esercitazioni

Per ognuno dei casi seguenti costruisci, con il computer, una funzione che legga i valori dei coefficienti h e k di un'ellisse di equazione $hx^2 + ky^2 = 1$ e dia in uscita i risultati indicati.

1 Le coordinate dei quattro vertici dell'ellisse.
Prova la funzione con $h = \frac{1}{25}$ e $k = \frac{1}{9}$, con $h = 1$ e $k = \frac{3}{4}$, con $h = 0$ e $k = \frac{9}{16}$.

2 Le intersezioni dell'ellisse con la retta di equazione $y = x + 4$.
Prova la funzione con $h = 1$ e $k = \frac{1}{4}$, con $h = \frac{1}{9}$ e $k = \frac{1}{16}$, con $h = \frac{1}{16}$ e $k = \frac{1}{25}$.

LA TEORIA IN SINTESI

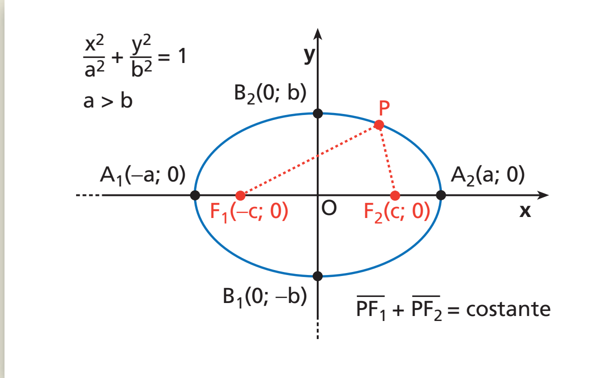
L'ELLISSE

1. L'ELLISSE E LA SUA EQUAZIONE

- **Ellisse**: luogo geometrico dei punti P per cui è costante la somma delle distanze da due punti F_1 e F_2, detti **fuochi**.
- **L'ellisse con centro nell'origine e fuochi sull'asse *x***
  - **Fuochi**: $F_1(-c; 0)$, $F_2(+c; 0)$, con $a > c$ e $a^2 - c^2 = b^2$.
  - **Vertici**: $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.
  - **Assi**: i segmenti A_1A_2 (asse maggiore) e B_1B_2 (asse minore).
  - **Eccentricità**:

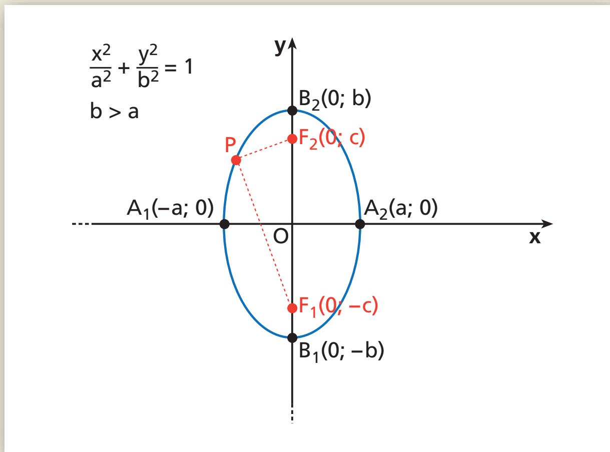
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

$0 \leq e < 1$. e indica la forma più o meno schiacciata dell'ellisse.



- **L'ellisse con centro nell'origine e fuochi sull'asse *y***
  - **Fuochi**: $F_1(0; -c)$, $F_2(0; +c)$, con $b > c$ e $b^2 - c^2 = a^2$.
  - **Vertici**: $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.
  - **Assi**: i segmenti B_1B_2 (asse maggiore), A_1A_2 (asse minore).
  - **Eccentricità**:

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.$$



2. LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UN'ELLISSE

- Considerato il sistema formato dalle equazioni della retta e dell'ellisse, si studia il segno del discriminante dell'equazione risolvente. Se:
  - $\boldsymbol{\Delta < 0}$, il sistema non ammette soluzioni reali; **la retta è esterna all'ellisse**;
  - $\boldsymbol{\Delta = 0}$, il sistema ammette due soluzioni coincidenti; **la retta è tangente all'ellisse in un punto**;
  - $\boldsymbol{\Delta > 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e distinte; **la retta è secante l'ellisse in due punti**.

Bergamini, Trifone, Barozzi **MANUALE BLU 2.0 DI MATEMATICA - Vol.3** © Zanichelli 2012 *Moduli S+L*

- Per determinare le **equazioni delle tangenti** condotte da $P(x_0; y_0)$ all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:
  - si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per P, $y - y_0 = m(x - x_0)$;
  - si scrive il sistema formato dalle equazioni del fascio e dell'ellisse:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

  - si ottiene l'equazione risolvente di secondo grado nella variabile x oppure nella variabile y;
  - si pone la condizione di tangenza, ossia $\Delta = 0$;
  - si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m:
    - se $\boldsymbol{m_1 \neq m_2}$, le rette tangenti sono due e il punto è esterno all'ellisse;
    - se $\boldsymbol{m_1 = m_2}$, la retta tangente è una sola e il punto appartiene all'ellisse;
    - se $\boldsymbol{m_1, m_2} \notin \mathbb{R}$, non esistono rette tangenti e il punto è interno all'ellisse.

- **Formula di sdoppiamento**: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

  Fornisce l'equazione della tangente a un'ellisse in un suo punto $(x_0; y_0)$.

3. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UN'ELLISSE

- L'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ contiene due coefficienti a e b, sono quindi necessarie due condizioni per determinarli. Per esempio, sono note l'eccentricità e le coordinate di un fuoco (o di un vertice).

4. L'ELLISSE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

- **Traslazione di un'ellisse mediante vettore $\vec{v}(p; q)$**

  La curva ottenuta è ancora un'ellisse, di equazione $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ con centro $(p; q)$. L'equazione è riconducibile alla forma $a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0$, dove a' e b' sono concordi.

  Viceversa, se a' e b' sono concordi e se l'equazione precedente ammette soluzioni reali, allora tale equazione rappresenta un'ellisse con centro $O'\left(-\frac{c'}{2a'}; -\frac{d'}{2b'}\right)$ e assi di simmetria di equazioni $x = -\frac{c'}{2a'}$, $y = -\frac{d'}{2b'}$.

- Una qualunque ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ può essere considerata come l'immagine della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ in una **dilatazione** di equazioni:

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

- L'**area racchiusa da un'ellisse** di semiassi a e b è:

$$A = \pi ab.$$

1. L'ELLISSE E LA SUA EQUAZIONE

▶ Teoria a pag. 386

1 Determina il luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze dai punti $(-3; 0)$ e $(3; 0)$ è 10. $\left[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\right]$

2 Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze dai punti $(-2; 0)$ e $(2; 0)$ è 14. $\left[\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{45}=1\right]$

3 Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze dai punti $A(0; -1)$ e $B(0; 1)$ è 12. $\left[\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{36}=1\right]$

4 Determina il luogo geometrico dei punti del piano la cui somma delle distanze dai punti $A(0; -4)$ e $B(0; 4)$ è uguale a 10. $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1\right]$

5 **ESERCIZIO GUIDA**

Data l'ellisse di equazione $4x^2 + 9y^2 = 36$, determiniamo la misura dei semiassi, le coordinate dei vertici e dei fuochi, l'eccentricità e rappresentiamo la curva graficamente.

Dividiamo entrambi i membri dell'equazione data per il termine noto, per ridurla nella forma canonica,

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,$$

da cui deduciamo $a = 3$, $b = 2$ e le coordinate dei vertici:

$$A_1(-3; 0),\quad A_2(3; 0),\quad B_1(0; -2),\quad B_2(0; 2).$$

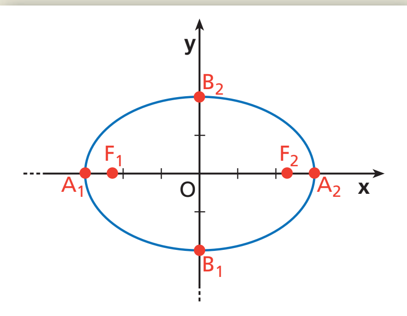
Determiniamo inoltre:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5,$$

le coordinate dei fuochi $F_1(-\sqrt{5}; 0)$, $F_2(\sqrt{5}; 0)$,

il valore dell'eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Rappresentiamo graficamente l'ellisse, dopo aver disegnato i quattro vertici.



Riconosci quali delle seguenti equazioni rappresentano ellissi e, in caso affermativo, scrivile nella forma canonica, determina la misura dei semiassi, le coordinate dei vertici e dei fuochi, l'eccentricità e rappresenta la curva graficamente.

6 a) $x^2 + 3y^2 = 1$; b) $x^2 = 9y^2 + 1$; c) $4x^2 + 25y^2 + 1 = 0$.

7 a) $y^2 + 4x^2 = 9$; b) $1 - x^2 + 25y^2 = 0$; c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=\frac{1}{3}$.

8 a) $9x^2 + y^2 = 36$; b) $x^2 - 4 = y^2$; c) $y^2 = x^2 + 3$.

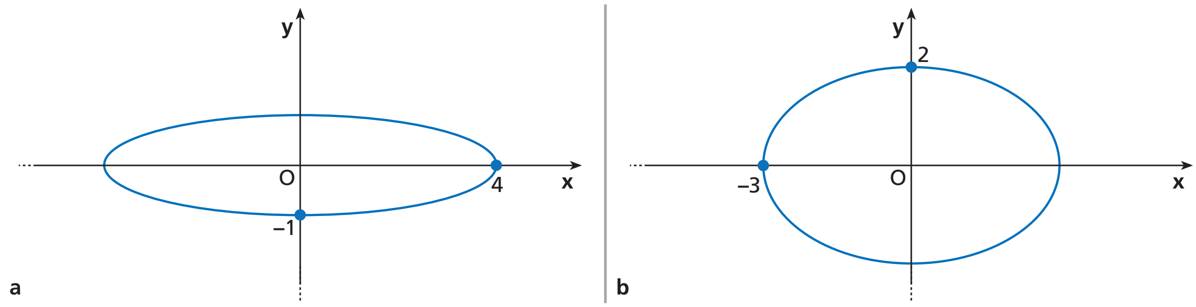
9 a) $x^2 = 9 - 9y^2$; b) $4 - x^2 - 16y^2 = 0$; c) $y^2 = \frac{15-5x^2}{3}$.

10 a) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=\frac{1}{2}$; b) $9x^2 + y^2 = 1$; c) $y = x^2 + 8x + 3$.

11 a) $y^2 = 36 - 9x^2$; b) $x^2 = \frac{16-y^2}{16}$; c) $25y^2 + x^2 - 100 = 0$.

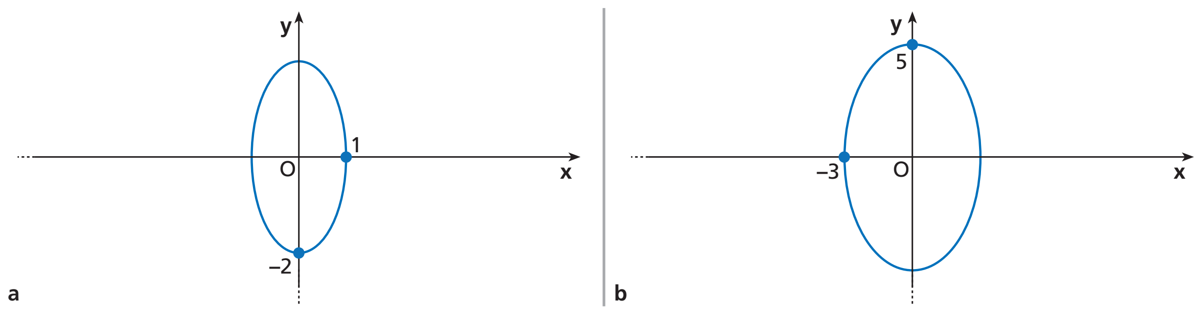
Trova le equazioni delle ellissi rappresentate nei seguenti grafici, utilizzando i dati delle figure, e determina le coordinate dei vertici, dei fuochi e l'eccentricità.

12



$\left[\frac{x^2}{16}+y^2=1;\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\right]$

13



$\left[x^2+\frac{y^2}{4}=1;\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1\right]$

Trova per quali valori di k le seguenti equazioni rappresentano un'ellisse.

