3 Calcolo delle aree

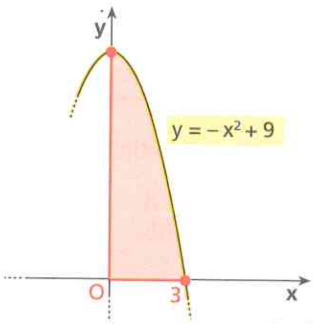
Area compresa tra una curva e l'asse *x*

Teoria a p. 1950

La funzione è positiva

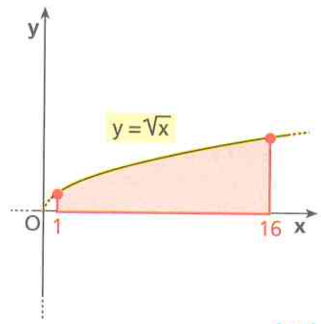
LEGGI IL GRAFICO Calcola l'area del trapezoide rappresentato in ciascuna delle seguenti figure utilizzando gli integrali definiti.

265



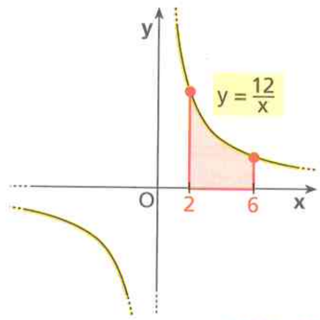
[18]

266



[42]

267



[12 ln 3]

Disegna i trapezoidi definiti dai grafici delle seguenti funzioni negli intervalli scritti a fianco e calcolane l'area utilizzando gli integrali definiti.

268 $y=-x^2+2x$, $[0; 2]$. $\left[\frac{4}{3}\right]$

269 $y=\sqrt{x+1}$, $[-1; 1]$. $\left[\frac{4}{3}\sqrt{2}\right]$

270 $y=\ln(x+1)$, $[0; 1]$. $[2\ln 2-1]$

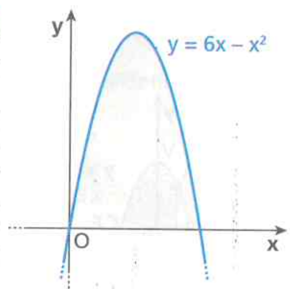
271 $y=e^{-2x}+1$, $[-1; 0]$. $\left[\frac{1}{2}(1+e^2)\right]$

272 $y=2\tan x$, $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. $\left[-2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

273 $y=4\sin^2 x+2$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. $[\pi+1]$

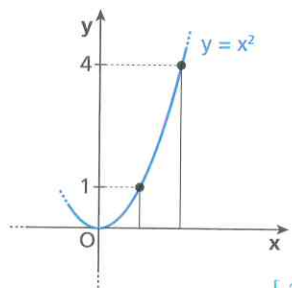
LEGGI IL GRAFICO Determina l'area colorata nelle figure.

274



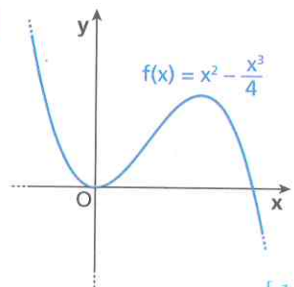
[36]

275



$\left[\frac{7}{3}\right]$

276



$\left[\frac{16}{3}\right]$

277 Disegna il grafico di $f(x)=4x^3-2x^4$ e trova l'area che $f(x)$ delimita con l'asse x nel primo quadrante. $\left[\frac{16}{5}\right]$

La funzione è negativa

278 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo l'area S della superficie delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione $y=x^2-9$ definita sull'intervallo $[0; 2]$.

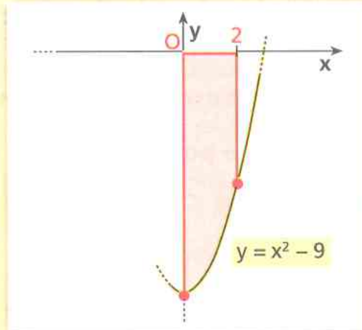
Il grafico della funzione è una parabola di vertice $V(0; -9)$, che ha la concavità rivolta verso l'alto e incontra l'asse x nei punti di ascissa ± 3.

Disegniamo il grafico ed evidenziamo la superficie considerata.
Calcoliamo l'integrale definito esteso da 0 a 2:

$$\int_0^2 (x^2-9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 18 - 0 = -\frac{46}{3}.$$

Poiché la funzione è negativa in tutto l'intervallo, allora dobbiamo far precedere l'integrale definito da un segno meno, ossia:

$$S = -\int_0^2 (x^2-9)\,dx = -\left(-\frac{46}{3}\right) = \frac{46}{3}.$$



Dopo aver disegnato le superfici delimitate dall'asse x e dal grafico delle seguenti funzioni definite negli intervalli indicati, calcolane l'area.

279 $y = x^3$, $[-2; 0]$. $[4]$

280 $y = x^2 - 5x$, $[1; 4]$. $\left[\frac{33}{2}\right]$

281 $y = x^2 - 6x + 5$, $[2; 4]$. $\left[\frac{22}{3}\right]$

282 $y = -\frac{3}{x}$, $[3; 6]$. $[3\ln 2]$

283 $y = \sin x$, $[\pi; 2\pi]$. $[2]$

284 $y = \ln x$, $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. $\left[\frac{1}{2}(1 - \ln 2)\right]$

La funzione è in parte positiva o nulla e in parte negativa

285 ESERCIZIO GUIDA Determiniamo l'area S della superficie delimitata dall'asse x e dal grafico della funzione $y = -x^2 + 4$ definita sull'intervallo $[-1; 3]$.

