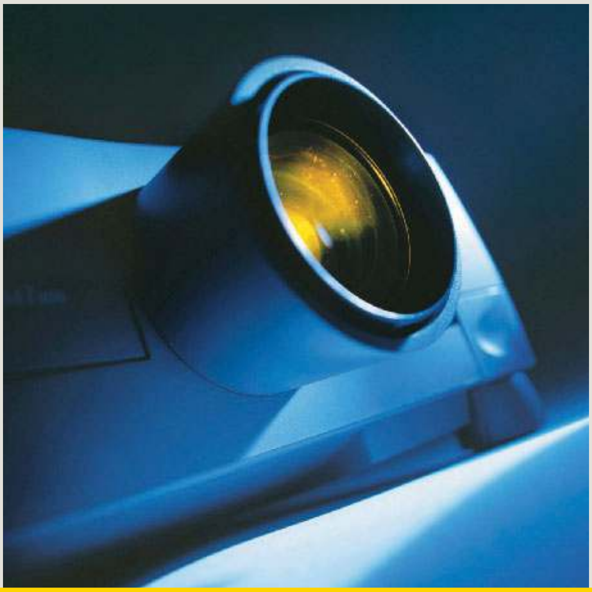
CAPITOLO

12

Le equazioni di secondo grado



Home Cinema

I proiettori si usano comunemente nelle sale cinematografiche, ma, da quando la tecnologia lo permette, molte persone scelgono di godersi la visione dei film nella propria casa, disponendo di un apparecchio ottico per la proiezione e di uno schermo bianco…

…a quale distanza deve essere posto il proiettore affinché l'immagine che appare sullo schermo abbia la dimensione desiderata?

La risposta a pag. 885

1. Che cosa sono le equazioni di secondo grado

Le equazioni di secondo grado

Un'equazione è di secondo grado se, dopo aver applicato i princìpi di equivalenza già studiati per le equazioni di primo grado, si può scrivere nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad \text{con } a \neq 0.$$

Le lettere a, b e c rappresentano numeri reali o espressioni letterali e si chiamano **primo**, **secondo** e **terzo coefficiente** dell'equazione; c è anche detto **termine noto**.

La forma $ax^2 + bx + c = 0$ è detta **forma normale**.

ESEMPIO L'equazione

$$5x^2 - 2x - 1 = 0$$

è di secondo grado in forma normale, e i tre coefficienti sono:

$$a = 5; \quad b = -2; \quad c = -1.$$

-1 è il termine noto.

Se, oltre ad $a \neq 0$, si hanno anche $b \neq 0$ e $c \neq 0$, l'equazione si dice **completa**. Per esempio, l'equazione $2x^2 - 5x + 6 = 0$ è completa.

Se invece l'equazione è **incompleta**, abbiamo i seguenti casi particolari.

EQUAZIONI INCOMPLETE

COEFFICIENTI	FORMA NORMALE	NOME	ESEMPIO
$b \neq 0, c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	equazione **spuria**	$2x^2 - 5x = 0$
$b = 0, c \neq 0$	$ax^2 + c = 0$	equazione **pura**	$2x^2 + 6 = 0$
$b = 0, c = 0$	$ax^2 = 0$	equazione **monomia**	$2x^2 = 0$

Una **soluzione** (o **radice**) dell'equazione è un valore che, sostituito all'incognita, rende vera l'uguaglianza fra i due membri.

ESEMPIO

L'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ ha per soluzioni i numeri 2 e 3.

Infatti, sostituendo a x il numero 2, si ottiene

$$(2)^2 - 5(2) + 6 = 0$$

e sostituendo il numero 3,

$$(3)^2 - 5(3) + 6 = 0.$$

Risolvere un'equazione di secondo grado significa cercarne le soluzioni. In genere, cercheremo le soluzioni nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Come vedremo, le soluzioni di un'equazione di secondo grado possono essere al massimo due.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Babilonia, anno 1000 a.C.

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Humbaba e Gamesh, studenti della Casa delle Tavolette, chiedono all'amico Nabu spiegazioni sul problema che avevano come compito a casa: moltiplicando un numero per se stesso e aggiungendo il doppio del numero, si ottiene 24; qual è il numero?
Nabu non ha dubbi: «Il numero è 4. Aggiungete la metà di 2 a 24, cioè 25. Prendete la radice quadrata, cioè 5, e poi...».

(Liberamente tratto da Ian Stewart, *L'eleganza della verità*, Einaudi, Torino, 2008)

CRISTINA: «Come ha fatto Nabu a trovare subito il numero?».

LUCA: «A me il quadrato di un numero e il suo doppio ricordano il quadrato di un binomio».

▶ Scrivi l'equazione relativa al problema. Cerca di risolverla trasformando uno dei due membri nel quadrato di un binomio.

2. La risoluzione di un'equazione di secondo grado

BRAVI SI DIVENTA
Videolezioni ▶ V38a ▶ V39a

Il metodo del completamento del quadrato

Applichiamo il metodo del **completamento del quadrato** per cercare le soluzioni di un'equazione di secondo grado nel caso generale

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0).$$

Di fianco ai passaggi nel caso generale, scriviamo quelli di un esempio numerico.

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

- Portiamo a secondo membro il termine noto:

$$ax^2 + bx = -c.$$

$$2x^2 + x = 3$$

- Dividiamo tutti i termini per a (che abbiamo supposto $\neq 0$):

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

$$x^2 + \frac{x}{2} = \frac{3}{2}$$

- Scriviamo il termine $\frac{b}{a}x$ come doppio prodotto di due fattori, cioè nella forma $2 \cdot p \cdot q$:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}.$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

- Aggiungiamo ai due membri il termine $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{3}{2} + \frac{1}{16}$$

- Il trinomio al primo membro è il quadrato del binomio $x + \frac{b}{2a}$, quindi:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{24 + 1}{16}$$

L'espressione al primo membro è un quadrato; quindi è sempre positiva o nulla. Affinché l'equazione ammetta soluzioni reali, anche la frazione al secondo membro deve essere non negativa.

Poiché il denominatore di tale frazione è sempre positivo, il numeratore deve essere non negativo, cioè $b^2 - 4ac \geq 0$.

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, ci sono due valori di $x + \frac{b}{2a}$, uno opposto all'altro, che soddisfano l'equazione. Li otteniamo estraendo la radice quadrata:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x + \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{25}}{4}$$

Isoliamo la x:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x = -\frac{1}{4} \pm \frac{5}{4}$$

Le soluzioni dell'equazione sono:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

L'espressione $\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

viene detta **formula risolutiva** dell'equazione di secondo grado.

Le soluzioni sono:

$$x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{3}{2}$$

ESEMPIO Calcoliamo le radici dell'equazione:

$$4x^2 - 7x - 2 = 0.$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{8} = \begin{cases} \frac{7+9}{8} = 2 \\ \frac{7-9}{8} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Le radici dell'equazione sono $x_1 = 2$ e $x_2 = -\frac{1}{4}$.

$a = 4$, $b = -7$, $c = -2$.

Il discriminante e le soluzioni

Chiamiamo **discriminante**, e indichiamo con la lettera greca Δ (delta), l'espressione che nella formula risolutiva è sotto radice, cioè:

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}.$$

Per sapere se esistono soluzioni reali di un'equazione di secondo grado è sufficiente calcolare il discriminante: se è negativo, non esistono soluzioni reali.

Discriminante deriva dal latino *discrimen*, che significa «ciò che serve a distinguere». Con il discriminante possiamo distinguere se le soluzioni reali di un'equazione di secondo grado sono due, una o nessuna.

ESEMPIO

$$x^2 - 3x + 5 = 0 \qquad (a = 1, \quad b = -3, \quad c = 5);$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11.$$

Poiché $\Delta < 0$, non esistono soluzioni reali.

In generale, risolvendo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, possono presentarsi tre casi, che dipendono dal valore del discriminante:

1. $\boldsymbol{\Delta > 0}$: l'equazione ha **due soluzioni reali e distinte**:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. $\boldsymbol{\Delta = 0}$: l'equazione ha **due soluzioni reali coincidenti**:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

3. $\boldsymbol{\Delta < 0}$: l'equazione **non ha soluzioni reali**, cioè in $\mathbb{R}$ è impossibile.

Se $\Delta = 0$:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}.$$

Si dice anche che la soluzione è **doppia**.

La formula ridotta

Quando nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ il coefficiente b, **è un numero pari**, è utile applicare una formula, detta **formula ridotta**, che ricaviamo da quella generale nel modo seguente.

Raccogliamo 4 sotto il segno di radice:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4\left(\frac{b^2}{4} - ac\right)}}{2a} = \frac{-b \pm 2\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{2a}.$$

Dividiamo per 2 il numeratore e il denominatore:

$$\boldsymbol{x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}.$$

Per utilizzare questa formula, invece di $\Delta = b^2 - 4ac$ dobbiamo calcolare $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$, che si ottiene dividendo Δ per 4 e si indica con $\frac{\Delta}{4}$. Si ha:

$$\boldsymbol{\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}.$$

> La formula ridotta semplifica notevolmente i calcoli. Prova, per esempio, a risolvere l'equazione $x^2 - 12x + 27 = 0$ senza formula ridotta e poi con la formula ridotta.

ESEMPIO Risolviamo l'equazione $x^2 - 2x - 35 = 0$.

Poiché $b = -2$, applichiamo la formula ridotta.

Le soluzioni dell'equazione sono:

$$x = 1 \pm \sqrt{36} = 1 \pm 6 = \begin{cases} 7 \\ -5 \end{cases}$$

> $\frac{\Delta}{4} = 1 - 1(-35)$.

Le equazioni pure, spurie, monomie

Le equazioni pure: $ax^2 + c = 0$

> Qui e in seguito sottintendiamo che cerchiamo le soluzioni delle equazioni nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

ESEMPIO

1. Risolviamo l'equazione $5x^2 - 20 = 0$.

   Invece di applicare la formula generale, isoliamo il termine con l'incognita, portando al secondo membro il termine noto:

   $$5x^2 = 20 \;\rightarrow\; x^2 = 4 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \;\rightarrow\; x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$$

2. Risolviamo l'equazione $3x^2 + 27 = 0$.

$$3x^2 + 27 = 0 \quad \to \quad 3x^2 = -27 \quad \to \quad x^2 = -9.$$

Poiché nessun numero reale ha quadrato negativo, l'equazione non ha soluzioni reali.

In generale, un'equazione di secondo grado **pura**, del tipo $ax^2 + c = 0$, con a e c numeri reali discordi, ha due soluzioni reali e opposte:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}; \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Se a e c sono concordi, l'equazione non ha soluzioni reali.

Le equazioni spurie: $ax^2 + bx = 0$

ESEMPIO Risolviamo l'equazione $6x^2 - 5x = 0$.

Raccogliamo x: $x(6x - 5) = 0$.

Per la legge di annullamento del prodotto:

$$x = 0 \quad \text{oppure} \quad 6x - 5 = 0 \quad \to \quad x = \frac{5}{6}.$$

L'equazione ha due soluzioni: $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{5}{6}$.

In generale, un'equazione di secondo grado **spuria**, del tipo $ax^2 + bx = 0$, ha sempre due soluzioni reali di cui una è nulla:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Le equazioni monomie: $ax^2 = 0$

ESEMPIO Risolviamo l'equazione $2x^2 = 0$.

$$2x^2 = 0 \quad \to \quad x^2 = 0 \quad \to \quad x_1 = x_2 = 0.$$

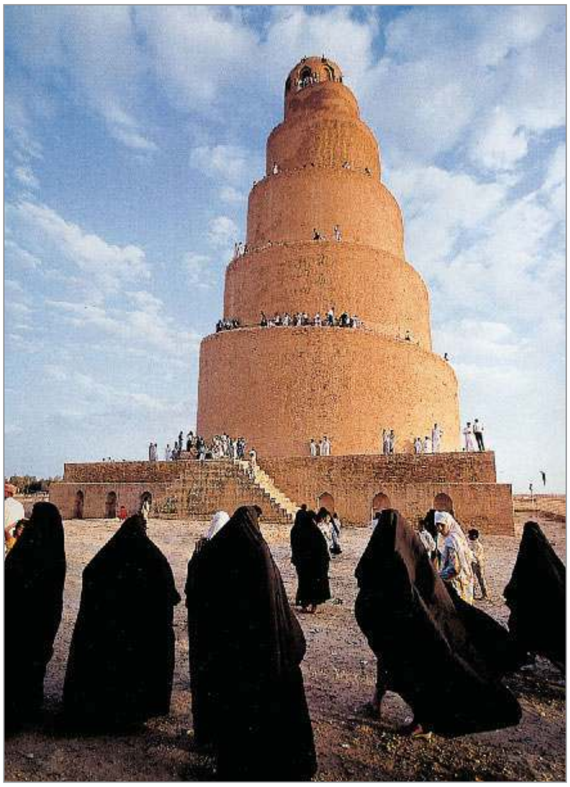
In generale, un'equazione di secondo grado **monomia**, del tipo $ax^2 = 0$, ha sempre due soluzioni reali coincidenti: $x_1 = x_2 = 0$.

Negli esercizi affronteremo problemi risolvibili con equazioni di secondo grado, ossia **problemi di secondo grado**.

Nel sito: ▶ teoria e 53 esercizi su I numeri complessi e le equazioni di secondo grado

ESPLORAZIONE: IL COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

▶ Minareto a Samarra, Iraq. Nella seconda metà dell'VIII secolo d.C., Baghdad divenne un fiorente centro culturale. A Baghdad fu fondata una «Casa del Sapere», che accolse scienziati e filosofi provenienti dal Medio Oriente e dal mondo cristiano. Fra i suoi membri vi era il matematico e astronomo Mohammed ibn-Musa al-Khuwarizmi. Dalla versione latinizzata del suo nome deriva la parola «algoritmo».



Vediamo un esempio di come utilizza il metodo del completamento del quadrato il matematico persiano al-Khuwarizmi, vissuto nel IX secolo d.C.

Egli propone il seguente problema:

Un quadrato e dieci radici sono uguali a 39 unità.

E di seguito spiega:

Prendi la metà delle 10 radici	$10 : 2 = 5$
moltiplicala per se stessa	$5 \cdot 5 = 25$
aggiungi 39	$25 + 39 = 64$
fai la radice quadrata	$\sqrt{64} = 8$
sottrai la metà delle radici	$8 - 5 = 3$

Noi scriveremmo così:

$$x^2 + 10x = 39 \rightarrow x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x+5)^2 = 64 \rightarrow x + 5 = 8 \rightarrow x = 8 - 5 = 3.$$

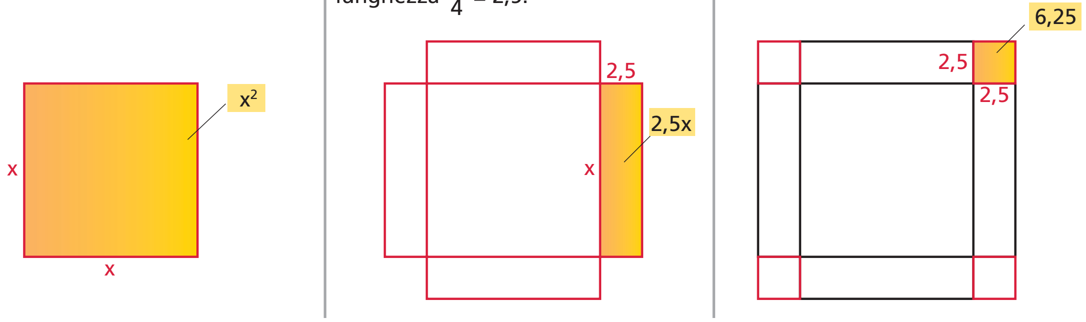
Gli Arabi non consideravano la soluzione negativa.

Seguiamo ora al-Khuwarizmi nella sua risoluzione geometrica del problema.

Tracciamo un quadrato che ha per lato x. La sua area è x^2.

Sui lati del quadrato costruiamo quattro rettangoli, ciascuno di lunghezza $\frac{10}{4} = 2,5$.

Completiamo il quadrato con quattro quadrati di lato 2,5.



In questo modo, con i quattro rettangoli, abbiamo aggiunto un'area di $4 \cdot 2,5 \cdot x = 10x$ e sappiamo che $x^2 + 10x = 39$. A 39 abbiamo poi aggiunto l'area dei quattro quadratini: $4 \cdot (2,5)^2 = 4 \cdot 6,25 = 25$. Otteniamo così un quadrato di area $39 + 25 = 64$ e quindi di lato 8.

D'altra parte, il lato misura $2,5 + x + 2,5$, quindi $5 + x = 8$, da cui otteniamo $x = 3$.

IN CINQUE SLIDE

Descrivi i tipi di equazioni di secondo grado risolti da al-Khuwarizmi e i passaggi algebrici utilizzati nel suo testo *Hisab al-jabr w'al-muqabala* in una presentazione multimediale.

Cerca nel web: al-Khuwarizmi, al-jabr, w'al-muqabala.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V40a

3. Le relazioni fra le radici e i coefficienti di un'equazione di secondo grado

La somma delle radici

Data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $\Delta \geq 0$, calcoliamo la somma delle due radici:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

◗ Le radici dell'equazione sono:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La somma s delle radici di un'equazione di secondo grado a discriminante non negativo è uguale al rapporto, cambiato di segno, fra il coefficiente di x e quello di x^2.

$$\boldsymbol{s = -\frac{b}{a}}.$$

Il prodotto delle radici

◗ Consideriamo ancora l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $\Delta \geq 0$.

◗ Applichiamo al numeratore la regola
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Calcoliamo il prodotto delle due radici:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Il prodotto p delle radici di un'equazione di secondo grado a discriminante non negativo è uguale al rapporto fra il termine noto e il coefficiente di x^2.

$$\boldsymbol{p = \frac{c}{a}}.$$

ESEMPIO

Data l'equazione $5x^2 - 9x - 2 = 0$, calcoliamo la somma e il prodotto delle radici:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-9}{5} = \frac{9}{5};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{5}.$$

◗ Per verifica, ricava le radici con la formula risolutiva e poi calcola la loro somma e il loro prodotto.

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol. 2** © Zanichelli 2012 *Algebra, Geometria, Probabilità*

Le relazioni $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ servono a risolvere problemi inerenti alle radici di un'equazione senza risolvere l'equazione stessa.

ESEMPIO Data l'equazione $2x^2 - 13x + 15 = 0$, sapendo che una radice è 5, calcoliamo l'altra senza risolvere l'equazione.

Calcoliamo la somma delle radici:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-13}{2} = \frac{13}{2}.$$

Poiché una radice è 5, l'altra sarà:

$$\frac{13}{2} - 5 = \frac{3}{2}.$$

Esegui la verifica risolvendo l'equazione.

La somma e il prodotto delle radici e l'equazione in forma normale

Se scriviamo un'equazione di secondo grado in forma normale, è possibile mettere in relazione i coefficienti a, b e c con la somma s e il prodotto p delle radici.

Data l'equazione in forma normale

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

possiamo dividere i due membri per a, poiché $a \neq 0$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \rightarrow x^2 - sx + p = 0.$$

Scriviamo $\dfrac{b}{a}$ come $-\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.

$s = -\dfrac{b}{a}$, $p = \dfrac{c}{a}$.

In un'equazione di secondo grado ridotta a forma normale, in cui il primo coefficiente sia 1, il secondo coefficiente è la somma s delle radici cambiata di segno e il termine noto è il prodotto p delle radici.

$$\boldsymbol{x^2 - sx + p = 0}, \text{ ovvero}$$

$$\boldsymbol{x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0}.$$

Per esempio, data l'equazione

$x^2 - 2x - 3 = 0$:

$x_1 + x_2 = 2$;

$x_1 \cdot x_2 = -3$.

Dalle soluzioni all'equazione

Dati due numeri qualunque, è possibile scrivere l'equazione di secondo grado che ha come radici quei due numeri.

ESEMPIO

Scriviamo l'equazione che ha come radici i numeri 3 e 7.

Poiché $s = 3 + 7 = 10$ e $p = 3 \cdot 7 = 21$, l'equazione richiesta è la seguente:

$$x^2 - 10x + 21 = 0.$$

Per fare la verifica, risolvi l'equazione.

4. La regola di Cartesio

È possibile conoscere il segno delle radici reali di un'equazione completa di secondo grado senza risolverla.
Per farlo, introduciamo i concetti di variazione e di permanenza relativi al segno dei coefficienti dell'equazione.

Le permanenze e le variazioni

Dato un polinomio ordinato secondo una variabile:

- si ha una **permanenza** quando i coefficienti di un termine e del suo successivo sono concordi;
- si ha una **variazione** quando sono discordi.

permanenza variazione variazione

$+\ 5x^3\ +\ 2x^2\ -\ x\ +\ 3$

▶ **Figura 1** Nel polinomio ordinato in x

$5x^3 + 2x^2 - x + 3,$

partendo da sinistra, abbiamo:
una permanenza $(++)$,
una variazione $(+-)$,
una variazione $(-+)$.

La regola di Cartesio

In un'equazione di secondo grado completa, con $a > 0$, si possono presentare quattro casi di possibili combinazioni dei segni.

Se $a < 0$, basta moltiplicare per -1 ambo i membri dell'equazione per ricondurci al caso di $a > 0$.

PERMANENZE E VARIAZIONI IN $ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$

a	b	c	PERMANENZE E VARIAZIONI	ESEMPIO
$+$	$+$	$+$	due permanenze	$6x^2 + 13x + 6 = 0$
$+$	$-$	$+$	due variazioni	$x^2 - 8x + 15 = 0$
$+$	$-$	$-$	una variazione e una permanenza	$3x^2 - 2x - 8 = 0$
$+$	$+$	$-$	una permanenza e una variazione	$8x^2 + 10x - 7 = 0$

1° caso: la sequenza $+ + +$ (due permanenze)

Poiché a e c sono positivi, il prodotto delle radici $\frac{c}{a}$ è positivo, perciò le radici sono concordi, quindi entrambe positive o entrambe negative. Poiché a e b sono positivi, la somma delle radici $-\frac{b}{a}$ è negativa, quindi **le radici sono entrambe negative**.

Verifica che l'equazione $6x^2 + 13x + 6 = 0$ ha due radici negative.

2° caso: la sequenza $+ - +$ (due variazioni)

Poiché a e c sono concordi, il prodotto delle radici $\frac{c}{a}$ è positivo, perciò le radici sono concordi, quindi entrambe positive o entrambe negative. Poiché a e b sono discordi, la somma delle radici $-\frac{b}{a}$ è positiva, quindi **le radici sono entrambe positive**.

Verifica che l'equazione $x^2 - 8x + 15 = 0$ ha due radici positive.

3° caso: la sequenza + − − (una variazione e una permanenza)

Poiché a e c sono discordi, il prodotto delle radici $\frac{c}{a}$ è negativo, perciò le radici sono discordi, quindi **le radici sono una positiva e una negativa**.

Poiché a e b sono discordi, la somma delle radici $-\frac{b}{a}$ è positiva; quindi la radice positiva deve essere maggiore del valore assoluto di quella negativa.

4° caso: la sequenza + + − (una permanenza e una variazione)

Poiché a e c sono discordi, il prodotto delle radici $\frac{c}{a}$ è negativo, perciò le radici sono discordi, quindi **le radici sono una negativa e una positiva**.

Poiché a e b sono positivi, la somma delle radici $-\frac{b}{a}$ è negativa, quindi la radice positiva deve essere minore del valore assoluto di quella negativa.

In sintesi abbiamo la seguente regola.

REGOLA

Regola di Cartesio

In un'equazione di secondo grado completa scritta in forma normale $ax^2 + bx + c = 0$, con $\Delta \geq 0$, a ogni permanenza corrisponde una radice negativa e a ogni variazione una radice positiva. Quando le radici sono discordi, la radice con valore assoluto maggiore è positiva se la variazione precede la permanenza, è negativa nel caso contrario.

SEGNO DELLE RADICI DI $ax^2 + bx + c$

a	b	c	PERMANENZE E VARIAZIONI	x_1	x_2
+	+	+	due permanenze	−	−
+	−	+	due variazioni	+	+
+	−	−	una variazione e una permanenza	+	−
+	+	−	una permanenza e una variazione	−	+

ESEMPIO Determiniamo il segno delle radici dell'equazione

$$8x^2 + 10x - 7 = 0:$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{10}{2}\right)^2 - 8(-7) = 25 + 56 = 81.$$

Essendo il discriminante positivo, esistono due radici reali, e poiché sono presenti una permanenza (+ +) e una variazione (+ −), le due radici sono una negativa e l'altra positiva.

▶ Verifica quanto abbiamo ricavato nell'equazione $3x^2 - 2x - 8 = 0$.

▶ Fai la verifica nel caso dell'equazione $8x^2 + 10x - 7 = 0$.

▶ La regola permette di determinare il segno delle radici di un'equazione senza risolverla.

▶ Nella tabella, che schematizza la regola, consideriamo $|x_1| > |x_2|$.

▶ Nell'esempio consideriamo un caso in cui si ha $a > 0$. Se $a < 0$, basta cambiare il segno a tutti i termini: il numero e l'ordine delle variazioni e delle permanenze non cambiano.

5. La scomposizione di un trinomio di secondo grado

È dato un trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$.

Se $\boldsymbol{\Delta > 0}$, l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ ha due soluzioni, x_1 e x_2; il trinomio può essere scomposto in fattori mediante la relazione:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).}$$

▶ x_1 e x_2 sono anche detti **zeri del trinomio**.

DIMOSTRAZIONE

Utilizzando le relazioni

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2,$$

raccogliamo a e scriviamo:

▶ $\frac{b}{a} = -\left(-\frac{b}{a}\right)$.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = a[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] =$$

All'interno della parentesi quadra, raccogliamo x fra i primi due termini e x_2 fra gli altri due termini, in modo da potere poi raccogliere $(x - x_1)$:

$$= a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Se $\boldsymbol{\Delta = 0}$, il trinomio ha solo uno zero, perché $x_1 = x_2$; quindi la scomposizione è la seguente:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2.}$$

Se $\boldsymbol{\Delta < 0}$, il trinomio non ha zeri reali e non si può scomporre in fattori reali, cioè è **irriducibile**.

Riassumendo:

$$ax^2 + bx + c \begin{cases} a(x - x_1)(x - x_2) & \text{se } \Delta > 0 \\ a(x - x_1)^2 & \text{se } \Delta = 0 \\ \text{irriducibile} & \text{se } \Delta < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO Esaminiamo la scomposizione dei trinomi $5x^2 - 5x - 30$, $4x^2 - 12x + 9$, $2x^2 + 3x + 4$ con la seguente tabella.