14 $\frac{x^2}{9k}+\frac{y^2}{k-2}=1$ $[k>2]$

15 $x^2+(4-k)y^2=k$ $[0<k<4]$

16 Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x e con le caratteristiche indicate e calcola l'eccentricità (ricorda che a, b, c sono, rispettivamente, le misure dei semiassi e della semidistanza focale).

a) $a=4$, $b=1$. $\left[x^2+16y^2=16,\ \frac{\sqrt{15}}{4}\right]$

b) $a=2$, $c=1$. $\left[3x^2+4y^2=12,\ \frac{1}{2}\right]$

c) $b=3$, $c=2$. $\left[\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{2\sqrt{13}}{13}\right]$

d) $2a=6$, $b=\sqrt{5}$. $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,\ \frac{2}{3}\right]$

e) $b=2$, $2c=4\sqrt{3}$. $\left[x^2+4y^2=16,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

f) $a=5$, $c^2=16$. $\left[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{4}{5}\right]$

17 Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse y e con le caratteristiche indicate e calcola l'eccentricità (ricorda che a, b, c sono, rispettivamente, le misure dei semiassi e della semidistanza focale).

a) $b=3$, $a=2$. $\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right]$

b) $b=2$, $c=1$. $\left[\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1,\ \frac{1}{2}\right]$

c) $a=2$, $c=3$. $\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13}=1,\ \frac{3\sqrt{13}}{13}\right]$

d) $a=2$, $2b=8$. $\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

e) $c^2=36$, $2b=20$. $\left[\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1,\ \frac{3}{5}\right]$

f) $2a=6$, $c=2$. $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{13}=1,\ \frac{2\sqrt{13}}{13}\right]$

18 Scrivi l'equazione di un'ellisse che ha i fuochi sull'asse y, asse minore lungo 4 e distanza focale uguale a 2.

$$\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1\right]$$

19 Determina l'equazione di un'ellisse che ha i fuochi sull'asse x, semiasse maggiore lungo 6 e distanza focale uguale a 4.

$$\left[\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1\right]$$

20 Trova l'equazione dell'ellisse che ha i fuochi sull'asse x, asse maggiore lungo $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ e asse minore lungo 4.

$$\left[\frac{3x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\right]$$

21 **TEST** An ellipse has the centre at the point $(-4; 6)$ and passes through the points $(-4; 9)$ and $(2; 6)$. An equation that describes this ellipse is:

A $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y+6)^2}{36}=1.$

B $\frac{(x-4)^2}{36}+\frac{(y+6)^2}{9}=1.$

C $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-6)^2}{36}=1.$

D $\frac{(x+4)^2}{36}+\frac{(y-6)^2}{9}=1.$

(CAN *Barry Mabillard Learning Centre,* Practice Exam)

22 **VERO O FALSO?**

a) L'eccentricità dell'ellisse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ è $\frac{\sqrt{2}}{2}$. V F

b) L'ellisse di equazione $x^2+9y^2=36$ ha i fuochi sull'asse x. V F

c) Se i due semiassi di un'ellisse sono uguali, l'eccentricità è 1. V F

d) L'ellisse di equazione $9x^2+4y^2=1$ ha un vertice nel punto $\left(0; \frac{1}{3}\right)$. V F

e) L'ellisse di eccentricità $\frac{1}{10}$ è più schiacciata rispetto a quella di eccentricità $\frac{1}{2}$. V F

23 **COMPLETA** la seguente tabella.

Equazione	Fuochi	Eccentricità
$\frac{x^2}{4}+y^2=1$	$F_1(\ldots;\ldots)$, $F_2(\ldots;\ldots)$	$e=\ldots$
$\frac{x^2}{\ldots}+\frac{y^2}{\ldots}=1$	$F_1(0;+8)$, $F_2(0;-8)$	$e=\frac{4}{5}$
$\frac{x^2}{\ldots}+\frac{y^2}{16}=1$	$F_1(+3;0)$, $F_2(-3;0)$	$e=\ldots$
$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{\ldots}=1$	$F_1(\ldots;0)$, $F_2(\ldots;0)$	$e=\frac{\sqrt{5}}{3}$
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\ldots}=1$	$F_1(0;+4)$, $F_2(0;-4)$	$e=\ldots$

24 **ASSOCIA** a ciascuna equazione la caratteristica dell'ellisse che essa rappresenta.

a) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1.$ b) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1.$ c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1.$

1) Eccentricità $\frac{1}{2}$. 2) Fuochi $(\pm 1; 0)$. 3) Vertici $(\pm 2; 0)$.

25 Per quali valori di k l'espressione $\frac{2k-1}{k}$ può rappresentare l'eccentricità di un'ellisse non degenere? $\left[\frac{1}{2} \leq k < 1\right]$

26 TEST Find the eccentricity of the ellipse: $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$.

A $\frac{\sqrt{13}}{3}$. B $\frac{1}{2}$. C $\frac{\sqrt{5}}{3}$. D $\frac{3\sqrt{13}}{13}$. E $\frac{\sqrt{5}}{13}$.

(USA *Montana Council of Teachers of Mathematics, Math Contest*, 2007)

L'ellisse e i parametri

27 **ESERCIZIO GUIDA**

Data l'equazione

$$\frac{x^2}{k+2} + \frac{y^2}{3-k} = 1,$$

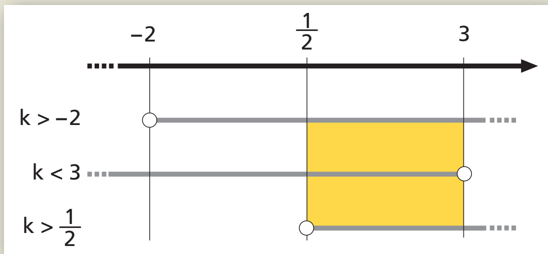
determiniamo i valori da attribuire al parametro k affinché rappresenti un'ellisse con i fuochi sull'asse delle x.

Affinché l'equazione data sia l'equazione canonica di un'ellisse, devono valere le uguaglianze:

$$a^2 = k + 2 \text{ e } b^2 = 3 - k.$$

Deve perciò essere: $k + 2 > 0$ e $3 - k > 0$.
I fuochi stanno sull'asse x, quindi deve valere la disuguaglianza:

$$a > b \rightarrow a^2 > b^2 \rightarrow k + 2 > 3 - k.$$



Risolviamo il sistema costituito dalle tre disequazioni: $\begin{cases} k+2>0 \\ 3-k>0 \\ k+2>3-k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k>-2 \\ k<3 \\ k>\frac{1}{2} \end{cases}$

Le soluzioni del sistema sono $\frac{1}{2} < k < 3$, quindi l'equazione data rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse x per $\frac{1}{2} < k < 3$.

28 Data l'equazione

$$\frac{x^2}{1-2k} + \frac{y^2}{k+4} = 1,$$

determina i valori da attribuire al parametro k affinché rappresenti un'ellisse con i fuochi sull'asse x. $[-4 < k < -1]$

29 È data l'equazione:

$$(3k-1)x^2 + (k+5)y^2 = 3k^2 + 14k - 5.$$

Stabilisci per quali valori del parametro k essa rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse y. $[k > 3]$

30 Determina i valori del parametro k affinché l'equazione

$$\frac{x^2}{2k+3} + \frac{y^2}{3-k} = 1:$$

a) rappresenti un'ellisse;
b) rappresenti una circonferenza.

$\left[\text{a)} -\frac{3}{2} < k < 3; \text{b)}\ k = 0\right]$

31 Dopo aver trovato i valori di k affinché l'equazione

$$\frac{x^2}{4k+4} + \frac{y^2}{3+k} = 1$$

rappresenti un'ellisse, determina quello corrispondente all'ellisse passante per il punto $(2; \sqrt{2})$. $[k > -1; k = 1]$

32 Individua i valori di k affinché la conica di equazione

$$\frac{x^2}{2k+7}+\frac{y^2}{3+k}=1$$

sia un'ellisse con un fuoco di coordinate $(\sqrt{7}; 0)$.

$[k=3]$

33 Determina i valori di k affinché l'equazione

$$\frac{x^2}{2k-1}+\frac{y^2}{5k+2}=1:$$

a) sia un'ellisse con i fuochi sull'asse delle y;
b) abbia un fuoco di coordinate $(0; 3)$;
c) abbia un vertice di coordinate $(-3; 0)$;
d) abbia eccentricità $e=\sqrt{\frac{6}{7}}$.

$\left[\text{a) } k>\frac{1}{2};\text{ b) } k=2;\text{ c) } k=5;\text{ d) } k=1\right]$

34 a) Per quali valori di k l'equazione

$$kx^2-(k-1)y^2=k+1$$

rappresenta un'ellisse?
b) Per quali un'ellisse con i fuochi sull'asse x?
c) Traccia il grafico per $k=\frac{1}{8}$.

$\left[\text{a) } 0<k<1;\text{ b) } 0<k<\frac{1}{2}\right]$

35 Determina k in modo che l'equazione

$$(2k+1)x^2+4ky^2-1=0$$

rappresenti un'ellisse:
a) qualsiasi;
b) passante per $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$;
c) con i fuochi sull'asse x ed eccentricità $\frac{1}{4}$.

$\left[\text{a) } k>0;\text{ b) } k=\frac{1}{6};\text{ c) } k=\frac{4}{7}\right]$

36 Considera l'equazione $(k+2)x^2-ky^2=1$ e trova per quali valori di k si ha:
a) un'ellisse;
b) una circonferenza;
c) un'ellisse con i fuochi sull'asse x e un'ellisse con i fuochi sull'asse y;
d) un'ellisse con un fuoco di coordinate $(1; 0)$.

Posto $k=-\frac{1}{4}$, trova i vertici del quadrato inscritto nell'ellisse.

$\left[\text{a) } -2<k<0;\text{ b) } k=-1;\text{ c) } -2<k<-1, -1<k<0;\text{ d) } k=-\sqrt{2}; \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

2. LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UN'ELLISSE

▶ Teoria a pag. 394

Nei seguenti esercizi sono assegnate l'equazione di un'ellisse e di una retta. Stabilisci la posizione della retta rispetto all'ellisse e, nei casi in cui la retta non sia esterna, determina le coordinate dei punti di intersezione.

37 $4x^2+9y^2=36$; $\quad x-y-7=0$. [esterna]

38 $16x^2+25y^2=100$; $\quad x-2=0$. $\left[\text{secante: } \left(2; -\frac{6}{5}\right), \left(2; \frac{6}{5}\right)\right]$

39 $81x^2+196y^2=441$; $\quad 2y+3=0$. $\left[\text{tangente: } \left(0; -\frac{3}{2}\right)\right]$

40 $x^2+4y^2=40$; $\quad x+6y-20=0$. [tangente: $(2; 3)$]

41 $4x^2+21y^2=85$; $\quad 2x-9y-17=0$. $\left[\text{secante: } \left(-\frac{1}{2}; -2\right), (4; -1)\right]$

42 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{8}=35$, determina la lunghezza della corda individuata sulla retta di equazione $x-2y+7=0$.

$\left[48\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

43 Data l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 16$, trova la lunghezza della corda individuata sulla retta che passa per i punti $A\left(1; \frac{5}{2}\right)$ e $B(-2; 1)$. $[2\sqrt{5}]$

44 Dopo aver determinato l'equazione dell'ellisse avente due vertici di coordinate (6; 0) e (0; 4), calcola la lunghezza della corda individuata sulla bisettrice del secondo e quarto quadrante. $\left[\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1; \frac{24\sqrt{26}}{13}\right]$

45 Calcola l'area del triangolo ABF, dove A e B sono i punti di intersezione della retta di equazione $y = -2x + 3$ con l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ e F è il fuoco dell'ellisse di ascissa negativa. [12]

46 Nel fascio di rette parallele all'asse x, determina le rette sulle quali l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{12} = 1$ stacca una corda di lunghezza $\sqrt{2}$. $[y = \pm 3]$

47 Nel fascio di rette di centro $O(0; 0)$, individua su quali rette l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ stacca una corda di lunghezza $\sqrt{10}$. $\left[y = \pm \frac{x}{2}\right]$

48 Scrivi le equazioni dei lati del rettangolo di perimetro 28 inscritto nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{32} = 1$. $\left[x = \pm 3, y = \pm 4; x = \pm \frac{51}{25}, y = \pm \frac{124}{25}\right]$

Le equazioni delle tangenti a un'ellisse

49 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le equazioni delle rette tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 9$, condotte dal punto $P(-9; 0)$.

L'equazione della retta generica passante per il punto $P(-9; 0)$ è $y = m(x + 9)$.

Scriviamo il sistema retta-ellisse per determinare i valori del coefficiente angolare m:

$$\begin{cases} y = mx + 9m \\ x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases}$$

Determiniamo l'equazione risolvente:

$$x^2 + 2(mx + 9m)^2 = 9.$$

Riduciamo l'equazione risolvente a forma normale:

$$x^2 + 2(m^2x^2 + 18m^2x + 81m^2) - 9 = 0$$
$$(1 + 2m^2)x^2 + 36m^2x + 162m^2 - 9 = 0.$$

Imponiamo che Δ $\left(\text{in questo caso } \frac{\Delta}{4}\right)$ sia nullo, in questo modo la retta intersecherà l'ellisse in due punti coincidenti:

$$(18m^2)^2 - (1 + 2m^2)(162m^2 - 9) = 0$$
$$324m^4 - 162m^2 - 324m^4 + 9 + 18m^2 = 0$$
$$144m^2 - 9 = 0$$
$$m^2 = \frac{9}{144} \rightarrow m^2 = \frac{1}{16} \rightarrow m = \pm \frac{1}{4}.$$

Sostituiamo i valori ottenuti in $y = mx + 9m$. Ricaviamo così le equazioni delle rette tangenti all'ellisse uscenti da $P(-9; 0)$:

$$y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}.$$

50 Conduci dal punto $P\left(6; -\frac{3}{2}\right)$ le tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 9$. $[2y + 3 = 0; 4x + 6y - 15 = 0]$

51 Determina le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $9x^2 + 16y^2 = 144$, condotte dai suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani. $[x = \pm 4; y = \pm 3]$

52 Scrivi le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 9y^2 = 25$, parallele alla retta $\frac{4}{3}x + 3y - 1 = 0$.
$[4x + 9y + 25 = 0; 4x + 9y - 25 = 0]$

53 Determina l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $x^2 + 3y^2 = 36$, condotta dal suo punto del primo quadrante di ordinata 3.
$[x + 3y - 12 = 0]$

54 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$, determina i valori del parametro q per cui le rette del fascio di equazione $x - 6y + q = 0$:

a) intersecano l'ellisse in due punti distinti;
b) sono tangenti all'ellisse;
c) sono esterne all'ellisse.
$[\text{a) } -20 < q < 20; \text{ b) } q = \pm 20; \text{ c) } q < -20 \vee q > 20]$

55 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ e il fascio di rette di equazione $y = mx - 4$, determina i valori del parametro m che corrispondono a rette che:

a) intersecano l'ellisse in due punti distinti;
b) sono tangenti all'ellisse;
c) sono esterne all'ellisse.
$[\text{a) } m < -1 \vee m > 1; \text{ b) } m = \pm 1; \text{ c) } -1 < m < 1]$

56 Trova il valore di k affinché l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{k+6} + \frac{y^2}{1-k} = 1$$

sia tangente alla retta di equazione $y = -2x + 4$.
$[k = -3]$

57 Scrivi le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 9$, condotte dal punto $\left(3; \frac{3}{2}\right)$.
Indicati con R e S i punti di contatto, trova l'area del triangolo PRS.
$\left[x - 3 = 0; x + 4y - 9 = 0; \frac{3}{2}\right]$

58 Considera l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 20$ e determina il perimetro del quadrato circoscritto all'ellisse che ha i vertici sugli assi cartesiani.
$[20\sqrt{2}]$

59 Calcola l'area del triangolo equilatero circoscritto all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ con un vertice sul semiasse positivo delle y.
$[2\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})]$

La formula di sdoppiamento

60 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $3x^2 + y^2 = 4$, nel suo punto del quarto quadrante, di ascissa 1.