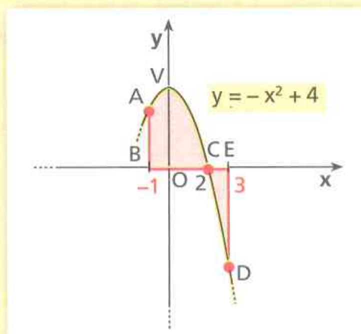
Il grafico della funzione è una parabola di vertice $V(0; 4)$, che ha la concavità rivolta verso il basso e incontra l'asse x nei punti di ascissa ± 2. Evidenziamo nel grafico la superficie considerata.
Per calcolare l'area scomponiamo la superficie in due superfici: $ABCV$, delimitata dall'arco di curva CVA, in cui la funzione assume valori positivi, e CDE, delimitata dall'arco di curva CD, in cui la funzione assume valori negativi.
Calcoliamo i due integrali e cambiamo segno al secondo:

$$S = \int_{-1}^2 (-x^2+4)\,dx - \int_2^3 (-x^2+4)\,dx =$$

$$\left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^2 - \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_2^3 =$$

$$\left(-\frac{8}{3} + 8 - \frac{1}{3} + 4\right) - \left(-\frac{27}{3} + 12 + \frac{8}{3} - 8\right) =$$

$$-\frac{9}{3} + 12 + \frac{19}{3} - 4 = \frac{34}{3}.$$



Dopo aver disegnato le superfici delimitate dall'asse x e dal grafico delle seguenti funzioni definite negli intervalli indicati, calcolane l'area.

286 $y = -x^3$, $[-1; 2]$. $\left[\frac{17}{4}\right]$

287 $y = x^2 - 3x$, $[-2; 2]$. $[12]$

288 $y = 3x^2 + 6x$, $[-1; 3]$. $[56]$

289 $y = -x^2 + 6x - 8$, $[2; 5]$. $\left[\frac{8}{3}\right]$

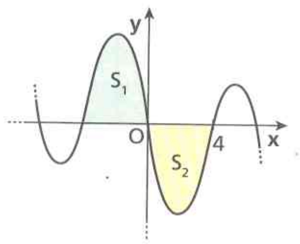
290 $y = \sqrt{x} - 1$, $[0; 4]$. $[2]$

291 $y = \cos x$, $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$. $\left[\frac{3}{2}\right]$

Funzioni pari e funzioni dispari

AL VOLO

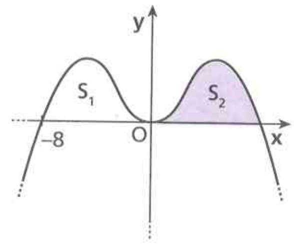
292



Sapendo che $f(x)$ è una funzione dispari e che $\int_0^4 f(x)dx = -7$, calcola il valore dell'area di:

a. S_1; **b.** S_2; **c.** $S_1 \cup S_2$.

293



Sapendo che $f(x)$ è una funzione pari e che $\int_{-8}^{8} f(x)dx = 18$, calcola il valore dell'area di:

a. S_1; **b.** S_2; **c.** $S_1 \cup S_2$.

VERO O FALSO?

294

a. $\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0$ V F

b. $\int_{-1}^{1} x^3 dx = 2\int_0^1 x^3 dx$ V F

c. $\int_{-3}^{0} x^3 dx = \int_0^3 x^3 dx$ V F

d. $\int_{-1}^{-2} x^3 dx = \int_1^2 x^3 dx$ V F

295

a. $\int_4^{-4} x^2 dx = 0$ V F

b. $\int_0^3 x^4 dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} x^4 dx$ V F

c. $\int_0^2 x^2 dx + \int_0^{-2} x^2 dx = 0$ V F

d. $\int_{-2}^{2} (4x + x^3)dx = 0$ V F

296 **AL VOLO** Calcola il valore dei seguenti integrali.

a. $\int_{-6}^{6} 3x^5 dx$ **b.** $\int_5^{-5} (x - x^3)\, dx$ **c.** $\int_{-1}^{1} xe^{x^2} dx$

Determina l'area della regione delimitata dall'asse x e dalla funzione data negli intervalli indicati.

297 $y = 5x^4$; $[-1; 1]$, $[0; 1]$. $[2; 1]$

298 $y = \cos x - 1$; $\left[-\frac{3}{2}\pi; 0\right]$, $\left[-\frac{3}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$. $\left[\frac{3}{2}\pi + 1; 3\pi + 2\right]$

299 $y = 4x^3 - x$; $[0; 2]$, $[-2; 2]$. $\left[\frac{113}{8}; \frac{113}{4}\right]$

300 Sapendo che $\int_{-6}^{6} f(x)dx = 12$ e che f è una funzione pari, calcola:

$\int_0^6 f(x)dx$, $\int_0^{-6} f(x)dx$, $\int_{-6}^{6} f(-x)dx$. $[6; -6; 12]$

301 Sapendo che $\int_0^3 f(x)dx = 8$ e che f è una funzione dispari, calcola:

$\int_{-3}^{3} f(x)dx$, $\int_0^3 f(-x)dx$, $\int_0^{-3} f(x)dx$. $[0; -8; 8]$

RIFLETTI SULLA TEORIA

302 Se $f(x)$ è pari, quanto vale $\int_{-2}^{2} xf(x)dx$?

303 Se $f(x)$ è dispari, quanto vale $\int_{-4}^{4} x^4 f(x)dx$?

304 Se f è una funzione dispari continua in $\mathbb{R}$, qual è il valore medio di f nell'intervallo $[-a; a]$?

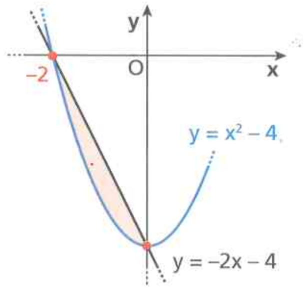
ESERCIZI

Area compresa tra due curve

▶ Teoria a p. 1950

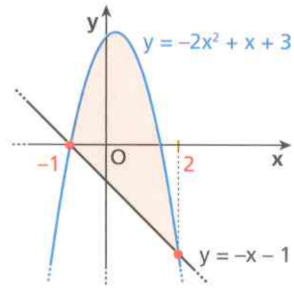
LEGGI IL GRAFICO Calcola l'area delle superfici evidenziate nelle seguenti figure.