SCOMPOSIZIONE DEL TRINOMIO DI SECONDO GRADO

TRINOMIO	EQUAZIONE ASSOCIATA	Δ	RADICI	SCOMPOSIZIONE
$5x^2 - 5x - 30$	$5x^2 - 5x - 30 = 0$	$625 > 0$	$x_1 = 3, x_2 = -2$	$5(x - 3)(x + 2)$
$4x^2 - 12x + 9$	$4x^2 - 12x + 9 = 0$	0	$x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$	$4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$
$2x^2 + 3x + 4$	$2x^2 + 3x + 4 = 0$	$-23 < 0$	$\nexists$ in $\mathbb{R}$	$\nexists$ in $\mathbb{R}$

6. Le equazioni parametriche

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V41a

Quando in un'equazione letterale si richiede che il valore di una lettera (ovviamente non l'incognita) sia tale da rendere vera una condizione, allora la lettera prende il nome di **parametro** e l'equazione si chiama **parametrica**.

Esaminiamo alcuni esempi di equazioni parametriche di secondo grado.

◗ Puoi trovare altri esempi negli esercizi guida.

$\Delta > 0$: le radici sono reali e distinte

ESEMPIO

Determiniamo il valore di k per cui l'equazione parametrica di secondo grado in x

$$x^2 + (2k - 1)x + k^2 - 1 = 0$$

ha due **soluzioni reali distinte**.
Deve essere:

$$\Delta = (2k - 1)^2 - 4(k^2 - 1) > 0.$$

Questa disuguaglianza è una disequazione nell'incognita k:

$$4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 4 > 0$$

$$-4k + 5 > 0 \quad \rightarrow \quad 4k - 5 < 0 \quad \rightarrow \quad k < \frac{5}{4}.$$

Essa è verificata per $k < \frac{5}{4}$.

◗ Analogamente, le radici sono reali e coincidenti se $\Delta = 0$, ossia per $k = \frac{5}{4}$. Non ci sono invece radici reali se $\Delta < 0$, ossia per $k > \frac{5}{4}$.

Una delle radici è uguale a un valore assegnato

ESEMPIO

Nell'equazione parametrica

$$(k - 3)x^2 - 2(k + 1)x + k = 0,$$

determiniamo il valore di k affinché una radice sia uguale a 3.

- Sostituiamo $x = 3$ nell'equazione data:

$$(k - 3)3^2 - 2(k + 1)3 + k = 0 \quad \rightarrow \quad 4k = 33 \quad \rightarrow \quad k = \frac{33}{4}.$$

Poiché $\frac{33}{4} > -\frac{1}{5}$, il valore di k è accettabile. Per $k = \frac{33}{4}$ l'equazione parametrica ha una radice uguale a 3.

Nei casi che seguono, bisogna prima di tutto imporre che le radici siano reali, ponendo $\Delta \geq 0$; poi si traduce la condizione da verificare in una equazione con incognita k e si ricava k; infine si controlla se il valore di k trovato è accettabile, ossia se soddisfa la condizione che porta a $\Delta \geq 0$.

La somma delle radici è un valore noto *s*
Le condizioni sono:

- $\Delta \geq 0$, affinché le radici siano reali;
- $-\dfrac{b}{a} = s$, affinché la somma delle radici sia s.

Osservazione. Se la somma delle radici è uguale a 0, le due radici sono opposte:

$$x_1 + x_2 = 0; \quad x_1 = -x_2.$$

ESEMPIO Nell'equazione parametrica

$$x^2 - 2(k-3)x + k^2 - 1 = 0,$$

determiniamo il valore di k affinché la somma delle radici sia uguale a 8.

- $\dfrac{\Delta}{4} = (k-3)^2 - k^2 + 1 \geq 0$

  $(k-3)^2 - k^2 + 1 = k^2 - 6k + 9 - k^2 + 1 \geq 0$

  $-6k + 10 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 3k - 5 \leq 0 \quad \rightarrow \quad k \leq \dfrac{5}{3}.$

- $-\dfrac{b}{a} = 8$

  $-\dfrac{b}{a} = 2(k-3) = 8$

  $2(k-3) = 8 \quad \rightarrow \quad 2k - 6 = 8 \quad \rightarrow \quad 2k = 14 \quad \rightarrow \quad k = 7.$

Poiché il valore 7 non è minore o uguale a $\dfrac{5}{3}$, non esiste alcun valore di k tale che la somma delle radici sia uguale a 8; pertanto il problema posto non ha soluzioni.

Il prodotto delle radici è un valore noto *p*
Le condizioni da porre sono:

- $\Delta \geq 0$;
- $\dfrac{c}{a} = p$.

Osservazione. Se il prodotto delle due radici è uguale a 1, le due radici sono reciproche:

$$x_1 \cdot x_2 = 1; \quad x_1 = \frac{1}{x_2}.$$

ESEMPIO Nell'equazione parametrica dell'esempio precedente,

$$x^2 - 2(k-3)x + k^2 - 1 = 0,$$

richiediamo che sia $p = 48$.

- Abbiamo già trovato che, affinché sia $\Delta \geq 0$, deve essere $k \leq \frac{5}{3}$;
- $\frac{c}{a} = k^2 - 1 = 48 \quad \rightarrow \quad k^2 = 49 \quad \rightarrow \quad k = \pm\sqrt{49} \quad \rightarrow \quad k = \pm 7.$

Solo il valore -7 è accettabile. Per $k = 7$, invece, il discriminante è negativo $\left(7 > \frac{5}{3}\right)$ e le soluzioni non sono reali.

La somma dei reciproci delle radici è un valore noto *r*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = r.$$

Esprimiamo $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ in funzione della somma e del prodotto delle radici, eseguendo la somma delle due frazioni:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{s}{p}.$$

Sostituendo a s l'espressione $-\frac{b}{a}$ e a p l'espressione $\frac{c}{a}$, si ottiene:

$$\frac{s}{p} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = -\frac{b}{c}.$$

Le condizioni sono quindi:

- $\Delta \geq 0$;
- $\frac{s}{p} = -\frac{b}{c} = r.$

La somma dei quadrati delle radici è un valore noto *q*

$$x_1^2 + x_2^2 = q.$$

Poiché $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$, scriviamo:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = s^2 - 2p.$$

Scriviamo $s^2 - 2p$ in funzione di a, b e c:

$$s^2 - 2p = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Le condizioni sono quindi:

- $\Delta \geq 0$;
- $s^2 - 2p = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = q.$

La somma dei reciproci dei quadrati delle radici è un valore noto *q*

$$\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}=q$$

$$\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}=\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{s^2-2p}{p^2}$$

$$\frac{s^2-2p}{p^2}=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2-2ac}{a^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}.$$

Infatti, come abbiamo visto nel caso precedente, si ha:
$s^2-2p=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$.

Le condizioni sono quindi:

- $\Delta \geq 0$;
- $\dfrac{s^2-2p}{p^2}=\dfrac{b^2-2ac}{c^2}=q.$

7. La funzione quadratica e la parabola

La funzione $y = ax^2$

Una funzione quadratica del tipo $\boldsymbol{y = ax^2}$ (con $a \neq 0$) ha per grafico una curva chiamata **parabola**.

Diciamo anche che $y = ax^2$ è l'equazione di una parabola.

Per esempio, rappresentiamo nel piano cartesiano la funzione

$$y = 2x^2,$$

determinando le coordinate di alcuni suoi punti e scrivendole nella tabella a fianco.

Osserviamo che i punti della parabola sono a due a due simmetrici rispetto all'asse delle ordinate. In generale, ogni parabola ha un **asse di simmetria**. Il punto in cui la parabola si interseca con il suo asse è detto **vertice**. Per parabole di equazione $y = ax^2$ il vertice è l'origine $O(0; 0)$.

Poiché i punti di ascissa opposta hanno la stessa ordinata, possiamo scrivere la tabella anche così:

x	y
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
± 1	2
± 2	8

x	y
0	0
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
−1	2
1	2
−2	8
2	8

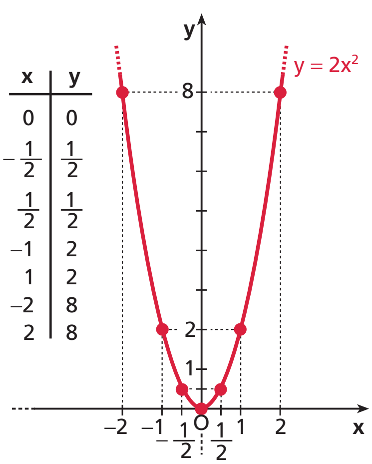


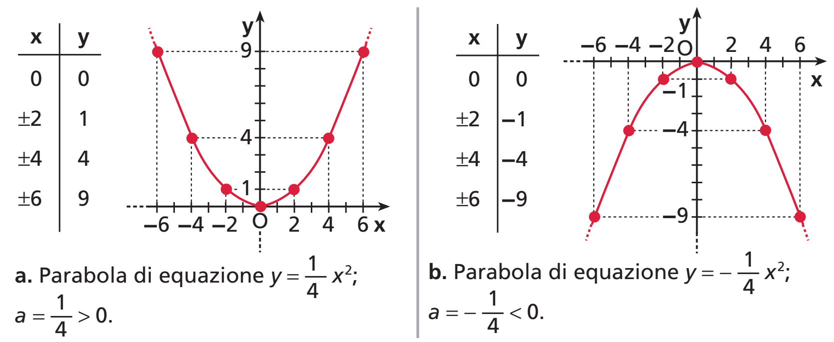
Figura 2 La parabola di equazione $y = 2x^2$.

Il segno di a e la concavità

Tutti i punti della parabola diversi da O hanno:

- ordinata positiva **se $a > 0$**: diciamo che la parabola volge la **concavità verso l'alto**;
- ordinata negativa **se $a < 0$**: diciamo che la parabola volge la **concavità verso il basso**.

ESEMPIO



x	y
0	0
±2	1
±4	4
±6	9

a. Parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2$; $a = \frac{1}{4} > 0$.

x	y
0	0
±2	−1
±4	−4
±6	−9

b. Parabola di equazione $y = -\frac{1}{4}x^2$; $a = -\frac{1}{4} < 0$.

◄ **Figura 3** La concavità di una parabola dipende dal segno di a.

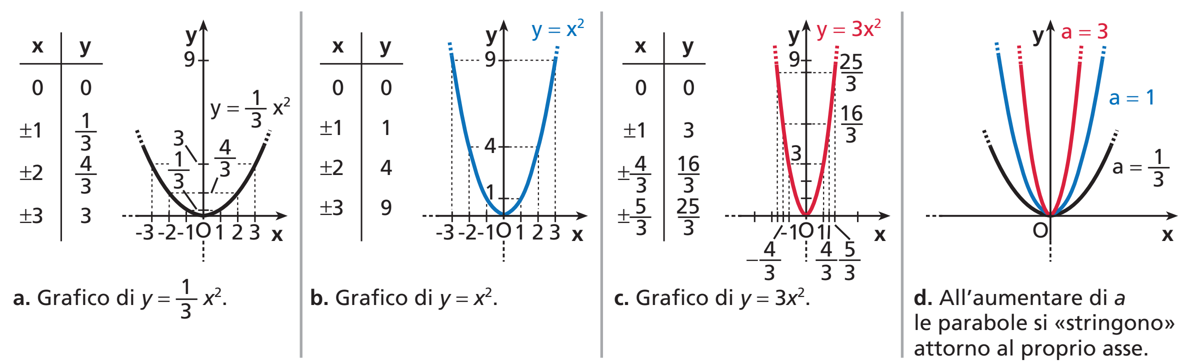
Il valore di a e l'apertura della parabola

Disegniamo per punti le parabole di equazioni

$$y = \frac{1}{3}x^2, \qquad y = x^2, \qquad y = 3x^2;$$

poi confrontiamo i rispettivi grafici disegnandoli su uno stesso riferimento cartesiano.

▼ **Figura 4** Se $a > 0$, l'apertura della parabola diminuisce all'aumentare di a.



x	y
0	0
±1	$\frac{1}{3}$
±2	$\frac{4}{3}$
±3	3

a. Grafico di $y = \frac{1}{3}x^2$.

x	y
0	0
±1	1
±2	4
±3	9

b. Grafico di $y = x^2$.

x	y
0	0
±1	3
$\pm\frac{4}{3}$	$\frac{16}{3}$
$\pm\frac{5}{3}$	$\frac{25}{3}$

c. Grafico di $y = 3x^2$.

d. All'aumentare di a le parabole si «stringono» attorno al proprio asse.

Se a è negativo, l'apertura della parabola diminuisce all'aumentare del valore assoluto di a.

Possiamo confrontare anche parabole che hanno coefficienti a di segno opposto: l'apertura diminuisce al crescere di $|a|$. Confronta, per esempio, $y = -\frac{1}{4}x^2$, $y = x^2$ e $y = -4x^2$.

La funzione $y = ax^2 + bx + c$

Si può dimostrare che una funzione quadratica del tipo $y = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) ha per grafico una parabola che:

- ha per **asse di simmetria** la retta verticale di equazione $x = -\dfrac{b}{2a}$;
- ha **vertice** V di coordinate $V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

ESEMPIO

Rappresentiamo nel piano cartesiano la parabola di equazione:

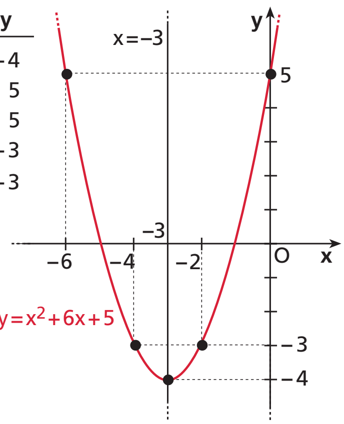
$$y = x^2 + 6x + 5.$$

L'equazione dell'asse di simmetria è $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2 \cdot 1} = -3$.

Inoltre -3 è anche l'ascissa del vertice, cioè $x_V = -3$. Sostituendo tale valore nell'equazione della parabola, ricaviamo l'ordinata del vertice $y_V = (-3)^2 + 6(-3) + 5 = -4$.

Compiliamo una tabella per determinare le coordinate di altri punti della parabola (figura 5).

x	y
−3	−4
0	5
−6	5
−2	−3
−4	−3



▶ Figura 5 Il grafico della parabola di equazione $y = x^2 + 6x + 5$.

▶ In alternativa è possibile calcolare l'ordinata del vertice utilizzando la formula

$$y_V = -\frac{b^2-4ac}{4a}:$$

$$y_V = -\frac{36-20}{4} = -4.$$

La concavità e l'apertura della parabola

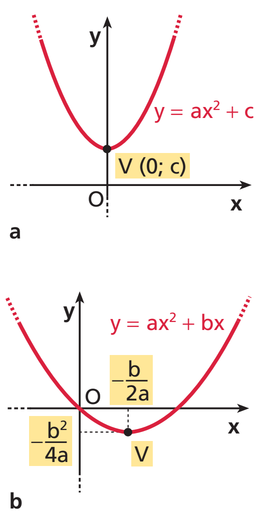
Si può dimostrare che, come per la parabola con vertice nell'origine, anche per la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$:

- **la concavità dipende solo dal segno del coefficiente a**: se $a > 0$, la concavità è rivolta verso l'alto, se $a < 0$, verso il basso;
- **l'apertura dipende dal valore assoluto di a**: all'aumentare di $|a|$ diminuisce l'apertura della parabola, ossia la parabola si «stringe» attorno al proprio asse.

Casi particolari della funzione $y = ax^2 + bx + c$

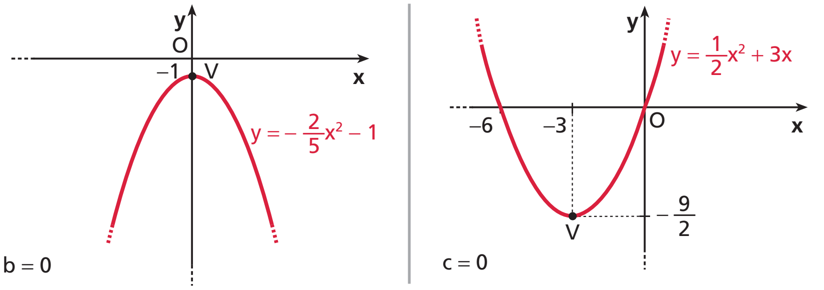
1. Se $b = 0$, l'equazione diventa $y = ax^2 + c$.
   La parabola ha vertice $V(0; c)$ e il suo asse di simmetria è l'asse y (figura 6*a*).
2. Se $c = 0$, l'equazione diventa $y = ax^2 + bx$.
   La parabola ha vertice $V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{b^2}{4a}\right)$ e passa sempre per l'origine $O(0; 0)$;
   infatti le coordinate $(0; 0)$ soddisfano l'equazione (figura 6*b*).
3. Se $b = 0$ e $c = 0$, l'equazione diventa $y = ax^2$, parabola già studiata.

▼ Figura 6 Casi particolari della funzione $y = ax^2 + bx + c$.



Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol. 2 © Zanichelli 2012 Algebra, Geometria, Probabilità

ESEMPIO



◀ **Figura 7**

Gli zeri della funzione quadratica

Cerchiamo gli **zeri** di una funzione quadratica $y = ax^2 + bx + c$, ossia i valori di x per cui il valore y della funzione è zero.

Da un punto di vista grafico ciò equivale a cercare le intersezioni di una parabola con l'asse x, ossia i punti con $y = 0$.
Sostituendo nell'equazione della parabola, otteniamo l'equazione di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

ESEMPIO

Cerchiamo gli zeri della funzione:

$$y = x^2 + 6x + 5.$$

Deve essere

$$y = 0,$$

da cui:

$$x^2 + 6x + 5 = 0.$$

L'equazione ha come soluzioni:

$$x_1 = -5, x_2 = -1,$$

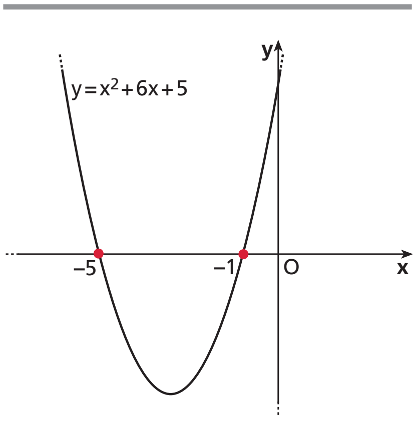
che sono gli zeri della funzione.

Da un punto di vista grafico, diciamo che la parabola di equazione

$$y = x^2 + 6x + 5$$

ha per punti di intersezione con l'asse x quelli di ascisse -5 e -1 (figura 8).

▼ **Figura 8**



◗ Riprendiamo l'esempio della pagina precedente.

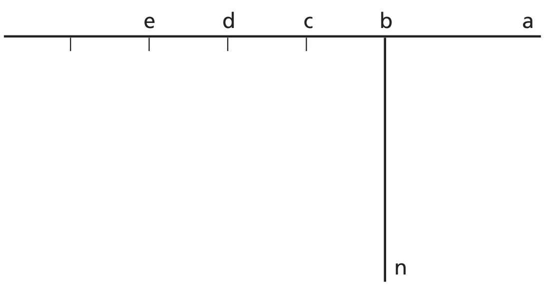
GALILEO E LA FUNZIONE QUADRATICA

Nella Giornata quarta dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, pubblicato nel 1638, Galileo si occupa dello studio del moto dei proietti, ossia dei corpi lanciati e soggetti alla forza di gravità. Egli dimostra che tali moti hanno una traiettoria parabolica.

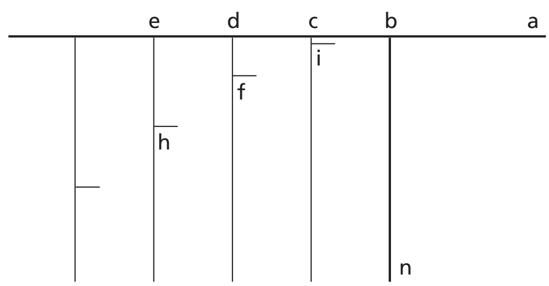
Galileo immagina che, dialogando con Simplicio e Sagredo, Salviati legga il testo di un Autore, al quale i tre studiosi fanno spesso riferimento nei loro discorsi. In realtà si tratta di Galileo stesso che scrive una pagina molto importante nella storia della fisica, fornendo un esempio di quello che verrà poi chiamato *principio di composizione dei movimenti*. Diremmo noi che, se un corpo è soggetto contemporaneamente a due diversi moti, ciascuno di essi non influenza l'altro. Galileo suppone che «tali moti e loro velocità, nel mescolarsi, non si alterino, perturbino ed impedischino».

Ma questa pagina è anche importante per la matematica perché Galileo spiega puntualmente come tracciare il grafico di una funzione quadratica. Galileo dice di considerare un corpo che si muove su una linea orizzontale *ab* con moto uniforme. In *b*, mancando il sostegno, il corpo comincia a cadere.

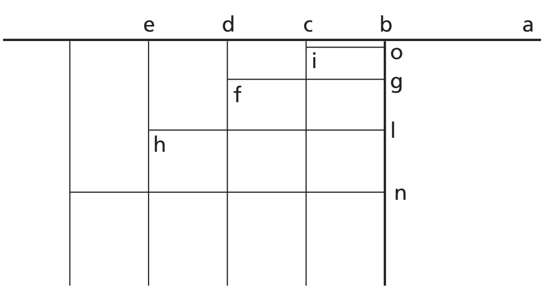
Tracciamo la traiettoria di caduta accompagnando le parole di Galileo con fotogrammi, fino a giungere al disegno proposto nel suo libro (*equidistanti dalla* sta per *parallele alla*).



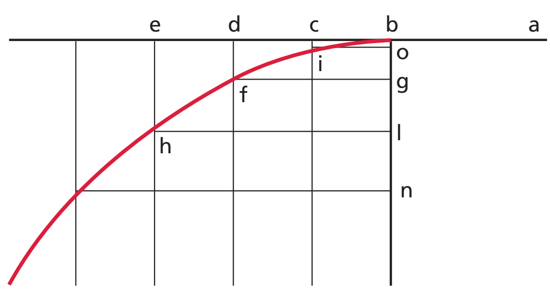
a. Sulla linea *be* che rappresenta lo scorrere del tempo, «si segnino ad arbitrio un numero qualsiasi di porzioni di tempo eguali, *bc*, *cd*, *de*»...



b. ...«dai punti *b*, *c*, *d*, *e* si intendano condotte linee equidistanti dalla perpendicolare *bn*: sulla prima di esse si prenda una parte qualsiasi *ci*; sulla successiva se ne prenda una quattro volte maggiore, *df*; una nove volte maggiore, *eh*; e così di seguito»...



c. ...«si conducano ora dai punti *i*, *f*, *h*, le rette *io*, *fg*, *hl*, equidistanti dalla medesima *eb*: le linee *hl*, *fg*, *io* saranno uguali, ad una ad una, alle linee *eb*, *db*, *cb*; e così pure le linee *bo*, *bg*, *bl* saranno eguali alle linee *ci*, *df*, *eh*»...



d. ...«i punti *i, f*, *h* si trovano su un'unica e medesima linea parabolica».

Home Cinema

…a quale distanza deve essere posto il proiettore affinché l'immagine che appare sullo schermo abbia la dimensione desiderata?

→ Il quesito completo a pag. 865

Al cinema il proiettore si trova a una certa altezza in fondo alla sala, in una posizione ottimale per illuminare bene il grande schermo su cui scorrono le immagini dei film. A casa è possibile ricreare un effetto cinematografico avendo a disposizione un ambiente abbastanza ampio, un telo bianco e un apparecchio ottico per la videoproiezione. A seconda della distanza alla quale si colloca il proiettore, le dimensioni dell'immagine riprodotta sullo schermo cambiano.

È facile notare che, allontanando lo strumento, l'immagine si ingrandisce, mentre avvicinandolo avviene il contrario.

Per semplicità, immaginiamo il proiettore come una sorgente luminosa puntiforme che illumina lo schermo attraverso un piccolo foro circolare e consideriamo il corrispondente cono di luce.

Indichiamo con x la distanza del proiettore dallo schermo e con A l'area della superficie circolare che vogliamo illuminare.

Considerata l'altezza del cono, se compiamo una qualunque sezione lungo tale direzione perpendicolare allo schermo, otteniamo un cerchio.

Il suo raggio varia al variare della distanza della sezione dalla sorgente. Assumiamo che il raggio di luce l abbia una pendenza p rispetto all'altezza. Indicato con r il raggio del cerchio illuminato sullo schermo, per la definizione di pendenza di una retta vale:

$$\frac{r}{x} = p \quad \rightarrow \quad x = \frac{r}{p}.$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri della relazione:

$$x^2 = \frac{r^2}{p^2}.$$

Essendo $A = \pi r^2$, si ha $r^2 = \dfrac{A}{\pi}$, e sostituendo possiamo scrivere:

$$x^2 = \frac{A}{\pi \cdot p^2}.$$

Poiché A e p sono costanti, si tratta di un'equazione di secondo grado pura in x.

La sua soluzione positiva indicherà a quale distanza bisogna porre la sorgente di luce dallo schermo per illuminare un cerchio di area A.

Se, per esempio, abbiamo un proiettore con $p = 0{,}2$ e vogliamo illuminare sullo schermo un cerchio di area $A = 2\ \text{m}^2$, risulta:

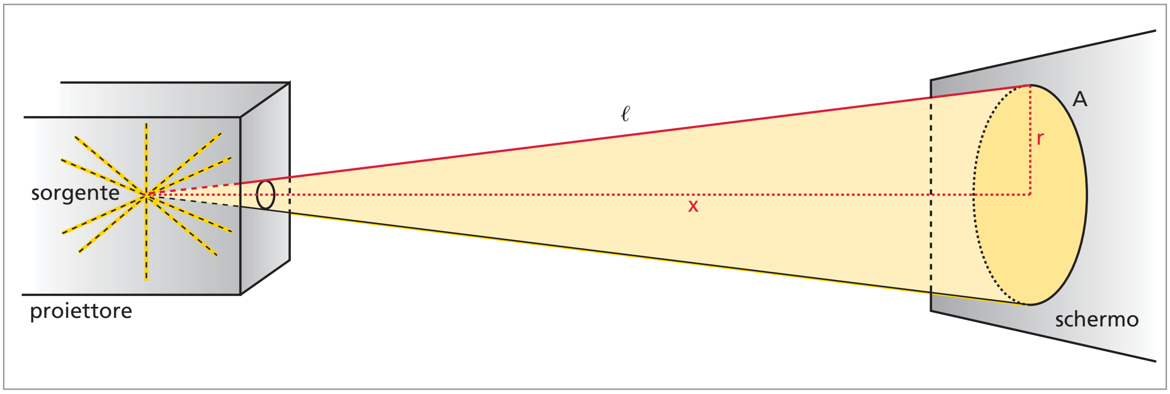
$$x^2 = \frac{2}{\pi \cdot 0{,}2^2} \rightarrow x^2 = \frac{50}{\pi}.$$

Risolvendo, accettiamo solo la soluzione positiva:

$$x = \sqrt{\frac{50}{\pi}} \simeq 3{,}99.$$

In conclusione, dovremmo disporre il proiettore a una distanza di circa 4 m dallo schermo.