Determiniamo l'ordinata del punto, sostituendo l'ascissa 1 nell'equazione dell'ellisse:

$$3 + y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad y = \pm 1.$$

Il punto cercato, nel quarto quadrante, ha ordinata -1.

Applichiamo la formula di sdoppiamento:

$$3x_0x + y_0y = 4 \quad \rightarrow \quad 3x - y = 4.$$

L'equazione della tangente cercata è:

$$y = 3x - 4.$$

61 Scrivi le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $9x^2 + 2y^2 = 54$, nei suoi punti di ordinata 3.
$[y = \pm 3x + 9]$

62 Trova l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 4$, nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$, che si trova nel quarto quadrante.

$[2x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0]$

63 Determina l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $x^2 + 9y^2 = 9$, nel suo punto di intersezione con la retta di equazione $x - 6\sqrt{2}\,y = 0$, che si trova nel primo quadrante.

$\left[\frac{2\sqrt{2}}{9}x + \frac{1}{3}y = 1\right]$

64 Scrivi l'equazione della retta tangente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{36} = 1$, nel suo punto di ordinata $-3\sqrt{3}$, che si trova nel terzo quadrante.

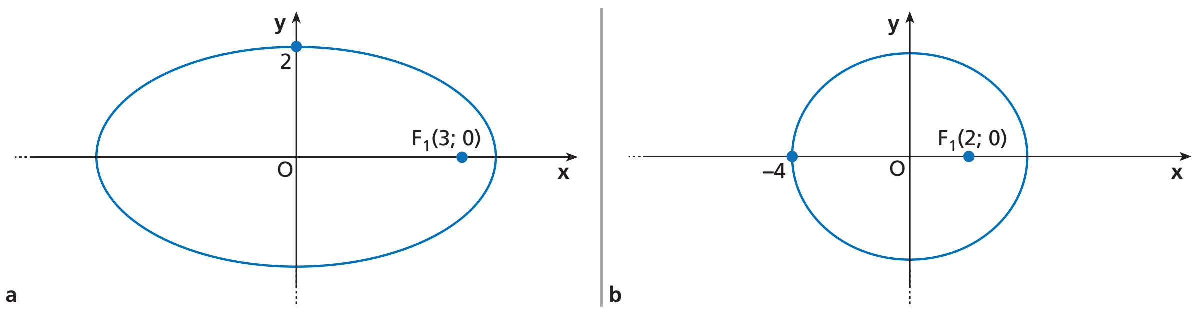
$\left[\frac{\sqrt{2}}{8}x + \frac{\sqrt{3}}{12}y + 1 = 0\right]$

3. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UN'ELLISSE

▶ Teoria a pag. 396

IN PRATICA
▶ Videolezione 21

65 Trova le equazioni delle ellissi dei seguenti grafici, utilizzando i dati delle figure.



$\left[\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1;\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1\right]$

66 TEST Determine the equation of the ellipse having vertices $(\pm 10; 0)$ and foci $(\pm 6; 0)$.

A $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$

B $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1.$

C $100x^2 + 36y^2 = 1.$

D $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$

E $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1.$

(USA *Indiana State Mathematics Contest*, 2004)

67 Scrivi l'equazione dell'ellisse riferita agli assi avente un vertice in $(0; -3)$ e semiasse sull'asse x di misura $2\sqrt{3}$.

$[9x^2 + 12y^2 = 108]$

68 Trova l'equazione dell'ellisse con centro in O avente un fuoco in $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ e l'asse su cui non giace il fuoco di lunghezza $\sqrt{7}$.

$[7x^2 + 16y^2 = 28]$

69 Determina e rappresenta l'equazione dell'ellisse con centro in O avente un fuoco in $(0; -2\sqrt{5})$ e un vertice in $(-4; 0)$.

$\left[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1\right]$

70 Trova l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse delle y avente un vertice in $(0; 4)$ ed eccentricità $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1\right]$

71 Determina l'equazione dell'ellisse di eccentricità $\frac{1}{2}$, sapendo che ha un vertice in $(0; -\sqrt{3})$.
$[3x^2 + 4y^2 = 12; 4x^2 + 3y^2 = 9]$

72 Determina l'equazione dell'ellisse con centro di simmetria nell'origine, di eccentricità $e = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e avente un fuoco nel punto $(0; 4)$.
$\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20} = 1\right]$

73 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione dell'ellisse passante per i punti $P(1; 2)$ e $Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$.

Consideriamo l'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e imponiamo il passaggio per P e Q.

Sostituendo le coordinate di P e Q, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{3}{4a^2} + \frac{9}{2b^2} = 1 \end{cases}$$

Per risolverlo più facilmente, conviene porre $\frac{1}{a^2} = t$ e $\frac{1}{b^2} = v$.

Si ha:

$$\begin{cases} t + 4v = 1 \\ \frac{3}{4}t + \frac{9}{2}v = 1 \end{cases} \to \begin{cases} t = 1 - 4v \\ 3(1 - 4v) + 18v = 4 \end{cases} \to \begin{cases} t = 1 - 4v \\ 3 - 12v + 18v = 4 \end{cases} \to \begin{cases} t = 1 - 4v \\ 6v = 1 \end{cases} \to \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ v = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Tenendo conto delle posizioni effettuate, otteniamo:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{3} \text{ e } \frac{1}{b^2} = \frac{1}{6}.$$

L'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$.

74 Qual è l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passante per i punti $\left(\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$? $[x^2 + 4y^2 = 4]$

75 Scrivi l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passante per i punti $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3\sqrt{7}}{10}\right)$ e $\left(-2; \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$.
$[x^2 + 25y^2 = 16]$

76 Scrivi l'equazione dell'ellisse avente un vertice nel punto $(-3; 0)$ e passante per $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -2\right)$.
$[8x^2 + 9y^2 = 72]$

77 Qual è l'equazione dell'ellisse passante per i punti $(-2\sqrt{2}; 2)$ e $(\sqrt{5}; 4)$? $\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1\right]$

78 Determina l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse delle y, avente un vertice in $(2; 0)$ e passante per $\left(1; \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.
$\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1\right]$

79 Un'ellisse ha un fuoco in $(0; 2\sqrt{2})$ e passa per $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}; 2\right)$. Qual è la sua equazione? $\left[x^2 + \frac{y^2}{9} = 1\right]$

80 Determina l'equazione dell'ellisse con centro di simmetria nell'origine, di eccentricità $e=\frac{3\sqrt{17}}{17}$ e avente un fuoco nel punto (0; 3).
$\left[\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{17}=1\right]$

81 Determina l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con i fuochi sull'asse x, di eccentricità $e=\frac{\sqrt{7}}{3}$ e avente un vertice di coordinate $(-3; 0)$.
$\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1\right]$

82 Trova l'equazione dell'ellisse con centro di simmetria nell'origine, di eccentricità $e=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ e avente un fuoco nel punto $(-3; 0)$.
$\left[\frac{x^2}{10}+y^2=1\right]$

83 Scrivi l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, di eccentricità $e=\frac{\sqrt{5}}{5}$ e avente il semiasse minore $a=4$.
$\left[\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1\right]$

84 Determina l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x, di eccentricità $e=\sqrt{\frac{2}{3}}$, sapendo che passa per $(-\sqrt{3}; -\sqrt{2})$.
$\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1\right]$

85 Trova l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse y, di eccentricità $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$, sapendo che passa per $(1; -\sqrt{3})$.
$\left[\frac{x^2}{3}+\frac{2y^2}{9}=1\right]$

86 Scrivi l'equazione canonica dell'ellisse che nel suo punto di ascissa 1 ha per tangente la retta di equazione $x+6\sqrt{2}y-9=0$.
$\left[\frac{x^2}{9}+y^2=1\right]$

87 L'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ è tangente alla retta di equazione $\sqrt{3}x-2y-4=0$. Trova il valore di a.
[2]

88 Dopo aver determinato l'equazione canonica dell'ellisse passante per i punti $A(2; 0)$ e $B\left(1; -\frac{3}{2}\right)$, calcola l'area del triangolo ABC, dove C è il punto di intersezione delle tangenti all'ellisse condotte da A e B.
$\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1; \frac{1}{2}\right]$

89 Un'ellisse con centro nell'origine O ha un vertice di coordinate $(\sqrt{10}; 0)$ ed è tangente alla retta di equazione $y=6x-20$. Qual è l'equazione dell'ellisse?
$\left[\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{40}=1\right]$

90 Trova l'equazione dell'ellisse che ha un vertice di coordinate (0; 3) e i fuochi sull'asse x distanti $\frac{18}{5}\sqrt{5}$ dalla retta di equazione $y=3x$.
$[x^2+9y^2=81]$

91 Determina l'equazione di un'ellisse sapendo che ha i fuochi di coordinate $(\pm\sqrt{15}; 0)$ e che il quadrato inscritto nell'ellisse avente i lati paralleli agli assi cartesiani ha perimetro 16.
$[x^2+4y^2=20]$

4. L'ELLISSE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

▶ Teoria a pag. 397

IN PRATICA ▶ Videolezione 22

L'ellisse traslata

92 **ESERCIZIO GUIDA**

Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, determiniamo l'equazione dell'ellisse corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v}(3; -4)$ e rappresentiamo le due ellissi.

Nell'ellisse data vale $a=2$ e $b=3$ e dunque i vertici sono $A_1(-2; 0)$, $A_2(2; 0)$, $B_1(0; -3)$ e $B_2(0; 3)$.
Scriviamo le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(3; -4)$:

$$\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y-4 \end{cases}$$

Ricaviamo la x e la y:

$$\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' + 4 \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ alla x e alla y le espressioni trovate:

$$\frac{(x'-3)^2}{4} + \frac{(y'+4)^2}{9} = 1.$$

Eliminando gli apici, otteniamo l'equazione dell'ellisse cercata:

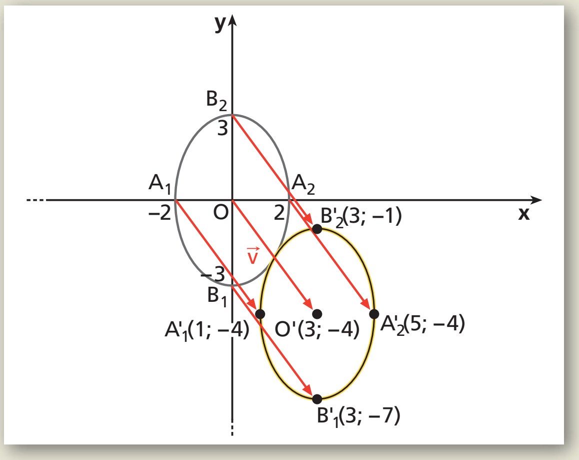
$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo l'equazione:

$$\frac{9(x^2-6x+9)+4(y^2+8y+16)}{36} = \frac{36}{36} \quad \rightarrow \quad 9x^2 + 4y^2 - 54x + 32y + 109 = 0.$$

Il centro O' dell'ellisse traslata corrisponde nella traslazione al centro $O(0; 0)$ dell'ellisse data; per trovare O' sostituiamo, nelle equazioni della traslazione, le coordinate di O a x e y:

$$\begin{cases} x' = 0 + 3 \\ y' = 0 - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = -4 \end{cases}$$



Il centro dell'ellisse traslata è $O'(3; -4)$.
Gli assi di simmetria dell'ellisse traslata sono le rette per O' parallele agli assi cartesiani:

$$x = 3 \quad \text{e} \quad y = -4.$$

I vertici dell'ellisse traslata sono i corrispondenti dei vertici dell'ellisse data.
Sostituendo nelle equazioni della traslazione alla x e alla y le coordinate dei vertici otteniamo:

$$A'_1(1; -4), A'_2(5; -4), B'_1(3; -7), B'_2(3; -1).$$

93 Determina l'equazione e disegna l'ellisse ottenuta dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ mediante la traslazione di vettore $\vec{v}(2; -1)$.
[$3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 4 = 0$]

94 Scrivi l'equazione e disegna l'ellisse ottenuta dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ mediante la traslazione di vettore $\vec{v}(-1; 1)$; scrivi le coordinate dei fuochi dell'ellisse traslata.
[$x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$; $F_1(0; 1)$, $F_2(-2; 1)$]

95 Una traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$ fa corrispondere l'origine del sistema di riferimento al vertice di ascissa maggiore dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. Determina le componenti del vettore e l'equazione dell'ellisse traslata.
[$a = 5$, $b = 0$; $4x^2 + 25y^2 - 40x = 0$]

96 Trova l'ellisse corrispondente all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ nella traslazione che fa corrispondere al fuoco di ordinata negativa il punto $F'(3; 0)$.
[$25x^2 + 16y^2 - 150x - 96y - 31 = 0$]

97 Scrivi l'equazione dell'ellisse che ha il centro di simmetria di coordinate $(3; -1)$, l'asse maggiore parallelo all'asse x e lungo 4 e l'asse minore lungo 2.
$\left[\frac{(x-3)^2}{4} + (y+1)^2 = 1\right]$

98 Find the right hand focus of the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.
Write a new equation which shifts this ellipse so that the right hand focus sits on the origin.