305 ●○



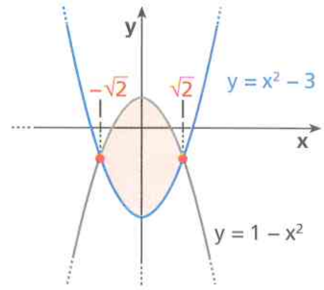
$\left[\frac{4}{3}\right]$

306 ●○



$[9]$

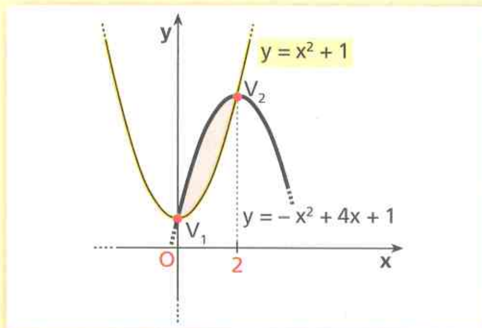
307 ●○



$\left[\frac{16}{3}\sqrt{2}\right]$

308 ESERCIZIO GUIDA Determiniamo l'area della superficie racchiusa dalle parabole di equazioni:

$y=x^2+1$ e $y=-x^2+4x+1$.



Tracciamo le due parabole. La prima ha vertice nel punto $V_1(0;\,1)$, asse di simmetria l'asse y e concavità rivolta verso l'alto. La seconda ha vertice nel punto $V_2(2;\,5)$, asse di simmetria la retta di equazione $x=2$ e concavità rivolta verso il basso.

Le due parabole si intersecano nei punti V_1 e V_2, perciò gli estremi di integrazione sono 0 e 2.

L'area della superficie da esse racchiusa è data dall'integrale della differenza tra la funzione maggiore (che sta sopra) e quella minore (che sta sotto), perciò:

$$S=\int_0^2[(-x^2+4x+1)-(x^2+1)]dx=\int_0^2(-2x^2+4x)\,dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=-\frac{16}{3}+8=\frac{8}{3}.$$

Rappresenta ogni coppia di funzioni e determina l'area della regione finita di piano da esse individuata.

309 ●○ $y=x^2-1$; $\quad y=-x^2-3x-1$. $\left[\frac{9}{8}\right]$

310 ●○ $y=x^2+4x$; $\quad y=-2x^2-2x+9$. $[32]$

311 ●○ $y=x+4$; $\quad y=-\frac{3}{x}$. $[4-3\ln 3]$

312 ●○ $y=\frac{1}{1+x^2}$; $\quad y=\frac{x^2}{2}$. $\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right]$

313 ●● $y=\frac{4}{x}$; $\quad y=x^2-6x+9$. $[8\ln 2-3]$

314 ●● $y=\sqrt{5-x}$; $\quad y=|3-x|$. $\left[\frac{13}{6}\right]$

315 ●○ Determina l'area della regione finita di piano contenuta nel primo quadrante e individuata dalla parabola di equazione $y=-x^2+2$, dalla curva di equazione $y=x^3$ e dall'asse y. $\left[\frac{17}{12}\right]$

316 ●○ Determina la misura dell'area della superficie chiusa individuata nel secondo quadrante dalle parabole di equazioni $y=-x^2+2x+4$ e $y=\frac{x^2}{4}+2x+4$ e dalla retta di equazione $y=1$. $[1]$

317 ●○ Calcola l'area della regione piana delimitata dalla curva di equazione $y=\frac{1}{1-x}$, dall'asse y e dalla retta di equazione $y=4$. $[3-\ln 4]$

318 ●○ Dopo aver verificato che la parabola di equazione $y=-\frac{1}{2}x^2+1$ incontra la curva di equazione $y=2^x$ nei punti $A\left(-1;\,\frac{1}{2}\right)$ e $B(0;\,1)$, determina l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve. $\left[\frac{5}{6}-\frac{1}{\ln 4}\right]$

319 Trova l'area della regione finita di piano delimitata dalle curve di equazioni $y = \sin x$ e $y = -\cos x$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$. $[2\sqrt{2}]$

320 YOU & MATHS Determine the area enclosed by the curve $y = x^2 + 1$ and the line $y = 5$.
(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level) $\left[\frac{32}{3}\right]$

321 Trova l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 1$, dalla tangente passante per il suo punto di ascissa 1 e dall'asse x. $\left[\frac{2}{3}\right]$

322 Calcola l'area della regione finita di piano compresa tra le parabole di equazioni $y = x^2$ e $y = x^2 - 6x + 6$ e la bisettrice del secondo e quarto quadrante. $\left[\frac{5}{3}\right]$

323 Calcola le aree delle regioni di piano comprese tra le curve di equazioni $y = x^2$ e $y = \sqrt{|x|}$. $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

324 Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola con asse parallelo all'asse x, avente vertice $V(-4; 0)$ e passante per il punto $A(0; 2)$, e dalla retta parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante passante per A. $\left[\frac{125}{6}\right]$

325 Determina l'area del triangolo ABC, dove A è il vertice della parabola $y = -x^2 + 4x$ e B e C sono i punti della parabola di ordinata -5. Trova inoltre l'area della regione finita di piano compresa fra la parte di parabola che contiene il triangolo e il triangolo stesso. $[S_1 = 27; S_2 = 9]$

326 Trova l'equazione della parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, che interseca la retta di equazione $y = 2x + 1$ nei punti di ascissa 0 e 5 delimitando con essa una regione di piano di area $\frac{125}{18}$.
$\left[y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 1; y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{3}x + 1\right]$

Area compresa tra una curva e l'asse *y*

▶ Teoria a p. 1952

Determina l'area della superficie delimitata dal grafico delle seguenti funzioni, dall'asse *y* e dalle rette date.