In generale, ci sono altri fattori da considerare per scegliere la posizione di un proiettore rispetto a uno schermo. Infatti, se da un lato allontanando il proiettore dal piano si ottiene il vantaggio di immagini più grandi, dall'altro si ha lo svantaggio di immagini meno luminose. La quantità di luce emessa è sempre la stessa: se questa si concentra in un'area piccola, lo schermo è più illuminato. Viceversa, man mano che ci si allontana, il fascio luminoso si distribuisce in superfici più ampie e la luce che raggiunge lo schermo è via via meno intensa.



LA TEORIA IN SINTESI
Le equazioni di secondo grado

1. Che cosa sono le equazioni di secondo grado

Un'**equazione di secondo grado** è riconducibile alla forma normale:

$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0.$

Sono presenti un termine di secondo grado (ax^2), uno di primo grado (bx) e un termine noto (c). Se entrambi i coefficienti b e c sono diversi da 0, l'equazione è **completa**, altrimenti è **spuria** se $b \neq 0$ e $c = 0$, **pura** se $b = 0$ e $c \neq 0$, **monomia** se $b = 0$ e $c = 0$.

ESEMPIO $4x^2 + 3x - 5 = 0$ è un'equazione di secondo grado completa;
$2x^2 = 0$ è monomia; $5x^2 - 3 = 0$ è pura; $7x^2 + x = 0$ è spuria.

2. La risoluzione di un'equazione di secondo grado

Il **discriminante** dell'equazione completa $ax^2 + bx + c = 0$ è $\Delta = b^2 - 4ac$.

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO COMPLETE

SEGNO DEL DISCRIMINANTE	SOLUZIONI	ESEMPIO
$\Delta > 0$	due radici reali e distinte: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Delta = 4 + 3 \cdot 4 = 16$ $x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$ $x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2-4}{2} = -1$
$\Delta = 0$	due radici reali e coincidenti: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$	$4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\Delta = 16 - 4 \cdot 4 = 0$ $x_1 = x_2 = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
$\Delta < 0$	non esistono soluzioni reali	$2x^2 + 3x + 3 = 0$ $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -15$

Se il coefficiente di x, cioè b, è divisibile per 2, per risolvere l'equazione si può applicare la **formula ridotta**.

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac; \quad x_1 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}, \quad x_2 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}.$$

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO INCOMPLETE

TIPO DI EQUAZIONE	EQUAZIONE	SOLUZIONI	ESEMPIO
pura ($b = 0, c \neq 0$)	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{\dfrac{-c}{a}}; x_2 = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ le radici sono reali solo se a e c sono discordi.	$6x^2 - 5 = 0$ $x_1 = \sqrt{\dfrac{5}{6}}; x_2 = -\sqrt{\dfrac{5}{6}}$

TIPO DI EQUAZIONE	EQUAZIONE	SOLUZIONI	ESEMPIO
spuria $(c = 0, b \neq 0)$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$	$4x^2 + 3x = 0$ $x_1 = 0; x_2 = -\frac{3}{4}$
monomia $(b = c = 0)$	$ax^2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$	$25x^2 = 0$ $x_1 = x_2 = 0$

3. Le relazioni fra le radici e i coefficienti di un'equazione di secondo grado

Se l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ha come radici reali x_1 e x_2, posti $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1 \cdot x_2$, si ha:

$$s = -\frac{b}{a}; \qquad p = \frac{c}{a}.$$

Pertanto l'equazione è equivalente a:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

4. La regola di Cartesio

La **regola di Cartesio** permette di conoscere il segno delle radici senza calcolarle.
Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha radici reali, a ogni **permanenza** nei segni dei coefficienti corrisponde una **radice negativa**, a ogni **variazione** una **radice positiva**.

ESEMPIO $2x^2 - 5x - 3 = 0$ presenta:
- una variazione $+\,-$ $(a = +2,\ b = -5)$, quindi una radice è positiva;
- una permanenza $-\,-$ $(b = -5, c = -3)$, quindi una radice è negativa.

5. La scomposizione di un trinomio di secondo grado

Dato il trinomio $ax^2 + bx + c$, se l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzioni reali, tali soluzioni (x_1 e x_2) sono anche **zeri** del trinomio.

Il trinomio è:
- scomponibile in fattori se
  $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
  $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$;
- irriducibile in $\mathbb{R}$ se $\Delta < 0$.

ESEMPIO
Il trinomio $4x^2 + 11x - 3$ ha l'equazione associata $4x^2 + 11x - 3 = 0$ con $\Delta = 169 > 0$.
Le radici dell'equazione sono $x_1 = \frac{1}{4}$ e $x_2 = -3$.
Questi valori sono anche gli zeri del trinomio che è scomponibile:

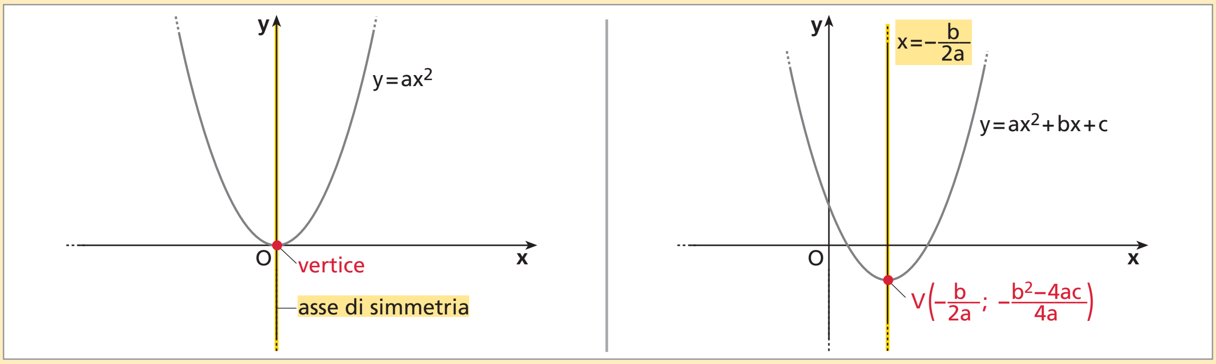
$$4x^2 + 11x - 3 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)(x + 3).$$

6. Le equazioni parametriche

Un'**equazione parametrica** è un'equazione letterale in cui si richiede che il valore di una lettera, detta **parametro**, soddisfi una condizione.

7. La funzione quadratica e la parabola

Le funzioni quadratiche hanno per grafici delle parabole.



1. Che cosa sono le equazioni di secondo grado

Teoria a pag. 865

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

a) L'equazione di secondo grado $3x^2 - 5x = 7$ è in forma normale. V F

b) Nell'equazione $2x^2 + 9x = 0$ il termine noto è uguale a zero. V F

c) L'equazione $-4x^2 + \sqrt{3}x + 2 = 0$ è di secondo grado. V F

d) L'equazione, nell'incognita x, $(k-2)x^2 - (1-3k)x + 5 = 0$ ha il coefficiente della x uguale a $3k - 1$. V F

e) Se un'equazione di secondo grado è incompleta, il coefficiente di x e il termine noto sono entrambi nulli. V F

f) Le soluzioni di un'equazione di secondo grado possono essere al massimo due. V F

g) $x = -2$ è una soluzione dell'equazione $4x^2 + 5x - 6 = 0$. V F

TEST

2 È data l'equazione, nell'incognita y,

$$3x^2 - 5xy - 8y^2 = 0.$$

Qual è il termine noto?

A 0 B $3x^2$ C $-8y^2$ D $-5x$ E 3

3 Tra le seguenti equazioni, una sola è equivalente all'equazione $-3x^2 + 15x = 12$. Quale?

A $x^2 + 5x + 4 = 0$

B $x^2 - 5x = 12$

C $12x^2 - 12 = 0$

D $x^2 - 5x = 4$

E $x^2 - 5x + 4 = 0$

4 Quale delle seguenti affermazioni relative all'equazione seguente è *corretta*?

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

A L'equazione è incompleta.

B Il termine noto è uguale a 3.

C L'insieme soluzione è $S = \left\{-\frac{1}{2}, -3\right\}$.

D Il coefficiente di x è uguale a -5.

E Le soluzioni dell'equazione sono due: -5 e -3.

5 L'equazione, nell'incognita x,

$$4x^2 - (2k+3)x + 5 = 0$$

è completa per ogni valore reale di k?

ESERCIZI

6 Sottolinea le equazioni di secondo grado, dopo averle ridotte tutte in forma normale.

$x = x^2$; $x^2 = 1$; $x^3 = 0$; $x^2 - 2x = 0$; $\sqrt{2}x^2 - 2 = 0$; $3x^2 - x + 1 = 0$; $2x - 1 = x(x-1)$;
$4x(x^2 + 1) = 2x + 4x^3$; $x(x^2 - 1) - x^2 = 0$; $(x-1)^2 = 0$; $2^3x + 3^2 = x^2$.

7 Sottolinea le equazioni di secondo grado nell'incognita x.

$kx^2 = 0$; $ax^2 - 1 = 0$; $a^2x - 5 = 0$; $x - a^2 = 0$; $2a^2x - b^2 = 0$; $x - a^3 + b^3 = 0$;
$a^2x + b = 0$; $kx^2 - \sqrt{3} = 0$.

8 Sottolinea le equazioni di secondo grado nell'incognita y.

$2a - 3y^2 + 1 = 0$; $x - y^2 = 0$; $y^2 - 2xy + 2 = 0$; $x^2 + y - 1 = 0$; $k^2 - 3y = 0$; $k - 3y^2 = 0$.

Nelle seguenti equazioni di secondo grado, scritte in forma normale a meno dell'ordine, individua e scrivi il primo coefficiente a, il secondo coefficiente b e il termine noto c.
Per esempio, se l'equazione è $2 - x + 3x^2$, si ha $a = 3$, $b = -1$, $c = 2$.

9 $-x^2 + 2x + 3 = 0;$ $\quad -x^2 + 1 = 0;$ $\quad 2x - 3x^2 = 0.$

10 $1 - 5x^2 = 0;$ $\quad 2 + 7x^2 - 3x = 0;$ $\quad 4x^2 - 3x + 2 = 0.$

11 $-\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0;$ $\quad \frac{x^2}{5} + 3x - \frac{1}{2} = 0;$ $\quad -x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{6} = 0.$

12 $\frac{2x^2 - 5}{4} = 0;$ $\quad (1 + \sqrt{2})x^2 - x + \sqrt{2} = 0;$ $\quad x + 2 + \sqrt{3}x^2 + \sqrt{3} = 0.$

Nelle seguenti equazioni di secondo grado nell'incognita x, scritte in forma normale a meno dell'ordine, i coefficienti sono letterali. Riconosci e scrivi i coefficienti.
Per evitare confusione, considera la forma normale con i coefficienti indicati da lettere maiuscole: $Ax^2 + Bx + C = 0$.
Per esempio, se l'equazione è $(a - b)x^2 - 3b + (a + b)x = 0$, si ha $A = a - b$, $B = a + b$, $C = -3b$.

13 $ax^2 - 2a^3 - 2a^2b = 0;$ $\quad ax^2 + 2ax - 1 = 0;$ $\quad bx^2 - \sqrt{2}ax + ab = 0.$

14 $(a^2 - b^2)x^2 - x(a - b) = 0;$ $\quad 3k^2x^2 - 4(2k - 1)x + 5k = 0;$ $\quad 2(3k + 1)x^2 - 2(k - 2)x + k^2 - 4 = 0.$

Riduci in forma normale le seguenti equazioni nell'incognita x; verifica quindi che siano di secondo grado e scrivine i coefficienti.

15 $x(x - 2) + x^2 - 2x + 6 = 3x^2$

16 $4x(1 - x) - 2(x - 1)(x + 1) = 2x$

17 $(\sqrt{3} + 1)(x - 3) = x(x - \sqrt{3})$

18 $ax^2 + 2ax - x^2 = x$

19 $2bx - x^2 + b = 1 - 4x^2$

20 $\sqrt{2}x^2 + ax - 2x^2 + 3 = x - a$

21 $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 2ax^2 + ax + a^2x = 0$

22 $ax(x - 2a) - 3a(x^2 - 2) = x^2$

Per ogni terna di coefficienti a, b, c, scrivi l'equazione di secondo grado corrispondente, nell'incognita x, in forma normale. Per esempio, se $a = 3$, $b = -1$, $c = 2$, l'equazione corrispondente è $3x^2 - x + 2 = 0$.

23 $a = 1 \quad b = -1 \quad c = -2;$ $\quad a = 2 \quad b = 3 \quad c = -20;$ $\quad a = 1 \quad b = \frac{13}{6} \quad c = 1.$

24 $a = 5 \quad b = 0 \quad c = 9;$ $\quad a = 2 \quad b = 0 \quad c = 0;$ $\quad a = 2k \quad b = -k - 2 \quad c = 1.$

25 Indica, per ognuna delle seguenti equazioni nell'incognita x, se l'equazione è completa, spuria, pura o monomia.

a) $ax^2 + a - 2ax = 0;$
b) $9x^2 + 2x = 0;$
c) $2x^2 = 8;$
d) $x^2 + 6x = -2;$
e) $2x^2 + 4x + \sqrt{3} = 0;$
f) $kx^2 + 2x + k = 0;$
g) $ax^2 + 4ax = 0;$
h) $(\sqrt{3} + 1)x^2 = 0;$
i) $x^2 + \sqrt{2}x^2 - 2 = 0.$

Le soluzioni

26 Indica quali di questi valori sono soluzioni dell'equazione nell'incognita x scritta a fianco.

$\frac{1}{2}, 2, -1, 0;$ $\quad 4x^2 - 8x = 0.$

$a, -a, 2a, 0;$ $\quad x^2 - 3ax + 2a^2 = 0.$

$2, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3};$ $\quad 9x^2 - 6x + 1 = 0.$

COMPLETA **le seguenti equazioni che hanno per soluzioni i valori indicati a fianco, inserendo un numero al posto dei puntini.**

27 $3x^2 + \dots x = 0, \quad 0 \text{ e } -3.$

28 $\dots x^2 - \frac{2}{3}x = 0, \quad 0 \text{ e } \frac{3}{4}.$

29 $9x^2 + \dots x - 4 = 0, \quad \pm\frac{2}{3}.$

30 $\dots x^2 - 9 = 0, \quad \pm\frac{3}{5}.$

31 $5x^2 - \dots = 0, \quad \pm 2.$

32 $\dots x^2 - 1 = 0, \quad \pm 2.$

2. La risoluzione di un'equazione di secondo grado

Teoria a pag. 867

RIFLETTI SULLA TEORIA

33 **VERO O FALSO?**

a) La formula risolutiva di un'equazione completa di secondo grado non è valida per risolvere l'equazione $5x^2 - 9 = 0.$ V F

b) Il discriminante di un'equazione spuria è positivo. V F

c) L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ammette due soluzioni reali e coincidenti, se il primo membro è il quadrato di un binomio. V F

d) Se le soluzioni di un'equazione di secondo grado sono entrambe negative, il discriminante Δ è negativo. V F

e) Si applica la formula ridotta quando il coefficiente b dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ è positivo. V F

34 **TEST** Mediante la formula

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4},$$

quale delle seguenti equazioni risolvi?

A $2x^2 + 3x + 4 = 0$

B $x^2 - 3x + 32 = 0$

C $4x^2 - 3x - 2 = 0$

D $2x^2 - 3x - 16 = 0$

E $2x^2 - 3x - 4 = 0$

35 Quanto vale il Δ delle equazioni $2x^2 - 7 = 0$ e $x^2 + 9 = 0$? In generale, il discriminante di un'equazione pura può essere nullo?

ESERCIZI

Il discriminante

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

In ognuno degli esercizi seguenti sostituisci nella formula $\Delta = b^2 - 4ac$ i valori indicati e calcola il risultato.

36 $a = -2$; $b = -3$; $c = 0$. [9]

37 $a = 1$; $b = -\sqrt{2}$; $c = 3$. [-10]

38 $a = 2$; $b = 0$; $c = -5$. [40]

39 $a = 1$; $b = -3k$; $c = 2k^2$. [k^2]

40 $a = k$; $b = -k - 1$; $c = 1$. [$(k-1)^2$]

41 $a = \sqrt{3} - 1$; $b = 2\sqrt{3}$; $c = \sqrt{3} + 1$. [4]

Date le seguenti equazioni, calcola Δ e indica se le soluzioni sono reali.

42 $3x^2 - x + 1 = 0$ [-11]

43 $2x^2 + 3x - 2 = 0$ [25]

44 $\frac{1}{4}x^2 + 2x - 12 = 0$ [16]

45 $4x^2 - 12x + 9 = 0$ [0]

46 Senza calcolare le soluzioni, indica se le seguenti equazioni ammettono soluzioni reali e distinte, soluzioni reali coincidenti o non ammettono soluzioni reali.

$x^2 = 3 - 2x$; $3x^2 - 2x + 1 = 0$; $4x^2 + 25 - 20x = 0$;

$\frac{1}{2}x^2 + 9 + 3x = 0$; $2x^2 + 3x - 2 = 0$; $6x^2 + 2 = 3x$.

47 **COMPLETA** la seguente tabella.

EQUAZIONE	a	b	c	Δ
$2x^2 + 3x - 1 = 0$	…	…	…	…
$\dots x^2 \dots x \dots = 0$	2	-2	1	…
$x^2 \dots x \dots = 0$	…	3	…	5
$\dots x^2 \dots x + 4 = 0$	…	1	…	17
$x^2 + 16 = 0$	…	…	…	…

Le equazioni numeriche intere

Nel sito: ▶ 9 esercizi di recupero

Le equazioni complete

ESERCIZIO GUIDA

48 Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $10x^2 - 2 = x$; b) $49x^2 + 126x + 81 = 0$; c) $x^2 - 2x + 2 = 0$.

a) $10x^2 - 2 = x$.

Scriviamo l'equazione in forma normale:

$10x^2 - x - 2 = 0$.

Calcoliamo il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-2) = 1 + 80 = 81$.

Poiché $\boldsymbol{\Delta > 0}$, l'equazione ha due soluzioni reali distinte.

Usiamo la formula risolutiva

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}:$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot (10)} = \begin{cases} \dfrac{1+9}{20} = \dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{1-9}{20} = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{2}{5}.$$

b) $49x^2 + 126x + 81 = 0$.

L'equazione è già in forma normale.

$$\Delta = (126)^2 - 4 \cdot 49 \cdot 81 = 15\,876 - 15\,876 = 0.$$

Poiché $\mathbf{\Delta = 0}$, l'equazione ha due soluzioni reali coincidenti.

Calcoliamo le soluzioni con la formula $x = -\dfrac{b}{2a}$:

$$x = \frac{-126}{2 \cdot (49)} = -\frac{63}{49} = -\frac{9}{7}.$$

Le soluzioni coincidenti sono:

$$x_1 = x_2 = -\frac{9}{7}.$$

c) $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Scriviamo i coefficienti:

$$a = 1; \quad b = -2; \quad c = 2.$$

Calcoliamo il discriminante:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2) = -4.$$

Poiché $\mathbf{\Delta < 0}$, l'equazione non ha radici reali.

Risolvi le seguenti equazioni.

49 $6x^2 + 13x + 7 = 0$ $\left[-1, -\dfrac{7}{6}\right]$

50 $4x^2 - 8x + 3 = 0$ $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

51 $x^2 - 2x - 3 = 0$ $[-1, 3]$

52 $9x^2 - 12x + 4 = 0$ $\left[\dfrac{2}{3} \text{ doppia}\right]$

53 $x^2 + 3x - 10 = 0;$ $\quad 12x^2 + x - 6 = 0.$ $\left[-5, 2; -\dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}\right]$

54 $2x^2 - 3x + 20 = 0;$ $\quad 6x^2 + 13x + 8 = 0.$ [impossibile; impossibile]

55 $x^2 - 4x - 32 = 0;$ $\quad x^2 + x + \dfrac{2}{9} = 0.$ $\left[-4, 8; -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right]$

56 $x^2 + 3x - 4 = 0;$ $\quad x^2 - \dfrac{5}{3}x + \dfrac{25}{36} = 0.$ $\left[-4, 1; \dfrac{5}{6} \text{ doppia}\right]$

57 $x^2 - 3x + 2 = 0;$ $\quad x^2 - 9x + 33 = 0.$ [1, 2; impossibile]

58 $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0;$ $\quad x^2 - 4\sqrt{3}x - 36 = 0.$ $[-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}; -2\sqrt{3}, 6\sqrt{3}]$

59 $x^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0;$ $\quad x^2 - \sqrt{5}x + 2 = 0.$ $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}; \text{impossibile}]$

60 $5x^2 - 12x + 9 = 0;$ $\quad x^2 - 7x + \dfrac{45}{4} = 0.$ $\left[\text{impossibile}; \dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{2}\right]$

61 $\dfrac{1}{18} + \dfrac{3}{4}x + x^2 = 0;$ $\quad x(x-9) = \dfrac{19}{4}.$ $\left[-\dfrac{1}{12}, -\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{2}, \dfrac{19}{2}\right]$

62 $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0;$ $\quad \sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0.$ $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ doppia; impossibile}\right]$

63 $21x^2 - 10x + 1 = 0$; $x^2 - 6x - 16 = 0$. $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}; -2, 8\right]$

64 $18x^2 - 21x - 4 = 0$; $2x^2 - 13x - 7 = 0$. $\left[-\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; -\frac{1}{2}, 7\right]$

65 $3x^2 = 5 + 14x$; $4x(3x + 1) = 5$. $\left[-\frac{1}{3}, 5; -\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right]$

66 $x(2x + 13) = 24$; $x^2 = 4(x + 3)$. $\left[-8, \frac{3}{2}; -2, 6\right]$

67 **ASSOCIA** a ogni equazione le sue soluzioni.

1. $x^2 - x - 12 = 0$
2. $x^2 + x - 12 = 0$
3. $-x^2 - 4x + 12 = 0$
4. $x^2 - 8x + 16 = 0$

A. $3; -4$.
B. $4; 4$.
C. $-3; 4$.
D. $2; -6$.

La formula ridotta

ESERCIZIO GUIDA

68 Risolviamo l'equazione: $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Scriviamo i coefficienti: $a = 1$, $b = 6$, $c = -7$.
Poiché b è **pari**, possiamo utilizzare la formula ridotta:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}.$$

$$\frac{b}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 3^2 - (1) \cdot (-7) = 9 + 7 = 16$$

Poiché $\frac{\Delta}{4} > 0$, l'equazione ha due soluzioni reali distinte.

Calcoliamo le due soluzioni con la formula ridotta:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{16}}{1} = \begin{cases} -3 + 4 = +1 \\ -3 - 4 = -7 \end{cases}$$

Le soluzioni sono $x_1 = 1$ e $x_2 = -7$.

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado, applicando la formula ridotta.

69 $x^2 + 8x - 9 = 0$ $[-9; 1]$

70 $10y^2 + 8y + 5 = 0$ [impossibile]

71 $24t + 13 - 4t^2 = 0$ $\left[-\frac{1}{2}; \frac{13}{2}\right]$

72 $9 + 16x^2 + 24x = 0$ $\left[-\frac{3}{4} \text{ doppia}\right]$

73 $3x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 = 0$ $\left[-\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

74 $x^2 = \frac{1}{3}(2x + 1)$ $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

75 $-16x^2 + 40x - 25 = 0$ $\left[\frac{5}{4} \text{ doppia}\right]$

76 $\frac{7}{4} - 3t - t^2 = 0$ $\left[-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right]$

77 $\frac{2x}{3} - \left(\frac{5}{4} - x^2\right) = 0$ $\left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{6}\right]$

78 $\frac{5}{2}x + 6 \cdot \frac{11}{25} - x^2 = 0$ $\left[-\frac{4}{5}; \frac{33}{10}\right]$

79 $x^2 - 14x + 24 = 0$ $[2; 12]$

80 $3x^2 + 4x - 4 = 0$ $\left[\frac{2}{3}; -2\right]$

Equazioni il cui discriminante è riconducibile a un quadrato di binomio

ESERCIZIO GUIDA

81 Risolviamo l'equazione:

$$3x^2 - 4\sqrt{3}x + 2x + 3 - 2\sqrt{3} = 0.$$

Riduciamo in forma normale:

$$3x^2 - (4\sqrt{3} - 2)x + 3 - 2\sqrt{3} = 0$$

$$3x^2 - 2(2\sqrt{3} - 1)x + 3 - 2\sqrt{3} = 0.$$

Scriviamo i coefficienti:

$a = 3$; $\quad b = -2(2\sqrt{3} - 1)$; $\quad c = 3 - 2\sqrt{3}$.

Poiché b è divisibile per 2, possiamo applicare la formula ridotta.

