CAPITOLO 5

LA QUANTITÀ DI MOTO E IL MOMENTO ANGOLARE

Neil Emmerson/Corbis

1 LA QUANTITÀ DI MOTO

Figura 1 La «barchetta» si muove nel verso opposto al getto d'acqua che esce dal foro.

Si può costruire una «barca a reazione» incollando un bicchiere di plastica su una tavoletta di legno o di polistirolo **(figura 1)**. La barca galleggia nell'acqua del lavandino. Il bicchiere è pieno d'acqua: quando lo si fora nella parte bassa, esce un piccolo getto d'acqua che fa muovere la barchetta nel verso opposto.

La ragione per la quale la barchetta si muove è la stessa che è alla base del funzionamento dei **motori a reazione** dei jet e dei missili. Alla base di tutto c'è una legge di conservazione, quella della *quantità di moto*.

Il vettore quantità di moto

Consideriamo un corpo di massa m che si muove con velocità $\vec{v}$. Definiamo la sua **quantità di moto** $\vec{p}$ come il prodotto della massa per la velocità

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{1}$$

massa (kg)

quantità di moto (kg·m/s)

velocità (m/s)

- La quantità di moto è un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore velocità.
- La sua intensità si misura in kg · m/s ed è direttamente proporzionale sia al valore della velocità, sia alla massa.

Dimensioni fisiche
Puoi verificare che le dimensioni fisiche della quantità di moto sono $[m \cdot l \cdot t^{-1}]$.

Un uor quantità di moto più grande di quella di un cane che si muove alla stess ché ha una massa maggiore. Tuttavia, un cane che corre può avere una q ità di moto maggiore di quella di un uomo che cammina. Per esempio, un cane di 15 kg che corre alla velocità di 10 m/s ha una quantità di moto pari a 150 kg · m/s, mentre il valore della quantità di moto di una persona di 60 kg che cammina alla velocità di 2 m/s è minore, cioè 120 kg · m/s.

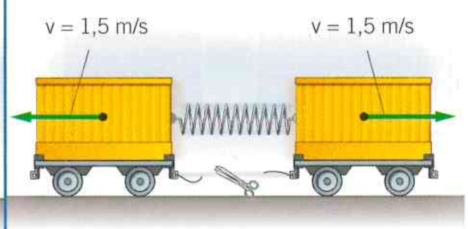
2 LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Esaminiamo, dal punto di vista della quantità di moto, un esperimento di disintegrazione, in cui un unico oggetto «esplode» in due frammenti.

▶ Due carrelli di massa uguale, collegati da una molla, sono tenuti fermi da un filo.

A

▶ Dopo aver tagliato il filo, i due carrelli si allontanano con velocità uguali in modulo.



B

- *All'inizio* ciascun carrello ha quantità di moto uguale a zero, perché è fermo.
- *Alla fine* i due carrelli hanno quantità di moto dello stesso valore (0,36 kg × 1,5 m/s = = 0,54 kg · m/s), ma dirette in versi opposti.

La quantità di moto totale dei due carrelli **(figura 2)** era zero all'inizio e rimane zero alla fine (somma di vettori opposti); quindi si conserva.

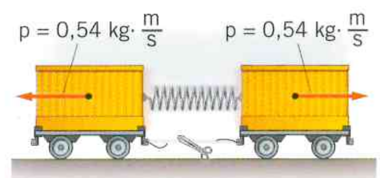
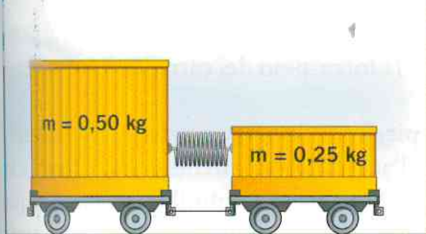


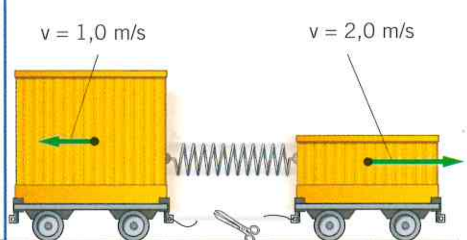
Figura 2 Le quantità di moto dei due carrelli hanno stessa direzione, stesso modulo e versi opposti.

▶ Ripetiamo l'esperimento con un carrello di massa doppia rispetto all'altro.



A

▶ Il carrello di massa doppia si allontana con velocità metà rispetto all'altro.



B

- *All'inizio* ciascun carrello ha quantità di moto uguale a zero, perché è fermo.
- *Alla fine* i carrelli hanno quantità di moto dello stesso valore (0,50 kg × 1,0 m/s = = 0,50 kg · m/s il primo e 0,25 kg × 2,0 m/s = 0,50 kg · m/s il secondo), ma dirette in versi opposti **(figura 3)**.