327 $x = y^2 - 6y$; $y = 0, y = 2$. $\left[\frac{28}{3}\right]$

328 $x = \sqrt{y-3}$; $y = 4, y = 7$. $\left[\frac{14}{3}\right]$

329 $y = \sqrt{3x+1}$; $y = 0, y = 1$. $\left[\frac{2}{9}\right]$

330 $y = \ln x$; $y = 0, y = 1$. $[e - 1]$

331 $y = \sqrt{x} + 2$; $y = 2, y = 4$. $\left[\frac{8}{3}\right]$

332 $y = \frac{4}{x}$; $y = 1, y = 4$. $[8 \ln 2]$

333 ESERCIZIO GUIDA Determiniamo l'area della superficie racchiusa dalle curve di equazioni $y = \frac{6}{x}$ e $x = -y^2 + 2y + 5$.

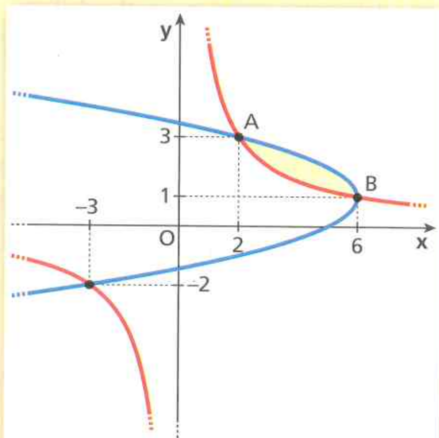
Disegniamo i grafici delle due curve.
Determiniamo i loro punti di intersezione: ponendo le due equazioni a sistema troviamo $A(2; 3)$, $B(6; 1)$, $C(-3; -2)$.
Per calcolare l'area colorata, esplicitiamo la prima equazione in x:

$$x = \frac{6}{y}.$$

Quindi calcoliamo:

$$\int_1^3 \left(-y^2 + 2y + 5 - \frac{6}{y}\right) dy = \left[-\frac{y^3}{3} + y^2 + 5y - 6\ln|y|\right]_1^3 =$$

$$-9 + 9 + 15 - 6\ln 3 + \frac{1}{3} - 1 - 5 = \frac{28}{3} - 6\ln 3.$$



334 Determina l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici di $x = y^2$ e $x + y - 2 = 0$. $\left[\frac{9}{2}\right]$

335 Determina l'area della superficie racchiusa dalle curve di equazioni $x = -y^2 + y + 8$ e $x = y^2 - 3y + 2$. $\left[\frac{64}{3}\right]$

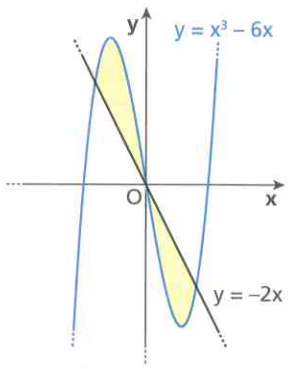
336 Trova l'area della regione finita di piano delimitata da $y = x^3$ e $x = y^2$. $\left[\frac{5}{12}\right]$

337 Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dai grafici di $y = \sqrt{x-5}$ e $x = -y^2 + 6y + 1$. $\left[\frac{1}{3}\right]$

Riepilogo: Calcolo delle aree

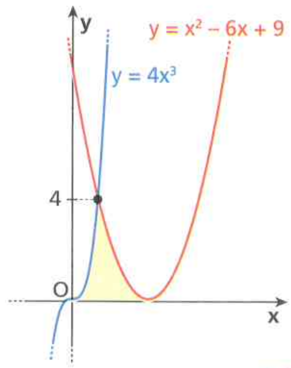
LEGGI IL GRAFICO In ognuna delle seguenti figure sono evidenziate delle superfici: calcolane l'area mediante gli integrali.

338



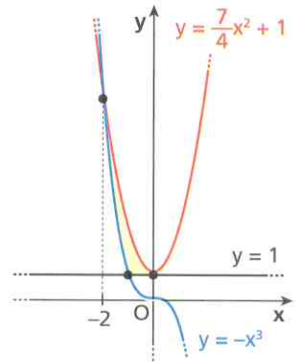
[8]

339



$\left[\frac{11}{3}\right]$

340



$\left[\frac{23}{12}\right]$

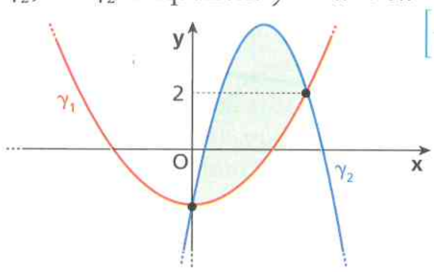
341 Disegna le parabole di equazioni $y = x^2 - 4x - 5$ e $y = -x^2 + 2x + 3$. Calcola poi l'area delle due zone delimitate dalle parabole e dal segmento che congiunge i loro punti di intersezione. $\left[S_1 = S_2 = \frac{125}{6}\right]$

342 Calcolare l'area della regione di piano individuata dal grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$, dalle rette $x = 4$ e $x = 9$ e dall'asse delle x.