Calcoliamo $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$:

$$\frac{\Delta}{4} = [-(2\sqrt{3} - 1)]^2 - 3 \cdot (3 - 2\sqrt{3}) = 12 + 1 - 4\sqrt{3} - 9 + 6\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Possiamo considerare $2\sqrt{3}$ come doppio prodotto: $2\sqrt{3} = 2 \cdot (1 \cdot \sqrt{3})$.
Allora $4 + 2\sqrt{3}$ può derivare dal quadrato di $1 + \sqrt{3}$. Proviamo:

$$(1 + \sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}, \quad \text{pertanto} \quad \frac{\Delta}{4} = (1 + \sqrt{3})^2 > 0.$$

Calcoliamo le soluzioni dell'equazione di partenza con la formula ridotta:

$$x = \frac{2\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}}{3} = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{3} - 1 + 1 + \sqrt{3}}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \\[2ex] \dfrac{2\sqrt{3} - 1 - 1 - \sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3} - 2}{3} \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$x_1 = \sqrt{3}; \quad x_2 = \frac{\sqrt{3} - 2}{3}.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

82 $x^2 + 2x - 2\sqrt{2} - 2 = 0$ $\quad [-2 - \sqrt{2}; \sqrt{2}]$

83 $2x^2 - 4x - 1 + 2\sqrt{2} = 0$ $\quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4 - \sqrt{2}}{2}\right]$

84 $x^2 - x = \sqrt{3} \cdot (x - 1)$ $\quad [1; \sqrt{3}]$

85 $x^2 - 2\sqrt{3}x - 2 - 2\sqrt{6} = 0$ $\quad [-\sqrt{2}; 2\sqrt{3} + \sqrt{2}]$

86 $x(x - 2) = 4\sqrt{3}(2 - x)$ $\quad [-4\sqrt{3}; 2]$

87 $x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(x + 3) - \frac{5}{2} = 0$ $\quad \left[\sqrt{3} + 1; -\frac{\sqrt{3} + 2}{2}\right]$

88 $2x(2x + 3) + \sqrt{7}\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{7}{2} = 0$ $\quad \left[-\frac{\sqrt{7} + 3}{2}; \frac{\sqrt{7}}{4}\right]$

89 $x\left(5x + \frac{7}{3}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3}(8x + 1) + \frac{4}{3} = 0$ $\quad \left[\frac{\sqrt{6} - 2}{3}; \frac{\sqrt{6} + 1}{5}\right]$

90 $\sqrt{2}\,x^2+(\sqrt{2}-2)\,x-2=0$ $[\sqrt{2};-1]$

91 $x^2-x-\sqrt{5}(1-x)=0$ $[1;-\sqrt{5}]$

92 $3x(x-1)+\sqrt{6}x=\sqrt{6}$ $\left[-\frac{\sqrt{6}}{3};1\right]$

93 $\sqrt{5}x^2+\sqrt{3}=-(1+\sqrt{15})x$ $\left[-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

94 $\sqrt{3}x^2+(1-2\sqrt{3})x-2=0$ $\left[2;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

95 $x^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{3})x+2\sqrt{6}=0$ $[2\sqrt{2};\sqrt{3}]$

Le equazioni incomplete

ESERCIZIO GUIDA

96 Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $2x^2-1=0$;
b) $x^2+1=0$;
c) $8x^2-7x=0$;
d) $64x^2=0$.

a) Equazione **pura**:

$$2x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad 2x^2=1 \quad \rightarrow \quad x^2=\frac{1}{2}.$$

Estraiamo la radice quadrata:

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le soluzioni sono: $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Equazione **pura**:

$$x^2+1=0 \quad \rightarrow \quad x^2=-1.$$

Non esiste un numero reale che, elevato al quadrato, dia un numero negativo, quindi l'equazione non ha radici reali.

c) Equazione **spuria**:

$$8x^2-7x=0.$$

Raccogliamo x:

$$x\,(8x-7)=0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto:

$$x=0 \quad \text{oppure} \quad 8x-7=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{7}{8}.$$

Le soluzioni dell'equazione sono $x_1=0$ e $x_2=\frac{7}{8}$.

d) Equazione **monomia**:

$$64x^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2=0 \quad \rightarrow \quad x_1=x_2=0.$$

Risolvi le seguenti equazioni.

97 $2-x^2=0$; $\quad \frac{1}{3}x^2-2x=0$; $\quad 9x^2=0$. $[\pm\sqrt{2};0,6;0 \text{ doppia}]$

98 $7x-5x^2=0$; $\quad 4+3x^2=0$; $\quad 25=9x^2$. $\left[0,\frac{7}{5};\text{impossibile};\pm\frac{5}{3}\right]$

99 $\frac{1}{2}x^2=0$; $\quad 1-x^2=0$; $\quad 9x^2-12x=0$. $\left[0 \text{ doppia};\pm 1;0,\frac{4}{3}\right]$

100 $-3x^2=-12$; $\quad \frac{1}{4}x^2=\frac{1}{5}x$; $\quad \frac{1}{2}x^2-18=0$. $\left[\pm 2;0,\frac{4}{5};\pm 6\right]$

101 $-4x^2=36$; $\quad 2x^2-\frac{8}{3}x=0$; $\quad 4-x^2=0$. $\left[\text{impossibile};0,\frac{4}{3};\pm 2\right]$

102 $3x^2\sqrt{5}=0$; $\quad 16x^2=1$; $\quad -3x^2+6x=0$. $\left[0 \text{ doppia};\pm\frac{1}{4};0,2\right]$

103 $4x^2 - 2\sqrt{2} = 0$ $\left[\pm\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}\right]$

104 $2x^2 + 1 = 0$ [impossibile]

105 $\sqrt{2}x^2 - 2 = 0$ $[\pm\sqrt[4]{2}]$

106 $x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{2}x = 0$ $[0, \sqrt{3} - \sqrt{2}]$

107 $2x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{3}x = 0$ $\left[0, \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right]$

108 $(x+7)^2 + (x-7)^2 = 98$ [0 doppia]

109 $6x - \sqrt{3}x^2 + 3x = 0$ $[0, 3\sqrt{3}]$

110 $\sqrt{5}x^2 + x^2 - \sqrt{5}x = 0$ $\left[0, \dfrac{5-\sqrt{5}}{4}\right]$

111 $(2x+3)^2 = (x-3)^2$ $[-6, 0]$

112 $x^2 - x = 23x - \sqrt{3}x^2$ $[0, 12(\sqrt{3}-1)]$

113 $x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$ $[0, 2\sqrt{2}]$

114 $(x+4)^2 + 1 = 8x$ [impossibile]

115 $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - x(2x-1) = 0$ $\left[\pm\dfrac{1}{2}\right]$

116 $3x^2 + 8 - 5\sqrt{2} = 0$ [impossibile]

117 $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5-x}{12} = \dfrac{(2x-1)5}{6} - \dfrac{x(x+1)}{4}$ [impossibile]

118 $\dfrac{5}{3}(2x-3)(x+1) = 10x - 5$ $\left[0, \dfrac{7}{2}\right]$

119 $3x^2 + \dfrac{3}{2} - \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{3-x}{2} - (1+x^2)$ [0 doppia]

120 $\sqrt{5}(x^2-1) + 1 = x^2$ $[\pm 1]$

121 $11x + (x-2)^2 + (2x+1)(x-3) = (x+1)^2 - 14$ [impossibile]

122 $(x-3)(x+3) = 3x(x-1) + 3x - 9$ [0 doppia]

123 $x(x+3) + 1 = (1+x)^2 - 2x\left(1 + \dfrac{1}{2}x\right)$ $[-3, 0]$

124 $3x + (4x-1)^2 = (x-4)^2 - 3(5-x)$ [0 doppia]

Risolvi le seguenti equazioni come equazioni pure, eseguendo un'opportuna sostituzione.

125 $(3x-5)^2 = 16$ (poni $3x - 5 = y$). $\left[3, \dfrac{1}{3}\right]$

126 $(x+7)^2 = 9$; $4\left(2x - \dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$. $\left[-4, -10; \dfrac{3}{10}, -\dfrac{1}{10}\right]$

127 $\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}x\right)^2 = \dfrac{1}{4}$; $(3x - 2\sqrt{3})^2 = 12$. $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}; 0, \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right]$

128 $(\sqrt{2}x - 1)^2 - 32 = 0$; $\left(-5x - \dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$. $\left[\dfrac{8+\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}-8}{2}; -\dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{15}\right]$

RIEPILOGO LE EQUAZIONI NUMERICHE INTERE

TEST

129 L'equazione $5x^2 - 2x + 1 = 0$:

A ha come soluzioni $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{3}{5}$.

B ha come soluzioni $x = -\frac{3}{5}$, $x = \frac{1}{5}$.

C non ha soluzioni reali.

D è un'equazione incompleta.

E ha due soluzioni reali e coincidenti.

130 Esamina le tre equazioni:

1. $2x^2 + 5x = 0$; **2.** $7x^2 = 0$; **3.** $\sqrt{3}x^2 = 0$.

Quali di esse sono fra loro equivalenti?

A Tutte e tre.

B 1 e 2

C 1 e 3

D 2 e 3

E Nessuna è equivalente alle altre.

131 Le due equazioni $3x^2 - 9 = 0$ e $3x^2 + 9 = 0$ hanno:

A una sola soluzione uguale.

B le stesse soluzioni.

C soluzioni non reali.

D la prima due soluzioni, la seconda nessuna reale.

E soluzioni reciproche.

132 Le affermazioni che seguono si riferiscono all'equazione $2x^2 + 3x = 0$. Quale è *falsa*?

A È un'equazione incompleta.

B Ha discriminante positivo.

C Ha una soluzione negativa.

D Ha due soluzioni reali e distinte.

E Ha come soluzioni $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$.

133 Quale delle seguenti equazioni ha come radici 2 e 3?

A $x^2 + 5x + 6 = 0$

B $x^2 - 5x - 6 = 0$

C $x^2 - 5x + 6 = 0$

D $x^2 - 5x = 0$

E $x^2 - 6 = 0$

134 CACCIA ALL'ERRORE Trova gli errori commessi nel risolvere le seguenti equazioni.

a) $x^2 + 16 = 0 \to x^2 = -16 \to x = \pm 4$.

b) $4x(x-1) = 0 \to x = -4,\ x = 1$.

c) $(x-6)(x-3) = 1 \to$

$\to x - 6 = 1 \vee x - 3 = 1 \to x = 7 \vee x = 4$.

d) $-9x^2 = 0 \to x^2 = 9 \to x = \pm 3$.

Risolvi le seguenti equazioni.

135 $2x^2 - 5x - 3 = 0$ $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$

136 $4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\left[\frac{1}{2}\text{ doppia}\right]$

137 $x^2 - x + 2 = 0$ [impossibile]

138 $x^2 + 5x + 6 = 0$ $[-3; -2]$

139 $x^2 + 5x + 7 = 0$ [impossibile]

140 $x^2 - 5\sqrt{2}\,x + 12 = 0$ $[2\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$

141 $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0$ $\left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right]$

142 $20x^2 - 41x + 20 = 0$ $\left[\frac{4}{5}; \frac{5}{4}\right]$

143 $x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{16}{25} = 0$ $\left[-\frac{4}{5}\text{ doppia}\right]$

144 $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$

145 $x^2 + 3\sqrt{3}\,x + 6 = 0$ $[-2\sqrt{3}; -\sqrt{3}]$

146 $2x^2 - 3\sqrt{2}x - 4 = 0$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}\right]$

147 $x^2 = 4(x-1)$ [2 doppia]

148 $x^2 = \frac{5(x\sqrt{5}-1)}{4}$ $\left[\frac{\sqrt{5}}{4}; \sqrt{5}\right]$

149 $6x^2 - 6x = 2(1-2x) - 2 - x(2-x)$ [0 doppia]

150 $2(3x-1)^2 - 3x(5x+1) = 2 - 3x$ [0; 4]

151 $\frac{2x}{\sqrt{3}} - x^2 - \frac{1}{3} = 0$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ doppia}\right]$

152 $(5x-1)x + (x-1)(x+1) = 0$ $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$

153 $x(x+2) + 9 = 8x + 1$ [2; 4]

154 $(2x+1)^2 - x^2 - (x-1)^2 = (2x+3)(2x-3) + 1$ [− 1; 4]

155 $(2-3x)(x-2) + 3(x-1)^2 = (x-1)(x+3)$ $[\pm\sqrt{2}]$

156 $(1-x)^2 = 2x + \frac{x^2 - 3x + 7}{2}$ $\left[\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right]$

157 $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x(x+2) - 5x + \frac{1}{6} = \frac{x}{3}(x-5)$ $[5 \pm 2\sqrt{6}]$

158 $(2-3x)^2 - (2x+1)^2 = 4(2-4x)$ $[\pm 1]$

159 $x - (2x-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3-x}{2} - (3x-1)(x-2)$ $\left[0; -\frac{3}{2}\right]$

160 $(3x-4)^2 - 3x^2 = 2(8+13x)$ $\left[0; \frac{25}{3}\right]$

161 $x(x+2\sqrt{2}) + 2\sqrt{3}x(1+\sqrt{2}) = 2x(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ $[0; -2\sqrt{6}]$

162 $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right) - 2x(x-1) = 2\left(x-\frac{2}{3}\right)$ $\left[\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$

163 $x(1-5x) + 3 = [5-(2+5x)]x - 2(x+1) - (x^2-6)$ $[\pm 1]$

164 $2(x^2+2) - 2(x+3)(x-3) - 4 = 7x^2 - (3x+4)^2 + 34$ $[0; -12]$

165 $2x(x-5) - (2x-3)(x+1) = x(2-x) - 15$ [2; 9]

166 $(x+3)(3x-1) - 2[2x^2 - x(x-2)] + 6 = 0$ $[-3; -1]$

167 $x(x-1)(x-2) - (x+2)(x^2-4) + 2(x+20) = 0$ $\left[-\frac{12}{5}; 4\right]$

168 $(x-3)^2 + 6(x+2) = (2x-1)(x+4) + 37$ $[-3; -4]$

169 $(x-4)(x+8) + 20 = 0$ $[-6; 2]$

170 $x(4-x) - (5-x)(x+5) = x(x+1)$ [impossibile]

171 $(x+3)(2x-1) - 3[2x^2 + x(x-6)] = 13$ $\left[1; \frac{16}{7}\right]$

172 $(x+2)^3-(x-2)^3=1+(4x+1)(4x-1)$ $[\pm 2]$

173 $(x-6)(x+1)-(2-x)(x+3)=36$ $[-4; 6]$

174 $\frac{x}{2}(2x+\sqrt{3})+\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}=0$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ doppia}\right]$

175 $x\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{2}{3}(3-x)+\frac{1}{3}$ $\left[2; -\frac{7}{3}\right]$

176 $2(x-1)-\frac{5}{4}x=\frac{3-5x}{4}-2\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$ $\left[\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

177 $\frac{(3x-1)(3x+2)}{2}-(x-4)^2+3(1+x)=\frac{-6x+10}{2}$ $\left[-\frac{38}{7}; 1\right]$

178 $\frac{2(3x+10)}{6}-x^2=\frac{3x+1}{3}$ $[\pm\sqrt{3}]$

BRAVI SI DIVENTA ► E38

179 $\frac{2x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+2x=(2x-1)(1+\sqrt{3}x)-\frac{6}{\sqrt{3}}$

180 $\frac{6-3x}{5}+\frac{x^2+2}{15}-x=\frac{4-x^2}{3}$ $[0; 4]$

181 $\frac{(x-2)(x+2)}{3}+\frac{11}{9}=-\frac{4-2x}{9}$ [impossibile]

182 $(x-1)^3=x^2(x-1)-(x+3)(x-2)-19$ $[-2; 6]$

183 $(x+1)[2(3x-1)-(4+5x)]=2(x-1)(x+2)+4$ $[-6; -1]$

184 $\frac{1}{2}(x-4)^2+\frac{1}{3}(x-6)=\frac{2}{3}$ $\left[2; \frac{16}{3}\right]$

185 $(x-2)(x^2+2x+4)+(x-5)^2=x^2(x-1)$ [impossibile]

186 $(x^2-x)(x^2+x)=(x^2-3)^2+2x+42$ $\left[-3; \frac{17}{5}\right]$

187 $3x(x-2)-2x(2x-3)=(3-x)(x-1)-6-(2x-3)^2+18$ $[0; 4]$

188 $(3x+1)(x+3)=\frac{1}{3}(1-x)(7x+9)$ $[-2; 0]$

189 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)=3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)+2$ $[-5; 0]$

190 $\frac{2x}{15}+\frac{x^2+x}{6}=\frac{(x+2)(x+1)}{10}$ $[\pm\sqrt{3}]$

191 $(4-3x)^2-(x+2)(2x+3)-6=1-x(1+x)-18x-12x$ [impossibile]

192 $\left(\frac{2x-3}{4}+\frac{x-5}{2}\right)\left(x-\frac{3-x}{2}\right)=x^2-\frac{x+4}{2}+\frac{55-3x}{8}$ $[0; 11]$

193 $\frac{2}{3}\left(\frac{6+x}{2}-\frac{x-3}{4}\right)=\frac{(x-2)^2}{12}-\frac{x}{3}+\frac{1}{6}$ $[-2; 12]$

194 $\frac{1}{3}(5x-3)(2+x)-x\left(\frac{x}{3}-1\right)=\frac{1}{2}(x+3)(2-3x)$ $\left[-3; \frac{10}{17}\right]$

195 $\frac{(2-x)(3x-1)}{6}-\frac{x}{4}+\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2=\frac{2(3-x)x}{3}+\frac{1}{3}x-\frac{5x-13}{12}$ $[\pm 1]$

196 $(x-2)(x+3)+\frac{(x+1)^3-(x-2)^3}{4}=\frac{x^2-4}{2}-\frac{x+7-3x^2}{4}$ $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

197 $\frac{x+\sqrt{2}}{2}-\frac{x^2-2+\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}$ $[0; \sqrt{2}+1]$

198 $(\sqrt{3}x-1)^2-\sqrt{3}(\sqrt{6}x+1)=x(\sqrt{3}+x)-\sqrt{3}(1+\sqrt{6}x)$ $\left[\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{19}}{4}\right]$

199 $(x-1)^3+\frac{3}{2}[x(x+6)+1]=(2+x)^3$ [impossibile]

Le equazioni numeriche fratte

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

200 Risolviamo l'equazione:

$$\frac{3x-2}{x-1}=\frac{x}{x+1}-3-\frac{2x}{1-x^2}.$$

Scriviamo le condizioni di esistenza:

$x-1\neq 0 \;\rightarrow\; x\neq 1;$
$x+1\neq 0 \;\rightarrow\; x\neq -1;$
$1-x^2\neq 0 \;\rightarrow\; (1-x)(1+x)\neq 0 \;\rightarrow\; x\neq 1 \wedge x\neq -1.$
C.E.: $x\neq 1 \wedge x\neq -1$.

Riduciamo i due membri allo stesso denominatore:

$$\frac{(3x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(x-1)-3(x^2-1)+2x}{(x-1)(x+1)}.$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per il denominatore comune e riduciamo a forma normale:

$$(3x-2)(x+1)=x(x-1)-3(x^2-1)+2x$$
$$\underline{3x^2}+\underline{3x}\,\underline{-2x}-2=\underline{x^2}\,\underline{-x}\,\underline{-3x^2}+3\,\underline{+2x} \;\rightarrow\; 5x^2-5=0.$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado incompleta:

$x^2-1=0 \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{1}=\pm 1.$

Le soluzioni sono $x_1=-1$ e $x_2=+1$.
Esse non sono compatibili con le condizioni di esistenza, pertanto l'equazione data è impossibile.

Risolvi le seguenti equazioni.

201 $\frac{1}{x}+1=\frac{4}{x+1}$ [1 doppia]

202 $\frac{3x}{x+2}=\frac{3}{x}$ $[2; -1]$

203 $\frac{3x+1}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{4}{x^2+x}$ $[-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$

204 $\frac{1}{x}-3=\frac{1+x}{x-2}$ $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

205 $\frac{x}{5}=\frac{x+2}{x-2}-\frac{4}{5}$ $[-3; 6]$

206 $\frac{1}{x}-\frac{1}{10}=\frac{1}{x+5}$ $[-10; 5]$

207 $\frac{6}{x-1}-\frac{2}{x}=\frac{1}{2}+\frac{3}{x}$ $[5; -2]$

208 $\frac{1}{x}-2=3x$ $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$

209 $\frac{1}{x}=2-x$ [1 doppia]

210 $\frac{x}{x-1}=\frac{\sqrt{3}}{x}$ [impossibile]

211 $\frac{(x+1)^2}{x-1}-\frac{9(x+1)}{4}=2-x$ $[3; -7]$

212 $\frac{x^2-x+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}$ [0; 1 non accettabile]

213 $-\frac{4x^2}{x+2}+\frac{2}{x-2}=\frac{5-4x^3}{x^2-4}$ $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$

214 $\frac{3x^2+5}{x}+x-1=\frac{5}{x}$ $\left[0 \text{ non accettabile}; \frac{1}{4}\right]$

215 $\frac{8}{x-1}-3=\frac{6}{x+1}-\frac{x^2+x-3}{x^2-1}$ $\left[\frac{7}{2}; -2\right]$

216 $\frac{20}{x^2-4}=\frac{5-x}{x+2}+\frac{2x-3}{2-x}$ [impossibile]

217 $\frac{x}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{21-x}{x^2-9}$ [± 3 non acc.]

218 $\frac{x+3}{x^2-2x+1}=\frac{x-2}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}$ [3; 1 non acc.]

---

219 $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{3-x}{x(x+1)}+\frac{2x^2}{(x+1)^2}$ $\left[-\frac{3}{4}; 1\right]$

220 $\frac{x}{x-5}-\frac{3}{2x}=\frac{15+7x}{2x^2-10x}$ [impossibile]

221 $\frac{3}{x^2-9}+\frac{x}{x-3}+\frac{2}{3+x}=\frac{12-11x}{9-x^2}$ [impossibile]

222 $\frac{9}{x^2+6x}-\frac{x-2}{2x+12}=\frac{1}{2x}$ $[-3; 4]$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E39

223 $\frac{3}{2x+4}-\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x^2+2x}$

224 $\frac{2}{3(x+2)}+\frac{2}{x+2}=\frac{2}{3x}+\frac{1}{3}$ [2 doppia]

225 $\frac{x}{x-2}-\frac{4}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$ [0; 2 non accettabile]

226 $\frac{x-5}{x+3}+\frac{80}{x^2-9}=\frac{1}{2}+\frac{x-8}{3-x}$ [impossibile]

227 $\frac{2x}{2x-1}-\frac{8x^2+3}{4x^2-1}=\frac{3}{2x+1}$ $[0; -1]$

228 $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-x^2}=\frac{x}{x^2-x}$ $[\pm\sqrt{2}]$

229 $2x+\sqrt{2}=\frac{2-\sqrt{2}-2x}{2x+\sqrt{2}}$ $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right]$

230 $\frac{3x-1}{2x+8}-\frac{2x-3}{4(x+1)}=\frac{13}{40}$ $\left[\frac{16}{9}; 1\right]$

231 $\frac{5(x-1)}{x}=\frac{3}{x-2}-\frac{x-13}{4x-2x^2}$ $\left[\frac{11}{5}; \frac{3}{2}\right]$

232 $3\left(1-\frac{1}{1+x}\right)=1-\frac{1}{1-x^2}$ $\left[0; \frac{3}{2}\right]$

233 $\dfrac{x^2\sqrt{3}+1}{x-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+3)}{\sqrt{3}}$ [impossibile]

234 $\dfrac{4(x-2)}{5x-26}=\dfrac{x+2}{x-4}$ $[-14; 6]$

235 $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{27-x^2}{9-x^2}$ $\left[-3 \text{ non accettabile}; \dfrac{15}{2}\right]$

236 $\dfrac{7x}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3}{2x-2}=\dfrac{5x(x-1)+6}{2x^2-2}$ $\left[\dfrac{1}{3} \text{ doppia}\right]$

237 $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x+7}{x-2}-\dfrac{12x+1}{4x+8}=\dfrac{58x-14x^2+67}{4x^2-16}$ $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right]$

238 $\dfrac{3+x}{x+1}(x-2)=\dfrac{x^2}{x-3}-\dfrac{3x-2(x+3)}{3-x}$ $[-3; 2]$

RIEPILOGO LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO NUMERICHE

Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni di secondo grado.

