Osservazione. In generale si può ottenere, ripetendo lo stesso procedimento, ma ponendo $x = a \sin t$:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + c, \text{ con } a > 0.$$

Calcola i seguenti integrali.

412 $\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$ $\left[\frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + c\right]$

413 $\int \sqrt{1 - 4x^2}\, dx$ $\left[\frac{1}{4} \arcsin 2x + \frac{x}{2}\sqrt{1 - 4x^2} + c\right]$

414 $\int \sqrt{16 - 4x^2}\, dx$ $\left[4 \arcsin \frac{x}{2} + x\sqrt{4 - x^2} + c\right]$

415 $\int \sqrt{36 - 4x^2}\, dx$ $\left[9 \arcsin \frac{x}{3} + x\sqrt{9 - x^2} + c\right]$

416 EUREKA! Calcola $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$, ponendo $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$. $[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c]$

4 Integrazione per parti

▶ Teoria a p. 1882

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

CACCIA ALL'ERRORE Correggi i calcoli seguenti, applicando correttamente la formula di integrazione per parti.

417 $\int x \cos x\, dx = -x \sin x + \int \sin x\, dx = -x \sin x - \cos x + c$

418 $\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - x + c$

419 $\int x e^{-x} dx = x e^{-x} - \int e^{-x} dx = x e^{-x} - e^{-x} + c$

420 TEST Nell'uguaglianza

$$\int 2x\, e^{h(x)}\, dx = 2x\, e^{h(x)} - 2 \int e^{h(x)} dx$$

è stato applicato il metodo di integrazione per parti. $h(x)$ è uguale a:

A $2x$. **B** x. **C** $\frac{x}{2}$. **D** x^2. **E** $\frac{x}{4}$.

421 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo, applicando la formula di integrazione per parti, l'integrale $\int x^2 \ln x\, dx$.

$$\int \underbrace{x^2}_{g'} \underbrace{\ln x}_{f}\, dx = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{g} \underbrace{\ln x}_{f} - \int \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{g} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$$

Calcola i seguenti integrali applicando la formula di integrazione per parti.

422 $\int 2x \ln x\, dx$ $\left[x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + c\right]$

423 $\int 3x \cos x\, dx$ $[3x \sin x + 3 \cos x + c]$

424 $\int x e^x dx$ $[e^x (x - 1) + c]$

425 $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ $\left[-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c\right]$

426 $\int \arctan x\, dx$ $\left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + c\right]$

427 $\int 4x e^{2x} dx$ $[(2x - 1)e^{2x} + c]$

428 $\int \arcsin x\, dx$ $[x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c]$

429 $\int x\, 2^x \ln 2\, dx$ $\left[2^x\left(x - \frac{1}{\ln 2}\right) + c\right]$

430 $\int \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$ $[\sqrt{x}(\ln x - 2) + c]$

431 $\int \frac{x + 2}{e^x} dx$ $\left[-\frac{x + 3}{e^x} + c\right]$

432 ●○ $\int (x+2)\sin x\, dx$ $\quad [-(x+2)\cos x + \sin x + c]$

433 ●○ $\int \ln^2 x\, dx$ $\quad [x(\ln^2 x - \ln x^2 + 2) + c]$

434 ●○ $\int \sqrt[3]{x}\ln 2x\, dx$ $\quad \left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left(\ln 2x - \frac{3}{4}\right) + c\right]$

435 ●○ $\int x e^{-x}\, dx$ $\quad [-(x+1)e^{-x} + c]$

436 ●○ $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$ $\quad \left[-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c\right]$

437 ●○ $\int 5x^4 \ln x\, dx$ $\quad \left[x^5 \ln x - \frac{x^5}{5} + c\right]$

438 ●○ $\int \ln 4x\, dx$ $\quad [x\ln 4x - x + c]$

439 ●○ $\int x \sin 2x\, dx$ $\quad \left[-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c\right]$

440 ●○ $\int \frac{x}{2\sqrt{x+1}}\, dx$ $\quad \left[\frac{1}{3}\sqrt{x+1}(x-2) + c\right]$

441 ●○ $\int 2x\, e^{2x}\, dx$ $\quad \left[e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + c\right]$

442 ●○ $\int x^2 \sin x\, dx$ $\quad [-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c]$

443 ●○ $\int x^2 \cos x\, dx$ $\quad [x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c]$

444 ●○ $\int 4x\cos 2x\, dx$ $\quad [2x\sin 2x + \cos 2x + c]$

445 ●● $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$ $\quad [2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c]$

446 ●● $\int x^2 e^x\, dx$ $\quad [e^x(x^2 - 2x + 2) + c]$

447 ●● $\int \ln(2x+1)\, dx$ $\quad \left[\ln(2x+1)\left(\frac{1}{2} + x\right) - x + c\right]$

448 ●● $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$ $\quad \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + c\right]$

449 ●● $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$ $\quad [x\tan x + \ln|\cos x| + c]$

450 ●● $\int \arccos x\, dx$ $\quad [x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c]$

451 ●● $\int \frac{\ln x^2}{x^2}\, dx$ $\quad \left[-\frac{1}{x}(2 + \ln x^2) + c\right]$

452 ●● $\int 2x \arctan x\, dx$ $\quad [(x^2+1)\arctan x - x + c]$

453 ●● $\int 8x\sin x\cos x\, dx$ $\quad [-2x\cos 2x + \sin 2x + c]$

---

454 ●● $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\, dx$ $\quad [-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + c]$

455 ●● $\int \ln(x^2+1)\, dx$ $\quad [x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + c]$

456 ●● $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx$ $\quad [x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c]$

457 ●● $\int x\arctan\sqrt{x-1}\, dx$ $\quad \left[\frac{x^2}{2}\arctan\sqrt{x-1} - \frac{x+2}{6}\sqrt{x-1} + c\right]$

458 ●● $\int \left(x^2\ln^2 x - \frac{2}{9}x^2\right) dx$ $\quad \left[\frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}x^3 \ln x + c\right]$

459 **ESERCIZIO GUIDA** Calcoliamo $\int e^x \sin x\, dx$ applicando la formula di integrazione per parti.

$$\int \underbrace{e^x}_{g'}\,\underbrace{\sin x}_{f}\, dx = \underbrace{e^x}_{g}\,\underbrace{\sin x}_{f} - \int \underbrace{e^x}_{g}\,\underbrace{\cos x}_{f'}\, dx$$

Applichiamo nuovamente all'integrale $\int e^x \cos x\, dx$ la formula di integrazione per parti:

$$\int \underbrace{e^x}_{g'}\,\underbrace{\cos x}_{f} = \underbrace{e^x}_{g}\,\underbrace{\cos x}_{f} - \int \underbrace{e^x}_{g}\,\underbrace{(-\sin x)}_{f'}\, dx = e^x\cos x + \int e^x \sin x\, dx.$$

Dunque l'integrale dato diventa:

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x\cos x - \overbrace{\int e^x \sin x\, dx}^{\text{è lo stesso integrale del primo membro}}.$$