$[F(3; 0); 16x^2+25y^2+96x-256=0]$

Il metodo del completamento del quadrato

99 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le caratteristiche dell'ellisse di equazione $9x^2+25y^2-54x-100y-44=0$ e tracciamone poi il grafico.

Risolviamo l'esercizio in due modi.

1. Metodo del completamento del quadrato

Cerchiamo di scrivere l'equazione data nella forma:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1.$$

Riscriviamo l'equazione data raggruppando i termini con x e quelli con y:

$$9x^2-54x+25y^2-100y-44=0$$
$$9(x^2-6x)+25(y^2-4y)-44=0.$$

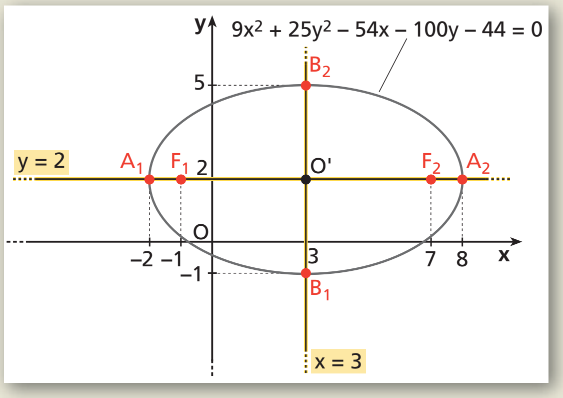
Per avere il quadrato di un binomio all'interno di ogni parentesi, occorre aggiungere il termine noto. Aggiungiamo a entrambi i membri i termini mancanti:

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2-4y+4)-44=81+100$$
$$9(x-3)^2+25(y-2)^2=225.$$

Dividendo entrambi i membri per 225 si ha:

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1.$$

Il centro di simmetria è (3; 2), i semiassi misurano 5 e 3.



2. Considerata l'**equazione generica** $a'x^2+b'y^2+c'x+d'y+e=0$, per l'ellisse data abbiamo:

$$a'=9,\ b'=25,\ c'=-54,\ d'=-100,\ e'=-44.$$

Troviamo le coordinate del centro di simmetria O′ dell'ellisse:

$$x_{O'}=-\frac{c'}{2a'}=-\frac{-54}{2\cdot 9}=3; \qquad y_{O'}=-\frac{d'}{2b'}=-\frac{-100}{2\cdot 25}=2.$$

Pertanto è O′(3; 2).
Gli assi di simmetria sono perciò:

$$x=3, \qquad y=2.$$

Calcoliamo le coordinate dei vertici intersecando gli assi di simmetria con l'ellisse:

$$\begin{cases}9x^2+25y^2-54x-100y-44=0\\ y=2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x_1=-2\\ y=2\end{cases} \vee \begin{cases}x_2=8\\ y=2\end{cases}$$

Due vertici sono i punti $A_1(-2; 2)$ e $A_2(8; 2)$.

$$\begin{cases} 9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ x = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y_2 = 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

Gli altri due vertici sono i punti $B_1(3; -1)$ e $B_2(3; 5)$.

Essendo $a = 5$ e $b = 3$:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4.$$

Quindi i fuochi sono i punti $F_1(-1; 2)$ e $F_2(7; 2)$.

Determina le caratteristiche delle ellissi aventi le seguenti equazioni e rappresentale.

100 $9x^2 + y^2 = 6y$

101 $4x^2 + y^2 + 8x = 0$

102 $25x^2 + 9y^2 - 100x - 18y - 116 = 0$

103 $x^2 + 4y^2 + 2x + 8y + 4 = 0$

104 $9x^2 + y^2 - 18x + 4y + 12 = 0$

105 $2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$

106 $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y + 12 = 0$

107 $4x^2 + y^2 - 4x - 35 = 0$

108 $x^2 + 9y^2 - 6x = 0$

109 $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$

110 $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$

111 $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$

112 Verifica che l'equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$ non corrisponde ad alcun punto del piano cartesiano.

113 Verifica che l'equazione $4x^2 + y^2 + 4x + 6y + 10 = 0$ rappresenta un'ellisse degenere nel suo centro.

114 Rappresenta il luogo geometrico dei punti del piano per i quali la somma delle distanze dai punti $F_1(-2; 2)$ e $F_2(4; 2)$ è uguale a 10. $[16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0]$

115 Determina l'equazione dell'ellisse avente centro di simmetria $O'(-1; 3)$, gli assi paralleli agli assi cartesiani e due vertici nei punti $A(-3; 3)$ e $B(-1; 4)$. $[x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0]$

116 Scrivi l'equazione dell'ellisse di eccentricità $e = \frac{1}{2}$ avente centro di simmetria $O'(-2; 2)$ e i fuochi sulla retta di equazione $x = -2$, distanti fra loro 4. $[4x^2 + 3y^2 + 16x - 12y - 20 = 0]$

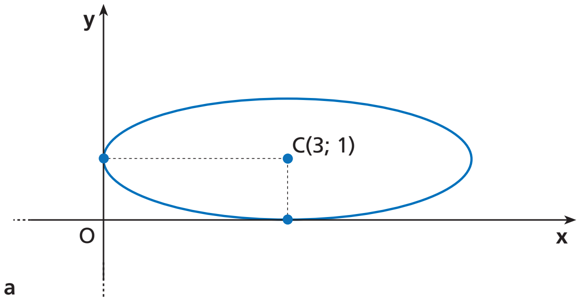
117 Trova l'equazione dell'ellisse con i fuochi $F_1(0; -1)$ e $F_2(2; -1)$ e semiasse maggiore di lunghezza $a = \sqrt{15}$. $[14x^2 + 15y^2 - 28x + 30y - 181 = 0]$

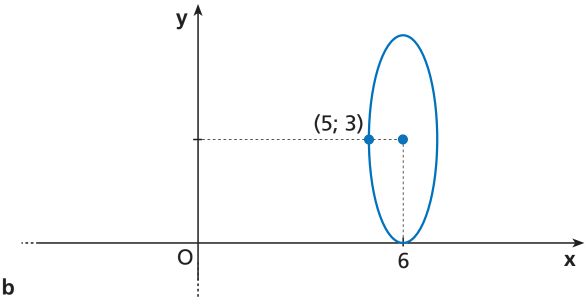
118 Qual è l'equazione dell'ellisse con i fuochi $F_1(-2; -2)$ e $F_2(-2; 2)$ e semiasse minore di lunghezza $a = 1$? $[5x^2 + y^2 + 20x + 15 = 0]$

119 Trova per quali valori di k l'equazione $x^2 + 4y^2 - 6x + 2y + k = 0$ rappresenta un'ellisse non degenere. $\left[k < \frac{37}{4}\right]$

120 Trova per quali valori di k l'equazione $x^2 + 2y^2 + 3x - y - 2k = 0$ rappresenta un'ellisse non degenere. $\left[k > -\frac{19}{16}\right]$

121 Trova le equazioni delle ellissi dei seguenti grafici, utilizzando i dati delle figure.





[$x^2 + 9y^2 - 6x - 18y + 9 = 0$; $9x^2 + y^2 - 108x - 6y + 324 = 0$]

L'ellisse come dilatazione di una circonferenza

122 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo i parametri $a, b \in \mathbb{R}^+$ della dilatazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$$

affinché la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 sia trasformata nell'ellisse di equazione:

$$4x^2 + 9y^2 = 1.$$

Ricaviamo la x e la y dalle equazioni della dilatazione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{a} \\ y = \dfrac{y'}{b} \end{cases}$$

L'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 = 1$. Sostituiamo in tale equazione alla x e alla y le espressioni trovate:

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Affinché l'equazione trovata sia l'equazione dell'ellisse deve valere:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} = 4 \\ \dfrac{1}{b^2} = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{4} \\ b^2 = \dfrac{1}{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \pm\dfrac{1}{2} \\ b = \pm\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Poiché si richiede che a e b siano positivi, i valori cercati sono $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = \dfrac{1}{3}$.

123 Determina i parametri a e b della dilatazione di equazioni $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$, affinché la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 sia trasformata nell'ellisse di equazione $4x^2 + 16y^2 = 16$. [$a = 2$; $b = 1$]

124 Determina i parametri a e b della dilatazione di equazioni $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$, affinché la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1 sia trasformata nell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} = 1$. [$a = 8$; $b = 6$]

125 Scrivi le equazioni di una dilatazione che trasforma la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 16$ nell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

$$\left[\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{y}{2} \end{cases}\right]$$

126 Determina le equazioni di una dilatazione che trasforma l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{81} = 1$ nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$.
$\left[\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{y}{3} \end{cases}\right]$

127 Dopo aver rappresentato l'ellisse di equazione $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23 = 0$, trova l'equazione della curva corrispondente nella trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases}$ e rappresenta tale curva.
$[x^2 + y^2 - 6x - 4y - 23 = 0]$

L'area racchiusa da un'ellisse

128 Calcola l'area della parte di piano racchiusa dall'ellisse di equazione $3x^2 + 4y^2 = 4$. $\left[\frac{2}{3}\pi\sqrt{3}\right]$

129 Un'ellisse con i fuochi sull'asse x ha eccentricità $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e passa per il punto $(2; 3)$. Trova l'area racchiusa dall'ellisse. $[20\pi]$

130 Una circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 = 9$ e un'ellisse con centro nell'origine ha come asse maggiore il diametro della circonferenza che si trova sull'asse x e un fuoco di ascissa $\sqrt{5}$. Trova l'area delimitata dalle due curve contenuta nel semipiano con $y \geq 0$.
$\left[\frac{3}{2}\pi\right]$

La rappresentazione grafica di particolari funzioni

131 **ESERCIZIO GUIDA**

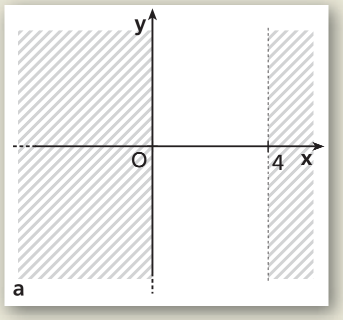
Dopo averne determinato il dominio, rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = 2\sqrt{4x - x^2} + 1.$$

Per determinare il dominio poniamo il radicando maggiore o uguale a 0, ossia:

$$4x - x^2 \geq 0 \rightarrow 0 \leq x \leq 4.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 4\}$. Tracciamo nel piano cartesiano la retta $x = 4$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ascissa minore di 0 o maggiore di 4 (figura *a*).



a

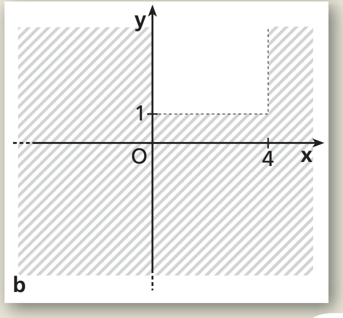
Per rappresentare la funzione isoliamo la radice, ossia:

$$y - 1 = 2\sqrt{4x - x^2} \rightarrow \frac{y-1}{2} = \sqrt{4x - x^2}.$$

Questa equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \frac{y-1}{2} \geq 0 \\ \frac{(y-1)^2}{4} = 4x - x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \frac{(y-1)^2}{4} + (x^2 - 4x + 4 - 4) = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \frac{(y-1)^2}{4} + (x-2)^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \frac{(y-1)^2}{16} + \frac{(x-2)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

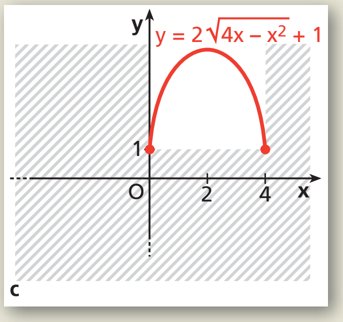


b

Nella seconda equazione abbiamo aggiunto +4 (e quindi anche −4) per ottenere un quadrato di binomio. L'equazione finale ottenuta è così quella di un'ellisse traslata, ricavata traslando l'ellisse $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ del vettore $\vec{v}(2; 1)$.

Tracciamo nel piano cartesiano la retta $y = 1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ordinata minore di 1 (figura b).