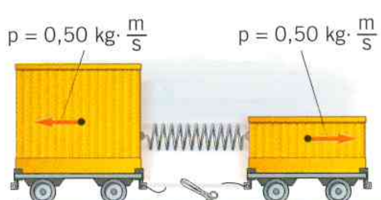


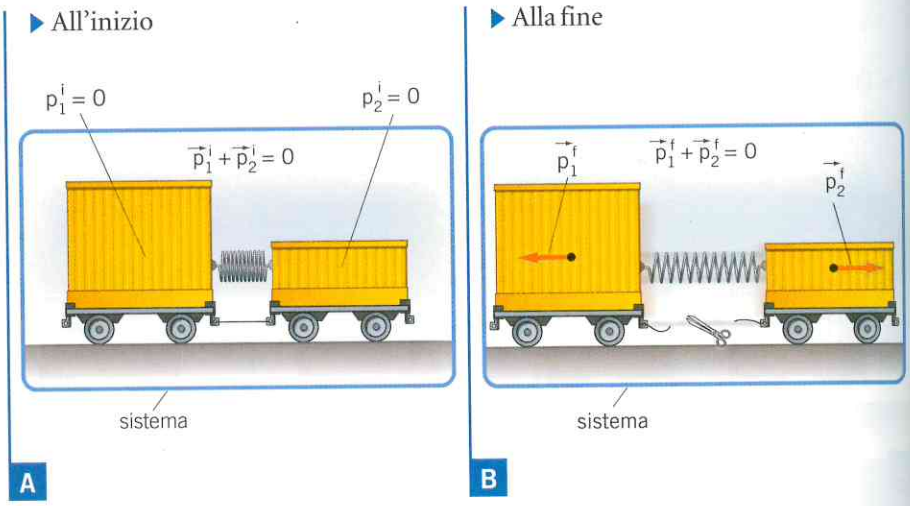
Figura 3 Ancora una volta i vettori quantità di moto dei due carrelli sono uguali e opposti.

La quantità di moto totale dei due carrelli era zero all'inizio e rimane zero alla fine (somma di vettori opposti); quindi, anche in questo caso, si conserva.

Consideriamo ora i due carrelli come parti di un unico sistema di corpi. Nei due casi esaminati

> la quantità di moto di ciascun corpo cambia; invece, la quantità di moto totale del sistema non cambia, cioè si conserva.

La quantità di moto totale del sistema era zero prima del taglio del filo e rimane zero anche dopo.



La legge di conservazione della quantità di moto

ANIMAZIONE

Conservazione della quantità di moto (1 minuto)

Esperimenti come questi sono in accordo con la **legge di conservazione della quantità di moto**:

> se su un sistema non agiscono forze esterne, la quantità di moto totale del sistema si conserva.

Nel caso dei due carrelli agisce solo la forza elastica della molla, che è interna al sistema. La forza esterna è uguale a zero, perché la forza-peso dei carrelli è controbilanciata dalla reazione vincolare del tavolo.

Il moto della «barchetta a reazione» si spiega con la conservazione della quantità di moto: prima di forare il bicchiere, sia l'acqua che la barchetta sono fermi e la quantità di moto totale del sistema è nulla. Dopo avere forato il bicchiere, l'acqua esce con una certa velocità (e, quindi, una certa quantità di moto). Allora la barchetta acquista una quantità di moto che ha verso opposto, in modo che la somma dei due vettori sia ancora zero.

Sullo stesso principio è basato il funzionamento dei motori a reazione (figura 4). Quando l'aereo è fermo sulla pista, la sua quantità di moto totale (compresa quella del carburante e dell'aria contenuta nei motori) è pari a zero. Quando i motori vengono accesi, essi aspirano aria dal davanti ed espellono i gas combusti all'indietro a grande velocità. Per la conservazione della quantità di moto l'aereo si muove in avanti.

Figura 4 La conservazione della quantità di moto permette all'aereo di muoversi.

3 L'IMPULSO DI UNA FORZA

La seconda legge della dinamica, $\vec{F} = m\vec{a}$, può essere riscritta dal punto di vista della quantità di moto.

In questa nuova formulazione, chiamata *teorema dell'impulso*, si introduce una nuova grandezza, l'**impulso** $\vec{I}$ di una forza, definito come il prodotto della forza $\vec{F}$ per l'intervallo di tempo Δt in cui essa agisce:

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t. \qquad (2)$$

L'impulso di una forza è grande se è grande la forza oppure se la forza continua ad agire per un tempo lungo.