(*Politecnico di Torino, Test di Analisi I*)

$[2 + \ln 4]$

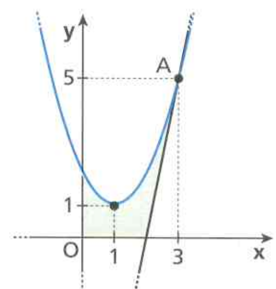
343 **LEGGI IL GRAFICO** Trova la misura dell'area della superficie colorata racchiusa dalle due parabole γ_1 e γ_2, con γ_2 di equazione $y = -x^2 + 5x - 2$. $\left[\frac{40}{3}\right]$



344 **LEGGI IL GRAFICO**

Nel grafico la retta è tangente alla parabola in A.
Trova l'area della regione colorata.

$\left[y = x^2 - 2x + 2; \frac{23}{8}\right]$



345 Rappresenta graficamente la funzione di equazione $y = 2 + \frac{4}{x-1}$. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva data, dalla tangente alla curva nel suo punto di ascissa 0 e dall'asse x. $\left[4\ln 2 - \frac{5}{2}\right]$

346 **YOU & MATHS** Find the area of the bounded region enclosed by the curve $y = \frac{2x}{x^2+1}$, the x-axis, the line $x = 1$, and the line $x = 2\sqrt{2}$.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level)

$\left[\ln\left(\frac{9}{2}\right)\right]$

347 Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 4$ e dalle tangenti condotte alla parabola nei suoi punti di intersezione con l'asse x. $\left[\frac{16}{3}\right]$

348 Trova l'area delle parti finite di piano racchiuse dalle due parabole di equazioni $y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x$ e $x = y^2$. $\left[\frac{20}{3}; \frac{1}{12}\right]$

349 Considera la parabola di equazione

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{7}{2}$$

e trova le equazioni delle rette tangenti s e t nei suoi punti di ascissa 2 e 5. Determina l'area della parte finita di piano delimitata dalle rette s, t e dal grafico della parabola. $\left[\frac{9}{8}\right]$

350 Disegna le parabole di equazioni

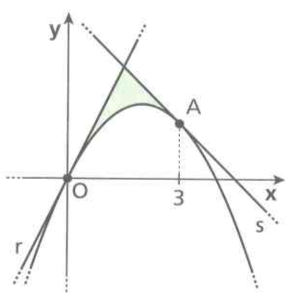
$$y = x^2 - 7x + 10 \text{ e } y = -x^2 + 8x - 12.$$

Conduci una retta parallela all'asse y nella zona S racchiusa dalle due parabole in modo che la corda intercettata su di essa dalle parabole abbia lunghezza massima. Calcola poi l'area di S e delle due parti in cui S resta divisa dalla retta trovata. $\left[x = \frac{15}{4}; S = \frac{343}{24}; S_1 = S_2 = \frac{343}{48}\right]$

351 Le rette r e s sono tangenti alla parabola di equazione

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

rispettivamente in O e A. Trova l'area della zona colorata. $\left[\frac{9}{8}\right]$



352 Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, con il vertice di ascissa $x = 2$ e passante per i punti $A(4; 0)$ e $B(-2; 12)$. Considera la retta t tangente in A alla parabola e la retta r parallela all'asse x passante per B. Calcola l'area della regione delimitata dalla parabola e dalle rette r e t. $\left[y = x^2 - 4x; S = \frac{14}{3}\right]$

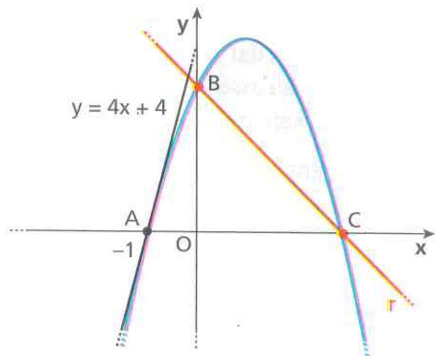
353 Calcola l'area della regione contenuta nel semipiano delle ordinate positive delimitata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. $[4\pi]$

354 Trova l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, che ha il vertice di ordinata $-\frac{9}{4}$, passa per $A(0; 10)$ e ha la tangente in A di coefficiente angolare -7. Disegna la curva, considera la retta di equazione $y = -1$ e trova l'area della parte finita di piano delimitata dalla parabola e dalla retta. $\left[y = x^2 - 7x + 10; \frac{5}{6}\sqrt{5}\right]$

355 Trova l'equazione della parabola che ha l'asse di equazione $y = \frac{5}{2}$, passa per il punto $(2; 1)$ e interseca l'asse x nel punto di ascissa 6.
Calcola l'area della regione di piano compresa tra la curva e l'asse delle ordinate. $\left[x = y^2 - 5y + 6; \frac{1}{6}\right]$

356 Determina l'area della regione di piano delimitata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. $[12\pi]$

357 **LEGGI IL GRAFICO** La parabola rappresentata in figura è tangente in A alla retta di equazione $y = 4x + 4$ e ha equazione $y = ax^2 + bx + 3$.



a. Trova a e b.

b. Determina l'equazione della retta r che passa per B e C.

c. Trova la misura dell'area della superficie colorata.