L'equazione $\frac{(y-1)^2}{16} + \frac{(x-2)^2}{4} = 1$ è l'equazione di un'ellisse di centro $C(2; 1)$, asse maggiore di equazione $x = 2$, con $b = 4$, e asse minore di equazione $y = 1$, con $a = 2$. Tracciamo ora il ramo di ellisse contenuto nella parte di piano che non abbiamo oscurato (figura c), ottenendo così il grafico cercato.



c

Dopo averne determinato il dominio, rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

132 $y = \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 + 8x}$

133 $y = 3\sqrt{1 - x^2} + 1$

134 $y = -5\sqrt{1 - (x-1)^2} - 2$

135 $y = \sqrt{-x^2 + 4}$

136 $y = -\frac{1}{2}\sqrt{4x - x^2}$

137 $y = \frac{3}{2}\sqrt{-x^2 + \frac{4}{9}}$

138 $y = -\frac{2}{3}\sqrt{-x^2 + x} + 1$

139 $y = 3 + \frac{4}{5}\sqrt{9 - x^2}$

140 $y = \sqrt{4 - 9x^2}$

141 $y = -\sqrt{1 - 16x^2}$

142 $y = \sqrt{8x - 4x^2}$

143 $y = -2\sqrt{6x - x^2 - 8}$

144 $y = \sqrt{32x - 4x^2}$

145 $y = -3\sqrt{1 - x^2}$

146 $y = 2 - \sqrt{9 - 9x^2}$

147 $y = -1 + \sqrt{16x - 4x^2}$

148 $y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

149 $y = -\frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}$

150 $y = \frac{1}{2}\sqrt{-4x - x^2}$

151 $y = -1 + 2\sqrt{4x - x^2 - 3}$

Traccia il grafico delle curve aventi le seguenti equazioni.

152 $x = -3\sqrt{9 - y^2}$

153 $x = -2 - \frac{1}{3}\sqrt{4 - y^2}$

154 $x = 2\sqrt{1 - y^2}$

155 $x = 4 + \sqrt{16y - 4y^2}$

156 $x = 2\sqrt{-4y - 3 - y^2}$

157 $x = \frac{2}{3}\sqrt{6y - y^2 - 5}$

158 $x = -\sqrt{8y - 4y^2}$

159 $x = -\sqrt{16 - 16y^2}$

160 $4x^2 + 9y^2 - 24|x| + 18y + 9 = 0$

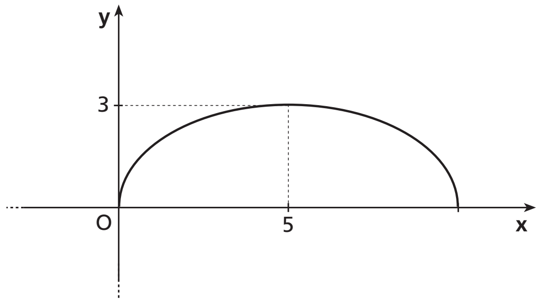
161 $x^2 + 16y^2 - 6x - 32|y| + 9 = 0$

162 $x^2 + 9y^2 + 2|x| - 36|y| + 28 = 0$

163 $4x^2 + y^2 - 8|x| + 6|y| - 3 = 0$

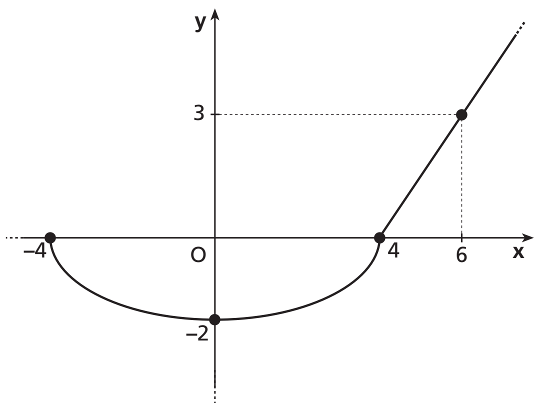
Trova le equazioni dei seguenti grafici utilizzando i dati delle figure.

164



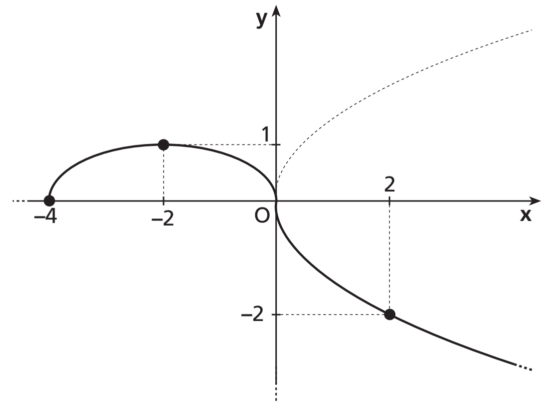
$\left[y = \frac{3}{5}\sqrt{10x - x^2}\right]$

165



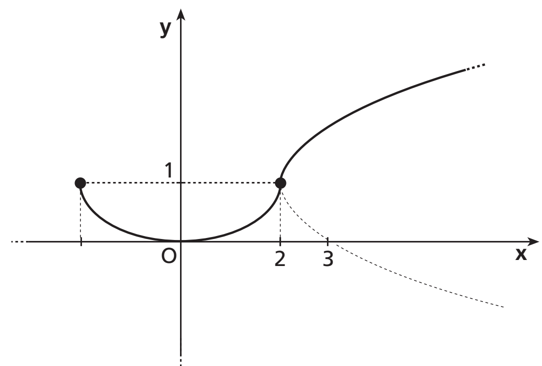
$\left[y = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} & \text{se} -4 \leq x \leq 4 \\ \frac{3}{2}x - 6 & \text{se } x > 4 \end{cases}\right]$

166



$\left[y = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 - 4x} & \text{se} -4 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}\right]$

167



$\left[y = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2} & \text{se} -2 \leq x \leq 2 \\ 1 + \sqrt{x - 2} & \text{se } x > 2 \end{cases}\right]$

La risoluzione grafica di equazioni e disequazioni irrazionali

Utilizzando il metodo già visto nell'esercizio guida 111 del capitolo 4, risolvi graficamente le seguenti equazioni e disequazioni irrazionali.

168 $2\sqrt{1 - x^2} + 2 > 2x + 4$ $\quad [-1 < x < 0]$

169 $\sqrt{-(x+3)^2+4} > x+3$ $\quad [-5 \leq x < \alpha;\ \alpha \simeq -1{,}6]$

170 $\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \leq -2$ $\quad [S = \varnothing]$

171 $\sqrt{-x^2 + 1} - 3 = -2x - 1$ $\quad \left[x_1 = \frac{3}{5};\ x_2 = 1\right]$

172 $-2\sqrt{-x^2 + 4x} \leq -x + 2$ $\quad [0 \leq x \leq \alpha;\ \alpha \simeq 3{,}8]$

173 $-\sqrt{6x - x^2} - 2 > -\frac{5}{3}x$ $\quad [3 < x \leq 6]$

174 $\sqrt{-25x^2 + 50x} = 3x$ $\quad [x_1 \simeq 1{,}4;\ x_2 = 0]$

175 $-\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+4} \leq -\frac{1}{4}x$ $\quad [-2 \leq x \leq \alpha;\ \alpha \simeq 1{,}8]$

176 $\frac{1}{3}\sqrt{-x^2+2x+1} \geq \frac{x}{9} + \frac{1}{3}$ $\quad [0 \leq x \leq \alpha;\ \alpha \simeq 1{,}2]$

177 $5\sqrt{-x^2+6x}-\sqrt{5}\,x \geq 0$ $[0 \leq x \leq 5]$

178 $1-2\sqrt{2x-x^2} < -x$ $\left[\frac{1}{5} < x < 1\right]$

179 $\sqrt{\dfrac{16-x^2}{15}} \geq 3x+4$ $[-4 \leq x \leq -1]$

180 $1-\frac{1}{4}\sqrt{-x^2-8x} \leq \sqrt{x+4}$ $[-4 \leq x \leq 0]$

Risolvi graficamente le seguenti disequazioni e i seguenti sistemi.

181 $x^2+4y^2 \leq 4$

182 $9x^2+16y^2-144 \leq 0$

183 $\frac{x^2}{4}+y^2 \geq 1$

184 $\begin{cases} 9x^2+25y^2-225 \leq 0 \\ y-x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

185 $\begin{cases} x^2+4y^2 \leq 36 \\ 4x^2+y^2-4 \geq 0 \end{cases}$

186 Trova l'area della parte di piano definita dal sistema $\begin{cases} y \leq \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \\ y \geq |x|-3 \end{cases}$. $\left[\frac{3}{2}\pi+9\right]$

I sistemi parametrici

Studia i seguenti sistemi parametrici con metodo grafico in modo analogo a quello esaminato nei capitoli 4 e 5.

187 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \\ y-kx-2k=0 \\ -2 \leq x \leq 2, \quad y \geq 0 \end{cases}$ [2 sol. per $k \geq 0$]

188 $\begin{cases} y=\frac{1}{4}\sqrt{16-x^2} \\ y=kx+k-1 \\ 0 \leq x < 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{1}{5} < k \leq 2\right]$

189 $\begin{cases} \frac{x^2}{9}+y^2=1 \\ y=mx-5m+1 \\ 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 0 \leq m \leq \frac{1}{2}\right]$

190 $\begin{cases} y=\frac{4}{3}\sqrt{4-x^2} \\ y=mx-2m+\frac{8}{3} \\ -2 < x < 2 \end{cases}$ $\left[2 \text{ sol. per } 0 \leq m < \frac{2}{3}, 1 \text{ sol. per } m \geq \frac{2}{3}\right]$

191 $\begin{cases} y=1+\frac{1}{4}\sqrt{8x-x^2} \\ mx-y+2+m=0 \\ 0 < x < 8 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -1 < m \leq -\frac{1}{9}, 2 \text{ sol. per } -\frac{1}{9} < m \leq 0\right]$

192 $\begin{cases} 9x^2+y^2-18x=0 \\ y=kx-3k \\ 1 \leq x \leq 2, \quad y \leq 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 0 \leq k < \frac{3}{2}, 2 \text{ sol. per } \frac{3}{2} \leq k \leq \sqrt{3}\right]$

193 $\begin{cases} x^2+4y^2=4 \\ 2x+3y=k \\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$ [1 sol. per $3 \le k < 4$, 2 sol. per $4 \le k \le 5$]

194 $\begin{cases} 4x^2+3y^2-16x-18y+31=0 \\ y=kx+3 \\ 2-\sqrt{3} \le x \le 2,\ 1 \le y \le 4 \end{cases}$ [2 sol. per $-2 \le k \le -1 \vee k=2$, 1 sol. per $-1 < k < 2$]

195 $\begin{cases} y=2\sqrt{9-x^2} \\ (2k-1)x-y(k+2)+3-k=0 \\ x \ge 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } k \le -\frac{9}{7} \vee k \ge 0\right]$

196 $\begin{cases} x^2+4y^2=9 \\ ky+x+3-k=0 \\ x \le 0,\ \ y \ge 0 \end{cases}$ [2 sol. per $-6 \le k \le -\frac{24}{5} \vee k=0$, 1 sol. per $k<-6 \vee k>0$]

ESERCIZI VARI L'ellisse

TEST

197 L'equazione dell'ellisse che ha un vertice in $(0; 5)$ e un fuoco in $(0; 4)$ è:

A $25x^2-16y^2=400$.

D $25x^2-9y^2=225$.

B $25x^2+9y^2=225$.

E $16x^2-9y^2=144$.

C $9x^2+25y^2=225$.

(*Università di Bergamo, Facoltà di Ingegneria, Corso propedeutico di Matematica*)

198 L'equazione $2(x-1)^2+2(y+2)^2=k^2$ rappresenta:

A un'ellisse per ogni k.

B una circonferenza per ogni k.

C un'ellisse per $k \neq \sqrt{2}$ e una circonferenza per $k=\sqrt{2}$.

D una circonferenza per $k \neq 0$ e un punto per $k=0$.

(*Università di Genova, Corso di laurea in Matematica, Test di autovalutazione*)

199 The range of the conic defined by $16x^2+25y^2-400=0$ is:

A $|y|<4$.

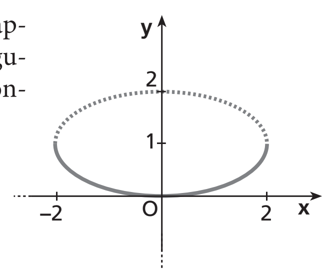
B $|y|\le 4$.

C $|y|<5$.

D $|y|\le 5$.

(CAN *Barry Mabillard Learning Centre,* Practice Exam)

200 La funzione rappresentata in figura con la linea continua è:



A $y=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}-1$.

B $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}+1$.

C $y=-2\sqrt{1-x^2}+1$.

D $y=-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}+1$.

E $y=2\sqrt{1-x^2}+1$.

201 **ASSOCIA** i valori del parametro k, data l'ellisse di equazione $(k-2)x^2+(k+2)y^2=k^2-4$, con la corrispondente proprietà.

1) Per $k > 2$.
2) Per nessun valore di k.
3) Per un valore di k superiore a 13.
4) Per un valore di k compreso tra 2 e 8.

a) L'ellisse ha i fuochi appartenenti all'asse x.
b) L'ellisse ha l'asse maggiore lungo 6.
c) L'ellisse ha eccentricità $\frac{1}{2}$.
d) L'ellisse ha i fuochi appartenenti all'asse y.

202 Riconoscere che la curva di equazione $4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$ è un'ellisse. Trovare le coordinate del centro e le equazioni degli assi. Scrivere le equazioni della traslazione per cui l'equazione della curva assume forma canonica.

(*Politecnico di Torino, II Facoltà di Architettura*)

$[(1;-2);\ x=1,\ y=-2;\ x'=x-1,\ y'=y+2]$

203 Sia E un'ellisse nel piano e sia A un punto fissato all'interno di E. Si supponga che due rette perpendicolari passanti per A intersechino E rispettivamente nei punti P, P' e Q, Q'. Dimostra che

$$\frac{1}{\overline{AP}\cdot\overline{AP'}}+\frac{1}{\overline{AQ}\cdot\overline{AQ'}}$$

è indipendente dalla scelta delle rette. (USA *Iowa Collegiate Mathematics Competition*, 1995)

204 John si trova all'interno di un'ellisse con pareti riflettenti la cui equazione è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, con $a>b>0$. Egli si trova nel punto $(3;0)$ e punta un raggio laser in direzione y. La luce si riflette sull'ellisse e procede verso Brown, coprendo una distanza di 10 unità prima di raggiungerlo. John quindi comincia a ruotare su se stesso: ovunque punti il laser, la luce si riflette sulle pareti e colpisce Brown. Qual è la coppia ordinata $(a;b)$? (USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*, 2003)

$[(5;4)]$

205 Data la circonferenza di equazione $25x^2+25y^2=64$, determina:
a) l'equazione della retta t, tangente alla circonferenza nel suo punto del terzo quadrante di ascissa $-\frac{24}{25}$;
b) le intersezioni A e B di t con gli assi cartesiani;
c) l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine passante per A e B.