239 $4x+(x-5)(x+4)+15=(3-x)(x+3)+(x+6)(x-3)$ [impossibile]

240 $\dfrac{(2-x)(x+2)}{2}+\dfrac{2}{3}x=\dfrac{7}{3}-\dfrac{2}{15}x-\dfrac{(2x-1)^2}{5}$ $\left[\pm\dfrac{2}{3}\right]$

241 $\sqrt{3}x^2+5x\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=0$ $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{3}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

242 $\left(2x-\dfrac{1}{3}\right)\left(2x+\dfrac{1}{3}\right)-\left(2x+\dfrac{1}{3}\right)^2+4x\left(x+\dfrac{1}{3}\right)=0$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right]$

243 $\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)-\dfrac{x^2-4}{6}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2x-1}{6}-\dfrac{1}{2}(x+1)$ $\left[0; \dfrac{4}{5}\right]$

244 $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{6}{x-3}+\dfrac{72}{9-x^2}=0$ $[6; -9]$

245 $3(x^2-4\sqrt{3})-8x(\sqrt{3}-1)+19=0$ $\left[\dfrac{5\sqrt{3}-2}{3}; \sqrt{3}-2\right]$

246 $2x\left(3x-\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{7}}{3}(8x-1)-\dfrac{7}{6}=0$ $\left[\dfrac{\sqrt{7}}{2}; \dfrac{2-\sqrt{7}}{18}\right]$

247 $x(x+1)+2(x^2-1)=x(x-1)-3(x^2-1)+2x$ $[\pm 1]$

248 $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x^2}{2}+2\right)=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{2}{9}$ $[0; 4]$

249 $\dfrac{3x(x+2)}{x^2-1}+\dfrac{1}{2}x=\dfrac{9+\dfrac{x^3}{2}}{x^2-1}-\dfrac{1}{2(x^2-1)}$ $\left[-\dfrac{17}{6}; 1 \text{ non accettabile}\right]$

250 $\sqrt{2}x^2+x^2=x$ $[0; \sqrt{2}-1]$

251 $\dfrac{(y+1)(y-1)}{3}=\dfrac{2y-3}{12}+\dfrac{y-1}{6}$ $\left[\dfrac{1}{2} \text{ doppia}\right]$

252 $x^2-\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)-1=\dfrac{4}{9}+3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{4}{3}$ $\left[-\dfrac{2}{3}; 0\right]$

253 $\frac{x(2x-3)}{8}=x-3+\frac{(2x-3)^2}{8}$ $\left[-\frac{5}{2};3\right]$

254 $\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{5}{4}x\right)=\frac{(2x+1)(x+3)}{4}+\frac{x^2}{8}$ $[-3\pm\sqrt{3}]$

255 $\frac{10-2x}{x^2-9}+\frac{1-x}{3-x}=\frac{3}{2x+6}+\frac{23}{2x^2-18}$ $\left[0;\frac{3}{2}\right]$

256 $(\sqrt{3}x+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}x)-(1-\sqrt{6})x^2+2(x+1)^2=\sqrt{6}-2$ $[-4;-1]$

257 $\frac{x+2}{2-x}+\frac{15x^2+\sqrt{3}x-6}{x^2-4}=\frac{x-2}{x+2}-\frac{6+x^2+\sqrt{3}x}{4-x^2}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{15}}{3}\right]$

258 $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})+3=(\sqrt{5}x+1)(\sqrt{5}x-1)+2\sqrt{2}x(1-\sqrt{2}x)-x^2$ $[\sqrt{2}\pm 1]$

259 $(x+\sqrt{3})^2+(x-\sqrt{3})^2=\frac{10(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{3}$ $[\pm 2\sqrt{3}]$

260 $\sqrt{3}(x^2-1)=\sqrt{2}x^2$ $[\pm\sqrt{3+\sqrt{6}}]$

261 $\frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{\sqrt{6}}-\frac{x-6}{\sqrt{3}}=\frac{x+\sqrt{3}(2\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$ $[0;\sqrt{2}+\sqrt{3}]$

262 $\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{x+2(\sqrt{2}-1)}+x=0$ $[1-\sqrt{2}$ doppia$]$

263 $\dfrac{\frac{6x}{9-x^2}\left(1-\frac{x}{3}\right)}{\frac{3+x}{3-x}-\frac{3-x}{3+x}-1}=\frac{3}{8}\left(1+\frac{1}{3}\right)$ $\left[\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}\right]$

264 $\frac{x}{5x+\sqrt{5}}+\frac{1}{5}=\frac{x^2+5}{5\sqrt{5}x+5}$ $[\sqrt{5}+1;\sqrt{5}-1]$

265 $\dfrac{3x+2}{3x+\frac{1}{3}}-\dfrac{x-1}{x-\frac{1}{3}}=1-\frac{8x^2}{(9x+1)(3x-1)}$ $\left[\frac{1}{19};2\right]$

266 $\dfrac{3-\frac{3}{x+1}}{3+\frac{6}{x-1}}-\frac{x-1}{x+1}-\frac{10}{x-1}=0$ [impossibile]

267 $\frac{y^2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}}-y=\frac{y-y^2}{3}$ $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2};\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}\right]$

268 $x\left(3+\frac{x}{5}\right)-\frac{4x-5}{10}=2\left(x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{5}x$ [0 doppia]

269 $2x(x-3)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^2-1\right)+\frac{2x-x^2}{6}=-\frac{1}{3}\left(17x+\frac{21}{2}\right)$ [impossibile]

270 $\dfrac{\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}}{\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{2x+1}{x-2}}+x=0$ $\left[\dfrac{-3\pm\sqrt{2}}{7}\right]$

271 $\dfrac{x-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-x}-\dfrac{x^2-6}{(\sqrt{3}-x)(3\sqrt{3}-x)}=\dfrac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}x-10)}{3\sqrt{3}-x}$ $[0; 6\sqrt{3}]$

272 $3+\dfrac{1-12x}{4x+6}+\dfrac{10x^2-25x-15}{4x^3-9x}=\dfrac{3}{9-4x^2}$ $\left[-\dfrac{15}{58}; 2\right]$

273 $\dfrac{\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{1}{2-x}}{\dfrac{2}{2-x}-\dfrac{2}{2+x}}-\dfrac{2x}{1+2x}=\dfrac{1-2x}{2x^2+x}$ [impossibile]

274 $\dfrac{8}{x-1}+\dfrac{2(11x-16)}{x^3-4x^2+5x-2}=\dfrac{6x+10}{x^2-3x+2}-\dfrac{6}{x^2-2x+1}$ $[3; -3]$

275 $2x+\dfrac{(x-3)^2}{2}-6+\dfrac{2}{3}(4x-5)=\dfrac{(1-x)(x+2)}{3}-\dfrac{1}{6}+2(x-1)$ $[\pm 2]$

276 $x+\dfrac{19}{25}+6\left(2+\dfrac{x}{5}\right)\left(\dfrac{1}{5}x-2\right)=4+2\left(\dfrac{x}{5}-6\right)-\dfrac{6}{25}+3\left(\dfrac{x}{5}-4\right)$ $\left[\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right]$

277 $\dfrac{(4-x)(x+5)}{6}-\dfrac{(2-x)(x+1)}{4}=\dfrac{(3-x)(x+2)}{8}-\dfrac{(x+1)(x+2)}{6}+\dfrac{83-x}{24}$ $\left[\pm\dfrac{5}{3}\right]$

278 $\dfrac{17x-34x^2}{9}+\left(\dfrac{1}{2}-2x\right)^2-\dfrac{1}{24}=x^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-x\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2$ [impossibile]

279 $\left(\dfrac{1}{4}-x\right)x^2+\left(\dfrac{1}{3}-2x\right)^2=\dfrac{3x+4+101x^2}{36}-x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ $\left[0; \dfrac{21}{8}\right]$

280 $\dfrac{x+3\sqrt{3}}{x-3\sqrt{3}}+\dfrac{x-3\sqrt{3}}{x+3\sqrt{3}}-1=\dfrac{\sqrt{3}(x+27\sqrt{3})+2(\sqrt{3}-x)}{x^2-27}$ $[\sqrt{3}; -2]$

Risolvi le seguenti equazioni riconducendole, con opportune sostituzioni, a equazioni di secondo grado.

281 $\left(\dfrac{x+1}{x-\sqrt{3}}\right)^2-2\sqrt{3}\left(\dfrac{x+1}{x-\sqrt{3}}\right)+2=0$ $\left(\text{poni } y=\dfrac{x+1}{x-\sqrt{3}}\right)$ $\left[\dfrac{4\sqrt{3}+3}{3}; \; -5-2\sqrt{3}\right]$

282 $\dfrac{x^2-4x+4}{(x+1)^2}+3\,\dfrac{x-2}{x+1}+2=0$ $\left(\text{poni } y=\dfrac{x-2}{x+1}\right)$ $\left[\dfrac{1}{2}; 0\right]$

283 $\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{(x^2-4)(x+2)}-7\,\dfrac{x-2}{x+2}=0$ $\left(\text{poni } y=\dfrac{x-2}{x+2}\right)$ $\left[-\dfrac{8}{3}; 2 \text{ non accett.}\right]$

284 $\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^2-\dfrac{2x+6}{x}=8$ $\left(\text{poni } y=\dfrac{x+3}{x}\right)$ $[-1; +1]$

285 $1+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{2\sqrt{5}}{x}-2\sqrt{5}\,\dfrac{(x+\sqrt{5})}{x^2}+\dfrac{(2\sqrt{3}+1)}{x^2}=0$ $[\sqrt{3}-1; 1-\sqrt{3}]$

286 $3\left(\dfrac{x-4}{3x+1}\right)^2-2\sqrt{3}\left(\dfrac{x-4}{3x+1}\right)-2=0$ $\left[\dfrac{-27+13\sqrt{3}}{3}; \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right]$

287 $\left(\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+3x^2-x-3}\right)^2 - \frac{4x+8}{x+3} - 5 = 0$ $\left[-\frac{13}{4}; -\frac{5}{2}\right]$

288 $\frac{(x-2)^2}{4x^2} - (\sqrt{5}+\sqrt{2})\frac{x-2}{x} + 4\sqrt{10} = 0$ $\left[-\frac{2(1+4\sqrt{5})}{79}; -\frac{2(1+4\sqrt{2})}{31}\right]$

289 Risolvi le seguenti equazioni utilizzando delle incognite ausiliarie:

a) $(x-2)^2 + 2(2-x) - 15 = 0$;

b) $(3x-1)^2 - 2(3x-1) + 2 = 0$;

c) $(x^2-2x)^2 - 3x(x-2) = 0$;

d) $x(x+1) - x^2(2x+1+x^2) + 2 = 0$.

[a) $-1, 7$; b) $\nexists x \in \mathbb{R}$; c) $-1, 0, 2, 3$; d) $1, -2$]

290 È data l'equazione $x^2 - 7x + 6 = 0$ nell'incognita x. Se è possibile, scrivi l'equazione nella forma $(x-h)^2 = k^2$ determinando i valori di h e k. $\left[h = \frac{7}{2}; k = \pm\frac{5}{2}\right]$

Le equazioni letterali

Nel sito: ▶ 13 esercizi di recupero

291 È data l'equazione $3x^2 - (5a-1)x + a^2 - 4 = 0$ nell'incognita x. Per quali valori di a l'equazione è:

a) pura?

b) monomia?

c) equivalente all'equazione $x^2 - 3x = 0$?

$\left[\text{a) } a = \frac{1}{5}; \text{b) } \nexists a \in \mathbb{R}; \text{c) } a = 2\right]$

292 Considera l'equazione $ax^2 + 3 = 0$ nell'incognita x. Determina per quali valori di a:

a) l'equazione ammette soluzioni reali.

b) le soluzioni sono $\pm\frac{1}{5}$.

c) le soluzioni sono $-3, 0$.

[a) $a < 0$; b) $a = -75$; c) $\nexists a \in \mathbb{R}$]

293 **TEST** Sulle due equazioni, nell'incognita x,

1. $ax^2 + bx = 0$, 2. $ax^2 + b = 0$,

con $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, puoi affermare che:

A 1 è pura e 2 è spuria.

B se $a \cdot b < 0$, l'insieme delle soluzioni di 2 è $S = \left\{-\sqrt{-\frac{b}{a}}, \sqrt{-\frac{b}{a}}\right\}$.

C 1 è determinata solo se a e b sono discordi.

D entrambe hanno come insieme delle soluzioni $S = \left\{-\frac{b}{a}, 0\right\}$.

E 1 e 2 sono equivalenti.

294 **TEST** L'equazione letterale $x^2 + ax - 2a^2 = 0$:

A ha due soluzioni reali e distinte per ogni $a \in \mathbb{R}$.

B è un'equazione spuria se $a = 0$.

C ha due soluzioni reali e coincidenti se $a = 0$.

D ha come soluzioni $x = -a$, $x = 2a$.

E è un'equazione di primo grado se $a = 0$.

295 **TEST** Date le equazioni, nell'incognita x,

1. $x^2 - 3a^2 = 0$, 2. $x^2 + 3a^2 = 0$,

con $a \neq 0$, quale delle seguenti affermazioni è *corretta*?

A 1 ha due soluzioni reali e opposte.

B 1 e 2 sono spurie.

C L'insieme delle soluzioni di 2 è $S = \{\pm\sqrt{3}a\}$.

D 1 e 2 sono equivalenti.

E 2 ha due soluzioni reali e coincidenti.

296 **TEST** Sull'equazione $ax^2 + ax - 6a = 0$ nell'incognita x, puoi affermare che:

A è indeterminata se $a = 0$.

B le soluzioni sono $+3a, -2a$.

C è equivalente all'equazione $x^2 + x - 6 = 0$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.

D è impossibile se $a \neq 0$.

E ammette due soluzione reali e coincidenti solo se $a > 0$.

ESERCIZIO GUIDA

297 Risolviamo le equazioni, nell'incognita x, eseguendo la discussione quando necessaria:

a) $2x^2 - ax - 3a^2 = 0$; b) $kx^2 - 2x(k+1) + 4 = 0$.

a) Scriviamo i coefficienti, indicandoli con lettere maiuscole per non fare confusione:

$A = 2$; $B = -a$; $C = -3a^2$.

Calcoliamo $\Delta = B^2 - 4AC$:

$\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3a^2) = a^2 + 24a^2 = 25a^2$.

Poiché $\Delta \geq 0$, l'equazione ha due soluzioni reali, che calcoliamo con la formula risolutiva:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{25a^2}}{2 \cdot 2} = \frac{a \pm 5a}{4} = \begin{cases} \dfrac{6a}{4} = \dfrac{3}{2}a \\[2mm] -\dfrac{4a}{4} = -a \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione sono $x_1 = \frac{3}{2}a$ e $x_2 = -a$. Esse sono distinte se $a \neq 0$, mentre sono coincidenti se $a = 0$ $(x_1 = x_2 = 0)$. Infatti, per $a = 0$, il discriminante si annulla.

b) Poiché il coefficiente di x^2 è letterale, esaminiamo due casi.

- Se $k = 0$, sostituendo nell'equazione otteniamo:

  $0 \cdot x^2 - 2x(0+1) + 4 = 0$, $\quad -2x + 4 = 0$, $\quad x = 2$.

- Se $k \neq 0$, calcoliamo il $\frac{\Delta}{4}$:

  $\frac{\Delta}{4} = (k+1)^2 - 4k = k^2 + 2k + 1 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$.

  Discutiamo i due casi: $\frac{\Delta}{4} \neq 0$, $\frac{\Delta}{4} = 0$.

  – Se $\frac{\Delta}{4} \neq 0$, ossia $k \neq 1$, l'equazione ha due soluzioni distinte:

$$x = \frac{k + 1 \pm (k-1)}{k} = \begin{cases} \dfrac{k + \cancel{1} + k - \cancel{1}}{k} = 2 \\[2mm] \dfrac{\cancel{k} + 1 - \cancel{k} + 1}{k} = \dfrac{2}{k} \end{cases}$$

  – Se $\frac{\Delta}{4} = 0$, ossia $k = 1$, l'equazione ha due soluzioni coincidenti.

  $x_1 = x_2 = \frac{k+1}{k} = \frac{1+1}{1} = 2$.

In sintesi:

- se $k = 0$, l'equazione ha una sola soluzione: $x = 2$;
- se $k = 1$, l'equazione ha due soluzioni coincidenti: $x_1 = x_2 = 2$;
- se $k \neq 0 \wedge k \neq 1$, l'equazione ha due soluzioni distinte: $x_1 = 2$ e $x_2 = \frac{2}{k}$.

298 Considera l'equazione, nell'incognita x, $ax^2 + (1-a)x = 1$. Discuti e trova le soluzioni quando a assume i seguenti valori: $a = 0$, $a = -1$, $a = \sqrt{3} - 1$, $a = 2$, $a = \sqrt{2}$.

$\left[1;\ 1 \text{ doppia};\ -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1), 1;\ -\frac{1}{2}, 1;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

Risolvi le seguenti equazioni nell'incognita x eseguendo la discussione quando è necessaria.

299 $x^2 + xb - 6b^2 = 0$ $[-3b; 2b]$

300 $x^2 - kx - 20k^2 = 0$ $[-4k; 5k]$

301 $x^2 + kx + k^2 = 0$ $[k = 0\text{: } 0 \text{ doppia}; k \neq 0\text{: impossibile}]$

302 $5a^2x^2 - 20a^3x = 0$ $[a = 0\text{: indet.}; a \neq 0\text{: } 0, 4a]$

303 $2x^2 - 11ax + 14a^2 = 0$ $\left[2a; \frac{7}{2}a\right]$

304 $5mx^2 = 0$ $[m = 0\text{: indet.}; m \neq 0\text{: } 0 \text{ doppia}]$

305 $x^2 - 2ax - 2x = 0$ $[0; 2(a+1)]$

306 $x^2 - 10ax + 25a^2 = 0$ $[5a \text{ doppia}]$

307 $2kx^2 + kx - x = 0$ $\left[k = 0\text{: } 0; k \neq 0\text{: } 0, \frac{1-k}{2k}\right]$

308 $-4x^2 - 12ax - 9a^2 = 0$ $\left[-\frac{3}{2}a \text{ doppia}\right]$

309 $x^2 - 12kx + 36k^2 = 0$ $[6k \text{ doppia}]$

310 $x^2 + 3k^2 = 0$ $[k = 0\text{: } 0 \text{ doppia}; k \neq 0\text{: impossibile}]$

311 $\frac{2}{9}a^2 + \frac{a}{3}x - x^2 = 0$ $\left[-\frac{a}{3}; \frac{2}{3}a\right]$

312 $x^2 - 2kx - 3k^2 = 0$ $[-k; 3k]$

313 $4ax^2 - a^3 = 0$ $\left[a = 0\text{: indet.}; a \neq 0\text{: } \pm\frac{a}{2}\right]$

314 $(a-2)x^2 = 0$ $[a = 2\text{: indet.}; a \neq 2\text{: } 0 \text{ doppia}]$

315 $\frac{b^2}{6} - \frac{5bx}{6} + x^2 = 0$ $\left[\frac{b}{3}; \frac{b}{2}\right]$

316 $2a\sqrt{2}x^2 = 0$ $[a = 0\text{: indet.}; a \neq 0\text{: } 0 \text{ doppia}]$

317 $2x^2 - 4bx + 3b^2 = 0$ $[b \neq 0\text{: impossibile}; b = 0\text{: } 0 \text{ doppia}]$

318 $3x^2 - 8ax + 4a^2 = 0$ $\left[\frac{2}{3}a; 2a\right]$

319 $36x^2 + 6ax = 0$ $\left[0; -\frac{a}{6}\right]$

320 $2a^2 - ax - x^2 = 0$ $[a; -2a]$

321 $x^2 + 8a^2x + 15a^4 = 0$ $[-3a^2; -5a^2]$

322 $k^2 - x^2 - 6k + 9 = 0$ $[\pm(k-3)]$

323 $a^2x^2 - 3ax + 2 = 0$ $\left[a = 0\text{: impossibile; } a \neq 0\text{: } \frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right]$

324 $5k^2x^2 - 125k^3 = 0$ $[k = 0\text{: indet.; } k > 0\text{: } \pm 5\sqrt{k}\text{; } k < 0\text{: impossibile}]$

325 $x^2 + 3ax - 1 - 3a = 0$ $\left[a \neq -\frac{2}{3}\text{: } 1, -(3a+1)\text{; } a = -\frac{2}{3}\text{: 1 doppia}\right]$

326 $6b^2x^2 - 3bx = 0$ $\left[b = 0\text{: indet.; } b \neq 0\text{: } 0, \frac{1}{2b}\right]$

327 $4ax^2 = 0$ $[a = 0\text{: indet.; } a \neq 0\text{: 0 doppia}]$

328 $k^2x^2 - kx - 6 = 0$ $\left[k = 0\text{: impossibile; } k \neq 0\text{: } -\frac{2}{k}, \frac{3}{k}\right]$

329 $bx^2 + 9 - x^2 - 9b = 0$ $[b = 1\text{: indet.; } b \neq 1\text{: } \pm 3]$

330 $ax^2 - (a-6)x - 6 = 0$ $\left[a = 0\text{: } 1\text{; } a \neq 0\text{: } 1, -\frac{6}{a}\right]$

331 $a^2x^2 - 2ax + a^2x + 1 - a = 0$ $\left[a = 0\text{: impossibile; } a \neq 0\text{: } \frac{1}{a}, \frac{1-a}{a}\right]$

332 $9x^2 + a^2 = 0$ $[a \neq 0\text{: impossibile; } a = 0\text{: 0 doppia}]$

333 $3ax^2 - 12a^3x = 0$ $[a = 0\text{: indet.; } a \neq 0\text{: } 0, 4a^2]$

334 $3x^2 + 5ax = 0$ $\left[0;\ -\frac{5a}{3}\right]$

335 $bx^2 - b^3 = 0$ $[b = 0\text{: indet.; } b \neq 0\text{: } \pm b]$

336 $5bx^2 + 2bx + b = 0$ $[b = 0\text{: indet.; } b \neq 0\text{: impossibile}]$

337 $2x^2 + 2kx + 5(k + x) = 0$ $\left[-k;\ -\frac{5}{2}\right]$

338 $2x^2 + 4ax + 3x + 6a = 0$ $\left[-2a;\ -\frac{3}{2}\right]$

339 $x^2 - 6a(x-4) + 8(2-x) + 9a^2 = 0$ $[3a + 4\text{ doppia}]$

340 $a^2x(x-1) = 9x - 9$ $\left[a = 0\text{: } 1\text{; } a \neq 0\text{: } 1, \frac{9}{a^2}\right]$

341 $ax(x+1) - x(x+a) = 4a - 4$ $[a = 1\text{: indet.; } a \neq 1\text{: } \pm 2]$

342 $ax^2 - (a-1)x - 1 = 0$ $\left[a = 0\text{: } 1\text{; } a \neq 0\text{: } 1, -\frac{1}{a}\right]$

343 $4(x^2 - 2) = a - x^2(a + 4)$ $[a = -8\text{: indet.; } a \neq -8\text{: } \pm 1]$

344 $ax(x+a) = -2x(x-2)$ $[a=-2\text{: indet.; } a \neq -2\text{: } 0, -a+2]$

345 $x(x-1) - a(x-a) = a(x-1) + 2$ $[a+2;\ a-1]$

346 $ax^2 + (a-1)(a+1)(x+2) = x(a^2-1) - 2 + 2a^2$ $[a=0\text{: indet.; } a \neq 0\text{: 0 doppia}]$

347 $\dfrac{(x-7a)x}{6} - 5a^2 = \dfrac{ax}{6} - \dfrac{x(4a+x)}{3}$ $[\pm a\sqrt{10}]$

348 $(x-3a)(x+3a) - (x^2+4a^2) + ax = x^2 - 13a^2$ $[0; a]$

349 $\dfrac{1}{3}x^2 - 2a^2 = \dfrac{8}{3}ax - 10a^2 + (2a-x)(4a+x)$ $\left[0; \dfrac{a}{2}\right]$

350 $x^2(a+1) + 2a^2 = ax(x+3)$ $[a; 2a]$

351 $a\left(\dfrac{3a-2x}{4} - \dfrac{x+a}{2}\right) + ax = (a-x)(x+a)$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2a}\right]$

352 $x(x-3a) = 2x(a-1) + x(a+1)$ $[0; 6a-1]$

353 $x^2 - (2b+1)x + b^2 + b = 0$ $[b; b+1]$

354 $(2a+3)x^2 - x = 0$ $\left[a = -\dfrac{3}{2}\text{: } 0;\ a \neq -\dfrac{3}{2}\text{: } 0, \dfrac{1}{2a+3}\right]$

355 $x^2 - 6kx + 9k^2 = 0$ $[3k\text{ doppia}]$

356 $(1+x)(1-bx) + (1-x)(1+bx) = 2x^2(1+b+b^2)$ $\left[b \neq -1\text{: } \pm\dfrac{1}{1+b};\ b=-1\text{: imp.}\right]$

357 $x^2 - \left(\dfrac{2}{a} - 3\right)x - \dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{a^2} + 2 = 0$ $\left[a=0\text{: priva di signif.; } a \neq 0\text{: } -\dfrac{2a-1}{a}, \dfrac{1-a}{a}\right]$

358 $x^2 - \dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{x-2a}{a} = x\left(2x - \dfrac{1}{a}\right)$ $\left[a=0\text{: priva di signif.; } a \neq 0\text{: } -\dfrac{5}{3}, 1\right]$

359 $\dfrac{x^2}{a^2} = x - \dfrac{x}{a}$ $[a=0\text{: priva di signif.; } a \neq 0\text{: } 0, a^2-a]$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E40

360 $\dfrac{(a-2)x^2}{a^2-4a} + \dfrac{x}{a} = \dfrac{2}{a-4}$

361 $\dfrac{x}{3-a} - \dfrac{2}{a-3} = \dfrac{x^2-ax-12}{a^2-9} + \dfrac{x-2}{a+3}$ $[a=\pm 3\text{: priva di signif.; } a \neq \pm 3\text{: } 0, -a]$

362 $\dfrac{2x}{a-3x} + \dfrac{a-3x}{2x} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{2a^2-11ax+4x^2}{6x^2-2ax}$ $\left[a=0\text{: 0 non accett.; } a \neq 0\text{: } \dfrac{3a}{16}, \dfrac{a}{2}\right]$

363 $k^2(x+1) + 1 = \dfrac{x+2kx-k^2}{x-1}$ $\left[k=0\text{: imp.; } k \neq 0 \wedge k \neq 1 \pm \sqrt{2}\text{: } \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{k}\right]$

364 $\dfrac{x-a}{x-1} + \dfrac{x-1}{x-a} = \dfrac{1+a^2}{a}$ $[a=0\text{: priva di signif.; } a \neq 0 \wedge a \neq 1\text{: } 0, a+1;\ a=1\text{: indet.}]$

365 $2x - b + \frac{6bx + b^2}{x} = \frac{3b^2}{x} + 2b$ $\left[b = 0\text{: } 0 \text{ non accett.}; b \neq 0\text{: } \frac{b}{2}, -2b\right]$

366 $\frac{(x^2 + k)k}{x} - 2k = \frac{k}{x}(k - 2x)$ $[k = 0\text{: indet.}; k \neq 0\text{: imp.}]$

367 $\frac{x - 3a}{2x + a} + \frac{2x}{2x - a} = 2 - \frac{2x^2 - 5ax + 4a^2}{a^2 - 4x^2}$ [impossibile]

368 $\frac{x + b}{x - b} + 2 - \frac{3b}{4(x + b)} = \frac{4b^2 - bx - 11x^2}{4b^2 - 4x^2}$ $[b = 0\text{: imp.}; b \neq 0\text{: } -b \text{ non accett.}, -3b]$

369 $\frac{x(x - 2) + b(2 - x)}{2b^2 - 2x^2} = \frac{1}{b + x}$ $[b = 0\text{: impossibile}; b \neq 0\text{: } 0, b \text{ non accettabile}]$

370 $\frac{x}{k} - \frac{2}{x} = \frac{k(k - 2)}{kx}$ $[k = 0\text{: priva di signif.}; k \neq 0\text{: } \pm k]$

371 $\frac{a^2}{a^2 - x^2} - \frac{2x}{x - a} = \frac{a}{x + a}$ $\left[a = 0\text{: impossibile}; a \neq 0\text{: } 0, -\frac{3}{2}a\right]$

372 $\frac{3b}{x + b} + \frac{x}{x - b} = \frac{4bx - 3b^2}{x^2 - b^2}$ $[b = 0\text{: impossibile}; b \neq 0\text{: } 0 \text{ doppia}]$

373 $\frac{x - a}{x + a} + \frac{x + a}{x - a} = \frac{ax + 3a^2}{x^2 - a^2}$ $\left[a = 0\text{: impossibile}; a \neq 0\text{: } -\frac{a}{2}\right]$

374 $\frac{x + b}{x - b} + \frac{x - 2b}{x + b} = \frac{2}{3} + \frac{bx + 11b^2}{3x^2 - 3b^2}$ $[b = 0\text{: impossibile}; b \neq 0\text{: } 0, b \text{ non accettabile}]$

375 $2m\left(\frac{3}{x - m} + \frac{1}{x + 2m}\right) : \frac{x + m}{x + 2m} = \frac{8mx - x^2 + 11m^2}{x^2 - m^2}$ [impossibile]