Il teorema dell'impulso

Esaminiamo un punto materiale di massa m che ha una quantità di moto iniziale $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$. Su di esso agisce una forza $\vec{F}$ per un intervallo di tempo Δt; come conseguenza, la sua quantità di moto diviene $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$. Il vettore $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ è la variazione della quantità di moto.

Ricordando la definizione di accelerazione ($\vec{a} = \Delta\vec{v}/\Delta t$), il secondo principio della dinamica può essere scritto come

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Moltiplicando per Δt il primo e l'ultimo termine dell'uguaglianza precedente otteniamo

$$\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v}.$$

Scriviamo $\Delta\vec{v}$ come $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$. Allora il prodotto $m\Delta\vec{v}$ diviene

$$m\Delta\vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}.$$

Abbiamo così trovato il **teorema dell'impulso**:

$$\underbrace{\Delta\vec{p}}_{\text{variazione della quantità di moto (kg·m/s)}} = \overbrace{\vec{F}}^{\text{forza (N)}}\underbrace{\Delta t}_{\text{tempo (s)}} \qquad (3)$$

Lavoro e impulso
Il lavoro descrive l'effetto di una forza che agisce mentre il corpo percorre una certa *distanza*. L'impulso descrive l'effetto di una forza che agisce per un certo *tempo*.

cioè

$$\Delta\vec{p} = \vec{I}.$$

La variazione della quantità di moto è uguale all'impulso della forza che agisce su un corpo.

Il teorema dell'impulso, che è un nuovo modo di scrivere la seconda legge della dinamica, mette in luce aspetti interessanti degli urti.

ESEMPIO

Una forza costante, di modulo $F = 14{,}9$ N, agisce per un intervallo di tempo $\Delta t = 6{,}27$ s.

▶ Quanto vale l'impulso della forza, relativo a quell'intervallo di tempo?

Utilizzando la definizione **(2)** si ottiene:

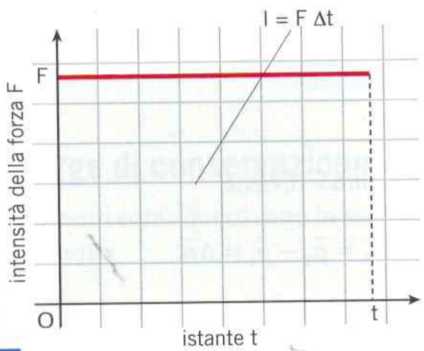
$$I = F\Delta t = (14{,}9\ \text{N}) \times (6{,}27\ \text{s}) = 93{,}4\ \text{N}\cdot\text{s}.$$

L'impulso di una forza variabile

La formula $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$ ha senso soltanto se, nell'intervallo Δt, la forza $\vec{F}$ si mantiene costante. Se invece $\vec{F}$ è variabile (in direzione, verso e modulo), è necessario calcolare l'impulso in moltissimi (infiniti) intervalli di tempo in cui la forza si può considerare costante e poi sommare vettorialmente tutti questi contributi.

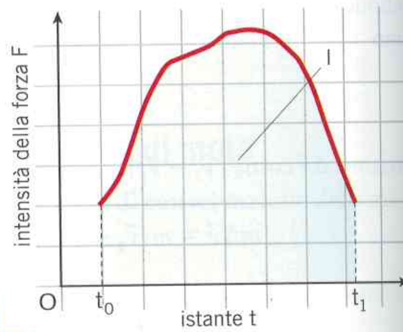
Più semplice è il caso in cui la forza cambia soltanto il suo valore, ma rimane costante in direzione e verso.

▶ Se $\vec{F}$ è costante, il valore $I = F\Delta t$ dell'impulso è dato dall'area di un rettangolo di base Δt e altezza F nel grafico forza-tempo.



A

▶ Se $\vec{F}$ non è costante, si dimostra che il valore di $\vec{I}$ è dato dall'area tra l'asse dei tempi e il grafico della forza in funzione del tempo.



B

La dimostrazione è del tutto analoga a quelle della distanza percorsa in un moto vario (svolta nella scheda matematica nel capitolo «Le forze e i moti») e del lavoro di una forza variabile (schematizzata nel capitolo «Il lavoro e l'energia»).

Charles Knox Photo/Shutterstock

Minimizzare la forza d'urto

Perché, quando si cade, si attutisce l'urto piegandosi sulle gambe? Perché, in questo modo, si riesce ad annullare la propria quantità di moto con una forza d'urto piccola.

Infatti, quando si cade, si acquisisce una grande quantità di moto, che subito dopo l'urto deve diventare zero. La variazione di questa quantità di moto è uguale all'impulso della forza dell'urto:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{\text{urto}}\Delta t.$$

A parità di $\Delta\vec{p}$, quanto più è grande il tempo Δt in cui avviene l'impatto, tanto più è piccola la forza dell'urto. Rispetto a un atterraggio con le gambe rigide, se prolunghiamo di 10 volte il tempo in cui la nostra quantità di moto diventa zero, la forza sulle ginocchia diventa 10 volte più piccola.

