PROBLEMA 1

Il dominio della funzione è $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$ perché $+1$ e -1 sono i due valori che annullano il denominatore $(1-x^2)^2$.

La funzione è dispari, infatti

$$E(-x) = \frac{-A(-x)}{(1-(-x)^2)^2} = -\frac{-Ax}{(1-x^2)^2} = -E(x)$$

La funzione è positiva se $x<0$, infatti

$$\frac{-Ax}{(1-x^2)^2} > 0$$

$$-Ax > 0 \qquad (\text{perché } A>0)$$

$$x < 0$$

ed ha una unica intercetta in $x=0$

I limiti sono

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-Ax}{(1-x^2)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-Ax}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{A}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x\to-1} \frac{-Ax}{(1-x^2)^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to+1} \frac{-Ax}{(1-x^2)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-Ax}{(1-x^2)^2} = \lim_{x\to\infty} -\frac{A}{x^3} = 0$$

C'è dunque un asintoto orizzontale $y=0$ e due asintoti verticali $x=\pm 1$

La derivata è

$$\left[-Ax\cdot(1-x^2)^{-2}\right]' = \left[-Ax\right]'(1-x^2)^{-2} + (-Ax)\left[(1-x^2)^{-2}\right]' =$$

$$= -A(1-x^2)^{-2} + (-Ax)\left[-2(1-x^2)^{-3}(-2x)\right] =$$

$$= \frac{-A}{(1-x^2)^2} - \frac{4Ax^2}{(1-x^2)^3} = -A\frac{1-x^2+4x^2}{(1-x^2)^3} = -A\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$$

La derivata è positiva per

$$-A\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3} > 0$$

$$-\frac{1}{(1-x^2)^3} > 0$$

$1-x^2 < 0$ ovvero $x>1$ o $x<-1$

ed è nulla ~~solo per~~ per nessun valore di x.

La derivata seconda è

$$\left[\frac{-A(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}\right]' = \frac{\left[-A(1+3x^2)\right]'(1-x^2)^3 - \left(-A(1+3x^2)\right)\left[(1-x^2)^3\right]'}{(1-x^2)^6} =$$

$$= \frac{-6x\cdot A(1-x^2)^3 + A(1+3x^2)\cdot 3(1-x^2)^2(-2x)}{(1-x^2)^6} =$$

$$= -A\frac{6x(1-x^2)^3 + 6x(1+3x^2)(1-x^2)^2}{(1-x^2)^6} = -6A\frac{x(1-x^2)+x(1+3x^2)}{(1-x^2)^4} =$$

$$= -6A\frac{2x+2x^3}{(1-x^2)^4} = -12A\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^4}$$

Il segno della derivata seconda è

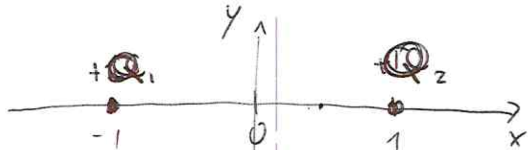
$$-12A\,\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^4} > 0$$

$$-x(1+x^2) > 0$$

$$x < 0$$

dunque ~~la deriff~~ E'' è positiva per $x<0$ e negativa per $x>0$: significa che in $x=0$ c'è un flesso a tangente obliqua con pendenza $E'(0) = -A$ e con retta tangente di equazione $y = -Ax$.

b)



Per $x > -1$ il campo dovuto a Q_1 è

$$E_1(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1}{(1+x)^2} \qquad (x>-1)$$

mentre quello dovuto a Q_2 è

$$E_2(x) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_2}{(1-x)^2} \qquad (x<1)$$

il segno negativo è dovuto alla scelta di considerare positivo il verso dell'asse x, quindi alla sinistra di Q_2 il campo elettrico è in direzione opposta.

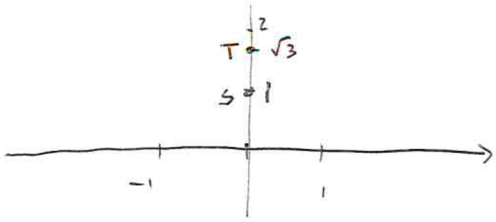
Dalla somma $E_1 + E_2$ risulta

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(1-x)^2-(1+x)^2}{(1-x)^2(1+x)^2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{-4x}{(1-x^2)^2} = -\frac{Q}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{x}{(1-x^2)^2}$$

Le dimensioni A, assumendo che x sia una misura in metri, sono $[A] = \dfrac{N \cdot m^3}{C}$

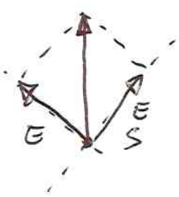
c)



Dato che le cariche sono uguali e positive il campo elettrico in S e T ha solo componente verticale, per la simmetria del problema.