376 $\left(\frac{a - x}{x + a} + \frac{x + a}{a - x}\right) : \left(1 - \frac{a - x}{x + a}\right) = -\frac{13}{10}$ $\left[a = 0\text{: impossibile}; a \neq 0\text{: } -\frac{2}{3}a, 5a\right]$

377 $\left[\left(\frac{b - x}{b + 2x} - \frac{3b + x}{x - b}\right) : \frac{3x^2 + 4b^2 + 5bx}{2x + b}\right](x + 2b) + \frac{2b^2}{x^2 - b^2} = \frac{2x^2}{b^2 - x^2}$ $[0; 3b]$

378 $16k^2 - 8k + 4kx^2 + (1 - x^2) = 0$ $\left[k = \frac{1}{4}\text{: indet.}; k > \frac{1}{4}\text{: imp.}; k < \frac{1}{4}\text{: } \pm\sqrt{1 - 4k}\right]$

379 $kx^2 - 2x + 2 - k = 0$ $\left[k = 0\text{: } 1; k \neq 0 \wedge k \neq 1\text{: } 1, \frac{2 - k}{k}; k = 1\text{: } 1 \text{ doppia}\right]$

380 $bx^2 - 2(b - 3)x + (6 - 3b) = 0$ $\left[b = 0\text{: } -1; b \neq 0 \wedge b \neq \frac{3}{2}\text{: } \frac{3b - 6}{b}, -1; b = \frac{3}{2}\text{: } -1 \text{ doppia}\right]$

381 $2a^2x^2 - (7a^2 - a)x + 3a^2 + 2a - 1 = 0$ $\left[a = 0\text{: imp.}; a \neq 0 \wedge a \neq \frac{3}{5}\text{: } \frac{3a - 1}{a}, \frac{a + 1}{2a}; a = \frac{3}{5}\text{: } \frac{4}{3} \text{ doppia}\right]$

382 $2ax^2 - 2(2a + 3)x - (6a - 18) = 0$ $\left[a = 0\text{: } 3; a = \frac{3}{4}\text{: } 3 \text{ doppia}; a \neq 0 \wedge a \neq \frac{3}{4}\text{: } 3, \frac{3 - a}{a}\right]$

383 $kx^2 - x(1 + k^2) + k = 0$ $\left[k = 0\text{: } 0; k \neq 0 \wedge k \neq \pm 1\text{: } k, \frac{1}{k}; k = 1\text{: } 1 \text{ doppia}; k = -1\text{: } -1 \text{ doppia}\right]$

384 $-16k^2+8k+4kx^2-1-x^2=0$ $\left[k=\frac{1}{4}\text{: indet.}; k>\frac{1}{4}: \pm\sqrt{4k-1}; k<\frac{1}{4}\text{: imp.}\right]$

385 $\frac{a(x^2+1)}{a+1}-2x=0$ $\left[a=-1\text{: priva di signif.}; a=0: 0;\right.$ $\left. a\neq 0 \wedge a\geq -\frac{1}{2}: \frac{a+1\pm\sqrt{1+2a}}{a}; a<-\frac{1}{2}\text{: imp.}\right]$

386 $\frac{x^2}{a^2}=x^2-\frac{2x}{a^2}$ $\left[a=0\text{: priva di signif.}; a=1 \vee a=-1: 0; a\neq 0\wedge a\neq\pm 1: 0, \frac{2}{a^2-1}\right]$

387 $\frac{x^2+ax}{a^2-3a+2}+\frac{x}{a-2}=\frac{2x}{a-1}$ $[a=2\vee a=1\text{: priva di signif.}; a\neq 2\wedge a\neq 1: 0, -3]$

388 $\frac{(3-x)(a+2)}{a}+1-\frac{6}{x}=-1$ $\left[a=0\text{: priva di signif.}; a\neq 0 \wedge a\neq -2: 3, \frac{2a}{a+2}; a=-2: 3\right]$

389 $\frac{x^2}{b}=1-\frac{(1-x)(x+1)}{2b^2}-\frac{(x+b)(b-x)}{2}$

$[b=0\text{: priva di signif.}; b\neq 0 \wedge b\neq 1: \pm(b+1); b=1\text{: indet.}]$

390 $\frac{(x-1)(x+1)+x-2a}{2ax}-1=\frac{1}{2a}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2ax}$ $[a=0\text{: priva di signif.}; a\neq 0: 0 \text{ non accett.}, 2a]$

391 $\frac{3x(x-k^2)}{kx-k^3}=\frac{2x}{k}+\frac{k(4-x)}{x-k^2}$ $[k=0\text{: priva di signif.}; k=\pm 2: -4, +4 \text{ non accettabile}; k\neq 0\wedge k\neq\pm 2: \pm 2k]$

392 $\frac{1}{x}+\frac{x}{x-k}=\frac{x-1}{x^2-kx}$ $[k<1\text{: impossibile}; k=1: 0 \text{ non accettabile}; k>1: \pm\sqrt{k-1}]$

393 $\frac{2a}{x-\sqrt{2}}+\frac{ax}{x+\sqrt{2}}+a\frac{x^2+2\sqrt{2}}{2-x^2}=\frac{\sqrt{2}x(\sqrt{2}a-a)}{x^2-2}$ $[\text{indeterminata se } x\neq\pm\sqrt{2}]$

394 $\frac{k(1-kx)}{k^2x^2-1}-\frac{2x}{kx+1}=\frac{k}{kx-1}$ $\left[k=0: 0; k=\pm\sqrt{2}: 0, \frac{1-k^2}{k} \text{ non accett.}; k\neq 0\wedge k\neq\pm\sqrt{2}: 0, \frac{1-k^2}{k}\right]$

395 È data l'equazione $2ax^2+(a^2-6)x-3a=0$ nell'incognita x.

a) Per quali valori di a l'equazione ammette una sola soluzione?
b) Per quali valori di a l'equazione ammette due soluzione reali e coincidenti?
c) Se $a\neq 0$, quali sono le soluzioni dell'equazione?

$\left[\text{a) } a=0; \text{ b) } \nexists a\in\mathbb{R}; \text{ c) } -\frac{a}{2}, \frac{3}{a}\right]$

396 Considera l'equazione $\frac{2a}{x^2-a}=\frac{x}{x-1}$ nell'incognita x.

a) Per quali valori di a le condizioni di esistenza dell'equazione sono $x\neq 1 \wedge x\neq\pm 2\sqrt{3}$?
b) Per quali valori di a il m.c.m. dei denominatori è un polinomio di secondo grado?
c) Quali sono le soluzioni dell'equazione se $a=1$? $[\text{a) } a=12; \text{ b) } a=1; \text{ c) } -2, 1 \text{ non accettabile}]$

397 È data l'equazione $(x-2)(3x-1)=a$ nell'incognita x. Determina per quali valori di a:

a) è possibile trovare le soluzioni risolvendo le equazioni $x-2=a$, $3x-1=a$.

b) l'equazione non ha soluzioni reali.

c) una soluzione è 4. $\left[\text{a) } a=0; \text{ b) } a<-\frac{25}{12}; \text{ c) } a=22\right]$

Equazioni con due lettere

ESERCIZIO GUIDA

398 Risolviamo la seguente equazione nell'incognita x: $abx^2-(2ab+1)x+2=0$.

Il coefficiente di x^2 è $a\cdot b$, quindi dovremo discutere entrambe le lettere a e b.

- Se $a\cdot b=0$, può risultare $a=0$ oppure $b=0$. In entrambi i casi risulta: $0\cdot x^2-(0+1)x+2=0$, ossia $-x+2=0$, da cui $x=2$.
- Se $a\cdot b\neq 0$, ossia $a\neq 0 \wedge b\neq 0$, calcoliamo il Δ:

  $\Delta=(2ab+1)^2-8ab=4a^2b^2+1+4ab-8ab=4a^2b^2+1-4ab=(2ab-1)^2$. Si ha:

  $\Delta=0$ se $2ab-1=0$, ossia se $ab=\frac{1}{2}$; $\Delta>0$ se $ab\neq\frac{1}{2}$.
- Se $ab\neq\frac{1}{2}$, le due soluzioni sono:

$$x_{1,2}=\frac{2ab+1\pm(2ab-1)}{2ab}= \begin{cases} \dfrac{2ab+\cancel{1}+2ab-\cancel{1}}{2ab}=2 \\[2ex] \dfrac{\cancel{2ab}+1-\cancel{2ab}+1}{2ab}=\dfrac{1}{ab} \end{cases}$$

- Se $ab=\frac{1}{2}$, le due soluzioni sono coincidenti:

  $x_1=x_2=2$.

In sintesi:

- se $a=0 \vee b=0$, l'equazione ha una sola soluzione: $x=2$;
- se $a\cdot b=\frac{1}{2}$, l'equazione ha due soluzioni coincidenti: $x_1=x_2=2$;
- se $a\neq 0 \wedge b\neq 0 \wedge a\cdot b\neq\frac{1}{2}$, l'equazione ha due soluzioni: $x_1=2$ e $x_2=\frac{1}{ab}$.

Risolvi le seguenti equazioni nell'incognita x, eseguendo la discussione quando è necessaria.

399 $4b^2x^2+2abx=0$ $\left[b=0\text{: indet.}; b\neq 0\text{: } 0, -\frac{a}{2b}\right]$

400 $2ax^2+5bx=0$ $\left[a=0\wedge b=0\text{: indet.}; a=0\wedge b\neq 0\text{: } 0; a\neq 0\text{: } 0, -\frac{5b}{2a}\right]$

401 $ax^2=(a+b)x$ $\left[a=0\wedge b=0\text{: indet.}; a=0\wedge b\neq 0\text{: } 0; a\neq 0\text{: } 0, \frac{a+b}{a}\right]$

402 $ax(x+1)=bx^2$ $\left[a=b=0\text{: indet.}; a=b\neq 0\text{: } 0; a\neq b\text{: } 0, \frac{a}{b-a}\right]$

403 $ax^2 - (a - 3b)x - 3b = 0$ $\left[a = 0 \wedge b = 0\text{: indet.; } a = 0 \wedge b \neq 0\text{: } 1\text{; } a \neq 0\text{: } 1, -\frac{3b}{a}\right]$

404 $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ $[b = 0\text{: } a \text{ doppia; } b \neq 0\text{: } a + b, a - b]$

405 $x^2 + ab\left(\frac{x}{6} - ab\right) + \frac{2abx}{3} = 0$ $\left[a = 0 \vee b = 0\text{: 0 doppia; } a \neq 0 \wedge b \neq 0\text{: } -\frac{3ab}{2}, \frac{2ab}{3}\right]$

406 $2a^2b^2 + abx - x^2 = 0$ $[-ab, 2ab]$

407 $ax(x + a) = bx(x + b)$ $[a = b\text{: indet.; } a \neq b\text{: } 0, -a - b]$

408 $\frac{ax + b}{a} - 2 = \frac{x(x - 2)}{2b} + \frac{b}{a}$, con $a \neq 0$; $b \neq 0$. $[2, 2b]$

409 $\frac{a + 2b}{x + b} - \frac{2abx + 4ab^2 + 4b^3}{x^3 - b^2x} = \frac{4(a + b)}{x} + \frac{3a}{b - x}$ $[b \neq 0\text{: impossibile; } b = 0\text{: } \forall x \in \mathbb{R} - \{0, \pm b\}]$

410 $\frac{x - a^2}{x - b^2}x = \left(\frac{x}{a}\right)^2 \frac{b^2}{x}$

$[a = 0\text{: priva di signif.; } a \neq 0 \;\wedge\; a = \pm b\text{: indet.; } a \neq 0 \;\wedge\; a \neq \pm b\text{: 0 non accettabile, } a^2 + b^2]$

411 $abx^2 - (1 + ab)x + 1 = 0$ $\left[a = 0 \vee b = 0\text{: } 1\text{; } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge ab \neq 1\text{: } 1, \frac{1}{ab}\text{; } ab = 1\text{: 1 doppia}\right]$

412 $mnx^2 - (m^2 - n^2)x - mn = 0$

$\left[m = 0 \wedge n = 0\text{: indet.; } m = 0 \wedge n \neq 0 : 0\text{; } m \neq 0 \wedge n = 0 : 0\text{; } m \neq 0 \wedge n \neq 0\text{: } \frac{m}{n}, -\frac{n}{m}\right]$

413 $\frac{2a + b}{a + x} - \frac{2a}{b} = \frac{2a - b}{a - x} - \frac{2a^3 - 2ab^2}{a^2b - bx^2}$ $\Big[b = 0\text{: priva di signif.; } a \neq 0 \;\wedge\; b = \pm\frac{a}{2}\text{: } 0, 2b \text{ non accettabile;}$

$a \neq 0 \;\wedge\; b \neq 0 \;\wedge\; b \neq \pm\frac{a}{2}\text{: } 0, 2b\text{; } a = 0 \;\wedge\; b \neq 0\text{: indet.}\Big]$

414 $\frac{x + 3a}{x - a} - \frac{x}{a + b} = \frac{bx + 3ab}{ax + bx - a^2 - ab}$

$[a = -b\text{: priva di signif.; } a \neq -b \;\wedge\; a = 0\text{: 0 non accett.; } a \neq -b \;\wedge\; a \neq 0\text{: } -a, 3a]$

415 Considera l'equazione $2x^2 - 3ax + a^2 = b^2 - bx$ nell'incognita x.

a) In quali casi l'equazione ha due soluzioni reali e distinte?
b) Se $a = 1$, per quali valori di b l'equazione è spuria?
c) Se $a \neq 3b$, quali sono le soluzioni dell'equazione?

$\left[\text{a) } a \neq 3b\text{; b) } b = \pm 1\text{; c) } a - b, \frac{a + b}{2}\right]$

Nel sito: ▶ teoria e 53 esercizi su I numeri complessi e le equazioni di secondo grado

I problemi di secondo grado

Problemi di geometria

Nel sito: ▶ 20 esercizi in più ▶ 13 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

416 Vogliamo piantare 21 bulbi di tulipano in un'aiuola rettangolare. Per disporli in file uguali e con la condizione che il numero dei bulbi in ogni fila superi di 4 il numero delle file, quante file di bulbi dobbiamo piantare?

1. I risultati
È richiesto il numero di file.

2. L'incognita
Poniamo x = numero di file.

3. Le relazioni
Il numero totale di bulbi è 21; i bulbi su ogni fila sono $x + 4$.
Pertanto il numero totale di bulbi è $x(x + 4)$.

4. L'equazione risolvente

$$x(x + 4) = 21.$$

Le **condizioni** sono: $x \geq 0$, poiché non è pensabile un numero negativo di file.

5. La risoluzione

$$x(x + 4) = 21$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 21 = 25$$

$$x = -2 \pm \sqrt{25} = \begin{cases} -2 + 5 = 3 \\ -2 - 5 = -7 \text{ non accettabile} \end{cases}$$

6. La risposta
Dobbiamo piantare i bulbi su 3 file.

417 Determina le lunghezze dei due lati di un rettangolo di area 15 cm^2 e perimetro 16 cm. [3 cm; 5 cm]

418 Dato un segmento AB di lunghezza 9 cm, determina su di esso un punto P, tale che AP sia medio proporzionale tra l'intero segmento e la parte restante aumentata di 1 cm. [$AP = 6$ cm]

419 Un quadrato ha perimetro 24 cm. Un rettangolo ha lo stesso perimetro, mentre l'area è pari ai $\frac{3}{4}$ di quella del quadrato. Determina le dimensioni del rettangolo. [3 cm; 9 cm]

BRAVI SI DIVENTA ▶ E42

420 Un trapezio rettangolo $ABCD$ è circoscritto a una semicirconferenza di diametro $AD = 24$ cm. Il punto P di tangenza divide il lato obliquo CB in due parti CP e PB tali che $CP + \frac{1}{2}PB = 17$ cm. Trova l'area del trapezio.

421 Un rettangolo di area 20 cm^2 ha l'altezza minore della base di 1 cm. Calcola il perimetro del rettangolo. [18 cm]

422 Un rettangolo ha le dimensioni di 5 cm e 2 cm. Vogliamo incrementare la base e l'altezza di una stessa quantità in modo da ottenere un secondo rettangolo che abbia l'area di 70 cm^2. Determina tale quantità. [5 cm]

423 In un triangolo isoscele base e altezza stanno tra loro come 3 sta a 2, e il perimetro è 16 cm. Determina l'area. [12 cm^2]

424 Un segmento è suddiviso in due parti, delle quali una risulta 5 cm più lunga dell'altra. Il prodotto tra le misure dei due segmenti componenti è 6 volte la misura dell'intero segmento. Determina la lunghezza del segmento di partenza e quella delle due parti nelle quali esso risulta suddiviso. [25 cm; 15 cm; 10 cm]

425 In un triangolo rettangolo, un cateto misura 7 cm in più dell'altro cateto e l'ipotenusa 14 cm in meno della somma dei due cateti. Determina il perimetro del triangolo. [84 cm]

426 In un rettangolo il lato maggiore aumentato di 10 cm è uguale al doppio del minore e la differenza dei quadrati dei due lati è 52 cm^2. Determina l'area del rettangolo. [168 cm^2]

427 L'area di un triangolo rettangolo è di 80 cm^2. Determina l'ipotenusa, sapendo che un cateto diminuito di 4 cm è pari al doppio dell'altro cateto. [$4\sqrt{29}$ cm]

428 L'area di un triangolo rettangolo è di 120 cm^2. Determina l'ipotenusa, sapendo che un cateto è pari alla metà dell'altro cateto aumentata di 2 cm. [$4\sqrt{34}$ cm]

429 Un rettangolo è equivalente a un quadrato di lato 8 cm. Determina il perimetro del rettangolo, sapendo che la differenza fra il doppio della base e la metà dell'altezza è 16 cm. [$8(5\sqrt{2}-3)$ cm]

430 Un rettangolo ha area di 40 cm^2 e i suoi lati sono lunghi uno 3 cm in più dell'altro. Se si allungano entrambi i lati della stessa misura, si ottiene un rettangolo la cui area è 30 cm^2 in più dell'area del rettangolo iniziale. Determina il perimetro del nuovo rettangolo. [34 cm]

431 In un triangolo rettangolo, delle due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, la maggiore è pari al doppio della minore diminuito di 4 cm, mentre l'altezza relativa all'ipotenusa supera di 10 cm la differenza delle due proiezioni. Determina l'area del triangolo. [600 cm^2]

432 Determina il perimetro di un triangolo rettangolo avente l'ipotenusa di 25 cm e l'area di 150 cm^2. [60 cm]

433 In un trapezio rettangolo la base minore è lunga 4 cm in meno della maggiore e 1 cm in meno dell'altezza. Determina il perimetro del trapezio, sapendo che la sua area è di 12 cm^2. [16 cm]

434 Considera un quadrato $ABCD$ di area 144 cm^2 e determina sul lato CD un punto P tale che $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 378$. [$PC = 3$ cm, oppure $PC = 9$ cm]

435 In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 9 cm in meno dell'ipotenusa e l'altro cateto è i $\frac{3}{4}$ del primo. Determina l'area del triangolo. [486 cm^2]

436 Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza di diametro 70 cm. La base minore supera di 14 cm il doppio dell'altezza. Determina l'area del trapezio. [1323 cm^2]

437 Un'antenna di 9 m è posta perpendicolarmente al pavimento di un terrazzo. Un forte vento la spezza in modo tale che la cima dell'antenna tocca il pavimento a 3 m dalla base della stessa. A quale altezza si è prodotta la rottura? [4 m]

438 In un quadrato di area 49 cm^2 è inscritto un quadrato di area 25 cm^2. Determina il perimetro di ciascuno dei triangoli individuati dal quadrato inscritto nel quadrato più grande. [12 cm]

439 Per abbellire una coperta rettangolare che ha la superficie di 5,72 m^2 viene cucito sui quattro lati un pizzo lungo 9,6 m. Quali sono le dimensioni della coperta? [2,2 m; 2,6 m]

440 La differenza tra i cateti di un triangolo rettangolo è 14 cm. L'ipotenusa è lunga 26 cm. Trova le lunghezze dei cateti. [24 cm; 10 cm]

441 Andrea ha incollato la foto del suo gruppo musicale preferito su un pannello. La foto, che ha area uguale a 360 cm^2, è di forma rettangolare, come il pannello che ha il perimetro di 438 cm e l'altezza di 105 cm. Determina le dimensioni della foto, sapendo che è stata incollata con i lati equidistanti da quelli del pannello. [15 cm; 24 cm]

442 Dato un segmento AB di lunghezza 17 cm, determina su di esso un punto P che lo divida in parti tali che il rettangolo avente per dimensioni le loro lunghezze abbia area 72 cm^2. [$AP = 9$ cm; $PB = 8$ cm]

443 L'area di un rombo è di 24 cm^2 e una diagonale è più lunga dell'altra di 2 cm. Determina il perimetro del rombo. [20 cm]

444 Su una semicirconferenza di diametro $AB = 12$ cm, determina un punto P tale che, detta H la sua proiezione su AB, risulti: $\overline{PH}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 176$. [$AH = 4$ cm, oppure $AH = 8$ cm]

445 Calcola l'area di un quadrato avente lo stesso perimetro di un rettangolo, sapendo che l'area di questo misura 225 cm^2 e la base è uguale al triplo dell'altezza diminuito di 2 cm. [289 cm^2]

446 In un triangolo rettangolo la differenza delle misure dei cateti è 8 cm e l'ipotenusa supera di 16 cm il cateto minore. Calcola il perimetro del triangolo. [96 cm]

447 Il punto C divide il segmento AB in due parti tali che $AC < BC$; inoltre il doppio della parte minore AC è 2 cm in più di BC e il prodotto delle loro misure supera di 3 cm^2 il quadrato di AC. Tracciata per B la perpendicolare ad AB, determina su di essa un punto P tale che $\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PA}^2 = 92$. [$PB = 3$ cm]

448 In un triangolo isoscele la base supera di 3 cm il lato obliquo e l'altezza è 12 cm. Determina il perimetro. [48 cm]

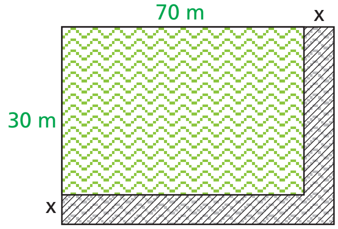
449 In un rettangolo la base supera di 4 cm il triplo dell'altezza e l'area è di 480 cm^2. Trova le dimensioni del rettangolo. [40 cm; 12 cm]

450 Disegna il triangolo ABC rettangolo in A, prolunga AC di un segmento CD tale che $AD = 32a$. Prolunga l'ipotenusa BC di un segmento CE tale che CED sia un triangolo rettangolo in D e che $ED = 45a$. Sapendo che AB supera AC di $7a$, determina il perimetro dei due triangoli. [$40a$; $120a$]

451 Nel quadrato $ABCD$ di lato 12 cm trova su AD il punto P tale che:

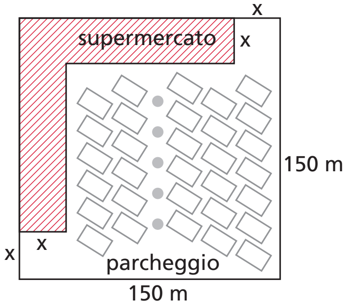
$$2\overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = 528.$$ [$PD = 4$ cm]

452



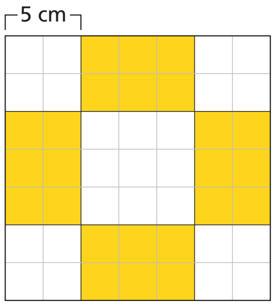
Il proprietario di un terreno deve cederne una parte (vedi figura) uguale a 416 m^2 per la costruzione di una strada. Calcola la larghezza x della strada sapendo che il terreno rimasto ha i lati lunghi 30 m e 70 m. [$x = 4$ m]

453



Si deve costruire un supermercato con il relativo parcheggio che ha la piantina in figura. Supposto che x sia minore della metà del lato del quadrato, come deve essere lungo x affinché il parcheggio occupi una superficie complessiva di 19 332 m^2? [$x = 12$ m]

454



L'area colorata in giallo vale 156 cm^2. Qual è la lunghezza del lato del quadrato grande?
Risolvi il problema in due modi, ponendo dapprima x uguale alla misura del lato del quadrato centrale e poi x uguale a quella del lato del quadrato grande. [17,8 cm]

455 In un trapezio rettangolo la base maggiore supera di 24 cm la minore. L'altezza è i $\frac{3}{5}$ della base minore e l'area è di 324 cm^2. Determina la lunghezza delle basi. [18 cm; 42 cm]

Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol. 2 © Zanichelli 2012 *Algebra, Geometria, Probabilità*

456 Su una tavoletta babilonese, scritta a caratteri cuneiformi, si legge:
«Larghezza e lunghezza. Io ho moltiplicato la lunghezza e la larghezza e ho ottenuto un'area. Inoltre ho aggiunto all'area l'eccesso della lunghezza sulla larghezza, essendo il risultato 82. Infine la somma della lunghezza e della larghezza è 18».
Calcola la lunghezza, la larghezza e l'area.
[10; 8; 80]

457 Un rettangolo è inscritto in una circonferenza di raggio 12 cm e il suo perimetro è di $\frac{336}{5}$ cm. Determina i lati del rettangolo. $\left[\frac{96}{5}\text{ cm}; \frac{72}{5}\text{ cm}\right]$

458 Un triangolo isoscele ABC, di base AB, il cui lato è lungo 30 cm, è circoscritto a una semicirconferenza con diametro $DE = \frac{144}{5}$ cm sul lato AB. Trova il perimetro e l'altezza del triangolo.
[96 cm, 24 cm; 108 cm, 18 cm]

459 Nel triangolo ABC si sa che

$$B\hat{A}C = 30°, AB = \frac{3}{5}AC \text{ e } \overline{AB} + \overline{AC} = 32a.$$

Preso un punto P su AB, traccia l'altezza BD e da P la parallela a BD che incontri AC in H. Trova P in modo che:

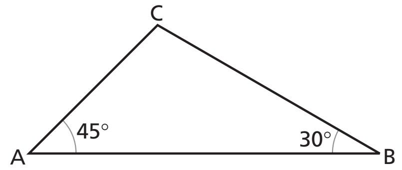
$$\overline{PD}^2 + 2\overline{AH}^2 = 124a^2. \qquad [\overline{PH} = 4a]$$

460 Data la semicirconferenza di diametro AB e centro O, sul prolungamento di AB dalla parte di B considera un punto P tale che $\overline{OP} = 25$ e traccia la tangente PT nel punto T alla semicirconferenza. Sapendo che PT è i $\frac{2}{3}$ del diametro, calcola l'area e il perimetro del triangolo TBP.
$[60; 30 + 6\sqrt{5}]$

461 Dato il triangolo ABC rettangolo in A, traccia l'altezza AH e disegna le proiezioni di H sui cateti AC e AB, chiamandole rispettivamente D ed E. Sapendo che $AE = \frac{4}{3}HE$ e che l'area di ABC è $\frac{625}{6}$, trova $\overline{AH}$. [10]

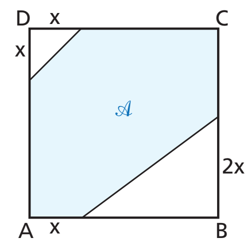
462 In una semicirconferenza di diametro $AB = 10$ cm traccia la tangente t in B. Preso un punto P sulla semicirconferenza e tracciata la sua proiezione K sulla retta t, determina per quali posizioni di P si ha: $\overline{PA}^2 + \overline{PK}^2 = 79$. $[\overline{PK} = 3; \overline{PK} = 7]$

463



Con riferimento alla figura, sapendo che $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = 128 + 32\sqrt{3}$, trova il perimetro di ABC.
$[4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})]$

464



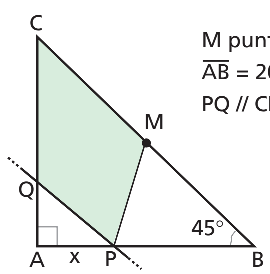
Nel quadrato $ABCD$ il lato misura 60.

a) Trova per quale valore di x la zona $\mathscr{A}$ colorata ha area in rapporto $\frac{149}{51}$ con la parte rimanente.
b) Quale valore assume $\mathscr{A}$ quando x ha il suo massimo valore? [a) 18; b) 2250]

465 Dato il quadrato $ABCD$ di lato 16, considera un punto P sul lato CB e traccia la perpendicolare PH alla diagonale AC. Determina P in modo che la somma dei quadrati dei lati del triangolo APH sia 544. $[\overline{PB} = 4]$

Problemi con i triangoli simili

466



Determina per quale valore di $\overline{AP}$ l'area della parte colorata è di 88 cm^2. [12]

467 Data la semicirconferenza di diametro AB e raggio 27 cm, sul prolungamento di AB dalla parte di B considera il punto C tale che $BC = 18$ cm e traccia la tangente TC nel punto T alla circonferenza. Su TC considera P e la sua proiezione H su BC. Determina P in modo che PHC abbia area uguale a 24 cm^2. [$PH = 6$ cm]

468 In un triangolo rettangolo ABC le misure dei cateti sono $\overline{AB} = 12$ e $\overline{CA} = 16$. Sul cateto AC considera un punto P e traccia la parallela ad AB che intersechi CB in Q. Trova $\overline{AP}$ in modo che:

$$\text{Area}_{PQC} = \frac{25}{11}\text{Area}_{ABQP}. \qquad \left[\frac{8}{3}\right]$$

469 Nel triangolo isoscele ABC, di base AB, D ed E sono i punti medi rispettivamente di AC e CB. Sapendo che $AB = 48$ cm e $CB = 40$ cm, determina P su AB in modo che:

$$\overline{PD}^2 + \frac{3}{61}\overline{PE}^2 = 560. \qquad [PB = 19 \text{ cm}]$$

470 Il perimetro del parallelogramma $ABCD$ misura 96. La diagonale DB è perpendicolare al lato AD. Il rapporto tra il lato AB e DB è $\frac{5}{4}$.

a) Determina i lati del parallelogramma e la misura di AC.

b) Preso P su DB e chiamata H la sua proiezione su AB, trova per quale posizione di P si ha $\overline{PH}^2 + \overline{PC}^2 = 358$.