$\left[\text{a) } a = -1, b = 2; \text{ b) } y = 3 - x; \text{ c) } \frac{9}{2}\right]$

358 Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = \cos x$ e dalle rette di equazioni $x = \frac{\pi}{2}$ e $y = -2x + 1$. $\left[1 + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}\right]$

359 Trova $f(x)$ sapendo che $f'(x) = 2e^{-x}(1-x)$ e che $f(0) = 1$. Rappresenta il suo grafico e calcola l'area compresa tra la curva e l'asse x nell'intervallo $[0; 1]$. $[f(x) = 2xe^{-x} + 1; 3 - 4e^{-1}]$

ESERCIZI

360 Traccia il grafico della funzione $y = x^4 - 2x^3 + 2$ e le sue tangenti nei punti di flesso A e B. Detto C il punto di intersezione delle due tangenti, calcola l'area del triangolo mistilineo ABC. $\left[\frac{1}{20}\right]$

361 Traccia il grafico della parabola di equazione $x = y^2 - 2y$ e calcola l'area della regione finita di piano compresa tra la curva e l'asse y. $\left[\frac{4}{3}\right]$

362 Dopo aver disegnato il grafico della funzione $y = 1 - x e^{-x}$, calcola l'area della regione finita di piano delimitata dallo stesso grafico, dal suo asintoto, dall'asse y e dalla retta di equazione $x = 2$. $[1 - 3e^{-2}]$

363 Rappresenta la funzione $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ e determina l'area della regione finita delimitata dagli assi x e y, dal grafico della funzione e dalla retta parallela all'asse y passante per il punto di minimo relativo della funzione. $\left[\frac{5-4\sqrt{2}}{2} + \ln 2\right]$

364 Traccia il grafico di $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$ e successivamente calcola l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di $f(x)$, dal suo asintoto obliquo, dall'asse y e dalla retta di equazione $x = 2$. $[\ln 3]$

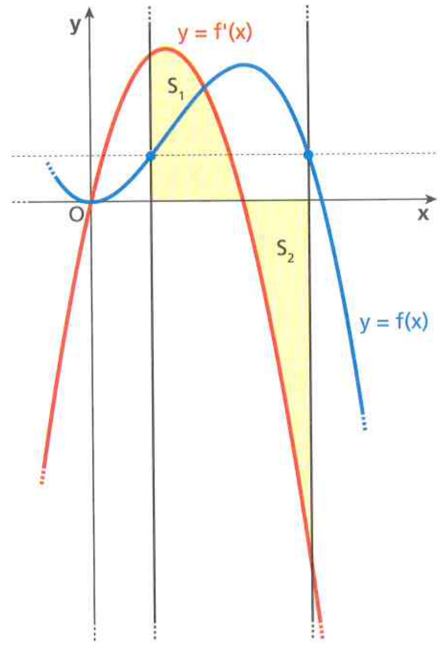
365 Rappresenta graficamente la funzione $y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ e calcola l'area della regione finita di piano compresa fra il grafico della funzione, l'asse x e la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$. $[2 - \sqrt{3}]$

366 Calcola l'area delle due regioni finite di piano individuate dall'intersezione tra la parabola di equazione $y = 2x^2 + 2x$ e la curva di equazione $y = x^3 + 3x^2$. $\left[\frac{8}{3}; \frac{5}{12}\right]$

367 Rappresenta graficamente la funzione $y = \sqrt{\frac{x}{4-x}}$ e determina l'area della regione finita di piano compresa fra la curva, l'asse y e la retta tangente alla curva nel suo punto di flesso. (SUGGERIMENTO Per il calcolo dell'integrale poni $x = 4\sin^2 t$.) $\left[\frac{11}{9}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi\right]$

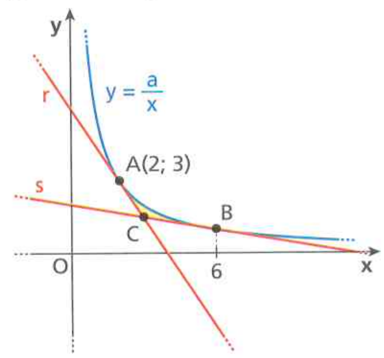
368 Determina la misura dell'area della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x) = 2^x$, dall'asse y e da quello della retta di equazione $y = 2x$. $\left[\frac{1}{\ln 2} - 1\right]$

369 EUREKA! Osserva il grafico. Cosa puoi dire delle aree di S_1 e di S_2?



370 Trova l'area della parte di piano finita delimitata dalla parabola di equazione $y = \frac{3}{2}x^2 - 1$, dall'iperbole di equazione $y = \frac{x+3}{x-1}$ e dalla retta di equazione $3x - 8y + 1 = 0$. $\left[8\ln 2 + \frac{1}{2}\right]$

371 LEGGI IL GRAFICO Nel grafico sono rappresentate l'iperbole di equazione $y = \frac{a}{x}$, per $x > 0$, e le sue tangenti r e s rispettivamente in A e B.



a. Trova il valore di a.

b. Determina le equazioni di r e s e le coordinate di C.

c. Calcola l'area del triangolo mistilineo ABC.

$\left[\text{a) } 6; \text{ b) } y = -\frac{3}{2}x + 6,\ y = 2 - \frac{x}{6}, C\left(3; \frac{3}{2}\right); \text{ c) } 6(\ln 3 - 1)\right]$

372 Dopo aver rappresentato graficamente il luogo dei centri delle iperboli di equazione

$$y = \frac{(m^2-3)x+2}{(m+2)x+4}, \quad \text{con } m \in \mathbb{R},$$

determina l'area della regione finita di piano compresa fra il luogo geometrico, la retta a esso tangente nel punto di minimo e la retta di equazione $x = -2$. $\left[4\ln 2 - \frac{5}{2}\right]$

373 Trova l'area della regione del primo quadrante delimitata inferiormente dal grafico di $y = \arcsin x$, superiormente dal grafico di $y = \arccos x$.

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament, HMMT*)

$[2 - \sqrt{2}]$

374 **a.** Rappresenta la curva di equazione $y = xe^{-2x}$.

b. Determina l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva, dall'asse x e dalla retta $x = \ln 2$. $\left[\text{b)} -\frac{1}{8}\ln 2 + \frac{3}{16}\right]$

375 **a.** Studia e rappresenta graficamente la funzione $f(x) = \dfrac{4x^2+x+2}{x^2+1}$.

b. Detto A il punto di intersezione del grafico con l'asintoto orizzontale, determina l'equazione della tangente t in A e calcola l'area della regione finita di piano delimitata dall'asse y, dalla retta t e dal grafico di $f(x)$.