Analogamente, per ridurre la forza d'urto negli incidenti automobilistici, si aumenta il tempo dell'impatto: mediante gli airbag, che fanno diminuire più lentamente la quantità di moto del passeggero che sta a bordo; con carrozzerie deformabili, per fare diminuire più lentamente la quantità di moto dell'automobile e quindi del passeggero **(figura 5)**.

Figura 5 Gli airbag e la carrozzeria deformabile allungano il tempo di arresto dell'automobile, attutendo l'urto.

Massimizzare la forza d'urto

Perché con un colpo di karate si riesce a spezzare una pila di mattoni? Perché si esercita una grande forza in un tempo molto piccolo.

Infatti, la mano del karateka acquisisce una grande quantità di moto, che subito dopo l'urto diventa zero. Come prima, la variazione della quantità di moto è uguale all'impulso della forza dell'urto. Però, in questo caso, vogliamo che la forza sia molto grande. Per questo motivo bisogna esercitarla in un tempo molto piccolo: il colpo deve essere molto secco.

Andrey Ushakov/Shutterstock

4 I PRINCÌPI DELLA DINAMICA E LA LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Abbiamo considerato l'effetto dell'impulso di una forza che agisce su un solo corpo. Vediamo ora il caso di un sistema fatto da più corpi e, a partire dai princìpi della dinamica, dimostriamo la legge di conservazione della quantità di moto totale.

Consideriamo un sistema formato da due corpi A e B che interagiscono tra loro e utilizziamo i simboli seguenti:

- $(\vec{p}_A)_{\text{prima}}$: quantità di moto di A prima dell'interazione;
- $(\vec{p}_B)_{\text{prima}}$: quantità di moto di B prima dell'interazione;
- $(\vec{p}_A)_{\text{dopo}}$: quantità di moto di A dopo l'interazione;
- $(\vec{p}_B)_{\text{dopo}}$: quantità di moto di B dopo l'interazione;
- $\vec{F}_{B\to A}$: forza esercitata da B su A durante l'interazione;
- $\vec{F}_{A\to B}$: forza esercitata da A su B durante l'interazione;
- Δt: durata dell'interazione.

Dal terzo principio della dinamica (azione e reazione) sappiamo che si ha $\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B}$. Moltiplicando i due membri di questa relazione per Δt otteniamo:

$$\vec{F}_{B\to A}\Delta t = -\vec{F}_{A\to B}\Delta t. \tag{4}$$

Per il teorema dell'impulso (formula (**3**)) l'impulso è uguale alla variazione della quantità di moto, per cui possiamo ora scrivere:

$$\vec{F}_{B \to A} \Delta t = \Delta \vec{p}_A = (\vec{p}_A)_{\text{dopo}} - (\vec{p}_A)_{\text{prima}}$$

e

$$\vec{F}_{A \to B} \Delta t = \Delta \vec{p}_B = (\vec{p}_B)_{\text{dopo}} - (\vec{p}_B)_{\text{prima}}.$$

Sostituendo queste due espressioni nella (**4**) troviamo la relazione

$$(\vec{p}_A)_{\text{dopo}} - (\vec{p}_A)_{\text{prima}} = -[(\vec{p}_B)_{\text{dopo}} - (\vec{p}_B)_{\text{prima}}],$$

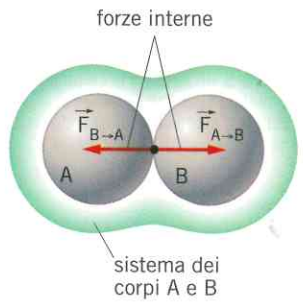


Figura 6 Le forze di contatto sono forze interne al sistema.

da cui, cambiando di membro il secondo e il terzo termine, otteniamo:

$$(\vec{p}_A)_{\text{dopo}} + (\vec{p}_B)_{\text{dopo}} = (\vec{p}_A)_{\text{prima}} + (\vec{p}_B)_{\text{prima}}. \quad (5)$$

La formula (**5**) dice che, per il sistema formato dai due corpi A e B, in cui agiscono soltanto le forze interne $\vec{F}_{B \to A}$ e $\vec{F}_{A \to B}$, la somma vettoriale delle quantità di moto iniziali è uguale alla somma delle quantità di moto finali **(figura 6)**.

Nel corso della dimostrazione abbiamo utilizzato la formula (**4**) (terzo principio della dinamica) e la formula (**3**) (che era stata dimostrata grazie al secondo principio). È quindi dimostrato che

> la conservazione della quantità di moto in un sistema isolato è una conseguenza dei princìpi della dinamica.