[a) $\overline{AB} = 30$, $\overline{AD} = 18$, $\overline{AC} = 12\sqrt{13}$; b) $\overline{PB} = 5$]

471 Un triangolo isoscele ha base AB e altezzza CH, con $\overline{AB} + \overline{CH} = 80$ e $\overline{AB} > \overline{CH}$; l'area è di 768 cm^2.

a) Trova il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo (Suggerimento. Prolunga l'altezza CH fino a incontrare la circonferenza in D e considera poi il triangolo ACD...)

b) Considera P su HB e traccia la perpendicolare PK a CB. Determina per quale posizione di P il triangolo PKB ha area uguale a 192 cm^2.

[a) 25 cm; b) $PB = 20$ cm]

472 Sulla semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 12$, considera il punto P e la sua proiezione H su AB.

a) Determina $\overline{AH}$ in modo che:

$$\overline{AP}^2 + \frac{8}{7}\overline{PH}^2 = \overline{AB}^2.$$

b) Tracciate la tangente in P alla semicirconferenza e da B la parallela a OP, che incontri la tangente in K, trova il perimetro del triangolo PKB. $\left[\text{a) } \overline{AH} = \frac{21}{2}; \text{ b) } 3\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\right]$

473 Dato il triangolo ABC rettangolo in A e isoscele, con $\overline{BC} = 18\sqrt{2}$, considera su AB un punto P. Congiungi P con C e da A traccia la parallela a PC fino a incontrare in D il prolungamento del lato BC. Determina $\overline{AP}$ in modo che:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{DC} + \frac{1}{3}\overline{AP} = 95. \qquad [15]$$

Problemi di geometria solida

474 Diminuendo di 2 cm lo spigolo di un cubo, il suo volume diminuisce di 218 cm^3. Trova la lunghezza dello spigolo. [7 cm]

475 Per fabbricare una lattina di aranciata di forma cilindrica occorrono 112π cm^2 di alluminio. Se l'altezza supera di 2 cm il diametro di base, quanti millilitri di aranciata sono contenuti nella lattina? [160π ml]

476 In un parallelepipedo rettangolo la base ha le due dimensioni che sono una i $\frac{3}{5}$ dell'altra, mentre l'altezza supera di 3 cm la maggiore delle dimensioni di base. La superficie totale del parallelepipedo è 1134 cm^2. Determina il volume. [2430 cm^3]

477 Un parallelepipedo rettangolo ha per base un rettangolo in cui una dimensione supera l'altra di 8 cm. L'altezza è lunga 28 cm. Sapendo che il volume è 6720 cm^3, trova l'area della superficie totale. [2272 cm^2]

478 In un parallelepipedo rettangolo l'altezza è i $\frac{5}{8}$ del perimetro di base e in questa l'area supera di 32 cm^2 il quadrato costruito sul lato minore. Sapendo che il rapporto tra due lati adiacenti della base è $\frac{3}{2}$, determina il volume del parallelepipedo. [2400 cm^3]

479 In un cilindro circolare retto l'altezza supera di 12 cm il raggio di base. Se l'area della superficie totale è 220π cm^2, qual è il volume? [425π cm^3]

Problemi vari

480 Il doppio del quadrato di un numero intero è uguale a 50. Qual è il numero? [$+5$ o -5]

481 Sommando a 7 il triplo del quadrato di un numero intero si ottiene 55. Qual è il numero? [$+4$ o -4]

482 Il doppio aumentato di 9 del prodotto di un numero naturale con un altro, che lo supera di 4, è uguale a 3 volte il quadrato del primo. Determina i due numeri. [9; 13]

483 Ho depositato in banca € 20 000 in un conto corrente e ritiro oggi, dopo due anni, € 21 632. Quale tasso di interesse annuo costante è stato praticato? [4%]

484 In una frazione il denominatore supera di 5 il numeratore. Trova la frazione sapendo che sommandola con la sua reciproca si ottiene $\frac{53}{14}$. $\left[\frac{2}{7}\right]$

485 Dimostra che esiste un solo numero reale negativo che, elevato al quadrato, è uguale al suo triplo aumentato di 2.

486 In una pizzeria è esposto questo cartello: «Pizza per una persona – diametro 25 cm – costo € 3,50. Pizza per due persone – diametro 36 cm – costo € 7».
a) Quale scelta devono fare due amici per mangiare di più e spendere meno?
b) Che diametro dovrebbe avere la pizza piccola affinché la scelta sia ugualmente conveniente per i due amici? [a) la grande; b) 25,46 cm]

487 La differenza delle età di due fratelli è 6. Tra 3 anni il prodotto delle loro età sarà 952. Quanti anni hanno ora i due fratelli? [25, 31]

488 La divisione intera tra due numeri naturali dà quoziente 5 e resto 2, mentre la divisione intera tra i loro quadrati dà quoziente 29 e resto 4. Determina i due numeri. [27; 5]

489 In un numero di due cifre la cifra delle decine supera di 4 quella delle unità. Il triplo prodotto delle due cifre risulta pari al numero diminuito di 10. Determina il numero. [73]

490 Un barista vuole impilare, a piramide, nel suo magazzino 100 bottiglie nel modo rappresentato in figura.

È possibile impilare esattamente 100 bottiglie? Qual è il numero minimo di bottiglie che deve mettere nella base per impilarle tutte? Quante bottiglie dovrebbe aggiungere per completare tutta la piramide?

$\left(\text{Suggerimento: } 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.\right)$

[no; 14; 5]

491 Determina l'età di un ragazzo sapendo che il rapporto tra l'età che egli avrà tra 24 anni e quella che aveva un anno fa è uguale al rapporto tra il triplo della sua età di 6 anni fa e quella che egli avrà tra 4 anni. [26 anni]

492 Un numero è tale che la somma delle sue due cifre è uguale a 7 e sottraendo al quadrato del numero quello ottenuto da esso invertendo le cifre si ottiene 573. Trova il numero. [25]

493 Le età di un padre, di una madre e di un figlio sono rispettivamente uguali a 32, 30 e 7 anni. Fra quanti anni il quadrato dell'età del figlio sarà uguale al doppio della somma delle età dei genitori? [5]

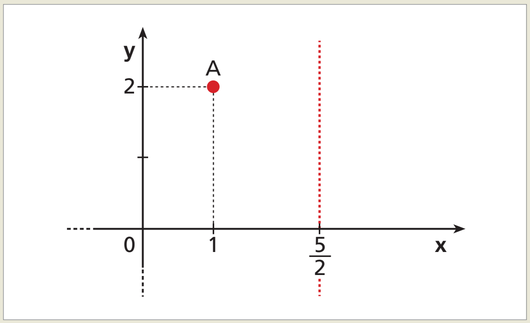
Problemi di geometria analitica

ESERCIZIO GUIDA

494 Dato il segmento AB, sappiamo che $\overline{AB} = \frac{\sqrt{34}}{2}$ e le coordinate di A sono $A(1; 2)$. Calcoliamo l'ordinata di B, sapendo che la sua ascissa è $\frac{5}{2}$.

Applichiamo la formula della distanza tra due punti $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, imponendo che la distanza fra $A(1; 2)$ e $B\left(\frac{5}{2}; y\right)$ sia uguale a $\frac{\sqrt{34}}{2}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 + (2 - y)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$



Eleviamo al quadrato e svolgiamo i calcoli:

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 4 + y^2 - 4y = \frac{34}{4}$$

$$y^2 - 4y + \frac{9}{4} + 4 - \frac{34}{4} = 0$$

$$4y^2 - 16y - 9 = 0.$$

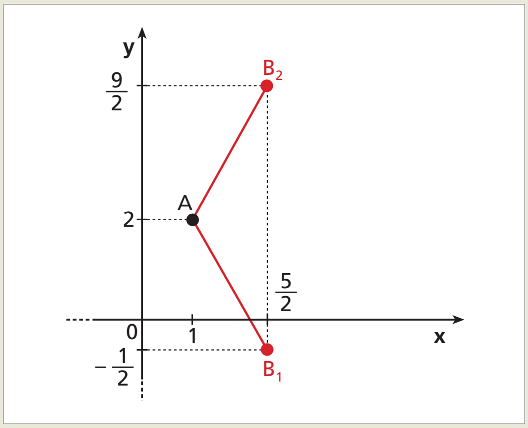
Utilizziamo la formula ridotta:

$$\frac{\Delta}{4} = 64 + 36 = 100$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{8 \pm 10}{4} = \begin{cases} \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

I punti che soddisfano il problema sono due:

$$B_1\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right), B_2\left(\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right).$$



In ognuno dei seguenti esercizi sono date: la misura della lunghezza del segmento AB, le coordinate di A, una delle coordinate di B. Calcola la coordinata mancante.

495 $\overline{AB} = \sqrt{5}$ $\quad A(2; 3),$ $\quad B(0; ?).$ $\quad [y_1 = 2, y_2 = 4]$

496 $\overline{AB} = 2\sqrt{10}$ $\quad A\left(\frac{1}{2}; -1\right),$ $\quad B\left(-\frac{3}{2}; ?\right).$ $\quad [y_1 = -7, y_2 = 5]$

497 $\overline{AB} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ $\quad A\left(-\frac{2}{3}; -1\right),$ $\quad B(?; 0).$ $\quad \left[x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}\right]$

498 $\overline{AB} = \sqrt{30}$ $\quad A(\sqrt{2}; -\sqrt{3}),$ $\quad B(?; \sqrt{3}).$ $\quad [x_1 = 4\sqrt{2}, x_2 = -2\sqrt{2}]$

499 Calcola per quali valori del parametro a la distanza del punto $P(2a; 12)$ dall'origine è uguale a 13. $\left[a = \pm\frac{5}{2}\right]$

500 Calcola per quali valori del parametro k la distanza del punto $P(k; -1)$ dal punto $Q(-3; 3)$ è uguale a $2\sqrt{5}$. $[k = -5, k = -1]$

501 Determina le coordinate di un punto P che ha ordinata tripla dell'ascissa, sapendo che la sua distanza dal punto $Q(1; -1)$ è $5\sqrt{2}$. $\left[P_1\left(-\frac{12}{5}; -\frac{36}{5}\right), P_2(2; 6)\right]$

502 Calcola per quali valori del parametro a la distanza del punto $P(-2; a)$ dal punto $Q(1; 4)$ è $\overline{PQ} = 5$. $[a = 0, a = 8]$

503 Determina i punti $P(k; 2-k)$ del piano cartesiano di origine $O(0; 0)$, con $k \in \mathbb{R}$, per i quali $\overline{PO} = 2$. $[P'(0; 2), P''(2; 0)]$

504 Per quali valori del parametro a le rette di equazioni

$r: (a-1)x - (a+3)y + 1 = 0,$

$s: (a+1)x - (2a-3)y + 9a = 0$

risultano parallele? $[a = 0, a = 9]$

505 Trova il punto C sull'asse delle ordinate equidistante dai punti $A(3; 1)$ e $B(-2; -1)$. $\left[C\left(0; \frac{5}{4}\right)\right]$

506 Dati i punti $A(-1; 3)$, $B(2; k)$, $C(5; 11)$, trova k in modo che il triangolo ABC sia rettangolo in B. $[k_1 = 2, k_2 = 12]$

3. Le relazioni fra le radici e i coefficienti di un'equazione di secondo grado

Teoria a pag. 872

RIFLETTI SULLA TEORIA

507 **VERO O FALSO?**

a) La somma delle radici dell'equazione $2x^2 - 4x - 1 = 0$ è 2. V F

b) Il prodotto delle radici dell'equazione $3x^2 - x - 2 = 0$ è 2. V F

c) Nell'equazione $x^2 - 6x = 0$ la somma e il prodotto delle radici valgono rispettivamente 6 e 0. V F

d) Se nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ la somma delle radici è uguale al loro prodotto, allora $b = c$. V F

e) In un'equazione pura la somma e il prodotto delle soluzioni valgono sempre 0. V F

508 **VERO O FALSO?**

Le seguenti affermazioni si riferiscono all'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $\Delta \geq 0$.

a) La somma delle radici è uguale al rapporto, cambiato di segno, fra c e a. V F

b) Il prodotto delle radici è uguale al rapporto fra b e a. V F

c) La somma delle radici è uguale al rapporto, cambiato di segno, fra a e b. V F

d) Il prodotto delle radici è uguale al rapporto fra c e a. V F

e) La somma delle radici è uguale al rapporto fra b e a. V F

509 **TEST** Sulle due equazioni **1.** $2x^2 - x - 6 = 0$ e **2.** $2x^2 + x - 6 = 0$ puoi affermare che:

A la somma e il prodotto delle radici di 2 sono uguali rispettivamente a $-\frac{1}{2}$ e 3.

B 1 e 2, non essendo equivalenti, hanno il prodotto delle radici diverso.

C la somma delle radici di 1 è uguale alla somma delle radici di 2.

D la somma e il prodotto delle radici di 1 sono uguali rispettivamente a $\frac{1}{2}$ e 3.

E il prodotto delle radici di 1 è uguale al prodotto delle radici di 2.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

510 Senza risolvere le equazioni, calcoliamo per ognuna la somma e il prodotto delle radici, specificando se le radici sono reali oppure non lo sono:

a) $3x^2 - 2x - 8 = 0$;
b) $x^2 - x + 1 = 0$.

a) Applichiamo le due formule $s = -\frac{b}{a}$ e $p = \frac{c}{a}$, tenendo presente che $a = 3$, $b = -2$, $c = -8$:

$$s = -\frac{-2}{3} = +\frac{2}{3};\ p = \frac{-8}{3} = -\frac{8}{3}.$$

Controlliamo se le radici sono reali, ossia se $\Delta \geq 0$. In questo caso, poiché b è un numero pari, calcoliamo $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$:

$$\frac{\Delta}{4} = (-1)^2 - 3 \cdot (-8) = 1 + 24 > 0.$$

Le radici sono reali; la loro somma è $\frac{2}{3}$, il loro prodotto è $-\frac{8}{3}$.

b) Calcoliamo: $s = -\frac{-1}{1} = +1$, $p = \frac{1}{1} = 1$, $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$.

Le radici non sono reali; la loro somma e il loro prodotto sono entrambi uguali a 1.

Senza risolvere le equazioni seguenti nell'incognita x, calcola per ognuna la somma e il prodotto delle radici, specificando se le radici sono reali.

511 $x^2 + 3x + 2 = 0$; $\quad 1 - 3x - 4x^2 = 0$. $\quad \left[s = -3, p = 2; s = -\frac{3}{4}, p = -\frac{1}{4}\right]$

512 $x^2 + 2x - 15 = 0$; $\quad 7x^2 - 10x + 3 = 0$. $\quad \left[s = -2, p = -15; s = \frac{10}{7}, p = \frac{3}{7}\right]$

513 $-x^2 + 5x - 6 = 0$; $\quad 2x^2 - \frac{11}{2}x + 3 = 0$. $\quad \left[s = 5, p = 6; s = \frac{11}{4}, p = \frac{3}{2}\right]$

514 $4x^2 + 8x + 3 = 0$; $\quad -2x^2 - 7x - 5 = 0$. $\quad \left[s = -2, p = \frac{3}{4}; s = -\frac{7}{2}, p = \frac{5}{2}\right]$

515 $3x^2 - 5x + 3 = 0$; $\quad 7x^2 + 48x - 7 = 0$. $\quad \left[s = \frac{5}{3}, p = 1, \text{radici non reali}; s = -\frac{48}{7}, p = -1\right]$

516 $x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$ $\quad [s = -3a, p = 2a^2]$

517 $8x^2 - 3kx + k^2 = 0$ $\quad \left[s = \frac{3k}{8}, p = \frac{k^2}{8}, \text{radici non reali se } k \neq 0\right]$

518 $12x^2 + 7x = 1 - \sqrt{2}x$ $\quad \left[s = -\frac{7 + \sqrt{2}}{12}, p = -\frac{1}{12}\right]$

519 $18x^2 + 3\sqrt{3}x + 9\sqrt{2}x = 1$ $\quad \left[s = -\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}, p = -\frac{1}{18}\right]$

520 $x^2 + 2a^2 - 3a(b - x) = b(2x - b)$ $\quad [s = 2b - 3a, p = 2a^2 + b^2 - 3ab]$

521 $-2x^2 + \frac{11}{4}x - 3 = 0$ $\left[s = \frac{11}{8}, p = \frac{3}{2}, \text{radici non reali}\right]$

522 $\sqrt{6}x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{3} = 0$ $\left[s = \frac{2\sqrt{3}}{3}, p = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{radici non reali}\right]$

Senza risolvere le seguenti equazioni, calcola la somma e il prodotto delle radici, indicando se sono reali, e determina il loro segno.

523 $2x^2 - 3x - 7 = 0$ $\left[s = \frac{3}{2}, p = -\frac{7}{2}, \text{radici reali discordi}\right]$

524 $x^2 - 9x + 2 = 0$ [$s = 9$, $p = 2$, radici reali positive]

525 $6x^2 + 12x + 1 = 0$ $\left[s = -2, p = \frac{1}{6}, \text{radici reali negative}\right]$

526 $\frac{1}{2}x^2 + 7x - 1 = 0$ [$s = -14$, $p = -2$, radici reali discordi]

527 **ASSOCIA** a ogni equazione la somma s e il prodotto p delle soluzioni.

1. $x^2 - 6x + 4 = 0$	A. $s = 6, p = 2$.
2. $2x^2 - 12x + 1 = 0$	B. $s = 6, p = \frac{1}{2}$.
3. $x^2 + 6x + 4 = 0$	C. $s = 6, p = 4$.
4. $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 = 0$	D. $s = -6, p = 4$.

Determina quanto richiesto, note le seguenti informazioni per l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

528 $c = 4$ e $x_1 \cdot x_2 = 20$. $a = ?$

529 $a = 3$ e $x_1 \cdot x_2 = 12$. $c = ?$

530 $a = -\frac{1}{3}$ e $x_1 + x_2 = 21$. $b = ?$

531 $b = 2$ e $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$. $a = ?$

Dalle radici all'equazione

ESERCIZIO GUIDA

532 Scriviamo l'equazione di secondo grado in forma normale che ha come radici:

$$x_1 = -2 \text{ e } x_2 = \frac{1}{3}.$$

Calcoliamo la somma s e il prodotto p delle radici:

$$s = -2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}; \quad p = -2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

L'equazione di secondo grado avente come somma delle soluzioni s e come prodotto p è $x^2 - sx + p = 0$; quindi:

$$x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Per ogni coppia di valori scrivi l'equazione di secondo grado in forma normale che ha tali valori come radici.

533 $1; 2.$ $\quad -3; -1.$ $\quad 2; -5.$ $\quad 1; 1.$

534 $3; -\frac{1}{3}.$ $\quad \frac{1}{2}; -6.$ $\quad -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}.$ $\quad \frac{3}{2}; -1.$

535 $a; 2a.$ $\quad -a; -a.$ $\quad \frac{3}{2}a; -\frac{1}{5}a.$ $\quad 2; \sqrt{3}.$

536 $\sqrt{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}.$ $\quad -\sqrt{2}; -\sqrt{3}.$ $\quad \sqrt{5}; \sqrt{5}.$ $\quad a+b; a-b.$

537 $2a-b; 2a-b.$ $\quad \sqrt{2}+1; \sqrt{2}-1.$ $\quad \sqrt{5}-2; \sqrt{5}-2.$ $\quad \frac{1}{\sqrt{3}-1}; \sqrt{3}.$

La somma e il prodotto di due numeri

ESERCIZIO GUIDA

538 Determiniamo i due numeri che hanno come somma $s = 6\sqrt{2}$ e come prodotto $p = 16$.

Scriviamo l'equazione $x^2 - sx + p = 0$:
$x^2 - 6\sqrt{2}x + 16 = 0.$

Risolviamo l'equazione (infatti le radici sono i numeri richiesti):

$$\frac{\Delta}{4} = (-3\sqrt{2})^2 - 1 \cdot 16 = 18 - 16 = 2$$

$$x = 3\sqrt{2} \pm \sqrt{2} = \begin{cases} 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

I numeri richiesti sono $2\sqrt{2}$ e $4\sqrt{2}$.

Determina, se possibile, due numeri reali, conoscendo la loro somma s e il loro prodotto p.

539 $s = 0,$ $\quad p = -16.$ $[\pm 4]$

540 $s = 3,$ $\quad p = \frac{5}{4}.$ $\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]$

541 $s = 0,$ $\quad p = -2a^2.$ $[\pm a\sqrt{2}]$

542 $s = 2\sqrt{3} + 2,$ $\quad p = 3 + 2\sqrt{3}.$ $[\sqrt{3} + 2; \sqrt{3}]$

543 $s = \frac{1}{3},$ $\quad p = 0.$ $\left[0; \frac{1}{3}\right]$

544 $s = 6,$ $\quad p = 13.$ [impossibile]

545 $s = 2a,$ $\quad p = a^2 - 1.$ $[a-1; a+1]$

546 $s = 1,$ $\quad p = \frac{2}{9}.$ $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$

547 $s = 2a + 2,$ $\quad p = a^2 + 2a + 1.$ $[a+1; a+1]$

548 $s = 1,$ $\quad p = \sqrt{2} - 2.$ $[\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}]$

549 $s = 4\sqrt{7} - 2,$ $\quad p = 21 - 6\sqrt{7}.$ $[\sqrt{7} - 2; 3\sqrt{7}]$

550 $s = \sqrt{3},$ $\quad p = -2 - \sqrt{6}.$ $[\sqrt{3} + \sqrt{2}; -\sqrt{2}]$

551 $s = 3a + 2,$ $\quad p = 2a^2 - 7a - 3.$ $[a + 3; 2a - 1]$

552 $s = \frac{1 - 3a^2}{a},$ $\quad p = -3$, con $a \neq 0$. $\left[-3a; \frac{1}{a}\right]$

553 Scrivi l'equazione di secondo grado che ha per soluzioni i valori opposti delle soluzioni di $2x^2 - 5x - 1 = 0$, senza risolvere questa equazione.
Puoi generalizzare il risultato per l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$? Motiva la risposta. $[2x^2 + 5x - 1 = 0;$ sì$]$

554 Senza risolvere l'equazione $x^2 - 2x - 8 = 0$ scrivi l'equazione di secondo grado le cui soluzioni sono doppie rispetto a quelle dell'equazione data.
Puoi generalizzare il risultato per l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$? Motiva la risposta. $[x^2 - 4x - 32 = 0; \text{sì}]$

555 Scrivi l'equazione le cui soluzioni sono uguali alla somma e al prodotto delle radici dell'equazione
$x^2 + bx + c = 0$. $[x^2 + (b - c)x - bc = 0]$

Da una soluzione all'altra

ESERCIZIO GUIDA

556 Data l'equazione $2x^2 + 3x - 20 = 0$, calcoliamo una radice sapendo che l'altra vale -4, senza utilizzare la formula risolutiva.