$\left[\text{b)}\ 2\arctan 2 - \frac{\ln 5}{2} - \frac{2}{5}\right]$

376 Scrivi l'equazione della circonferenza con centro $C(2; -3)$ e raggio $r = 3\sqrt{2}$ e quella della parabola con asse parallelo all'asse y e tangente alla circonferenza nei punti A e B in cui quest'ultima interseca l'asse x. Calcola infine l'area della regione finita di piano racchiusa fra l'arco di circonferenza e quello di parabola. $\left[15 - \frac{9}{2}\pi\right]$

377 **a.** Studia la funzione $f(x) = \dfrac{2x-5}{(x-2)^3}$ e rappresentane il grafico γ.

b. Determina l'equazione della parabola che passa per i punti F, A, B, essendo F il flesso di γ, A l'ulteriore punto di intersezione di γ con la tangente inflessionale e B il punto di intersezione di γ con l'asse x. Calcola poi l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve. $\left[\text{b)}\ y = 2x^2 - 9x + 10; \frac{7}{24}\right]$

378 **a.** Considera la funzione $y = x^3 - 4x$ e rappresentala graficamente. Traccia la tangente t alla curva nel suo punto di intersezione con il semiasse positivo delle ascisse.

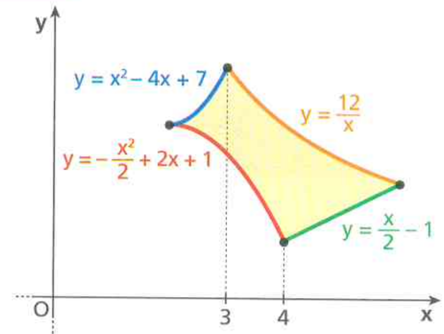
b. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva data, dalla retta t e dall'asse y. [a) $y = 8x - 16$; b) $S = 12$]

379 Calcola l'area della regione finita di piano i cui punti hanno coordinate $(x; y)$ che soddisfano il seguente sistema di disequazioni nelle due variabili x e y:

$$\begin{cases} y \le -x^2 + 6x - 5 \\ y - 3 \le 0 \\ y \ge 3 - \sqrt{12 - 3x} \end{cases}$$

$\left[\frac{14}{3}\right]$

380 EUREKA! Calcola il valore dell'area colorata.



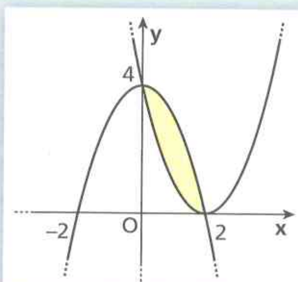
$\left[12\ln 2 - \frac{13}{3}\right]$

MATEMATICA AL COMPUTER

Area di una superficie Costruiamo una figura che permetta di assegnare un valore ai coefficienti a, b e c della parabola di equazione $q(x) = ax^2 + bx + c$ e che mostri, in corrispondenza, l'area dell'eventuale superficie finita di piano compresa fra la parabola di equazione $y = q(x)$ e la parabola di equazione $p(x) = -x^2 + 4$.

In particolare consideriamo:

$q(x) = x^2 - 4x + 4$.



Risoluzione – 7 esercizi in più

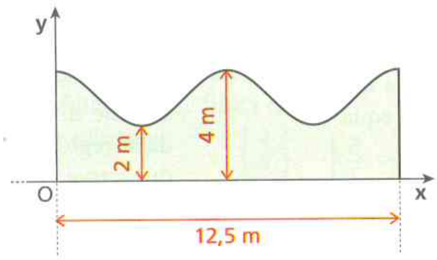
ESERCIZI

Problemi REALTÀ E MODELLI

RISOLVIAMO UN PROBLEMA

L'aiuola

Un'aiuola in un parco ha, vista in pianta, la forma indicata in figura.



- Sapendo che il bordo superiore è descrivibile con la funzione $y = a\cos x + b$, determina a e b.
- Trova l'area occupata dall'aiuola.
- Bisogna riempire l'aiuola con uno strato, alto circa 70 cm, di terriccio speciale, che viene venduto in sacchi da 80 litri e costa € 11,80 al sacco. Calcola il costo totale del terriccio.

▶ Determiniamo *a* e *b*.

La distanza tra i «picchi» e le «valli» della cosinusoide è 2, pertanto l'ampiezza è 1. Allora $a = 1$.
Il grafico della funzione passa per il punto $(0; 4)$:

$$\cos 0 + b = 4 \quad \rightarrow \quad 1 + b = 4 \quad \rightarrow \quad b = 3.$$

La funzione è $y = \cos x + 3$.

▶ Calcoliamo l'area.

$$\int_0^{12,5} (\cos x + 3)\,dx = [\sin x + 3x]_0^{12,5} =$$

$$\sin 12,5 + 37,5 - 0 \simeq 37,4\ \text{m}^2.$$

▶ Determiniamo il volume di terra necessario.

Per calcolare il volume moltiplichiamo l'area di base per l'altezza:

$$V = 37,4 \cdot 0,70 = 26,18\ \text{m}^3 = 26\,180\ \text{L}.$$

▶ Calcoliamo il costo totale.