$\left[\text{a) } 3x+4y+8=0;\ \text{b) } (0;-2), \left(-\frac{8}{3};0\right);\ \text{c) } 9x^2+16y^2=64\right]$

206 Data l'equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13-k}=1$, stabilisci per quali valori di k:
a) l'equazione rappresenta un'ellisse o, come caso particolare, una circonferenza;
b) i fuochi sono sull'asse y;
c) un fuoco ha coordinate $(-1;0)$.

$[\text{a) } k<13,\ k=9;\ \text{b) } k<9;\ \text{c) } k=10]$

207 Scrivi l'equazione della circonferenza con centro nell'origine e raggio 3 e quella dell'ellisse, riferita ai propri assi, passante per $A(5;0)$ e $B\left(-4;\frac{9}{5}\right)$. Determina poi i punti di intersezione delle due curve e trova la lunghezza della corda che la retta $x=3$ individua sull'ellisse. $\left[x^2+y^2=9;\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1;\ (0;3), (0;-3);\ \frac{24}{5}\right]$

208 Scrivi l'equazione dell'ellisse, riferita al centro e agli assi, passante per i punti $A\left(3;\frac{16}{5}\right)$ e $B\left(-4;\frac{12}{5}\right)$, e determina le coordinate dei fuochi e l'eccentricità. Scrivi poi l'equazione della parabola con la concavità rivolta verso l'alto, passante per i fuochi dell'ellisse e avente il vertice nel punto di intersezione dell'ellisse con l'asse y.

$\left[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1;\ F(\pm 3;0);\ e=\frac{3}{5};\ y=\frac{4}{9}x^2-4\right]$

209 L'ellisse γ, riferita ai propri assi e con i fuochi sull'asse x, ha semidistanza focale $2\sqrt{2}$ ed eccentricità $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Indicati con A e B i vertici dell'asse maggiore dell'ellisse, sia $ABCD$ un trapezio isoscele inscritto in γ, con C e D posti nel semipiano delle ordinate positive. Stabilito un conveniente sistema di riferimento cartesiano monometrico, trova l'equazione dell'ellisse e determina l'area e il perimetro del trapezio, sapendo che la base minore è i $\frac{2}{3}$ della maggiore.

$\left[x^2 + 9y^2 = 9; \frac{5}{3}\sqrt{5}; \frac{2\sqrt{14} + 30}{3}\right]$

210 L'asse maggiore di un'ellisse sia AB e O il suo centro, e sia F uno dei suoi fuochi. P è un punto sull'ellisse e CD una corda passante per O tale che CD è parallela alla tangente all'ellisse in P. La retta PF e la retta CD si incontrano in Q. Ricava il rapporto tra le lunghezze di PQ e OA. (*Taiwan National Olympiad*, 2005)

$\left[\frac{\overline{PQ}}{\overline{OA}} = 1\right]$

211 Un n-agono regolare è inscritto in un'ellisse che non è una circonferenza. Quali sono i possibili valori di n? (CAN *University of Waterloo, Senior Math Circles,* 2009)

[3 e 4]

212 Scrivi l'equazione dell'ellisse avente due vertici nei punti in cui la circonferenza di equazione $4x^2 + 4y^2 = 9$ interseca l'asse y e passante per il punto in cui la retta di equazione $2x + 4y - 5 = 0$ interseca l'asse x. Rappresenta le due curve e considera la retta di equazione $y = k$ che stacca sulla circonferenza una corda CD e sull'ellisse una corda EF. Verifica che il rapporto $\frac{\overline{EF}}{\overline{CD}}$ è costante al variare di k. Determina infine per quale valore di k la corda CD è lunga come il lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza.

$\left[36x^2 + 100y^2 = 225; k = \pm\frac{3}{4}\right]$

213 Un'ellisse con centro nell'origine e con i fuochi sull'asse x ha eccentricità $\frac{2}{\sqrt{7}}$ e passa per il punto $A\left(-\frac{4}{3}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. Determina la sua equazione e calcola l'area del triangolo inscritto nell'ellisse, sapendo che due vertici del triangolo hanno ascissa $\frac{2}{3}$ e il terzo è il vertice dell'ellisse sul semiasse negativo delle x.

$\left[36x^2 + 84y^2 = 169; \frac{17}{12}\sqrt{\frac{51}{7}}\right]$

214 Scrivi per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{k-6} + \frac{y^2}{2} = 1$:

a) rappresenta un'ellisse, precisando per quali valori si ha una circonferenza;
b) rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse x.
c) Disegna l'ellisse che si ottiene per $k = 14$ e, scritta l'equazione della tangente t nel suo punto P di ordinata 1 del primo quadrante, trova quali rette parallele a t staccano sull'ellisse una corda lunga $\sqrt{5}$.

$\left[\text{a) } k > 6, k = 8; \text{ b) } k > 8; \text{ c) } t: y = -\frac{x}{2} + 2; y = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{3}\right]$

215 a) Determina l'equazione della circonferenza che ha centro nell'origine e raggio uguale a $2\sqrt{5}$ e quella dell'ellisse riferita ai propri assi che ha un fuoco nel punto $F(3; 0)$ e che passa per il punto $P\left(2; \frac{4}{5}\sqrt{21}\right)$.
b) Trova le coordinate dei punti di intersezione tra le due curve.
c) Calcola l'area del quadrilatero formato dai punti trovati.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 = 20; 16x^2 + 25y^2 = 400; \text{ b) } \left(\pm\frac{10}{3}; \pm\frac{4\sqrt{5}}{3}\right); \text{ c) } \frac{160}{9}\sqrt{5}\right]$

216 Trova l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi che ha i fuochi sull'asse x distanti 8 e che passa per il punto $P\left(3; -\frac{12}{5}\right)$. Verifica che il punto $V(5; 1)$ è esterno all'ellisse e determina le equazioni delle due tangenti all'ellisse condotte da V. Trova l'equazione della retta passante per i due punti di tangenza A e B e calcola l'area del triangolo PAB.

$[9x^2 + 25y^2 - 225 = 0; 4x + 5y - 25 = 0, x = 5; 9x + 5y - 45 = 0; \text{area} = 3]$

217 a) Determina l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi, con i fuochi sull'asse x, in cui il semiasse maggiore è uguale al doppio del semiasse minore ed è anche uguale al minore aumentato di 2.

b) Considera il fascio improprio di rette aventi coefficiente angolare 2 e determina in questo fascio la retta p tangente all'ellisse nel secondo quadrante e le coordinate del punto P di tangenza.

c) Nel fascio determina la retta q che stacca sull'ellisse una corda AB di lunghezza $\frac{8\sqrt{85}}{17}$ e calcola l'area del triangolo ABP.

$\left[\text{a) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1; \text{ b) } p\text{: } y = 2x + 2\sqrt{17}, P\left(-\frac{16}{\sqrt{17}}; \frac{2}{\sqrt{17}}\right); \text{ c) } q\text{: } y = 2x; 8\right]$

218 Considera l'ellisse di equazione $k^2x^2 + y^2 = 4$, con k numero reale positivo, e studiane le caratteristiche al variare di k.

a) Determina per quale valore di k l'ellisse è tangente alla retta t: $3x - 2y + 6 = 0$ e calcola le coordinate del punto P di tangenza.

b) Trova l'equazione della normale n all'ellisse in P e le coordinate del punto Q in cui n incontra l'asse y.

c) Detto F il fuoco dell'ellisse posto nel semipiano delle ordinate positive, calcola l'area del triangolo PQF.

$\left[\text{a) } \frac{3}{\sqrt{5}}; P\left(-\frac{10}{9}; \frac{4}{3}\right); \text{ b) } 18x + 27y - 16 = 0, Q\left(0; \frac{16}{27}\right); \text{ c) } \frac{100}{243}\right]$

219 Rappresenta l'ellisse di equazione $9x^2 + 4y^2 + 36x - 16y + 16 = 0$ e determinane l'eccentricità, le coordinate dei fuochi e l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa -2 e di minore ordinata.

$\left[e = \frac{\sqrt{5}}{3}; F_{1,2}(-2; 2 \pm \sqrt{5}); y = -1\right]$

220 Trova l'equazione della circonferenza di centro $C(4; 0)$ e passante per il punto $P(4; 5)$. Indicati con F_1 e F_2 i punti di intersezione della circonferenza con l'asse delle ordinate, scrivi l'equazione della retta t tangente alla circonferenza in F_2, punto di intersezione di ordinata maggiore. Indicato con A il punto di intersezione della retta t con l'asse delle x, trova l'equazione dell'ellisse passante per A e con i fuochi in F_1 e F_2.

$\left[x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0; F_{1,2}(0; \pm 3); y = \frac{4}{3}x + 3; \frac{16x^2}{81} + \frac{16y^2}{225} = 1\right]$

221 Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse delle ordinate, con un vertice in $A(3; 0)$ ed eccentricità $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Successivamente calcola l'area dei rettangoli inscritti nell'ellisse aventi perimetro che misura 20.

$\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1; 16, \frac{224}{9}\right]$

222 Scrivi l'equazione dell'ellisse riferita al centro e agli assi che ha un vertice in $B(0; -1)$ ed è tangente alla retta $4x + 15y - 25 = 0$ nel punto T. Determina poi sull'arco di ellisse che si trova nel terzo quadrante un punto P in modo che l'area del triangolo PBT sia uguale a 4.

$\left[x^2 + 25y^2 = 25; T\left(4; \frac{3}{5}\right); P\left(-4; -\frac{3}{5}\right)\right]$

223 Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, indicati con C il vertice sul semiasse positivo delle y e con F_1 e F_2 i fuochi, considera le rette CF_1 e CF_2 che intersecano la curva in A e B. Trova il perimetro del triangolo ABC.

$\left[\frac{400}{17}\right]$

224 Considera la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 = 16$ e l'ellisse γ' di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Dimostra che una retta parallela all'asse x, intersecando γ e γ' in quattro punti distinti, determina due corde, PQ su γ e $P'Q'$ su γ', tali che $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{5}{4}$.
Generalizza la proprietà con le equazioni $x^2 + y^2 = b^2$ e $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dimostrando che $\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{a}{b}$.

225 Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ indica con P un suo punto, con A e B i vertici sull'asse x e con F_1 e F_2 i fuochi. Dimostra che, al variare di P, è costante $\frac{\overline{AP}^2 - \overline{PB}^2}{\overline{F_1P}^2 - \overline{F_2P}^2}$, calcolando il valore di tale rapporto.
Generalizza poi la proprietà per un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e determina il valore del rapporto.
$\left[\frac{4\sqrt{7}}{7}; \frac{a}{c}\right]$

226 Sono date la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ e l'ellisse di equazione $3x^2 + 4y^2 = 12$. Traccia la retta di equazione $x = k$ che, nel primo quadrante, interseca in A l'ellisse e in B la circonferenza. Verifica che le tangenti condotte da A e da B alle due curve si intersecano, al variare di k, in un punto P dell'asse x. Determina poi per quale valore di k l'area del triangolo OAP è 3.
$\left[P\left(\frac{4}{k}; 0\right); 1\right]$

227 Considera l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 12$.
a) Determina la tangente t nel suo punto P del primo quadrante di ascissa 3.
b) Conduci la perpendicolare n alla retta t in P e dimostra che è la bisettrice dell'angolo $F_1\widehat{P}F_2$, essendo F_1 e F_2 i fuochi dell'ellisse.
[a) $3x + 2\sqrt{3}\,y - 12 = 0$; b) $4\sqrt{3}\,x - 6y - 9\sqrt{3} = 0$]

228 a) Trova l'equazione dell'ellisse, con centro nell'origine e i fuochi sull'asse x, che ha eccentricità $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ e un vertice in $(5; 0)$.
b) Considera il quadrato circoscritto all'ellisse con le diagonali sugli assi cartesiani e trova l'area del rettangolo che ha per vertici i punti di contatto dei lati del quadrato con l'ellisse.
c) Generalizza il risultato precedente con l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dimostrando che l'area del rettangolo è $\frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$.
[a) $x^2 + 4y^2 = 25$; b) 20]

229 Scrivi l'equazione di un'ellisse con centro nell'origine che ha un vertice di coordinate $(4; 0)$, sapendo inoltre che la retta di equazione $y = -2$ stacca sull'ellisse una corda lunga $\frac{8}{3}\sqrt{6}$. Verifica che il triangolo che ha per vertici i fuochi e uno dei due vertici sull'asse y è equilatero.
$\left[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1\right]$

230 Determina per quale valore di k l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 4k^2$ racchiude una regione di area 8π. Rappresenta l'ellisse e determina le tangenti parallele alle bisettrici dei quadranti. Calcola l'area del quadrilatero che esse formano intersecandosi.
[± 2; $y = \pm x \pm 2\sqrt{5}$; 40]

231 a) Trova l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine e fuochi sull'asse x di eccentricità $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e passante per il punto $\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
b) Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, tangente alla retta di equazione $y = -2x + 5$ nel punto di ascissa 1 e con il vertice sull'asse y.
c) Determina l'area delimitata dall'arco di parabola con $y \geq 0$ e dalla semiellisse con $y \leq 0$.
$\left[\text{a) } x^2 + 4y^2 = 4; \text{ b) } y = -x^2 + 4; \text{ c) } \frac{32}{3} + \pi\right]$

232 Scrivi l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine che ha un vertice in $(-3; 0)$ e passante per il punto $\left(-\frac{1}{3}; 4\right)$, l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y di vertice $V(0; 1)$ e passante per $(-4; 9)$ e determina i loro punti di intersezione A e B, con B nel primo quadrante.
Nel punto B traccia le tangenti alle due curve e su di esse determina i punti P e Q in modo che $PQ /\!/ AB$ e $\overline{PQ} = \frac{20}{3}$.