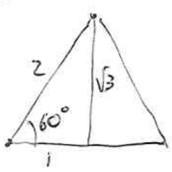
L'intensità di ciascuno dei campi elettrici in S è

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{[\sqrt{2}]^2} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}$$

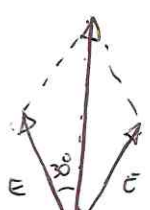


Il campo totale in S è $\sqrt{2}\cdot E = \dfrac{\sqrt{2}\,q}{8\pi\varepsilon_0}$

L'intensità di ciascun campo in T è



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{[2]^2} = \frac{q}{16\pi\varepsilon_0}$$



$$E_{tot} = 2\cdot E \cdot \cos(30°) = \sqrt{3}\,E = \frac{\sqrt{3}\,q}{12\pi\varepsilon_0}$$

PROBLEMA 2

Per ogni $k \in \mathbb{R}$, la derivata è $f'_k(x) = -3x^2 + k$

La retta r_k ha pendenza $f'_k(0) = k$ e passa per il punto $(0; f_k(0)) = (0; 9)$ dunque ha equazione

$$y = kx + 9$$

La retta s_k ha pendenza $f'_k(1) = -3 + k$ e passa per il punto $(1; f_k(1)) = (1; 8+k)$ dunque ha equazione

$$y - (8+k) = (-3+k)\cdot(x-1)$$

Il sistema $\begin{cases} y = kx + 9 \\ y - (8+k) = (-3+k)\cdot(x-1) \end{cases}$ ha soluzione $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}k + 9\right)$

(b) Dalla disequazione $\frac{2}{3}k + 9 < 0 \rightarrow k < \frac{3}{2}$ segue che $k = 1$ è il maggiore intero per cui M ha ordinata minore di 10.

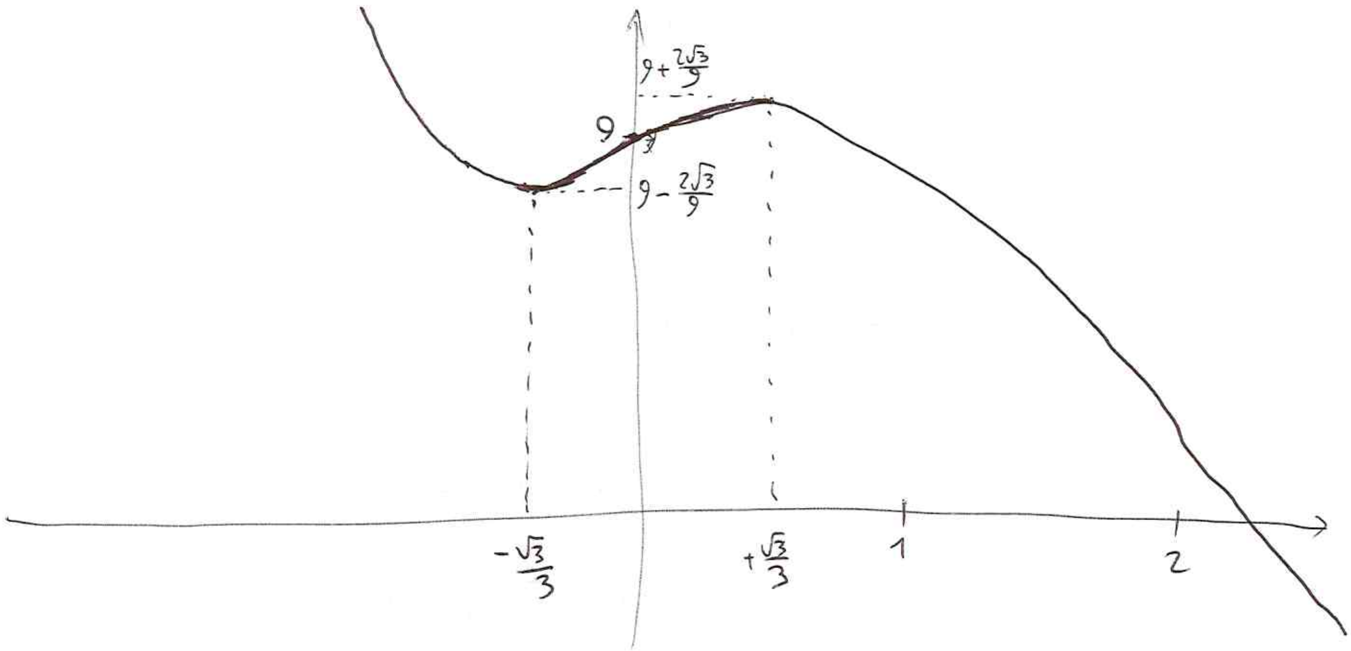
La funzione $f_1(x) = -x^3 + x + 9$ ha derivata $f'_1(x) = -3x^2 + 1$

il cui segno è

$$\begin{array}{ccccc} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & & +\frac{\sqrt{3}}{3} & \\ - - - - - & | & + + + + + & | & - - - - \\ \searrow & & \nearrow & & \searrow \end{array}$$

La funzione f_1 ha dunque un minimo in $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; f_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ e un massimo in $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; f_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

L'unica intercetta si trova per qualche valore di x tra 2 e 3, perché $f_1(2) = 3$ e $f_1(3) = -15$



ⓒ Se $s(t) = -t^3 + t + 9$ allora $s_0 = 9$

$v(t) = \frac{ds}{dt}(t) = -3t^2 + 1$ $\quad v_0 = 1$

$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = -6t$ $\quad a_0 = 0$

Come mostra il grafico precedente, in $\bar{t} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ s il corpo si ferma e inverte la direzione del moto.