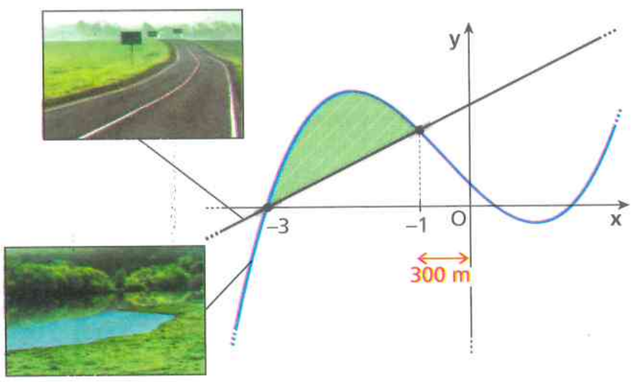
I sacchi da acquistare sono

$$\frac{26\,180}{80} = 327,25 \simeq 328.$$

Il costo totale è quindi:

$$328 \cdot € 11,80 = € 3870,40.$$

381



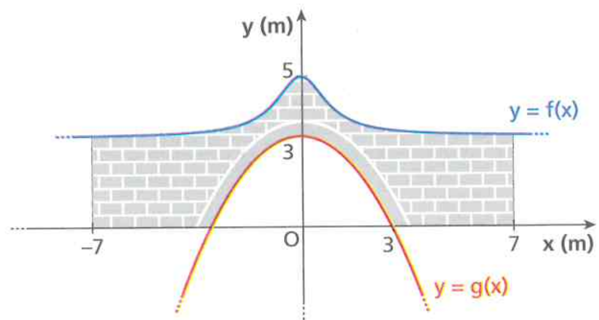
Turismo nel verde Una strada di campagna e un fiume delimitano un'area verde che il Comune decide di attrezzare per i turisti. Scegliendo sugli assi cartesiani l'unità uguale a 300 m, la strada e il fiume possono essere descritti come una retta di equazione $y = \dfrac{x+3}{2}$ e una curva di equazione $y = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{4}x$, rispettivamente.

Quanto è estesa l'area verde? [$120\,000\ \text{m}^2$]

382 **Il portale** All'ingresso di un parco pubblico c'è un portale che ha il profilo mostrato in figura. Il portale deve essere rivestito di marmo, che viene venduto in lastre quadrate di 1 m^2 ciascuna.

a. Le equazioni delle curve che delimitano il portale sono $f(x) = 3 + \dfrac{a}{x^2+1}$ e $g(x) = bx^2 + c$. Trova a, b e c.

b. Determina il numero minimo di lastre necessarie per rivestire tutta la facciata.



[a) $a = 2$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = 3$; b) 36]

383 IN FISICA In una trasformazione isoterma di un gas ideale il prodotto $p \cdot V$ di pressione e volume rimane costante. Inoltre, il lavoro termodinamico è dato dall'area sottesa alla curva che descrive la trasformazione nel piano p-V. Determina il lavoro compiuto da un gas ideale che si espande a temperatura costante dallo stato iniziale $p_A = 2 \cdot 10^5$ Pa e $V_A = 5$ m^3 al volume finale $V_B = 20$ m^3. $[1,39 \cdot 10^6 \text{ J}]$

Aree, integrali definiti e parametri

384 Determina per quali valori di k l'area della regione finita di piano individuata dalla retta di equazione $y = kx$ e dalla parabola di equazione $y = 3x^2$ è uguale a 32. $[k = \pm 12]$

385 Data la parabola di equazione $y = ax^2 + 3x + 5$, con $a \in \mathbb{R}$, determina il valore di a in modo che l'area della regione finita di piano individuata dalla parabola e dalla retta di equazione $y = x + 5$ sia uguale a $\frac{1}{3}$. $[a = \pm 2]$

386 Dimostra che l'area compresa fra la curva di equazione $y = \frac{1}{x}$, le rette di equazioni $x = a$ e $x = 2a$ e l'asse x non dipende da a.

387 Trova per quale valore di k l'integrale $\int_k^1 2\sqrt{1-x}\,dx$ è uguale all'area della parte finita di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = x^2 - 2x$ e dall'asse x. $[k = 0]$

388 Rappresenta graficamente la funzione $y = xe^{-a^2x^2}$, con $a > 0$, e determina l'area della regione finita di piano sottesa alla curva nell'intervallo $[0; a]$. Calcola il limite a cui tende l'area quando a tende a $+\infty$. $\left[\frac{1}{2a^2}(1 - e^{-a^4}); 0\right]$

389 Dato il fascio di parabole di equazione $y = -kx^2 + 2(k-1)x$, trova quale parabola (con $k > 1$) individua con l'asse x una regione finita di area uguale a $\frac{1}{3}$. $[k = 2]$

390 Trova la retta passante per l'origine che divide il segmento parabolico individuato dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e dall'asse x in due regioni di piano equivalenti. $[y = (4 - \sqrt[3]{32})x]$

391
a. Determina per quale valore del parametro reale a $(a \geq 0)$ l'area del trapezoide individuato dalla curva $y = \frac{a + x}{x^2 + 1}$ e dalle rette di equazioni $x = 0$ e $x = 1$ vale $\frac{\pi + \ln 4}{4}$.
b. Rappresenta graficamente la curva trovata.
c. Determina l'equazione della retta tangente alla curva nel suo punto di flesso di ascissa positiva.
$\left[\text{a) } a = 1; \text{ c) } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right]$

392 Determina il valore positivo di a tale che la parabola $y = x^2 + 1$ divida in due l'area del rettangolo con vertici $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(0; a^2 + 1)$ e $(a; a^2 + 1)$.
(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament, HMMT*)
$[a = \sqrt{3}]$

393 Considera la parabola γ di equazione $y = kx^2 + 2$ con $k > 0$, traccia le tangenti r ed s passanti per il punto $(0; 1)$ e, detti R ed S i punti di contatto, verifica che il rapporto tra l'area del triangolo ORS e quella della regione delimitata da γ e dal segmento RS non dipende da k.