$\left[\frac{x^2}{9} + \frac{5}{81}y^2 = 1,\ y = \frac{1}{2}x^2 + 1,\ A(-2; 3),\ B(2; 3);\ P_1\left(-\frac{1}{2}; -2\right), Q_1\left(\frac{37}{6}; -2\right), P_2\left(\frac{9}{2}; 8\right), Q_2\left(-\frac{13}{6}; 8\right)\right]$

233 Scrivi l'equazione della circonferenza tangente nel punto T di ascissa -2 appartenente alla retta t di equazione $2x - 3y + 22 = 0$ e avente centro C appartenente alla retta di equazione $y = x + 3$. Detti F_1 e F_2 i punti di intersezione della circonferenza con l'asse x, scrivi l'equazione dell'ellisse passante per C e avente i fuochi in F_1 e F_2.

$\left[x^2 + y^2 - 6y - 4 = 0;\ \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1\right]$

234 Determina l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse delle ascisse, passante per il punto $P\left(4; \frac{9}{5}\right)$ ed eccentricità $e = \frac{4}{5}$. Determina l'equazione delle rette parallele all'asse x che staccano sull'ellisse corde di lunghezza $\frac{5}{3}\sqrt{3}$.

$\left[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1;\ y = \pm\frac{\sqrt{33}}{2}\right]$

235 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, scrivi le equazioni delle rette passanti per il vertice di ascissa negativa e che distano 3 dal centro dell'ellisse. Detti P e P' i punti di intersezione delle rette trovate con le loro perpendicolari passanti per il centro dell'ellisse, calcola l'area del quadrilatero $VP'OP$.

$\left[y = \pm\frac{3}{4}(x + 5); 12\right]$

236 Data l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 25$, determina centro, fuochi e vertici. Trova la misura della corda EF che l'ellisse stacca sulla retta di equazione $x - 4y - 5 = 0$.
Determina poi un punto P sull'arco di ellisse che si trova nel primo quadrante in modo che l'area del triangolo PEF sia 10.

$\left[C(0; 0);\ F_{1,2}\left(\pm\frac{5\sqrt{3}}{2}; 0\right);\ V_{1,2}\left(0; \pm\frac{5}{2}\right),\ V_{3,4}(\pm 5; 0);\ 2\sqrt{17};\ P(3; 2)\right]$

237 Determina l'equazione dell'ellisse che ha i fuochi sull'asse y, centro nell'origine, distanza focale $2\sqrt{5}$ e passa per il punto $\left(1; \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$. Trova poi sull'arco di ellisse del primo quadrante un punto P tale che, dette H e K le sue proiezioni sugli assi cartesiani, si abbia $\overline{PH} + \overline{PK} = 3$.

$\left[\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1; (0; 3), \left(\frac{24}{13}; \frac{15}{13}\right)\right]$

238 Scrivi l'equazione di un'ellisse con il centro nell'origine e i fuochi sull'asse y, sapendo che il quadrato inscritto ha il perimetro uguale a 24 e che l'asse maggiore misura 12. Calcola poi il perimetro dei rettangoli inscritti nell'ellisse che hanno l'area uguale a $16\sqrt{6}$.

$\left[\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{36} = 1; 8(1 + \sqrt{6}), 8(\sqrt{2} + \sqrt{3})\right]$

239 Date la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$ e l'ellisse di equazione $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$, considera sulla circonferenza i punti P e P' e sull'ellisse i punti Q e Q' aventi la stessa ascissa k, con $-3 < k < 3$ e $k \neq 0$. Verifica che le tangenti alle due curve in P, P', Q e Q' si intersecano nello stesso punto e determinane le coordinate.

$\left[\left(\frac{9}{k}; 0\right)\right]$

240 Scrivi l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine e passante per i punti $A(2; -1)$ e $B(-3; 0)$ e determina le coordinate dei fuochi e l'eccentricità. Calcola poi l'equazione della circonferenza di centro $C(-1; 1)$, avente per diametro l'asse minore dell'ellisse.

$\left[\frac{x^2}{9} + \frac{5y^2}{9} = 1;\ F\left(\pm\frac{6\sqrt{5}}{5}; 0\right);\ e = 2\frac{\sqrt{5}}{5};\ 5x^2 + 5y^2 + 10x - 10y + 1 = 0\right]$

241 a) Dimostra che il luogo geometrico dei punti del piano per i quali il rapporto tra la distanza dal punto $F(1; 3)$ e la distanza dalla retta $4x + 5 = 0$ vale $\frac{4}{5}$ è un'ellisse.
b) Individua centro, vertici, fuochi e assi di simmetria dell'ellisse trovata.
c) Considera il rombo circoscritto all'ellisse con due lati tangenti nei suoi punti di ascissa 1. Trova il raggio della circonferenza inscritta nel rombo.

[a) $9x^2 + 25y^2 - 90x - 150y + 225 = 0$; b) $C(5; 3)$, vertici $(5; 0)$, $(10; 3)$, $(5; 6)$, $(0; 3)$, fuochi $(1; 3)$, $(9;3)$, assi $x = 5$, $y = 3$; c) $\frac{25}{41}\sqrt{41}$]

242 Risolvi graficamente il sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \\ y \geq kx + 2k \\ x \geq 0, k \geq 0 \end{cases}$$

[$0 \leq k \leq \frac{1}{2}$: arco di ellisse BP con $B(0; 1)$ e $P\left(\frac{-8k^2 + 2}{4k^2 + 1}; \frac{4k}{4k^2 + 1}\right)$]

243 a) Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano per i quali la somma delle distanze dai punti $F_1(-1; 0)$ e $F_2(-1; 6)$ vale 10.
b) Rappresenta il luogo, verificando che si tratta di un'ellisse e individuane vertici e assi di simmetria.
c) Determina i punti di intersezione A e B dell'ellisse con l'asse x e calcola l'area del triangolo ACB, essendo C il centro dell'ellisse.
d) Effettua una traslazione che porti l'ellisse ad avere il centro nell'origine O e poi trova le equazioni della dilatazione che trasforma la curva traslata in una circonferenza che ha il raggio uguale a 8.

[a) $25x^2 + 16y^2 + 50x - 96y - 231 = 0$; b) $V_1(-5; 3)$, $V_2(3; 3)$, $V_3(-1; 8)$, $V_4(-1; -2)$, $x = -1$, $y = 3$; c) $A\left(\frac{11}{5}; 0\right)$, $B\left(-\frac{21}{5}; 0\right)$, $\frac{48}{5}$; d) $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \frac{8}{5}y \end{cases}$]

244 Determina l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine, passante per $A(1; 2)$ e avente un vertice di coordinate $(3; 0)$. Trova poi le equazioni delle rette tangenti all'ellisse e perpendicolari alla retta $2x - y + 1 = 0$ e calcola le coordinate dei punti di tangenza. [$x^2 + 2y^2 = 9$; $x + 2y \pm 3\sqrt{3} = 0$; $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$]

245 Stabilisci per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{8 - k} + \frac{y^2}{2k + 2} = 1$ rappresenta:
a) un'ellisse;
b) una circonferenza;
c) un'ellisse con i fuochi sull'asse y;
d) un'ellisse con un vertice di coordinate $(0; 2\sqrt{3})$;
e) un'ellisse di eccentricità $\frac{1}{2}$.

[a) $-1 < k < 8$; b) $k = 2$; c) $2 < k < 8$; d) $k = 5$; e) $k = \frac{16}{11}$, $k = \frac{13}{5}$]

246 Considera il luogo individuato dalle seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \sqrt{1 - k^2} - 2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

a) Indica per quali valori di k è definito il luogo e determina i valori assunti da x e da y al variare di k.
b) Trova l'equazione cartesiana del luogo e rappresenta il suo grafico.

[a) $k \in [-1; 1]$; $x \in [1; 5]$, $y \in [-2; -1]$; b) $y = \frac{1}{2}\sqrt{6x - x^2 - 5} - 2$ (semiellisse traslata)]

REALTÀ E MODELLI

1
Orbita terrestre

Secondo la prima legge di Keplero, la Terra ruota intorno al Sole descrivendo un'orbita ellittica di cui il Sole occupa uno dei fuochi. Alcuni dati astronomici (approssimati) sono:

- eccentricità dell'orbita terrestre: 0,0167;
- perielio (minima distanza Terra-Sole): $147,1 \cdot 10^6$ km.
- afelio (massima distanza Terra-Sole): $152,1 \cdot 10^6$ km.
- diametro del Sole: $1392 \cdot 10^3$ km.

Posizionato il sistema di riferimento cartesiano in modo che il centro dell'orbita coincida con l'origine degli assi e il Sole abbia ascissa positiva e ordinata nulla,

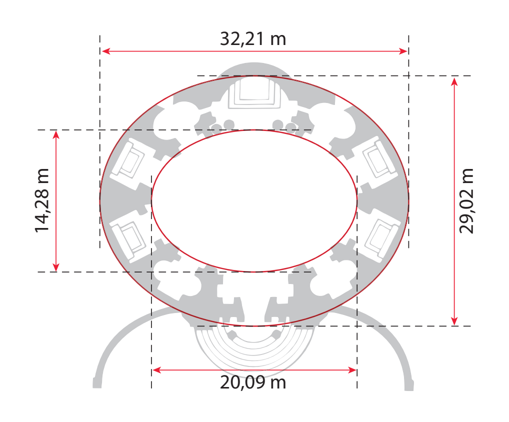
▶ scrivi l'equazione dell'orbita terrestre;

▶ trova le coordinate del centro del Sole e dell'altro fuoco;

▶ confronta la distanza focale con la dimensione del Sole.

2
Una chiesa di Roma

La Chiesa di Sant'Andrea al Quirinale, costruita su progetto del Bernini tra il 1658 e il 1678, ha pianta ellittica: all'estremità dell'asse minore si trovano l'entrata e l'altare maggiore.
In questo disegno della pianta si evidenziano l'ellisse centrale, dove si dispongono i fedeli, e la fascia esterna con le varie cappelle.



▶ Scrivi le equazioni (approssimate) delle due ellissi riferite al loro centro. Le due ellissi sono omotetiche?

▶ Nello spazio delimitato dall'ellisse centrale, vengono sistemate le sedie per i fedeli in file parallele all'asse maggiore. Supponendo che lo spazio necessario per ogni sedia sia 60 cm in larghezza e 1 m nella direzione dell'asse minore, valuta quante sedie sono necessarie.

▶ In occasione di alcuni lavori di restauro, per non rovinare la pavimentazione, si stende un telo sull'intera base dell'ellisse centrale. Quale sarà l'area del telo utilizzato?

3
Si sussurra, ma si sente

Nella St Paul's Cathedral, a Londra, c'è la famosa Whispering Gallery, una balconata interna a circa 30 m dal suolo che ha questa caratteristica: se si sussurra rivolti verso il muro, tale suono può essere udito chiaramente in un qualunque altro punto della galleria, purché si metta l'orecchio vicino al muro.
In questo caso si sfruttano delle proprietà di acustica legate alle frequenze di un suono sussurrato; in qualsiasi stanza ellittica, però, si può verificare lo stesso fenomeno se chi emette il suono e chi lo riceve occupano la posizione dei fuochi.

▶ Elisa e Filippo si trovano in una sala ellittica il cui semiasse maggiore è 12 m e quello minore 7 m. Determina in quali posizioni si devono mettere per poter verificare la proprietà descritta.

▶ Fissato il sistema di riferimento cartesiano nel modo consueto, considera il punto P dell'ellisse, nel primo quadrante, di ascissa 5, e verifica che le due rette passanti per P e per i fuochi sono simmetriche rispetto alla normale all'ellisse in P.

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Data l'equazione $ax^2+by^2=c$, una sola delle seguenti affermazioni è *falsa*, quale?

A L'equazione rappresenta un'ellisse se e solo se $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

B L'equazione rappresenta un'ellisse se e solo se a, b, c sono concordi.

C Se $a=c=4$ e $b=1$, l'equazione rappresenta un'ellisse i cui fuochi hanno coordinate $(0; \sqrt{3})$ e $(0; -\sqrt{3})$.

D Se $c=1$ e $a>b>1$, l'equazione rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse y.

E Se $a=b$ e $a \cdot c > 0$, l'equazione rappresenta una circonferenza.

2 Quale delle ellissi con le seguenti equazioni ha eccentricità uguale a $\frac{1}{4}$?

A $\frac{3}{16}x^2+\frac{y^2}{15}=1$

B $\frac{5}{32}x^2+\frac{y^2}{30}=1$

C $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

D $16x^2+15y^2=240$

E $4x^2+3y^2=12$

3 Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2+(k-2)y^2=2$ rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse y?

A $k>2$

B $k>3$

C $2<k<3$

D $2 \le k < 3$

E $2 < k \le 3$

4 Considera l'ellisse di equazione $2x^2+y^2+-8x+6y+13=0$. Quale fra le seguenti proposizioni è *vera*?

A L'eccentricità è $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

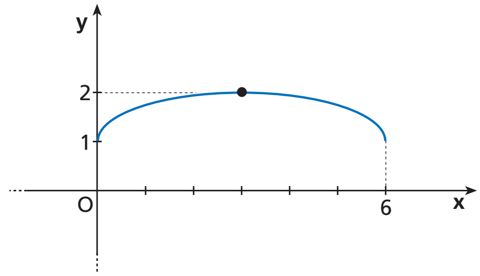
B Le coordinate dei fuochi sono $(0; \pm 2\sqrt{2})$.

C Il semiasse minore è $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D L'eccentricità è $\frac{1}{2}$.

E Le coordinate del centro sono $(4; -3)$.

5



Il grafico della figura ha equazione:

A $y=1-\frac{1}{3}\sqrt{6x-x^2}$.

B $y=1+\sqrt{6x-x^2}$.

C $y=1-\sqrt{6x-x^2}$.

D $y=1+\frac{1}{3}\sqrt{6x-x^2}$.

E $y=2+\sqrt{6x-x^2}$.

6 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}=1$, una sola delle seguenti proposizioni è *vera*, quale?

A L'eccentricità è $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

B I fuochi si trovano sull'asse x.

C Se $a=1$, la curva passa per $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.

D Se un fuoco ha coordinate $(-\sqrt{3}; 0)$, allora $a=4$.

E Un vertice ha coordinate $\left(\frac{1}{2}a; 0\right)$.

7 Considera l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{18}=1$. Una sola delle seguenti proposizioni è *falsa*, quale?

A I fuochi hanno coordinate $(4; 0)$ e $(-4; 0)$.

B L'ellisse ha come tangente nel suo punto del primo quadrante di ascissa 1 la retta di equazione $3x+y-6=0$.

C L'asse maggiore è triplo dell'asse minore.

D Un vertice ha coordinate $(0; 3\sqrt{2})$.

E Se si trasla l'ellisse in modo che il centro sia $(-2; 0)$, l'equazione della curva è: $9x^2+y^2+36x+18=0$.

QUESITI

8 È data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1$. Calcola il rapporto fra le aree del rettangolo circoscritto all'ellisse e di quello inscritto nell'ellisse che ha i lati proporzionali e paralleli a quelli del rettangolo circoscritto. Dimostra che il risultato ottenuto sarebbe stato lo stesso per qualsiasi altra ellisse. [2]

9 Dimostra che in un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avente semiasse maggiore a ed eccentricità e, le distanze di un punto $P(x_0; y_0)$ dell'ellisse dai fuochi sono sempre date da $a-ex_0$ e $a+ex_0$; verificalo nel caso dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, considerando il suo punto P di ascissa $2\sqrt{3}$.

10 Dimostra che in un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ l'eccentricità rappresenta il rapporto costante tra le distanze di un punto $P(x_0; y_0)$ dell'ellisse dal fuoco $F_1(c; 0)$ e dalla retta $x=\frac{a^2}{c}$ $\left(\right.$o dal fuoco $F_2(-c; 0)$ e dalla retta di equazione $\left.x=-\frac{a^2}{c}\right)$.

11 Dimostra che l'equazione $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$, con $a>0$ e $b>0$, rappresenta un'ellisse non degenere se e solo se $\frac{c^2}{4a}+\frac{d^2}{4b}-e>0$. (Suggerimento. Applica il metodo del completamento del quadrato.)

12 Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, traccia in un suo punto P la tangente t che interseca l'asse x in A e l'asse y in B e traccia per P la perpendicolare a t che interseca in C l'asse x e in D l'asse y. Dimostra che tra le ascisse e le ordinate dei punti A, B, C, D, vale la relazione $x_A x_C + y_B y_D = 0$.

PROBLEMI

13
a) Rappresenta graficamente l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ e indica con F_1 e F_2 i suoi fuochi.
b) Sia A il punto dell'ellisse del primo quadrante avente ordinata $2\sqrt{3}$. Scrivi l'equazione della tangente t all'ellisse in A.
c) Determina l'equazione della bisettrice s dell'angolo $F_1\widehat{A}F_2$ e verifica che è la retta perpendicolare a t in A.
d) Sia B il punto di intersezione di s con l'asse x. Calcola il rapporto fra le aree dei triangoli AF_1B e AF_2B.
e) Verifica che $\overline{AF_1}:\overline{AF_2}=\overline{F_1B}:\overline{F_2B}$.

$\left[\text{a) } F_1(-2\sqrt{5}; 0), F_2(2\sqrt{5}; 0); \text{ b) } A(3; 2\sqrt{3}), 2x+3\sqrt{3}y-24=0; \text{ c) } 3\sqrt{3}x-2y-5\sqrt{3}=0; \text{ d) } B\left(\frac{5}{3}; 0\right), \frac{41+12\sqrt{5}}{31}\right]$

14
a) Determina l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano per i quali il rapporto tra la distanza dal punto $F(3; 0)$ e la distanza dalla retta d: $x=\frac{25}{3}$ vale $\frac{3}{5}$, verificando che il luogo determinato è un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.
b) Inscrivi nell'ellisse un rettangolo di perimetro $\frac{124}{5}$ determinandone i suoi vertici.
c) Esegui una traslazione e trova l'equazione dell'ellisse traslata sapendo che il punto F si trasforma in $F'(5; 4)$.

$\left[\text{b) } \left(\pm 3; \pm\frac{16}{5}\right), \left(\pm\frac{187}{41}; \pm\frac{336}{205}\right); \text{ c) } \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1\right]$

15 a) Considera l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$ e indica con F_1 e F_2 i suoi fuochi ($y_{F_1}<y_{F_2}$). Scrivi l'equazione della retta tangente all'ellisse nel punto P, appartenente all'ellisse, situato nel primo quadrante e avente ascissa 3 e chiama Q ed R le sue intersezioni con le rette di equazione $y=8$ e $y=-8$.
b) Verifica che gli angoli $Q\widehat{F_2}P$ e $P\widehat{F_1}R$ sono retti.
c) Trova l'area del triangolo PF_1R e l'equazione della circonferenza ad esso circoscritta.
d) Individua le equazioni della dilatazione che trasforma l'ellisse data in una circonferenza di raggio uguale a 12.

$\left[\text{a) } 2x+y-8=0,\ Q(0;8),\ R(8;-8);\ \text{c) } 25,\ x^2+y^2-11x+6y+8=0;\ \text{d) } \begin{cases} x'=2\sqrt{3}\,x \\ y'=3y \end{cases}\right]$

16 a) Scrivi l'equazione dell'ellisse avente centro di simmetria nel punto (5; 3) tangente a entrambi gli assi cartesiani.
b) Determina l'equazione della parabola passante per il punto di tangenza con l'asse delle ordinate e per i punti A e B dell'ellisse di ascissa 1.
c) Scrivi l'equazione della circonferenza avente diametro AB.
d) Calcola l'area della parte di piano, situata nel primo quadrante, delimitata dalla circonferenza e dalla parabola.

$\left[\text{a) } 9x^2+25y^2-90x-150y+225=0;\ \text{b) } x=\frac{25}{81}(y-3)^2;\ \text{c) } (x-1)^2+(y-3)^2=\frac{81}{25};\ \text{d) } \frac{81}{50}\pi+\frac{12}{5}\right]$

17 Data l'ellisse con l'asse maggiore sull'asse x, di centro $C(4; 0)$, passante per l'origine e con eccentricità $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$, considera un punto P nell'arco di ellisse che si trova nel primo quadrante.
a) Esprimi $s=\overline{PC}^2+\frac{9}{16}\overline{PH}^2$, con H proiezione di P sull'asse y, in funzione dell'ascissa x di P. Traccia il grafico della funzione ottenuta.
b) Per quale valore dell'ascissa di P viene assunto da s il valore minimo?
c) Quanto vale s quando P si trova nei vertici dell'ellisse?

$\left[\text{a) } s=x^2-\frac{7}{2}x+16,\ 0\le x\le 8;\ \text{b) } x=\frac{7}{4};\ \text{c) } 16, 18, 52\right]$

18 a) Rappresenta graficamente l'ellisse di equazione $9x^2+25y^2-108x-100y+199=0$ indicando le sue caratteristiche principali.
b) Calcola il perimetro del rombo avente per vertici i fuochi della curva data e gli estremi del suo asse minore.
c) Determina l'equazione della circonferenza inscritta nel rombo del punto b).

[a) ellisse di centro (6; 2), vertici (11; 2), (1; 2), (6; 5), (6; − 1) e fuochi $F_1(2; 2)$, $F_2(10; 2)$;
b) $2p=20$; c) $(x-6)^2+(y-2)^2=\left(\frac{12}{5}\right)^2$]

19 a) Scrivi l'equazione dell'ellisse con gli assi paralleli agli assi cartesiani, avente centro di simmetria nel punto (4; 2) e passante per i punti di coordinate (8; 0) e (− 1; 1).
b) Calcola le equazioni delle tangenti nei punti dell'ellisse le cui ordinate sono soluzioni dell'equazione $t^4-2t^3+2t^2-t=0$.
c) Calcola l'area del quadrilatero convesso individuato dalle tangenti trovate.

$\left[\text{a) } x^2+3y^2-8x-12y=0;\ \text{b) } 2x+3y=0,\ 2x-3y-16=0,\ 5x+3y+2=0,\ 5x-3y-42=0;\ \text{c) } \frac{28}{3}\right]$

20 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $y = -3 - \sqrt{4x - 4x^2}$.
b) Determina la retta tangente r alla curva data nel suo punto di ascissa 1.
c) Scrivi l'equazione della parabola tangente a r nel suo punto V di ordinata -3 e passante per l'origine del sistema di riferimento e stabilisci la posizione reciproca della parabola e della curva data.
d) Scrivi l'equazione della circonferenza avente un diametro che ha per estremi le intersezioni della parabola con l'asse delle ordinate.
e) Calcola l'area della superficie racchiusa dalla parabola e dalla circonferenza situata nel semipiano delle ascisse positive.

[a) semiellisse inferiore di centro $\left(\frac{1}{2}; -3\right)$ e semiassi $\frac{1}{2}$ e 1; b) $x = 1$; c) $y^2 + 9x + 6y = 0$, tangente in V; d) $x^2 + y^2 + 6y = 0$; e) $\frac{9}{2}\pi - 4$]

21 a) Rappresenta graficamente l'ellisse di equazione $25x^2 + 9y^2 - 90y = 0$, individuandone centro di simmetria, vertici, fuochi, assi.
b) Sia A il punto della curva del primo quadrante di ordinata 9. Scrivi l'equazione della retta tangente t alla curva in A e siano B e C i punti di t di ascissa 0 e 10 rispettivamente.
c) Calcola l'area del triangolo AF_1C, dove F_1 è il fuoco di ordinata minore, dopo aver dimostrato che si tratta di un triangolo rettangolo.
d) Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo ABF_2, dove F_2 è il fuoco di ordinata maggiore e dimostra che AB è un suo diametro.

[a) ellisse di centro $C(0; 5)$, vertici $(0; 0)$, $(3; 5)$, $(0; 10)$, $(-3; 5)$, fuochi $(0; 1)$, $(0; 9)$, assi $x = 0$, $y = 5$; b) $A\left(\frac{9}{5}; 9\right)$, t: $5x + 4y - 45 = 0$, $B\left(0; \frac{45}{4}\right)$, $C\left(10; -\frac{5}{4}\right)$; c) $\frac{1681}{40}$; d) $\left(x - \frac{9}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{81}{8}\right)^2 = \frac{3321}{1600}$]

22 a) Rappresenta graficamente l'ellisse di equazione $5x^2 + 9y^2 - 20x - 90y - 160 = 0$.
b) Siano F_1 e F_2 $(x_{F_1} < x_{F_2})$ i fuochi della curva e A e D i punti di intersezione con l'asse delle x $(x_A < x_D)$. Scrivi l'equazione della retta t tangente alla curva in A.
c) Verifica che la retta t è bisettrice di uno dei due angoli formati dalle rette AF_1 e AF_2.
d) Scrivi l'equazione della retta n perpendicolare alla curva in A e trova il punto E di intersezione di n con l'asse minore dell'ellisse.
e) Calcola l'area del triangolo ADE e determina le coordinate del suo baricentro G.

[a) ellisse di centro $(2; 5)$ e semiassi $a = 9$, $b = 3\sqrt{5}$; b) $F_1(-4; 5)$, $F_2(8; 5)$, $A(-4; 0)$, $D(8; 0)$, t: $2x + 3y + 8 = 0$; d) $3x - 2y + 12 = 0$, $E(2; 9)$; e) area $= 54$, $G(2; 3)$]

23 Dopo aver determinato per quali valori di a l'equazione

$$(a-3)x^2 + (a-6)y^2 = a - 3$$

rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse y, considera l'ellisse passante per il punto $\left(\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$. Detti A, B, A_1, B_1 i suoi vertici (nominati in senso antiorario, con A di ascissa positiva), determina:
a) l'area del quadrato inscritto nell'ellisse con i lati paralleli agli assi cartesiani;
b) l'equazione della parabola con vertice in A e passante per B e B_1;
c) per quali valori di k le rette del fascio $4kx + ky = k - 4$ incontrano l'arco di parabola appartenente al primo quadrante.

[$a > 6$, $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; a) $\frac{16}{5}$; b) $x = -\frac{1}{4}y^2 + 1$; c) 1 sol. per $-4 \le k < -\frac{4}{3}$, 2 sol. per $-\frac{4}{3} \le k \le -\frac{16}{13}$]