Calcoliamo il prodotto delle radici: $p = -\dfrac{20}{2} = -10$.

Se $x_1 \cdot x_2 = -10$ e $x_1 = -4$, allora:

$$-4 \cdot x_2 = -10 \rightarrow x_2 = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}.$$

La radice cercata è $\dfrac{5}{2}$.

Osservazione. Possiamo arrivare allo stesso risultato applicando la regola della somma invece di quella del prodotto.

Per ognuna delle seguenti equazioni in x è indicata una soluzione: calcola l'altra, senza applicare la formula risolutiva.

557 $x^2 + x - 6 = 0$; $\quad x = -3$. $[2]$

558 $x^2 - 8x + 15 = 0$; $\quad x = 5$. $[3]$

559 $2x^2 + 3x + 1 = 0$; $\quad x = -\dfrac{1}{2}$. $[-1]$

560 $x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$; $\quad x = -3a$. $[a]$

561 $4 - 3x - x^2 = 0$; $\quad x = -4$. $[1]$

562 $-2x^2 - \dfrac{5}{2}x = \dfrac{3}{4}$; $\quad x = -\dfrac{1}{2}$. $\left[-\dfrac{3}{4}\right]$

563 $16x - 4x^2 - 15 = 0$; $\quad x = \dfrac{5}{2}$. $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

564 $2x^2 + bx - b^2 = 0$; $\quad x = \dfrac{1}{2}b$. $[-b]$

565 **COMPLETA** la seguente tabella.

EQUAZIONE	SOMMA DELLE RADICI	PRODOTTO DELLE RADICI	x_1	x_2
…	…	…	-2	-9
$x^2 - 2x - 35 = 0$	…	…	…	…
$3x^2 - x - 2 = 0$	…	…	…	…
$\dots x^2 + x - 1 = 0$	$-\dfrac{1}{6}$	…	…	…
…	-2	-24	…	…
$\dots x^2 - 7x + 2 = 0$	…	$\dfrac{1}{3}$	…	…
…	0	-2	…	…

566 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $2x^2 - 3x - 3 = 0$ ha la somma delle soluzioni uguale al loro prodotto. V F

b) Nelle equazioni spurie il prodotto delle soluzioni è sempre uguale a 0. V F

c) Se la somma delle soluzioni è zero, un'equazione di secondo grado è pura. V F

d) Se la somma delle soluzioni vale 4, nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ si ha $b = -4$. V F

567 **TEST** Una sola delle seguenti affermazioni, relative all'equazione $5x^2 - 8x - 4 = 0$, è *falsa*. Quale?

A Il discriminante è il quadrato di 12.

B La somma delle radici è $\frac{8}{5}$.

C Le radici sono discordi.

D Una soluzione è -2.

E Il prodotto delle radici è negativo.

568 **TEST** Solo una delle seguenti affermazioni, relative all'equazione $(\sqrt{7} + 3)\,x^2 - 2\sqrt{7}x + \sqrt{7} - 3 = 0$, è *falsa*. Quale?

A $\frac{\Delta}{4} = 9$.

B Ha due radici concordi.

C Il prodotto delle radici è $3\sqrt{7} - 8$.

D 1 è una radice dell'equazione.

E La somma delle radici è $3\sqrt{7} - 7$.

4. La regola di Cartesio

Teoria a pag. 874

RIFLETTI SULLA TEORIA

569 **TEST** Applicando la regola di Cartesio, puoi affermare che l'equazione $15x^2 + 19x - 8 = 0$:

A ha due radici discordi, di cui quella con valore assoluto maggiore è la radice negativa.

B ha due radici negative.

C ha due radici discordi, di cui quella con valore assoluto maggiore è la radice positiva.

D non ha radici reali.

E ha due radici positive.

570 **VERO O FALSO?**

L'equazione $4x^2 + 5x + 1 = 0$:

a) ha due variazioni. V F

b) ha due soluzioni reali concordi. V F

c) ha due soluzioni negative. V F

d) ha una sola soluzione negativa. V F

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

571 Determiniamo il segno delle radici dell'equazione $7x^2 + 12x + 3 = 0$ senza risolverla.

Controlliamo se le radici sono reali, calcolando il discriminante.

Poiché b è pari, calcoliamo $\frac{\Delta}{4}$:

$$\frac{\Delta}{4} = 6^2 - 3 \cdot 7 = 36 - 21 > 0.$$

La sequenza dei segni è:

$+ \quad + \quad +$

permanenza permanenza

Per la regola di Cartesio, si hanno due radici negative.

L'equazione $7x^2 + 12x + 3 = 0$ ha due soluzioni reali negative.

Determina il segno delle radici di ogni equazione senza risolverla.

572 $x^2 - 12x + 4 = 0$

573 $2x^2 - 2x + 5 = 0$

574 $3x^2 - 2x - 1 = 0$

575 $5x^2 + 6x - 1 = 0$

576 $2x^2 + 3x - 2 = 0$

577 $2x^2 - 3x + 1 = 0$

578 $7x^2 - x - 1 = 0$

579 $3x^2 - 4x + 1 = 0$

580 $6x^2 - 3\sqrt{3}x + 2 = 0$

581 $\sqrt{2}x^2 - 6x + 2\sqrt{2} = 0$

582 $\sqrt{3}x^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$

583 $2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$

ESERCIZIO GUIDA

584 Data l'equazione, nell'incognita x,

$$(a+1)x^2 - 2ax + a + 2 = 0,$$

studiamo il segno delle soluzioni, senza risolvere l'equazione, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Se $a + 1 = 0$, cioè $a = -1$, l'equazione diventa di primo grado:

$2x + 1 = 0$, con soluzione $x = -\frac{1}{2}$,

negativa.

Per $a \neq -1$, studiamo il discriminante:

$$\frac{\Delta}{4} = a^2 - (a+1)(a+2) =$$
$$= \cancel{a^2} - \cancel{a^2} - 2a - a - 2 = -3a - 2.$$

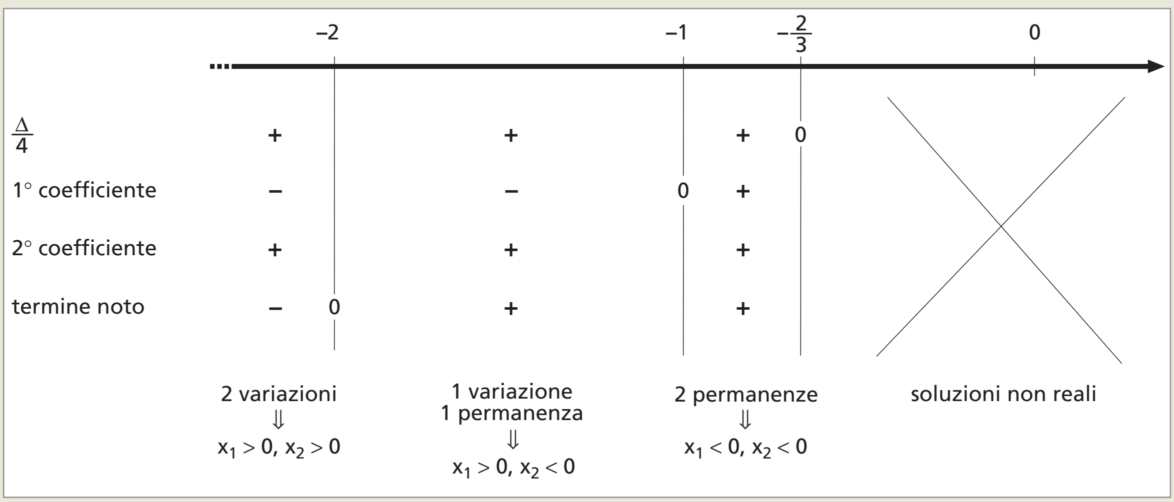
Le soluzioni sono reali se $\frac{\Delta}{4} \geq 0$.

$\frac{\Delta}{4} \geq 0$ per $-3a - 2 \geq 0 \to a \leq -\frac{2}{3}$.

Studiamo i segni dei tre coefficienti dell'equazione:

1° coefficiente: $a + 1 > 0 \to a > -1$;
2° coefficiente: $-2a > 0 \to a < 0$;
termine noto: $a + 2 > 0 \to a > -2$.

Compiliamo il quadro riassuntivo.



Studia il segno delle soluzioni delle seguenti equazioni, nell'incognita x, al variare del parametro in $\mathbb{R}$.

585 $x^2 - 2bx + b^2 - 1 = 0$

586 $ax^2 - (2a+1)x + a = 0$

587 $kx^2 - 4x + 2 = 0$

588 $x^2 - 6x - (a-1) = 0$

589 $bx^2 + 3bx + 1 = 0$

590 $(k-2)x^2 + 2(k-2)x + k = 0$

591 $kx^2 - (2k-1)x + k + 3 = 0$

592 $(a+1)x^2 - 4ax + 4a - 5 = 0$

593 $x^2 + 2(a+2)x - (1-a^2) = 0$

594 $(a+2)x^2 + (3+2a)x + a = 0$

595 $2ax^2 - 4ax + (2a-3) = 0$

596 $(4a-1)x^2 - 4(a+1)x + a = 0$

597 $9kx^2 - (6k-1)x + k - 1 = 0$

598 $ax^2 - (2a+5)x + 8 + a = 0$

599 Determina per quali valori di a l'equazione $ax^2 - (a+3)x + 3 = 0$ ammette radici reali e positive.

600 Determina per quali valori di k l'equazione $(k-1)x^2 - 4x - 1 = 0$ ammette radici reali e discordi.

601 Determina per quali valori di b l'equazione $2x^2 + 6x + (2b-3) = 0$ ammette radici reali e concordi.

5. La scomposizione di un trinomio di secondo grado

Teoria a pag. 876

RIFLETTI SULLA TEORIA

602 **VERO O FALSO?** Le seguenti affermazioni si riferiscono al trinomio $ax^2 + bx + c$.

a) Può essere scomposto in fattori solo se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ è completa. V F
b) Può essere scomposto in fattori se $a > 0$. V F
c) *Non* può essere scomposto in fattori se $\Delta < 0$. V F
d) Può essere scomposto in fattori se $\Delta = 0$. V F
e) Può essere scomposto in fattori se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ *non* ammette radici reali. V F

603 **TEST** Sono dati i trinomi:
1. $6x^2 + 5x - 4$,
2. $25x^2 - 20x + 4$,
3. $x^2 + 2x + 10$.
Puoi dire che:

A la scomposizione in fattori di **2** è $5(x-2)^2$.
B la scomposizione in fattori di **3** è $x(x+2) + 10$.
C **1** e **3** sono irriducibili.
D la scomposizione in fattori di **1** è $(2x-1)(3x+4)$.
E nessuna delle precedenti affermazioni è vera.

604 **TEST** Se le radici dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sono 2, -3 e $a = 5$, qual è la scomposizione in fattori del trinomio $ax^2 + bx + c$?

A $5(x-3)(x+2)$
B $\frac{1}{5}(x+3)(x-2)$
C $5(x+3)(x-2)$
D $5(x-5)(x+3)(x-2)$
E Non si può determinare.

ESERCIZI

La scomposizione di un trinomio

ESERCIZIO GUIDA

605 Scomponiamo in fattori, se è possibile, i seguenti trinomi di secondo grado:

a) $3x^2 + 14x - 5$;
b) $4x^2 - 12ax + 9a^2$;
c) $2x^2 - 6x + 15$.

Il polinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ è scomponibile in $a(x - x_1)(x - x_2)$, dove x_1 e x_2 sono le eventuali soluzioni reali dell'equazione associata al polinomio, cioè di $ax^2 + bx + c = 0$.

a) L'equazione associata a $3x^2 + 14x - 5$ è:

$3x^2 + 14x - 5 = 0.$

Risolviamo l'equazione; poiché $b = 14$ è pari, applichiamo la formula ridotta:

$\frac{\Delta}{4} = 7^2 - 3 \cdot (-5) = 49 + 15 = 64 > 0;$ l'equazione ha due radici reali distinte.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{64}}{3} = \begin{cases} \frac{-7+8}{3} = \frac{1}{3} \\ \frac{-7-8}{3} = -5 \end{cases}$$

Il trinomio dato si può scomporre così:

$$3x^2 + 14x - 5 = 3(x+5)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x+5)(3x-1).$$

b) L'equazione associata a $4x^2 - 12ax + 9a^2$ è:

$4x^2 - 12ax + 9a^2 = 0.$

Risolviamo l'equazione; poiché il secondo coefficiente $B = -12a$ è pari, applichiamo la formula ridotta:

$\frac{\Delta}{4} = (-6a)^2 - 4 \cdot 9a^2 = 36a^2 - 36a^2 = 0;$ l'equazione ha due radici reali coincidenti.

$x = \frac{6a}{4} = \frac{3}{2}a.$

Nel caso di radici coincidenti, la formula di scomposizione diventa:

$Ax^2 + Bx + C = A(x - x_1)(x - x_1) = A(x - x_1)^2.$

Il trinomio dato, pertanto, si può scomporre così:

$$4x^2 - 12ax + 9a^2 = 4\left(x - \frac{3}{2}a\right)^2 = 4\left(\frac{2x - 3a}{2}\right)^2 = (2x - 3a)^2.$$

c) L'equazione associata al trinomio $2x^2 - 6x + 15$ è:

$2x^2 - 6x + 15 = 0.$

Risolviamo l'equazione:

$\frac{\Delta}{4} = (-3)^2 - 2 \cdot 15 = 9 - 30 = -21 < 0.$

Poiché $\frac{\Delta}{4} < 0$, l'equazione non ha radici reali; pertanto il trinomio dato è irriducibile.

Scomponi in fattori, quando è possibile, i seguenti trinomi di secondo grado.

606 $x^2 + 6x + 5$ $[(x+1)(x+5)]$

607 $2x^2 - 4x + 5$ [irriducibile in $\mathbb{R}$]

608 $x^2 - ax - 2a^2$ $[(x+a)(x-2a)]$

609 $4x^2 + 9k^2$ [irriducibile in $\mathbb{R}$]

610 $2x^2 - 3ax + a^2$ $[(x-a)(2x-a)]$

611 $6x^2 + x - 1$ $[(2x+1)(3x-1)]$

612 $5x^2 + 4x + \frac{4}{5}$ $\left[5\left(x+\frac{2}{5}\right)^2\right]$

613 $4a^2 - 4a - 3$ $[(2a-3)(2a+1)]$

614 $3b^2 - 5b - 2$ $[(b-2)(3b+1)]$

615 $2a^2 + 9a - 5$ $[(a+5)(2a-1)]$

616 $3x^2 - 2x - 8$ $[(3x+4)(x-2)]$

617 $9x^2 - 24ax + 16a^2$ $[(3x-4a)^2]$

618 $2x^2 + (1-2\sqrt{3})x - \sqrt{3}$ $[(x-\sqrt{3})(2x+1)]$

619 $ax^2 + (1-2a)x - 2a$ $[(x-2)(ax+1)]$

620 $3 - x^2 - \frac{5x\sqrt{2}}{2}$ $\left[(x+3\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-x\right)\right]$

621 $x^2 - \frac{7}{4}\sqrt{3}x - \frac{3}{2}$ $\left[(x-2\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+x\right)\right]$

La semplificazione di frazioni algebriche

ESERCIZIO GUIDA

622 Semplifichiamo la seguente frazione algebrica:

$$\frac{3x-9}{2x^2-5x-3}.$$

Scomponiamo il trinomio al denominatore, risolvendo l'equazione corrispondente:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-3) = (2x+1)(x-3).$$

Le condizioni di esistenza della frazione algebrica sono:

$$\text{C.E.: } x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 3.$$

Semplifichiamo la frazione algebrica:

$$\frac{3\cancel{(x-3)}}{(2x+1)\cancel{(x-3)}} = \frac{3}{2x+1}.$$

Semplifica le seguenti frazioni algebriche, esplicitando le condizioni di esistenza.

623 $\frac{6x^2+2x}{2+6x}$ $\left[x, x \neq -\frac{1}{3}\right]$

624 $\frac{24x-18}{8x^2-6x}$ $\left[\frac{3}{x}, x \neq 0 \wedge x \neq \frac{3}{4}\right]$

625 $\dfrac{4x-12}{2x^2-12x+18}$ $\left[\dfrac{2}{x-3}, x \neq 3\right]$

626 $\dfrac{2x^2+3x-9}{4x^2-9}$ $\left[\dfrac{x+3}{2x+3}, x \neq \pm\dfrac{3}{2}\right]$

627 $\dfrac{8b^2-8bx}{4b-4x}$ $[2b, x \neq b]$

628 $\dfrac{8x^2-2a^2}{2a^2+8x^2-8ax}$ $\left[\dfrac{2x+a}{2x-a}, x \neq \dfrac{a}{2}\right]$

629 $\dfrac{30+3x-6x^2}{6x^2-9x-15}$ $\left[-\dfrac{x+2}{x+1}, x \neq -1 \wedge x \neq \dfrac{5}{2}\right]$

630 $\dfrac{a^2-3a-4}{2a^2-11a+12}$ $\left[\dfrac{a+1}{2a-3}, a \neq 4 \wedge a \neq \dfrac{3}{2}\right]$

631 $\dfrac{6x-12}{6x^2-11x-2}$ $\left[\dfrac{6}{6x+1}, x \neq 2 \wedge x \neq -\dfrac{1}{6}\right]$

632 $\dfrac{4x^2+4x+1}{4x^2+2x}$ $\left[\dfrac{2x+1}{2x}, x \neq 0 \wedge x \neq -\dfrac{1}{2}\right]$

633 $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{2x^2-5x-3}$ $\left[\dfrac{x(x-3)}{2x+1}, x \neq 3 \wedge x \neq -\dfrac{1}{2}\right]$

634 $\dfrac{8x^2-6ax+a^2}{2x^2+ax-a^2}$ $\left[\dfrac{4x-a}{x+a}, x \neq -a \wedge x \neq \dfrac{a}{2}\right]$

635 $\dfrac{6-2x^2}{8x^2-16x\sqrt{3}+24}$ $\left[\dfrac{x+\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-x)}, x \neq \sqrt{3}\right]$

636 $\dfrac{4x^2+4x-2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}}{6x^2+6x-3\sqrt{3}x-3\sqrt{3}}$ $\left[\dfrac{2}{3}, x \neq -1 \wedge x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

637 $\dfrac{(3x^2+5x-2)(x^2-4x)}{3x^4-13x^3+4x^2}$ $\left[\dfrac{x+2}{x}, x \neq \dfrac{1}{3} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 4\right]$

638 $\dfrac{(x^2+2x)(2x^2-5x-3)}{(x^3-9x)(x+2)}$ $\left[\dfrac{2x+1}{x+3}, x \neq 0 \wedge x \neq \pm 3 \wedge x \neq -2\right]$

639 Considera la frazione algebrica $\dfrac{5x^2-6x+1}{ax^2-1}$. Determina per quali valori di a:

a) la C.E. è $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) il risultato della semplificazione è $\dfrac{x-1}{5x+1}$.

c) la frazione non è semplificabile. [a) $a \leq 0$; b) $a = 25$; c) $a \neq 1 \wedge a \neq 25$]

Un'applicazione: le equazioni fratte di secondo grado

ESERCIZIO GUIDA

640 Risolviamo l'equazione:

$$\frac{x+7}{3x^2-7x+2}+2=\frac{3-x}{x-2}.$$

Per calcolare il denominatore comune, scomponiamo $3x^2-7x+2$ in fattori. Determiniamo gli zeri del polinomio:

$$3x^2-7x+2=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\frac{7\pm5}{6}= \begin{cases} 2 \\ \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Quindi:

$$3x^2-7x+2=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)=(3x-1)(x-2).$$

Ritornando all'equazione di partenza abbiamo:

C.E.: $x - \frac{1}{3} \neq 0 \rightarrow \boldsymbol{x \neq \frac{1}{3}}$; $x - 2 \neq 0 \rightarrow \boldsymbol{x \neq 2}$.

Il denominatore comune è il m.c.m. dei denominatori e l'equazione diventa:

$$\frac{x+7}{(3x-1)(x-2)} + \frac{2(3x-1)(x-2)}{(3x-1)(x-2)} = \frac{(3-x)(3x-1)}{(3x-1)(x-2)}.$$

Eliminando il denominatore comune e svolgendo i calcoli nei numeratori, otteniamo:

$$x + 7 + 6x^2 - 14x + 4 = 9x - 3 - 3x^2 + x$$

$$9x^2 - 23x + 14 = 0$$

$$x = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 504}}{18} = \frac{23 \pm \sqrt{25}}{18} = \frac{23 \pm 5}{18} = \begin{cases} \frac{28}{18} = \frac{14}{9} \\ \frac{18}{18} = 1 \end{cases}$$

Viste le C.E., le radici dell'equazione sono entrambe accettabili:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{14}{9}.$$

Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni nell'incognita x.

641 $\frac{x-3}{x-1} + 2 = \frac{x-3}{x+2} + \frac{x-13}{x^2+x-2}$ [0; − 2 non accettabile]

642 $\frac{x^2-2x+5}{x^2-5x+6} + \frac{x+3}{x-2} = \frac{x+2}{x-3}$ [0; 2 non accettabile]

643 $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2} = \frac{5-x^2}{x^2-x-6}$ [1; − 4]

644 $\frac{2+x}{x^2-2x-3} + \frac{3x}{(x-2)(x^2-2x-3)} = \frac{1+2x}{x^2-5x+6}$ [impossibile]

645 $\frac{2x}{x-4} + \frac{3}{x-3} + 4 = \frac{30+5x^2-36x}{x^2-7x+12}$ [− 2; − 3]

646 $\frac{2}{6x-15} + \frac{1}{3x} - \frac{10+2x}{4x^2-20x+25} = \frac{25}{12x^3-60x^2+75x}$ [0 non accettabile; 30]

647 $\frac{3x}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x-2\sqrt{2}} = \frac{2(x^2-1-2\sqrt{2}x)}{x^2-3\sqrt{2}x+4}$ [impossibile]

648 $\frac{3y-1}{3y-2} - \frac{3y-2}{3y-1} = \frac{1}{3} + \frac{21y-8}{27y^2-27y+6}$ [impossibile]

649 $\frac{10-2x}{3-3x} + \frac{4-3x}{1-2x} = \frac{1}{3} + \frac{x^2-40x+31}{3(2x^2-3x+1)}$ [− 1; + 1 non accettabile]

650 $\dfrac{x-3a}{2x-a}-\dfrac{2x+4a}{x-3a}=\dfrac{x^2+a^2-12ax}{2x^2-7ax+3a^2}$ $[\pm a\sqrt{3}, a \neq 0]$

651 $\dfrac{x-2a}{x+a}=\dfrac{x-a}{x-2a}+1+\dfrac{17a^2-2x^2}{x^2-ax-2a^2}$ $[5a; -2a, a \neq 0]$

652 $\dfrac{3x-1}{12x-36}-\dfrac{4x}{3x+3}+\dfrac{4x-2}{4x^2-8x-12}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{25x-2x^2+5}{12(x^2-2x-3)}$ [0; 3 non accettabile]

653 $\dfrac{x}{x-2b}+\dfrac{x}{x-b}=\dfrac{x^2-5bx+3b^2}{x^2-3bx+2b^2}$ [b non accettabile; $-3b$]

654 $\dfrac{5}{4}-\dfrac{x+3b}{x+2b}=\dfrac{2b-x}{x+4b}+\dfrac{bx}{2(x^2+6bx+8b^2)}$ $\left[\dfrac{\pm 2b\sqrt{30}}{5}\right]$

655 $\dfrac{x+9a}{x-3a}-\dfrac{9ax+72a^2}{4ax-3a^2-x^2}=\dfrac{2a-8x}{x-a}+\dfrac{69a^2}{x^2-4ax+3a^2}$ [0, se $a \neq 0$; a non accettabile]

6. Le equazioni parametriche

Teoria a pag. 877

RIFLETTI SULLA TEORIA

656 **VERO O FALSO?**

Le seguenti affermazioni si riferiscono all'equazione $(k-1)x^2-2kx+k-1=0$.

a) Ha soluzioni reali se $k \geq \dfrac{1}{2}$. V F

b) È spuria se $k=1$. V F

c) Il prodotto delle radici non dipende dal parametro k. V F

d) È pura se $k \neq 0$. V F

e) È completa se $k \neq 0 \wedge k \neq 1$. V F

657 **TEST** Per quali valori di k l'equazione parametrica

$$(k-2)x^2-(k-1)x+2k=0$$

è di primo grado?

A $k=0$

B $k=1$

C $k=-1$

D $k=2$

E $\nexists k \in \mathbb{R}$

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 13 esercizi di recupero

658 **COMPLETA** la tabella utilizzando le informazioni indicate, relative all'equazione $ax^2+bx+c=0$.

a	*b*	*c*	INFORMAZIONE
3	4	…	$x_1=x_2$
…	10	5	$x_1=\dfrac{1}{x_2}$
1	…	-12	$x_1=-3$
1	…	-4	$x_1+x_2=0$
2	…	…	$x_1=\dfrac{1}{x_2}$ e $x_1+x_2=-3$
…	-4	…	$x_1+x_2=2$ e $x_1x_2=6$

ESERCIZIO GUIDA

659 Data l'equazione di secondo grado, nell'incognita x,

$$(k-1)x^2+(2k-5)x+k+1=0,$$

determiniamo per quali valori del parametro k sono soddisfatte le condizioni:

a) le soluzioni sono reali distinte;
b) le soluzioni sono reali coincidenti;
c) non esistono soluzioni reali;
d) una radice è nulla.

Affinché l'equazione sia di secondo grado, deve essere $k-1\neq 0 \rightarrow k\neq 1$.

a) La condizione da imporre è $\Delta>0$.

Calcoliamo Δ:

$$\Delta=(2k-5)^2-4(k-1)(k+1)=4k^2-20k+25-4(k^2-1)=$$
$$=4k^2-20k+25-4k^2+4=-20k+29.$$

Imponiamo la condizione $\Delta>0$:

$$-20k+29>0 \rightarrow -20k>-29 \rightarrow 20k<29 \rightarrow k<\frac{29}{20}.$$

b) Dobbiamo imporre la condizione $\Delta=0$:

$$-20k+29=0 \rightarrow k=\frac{29}{20}.$$

c) Dobbiamo imporre la condizione $\Delta<0$:

$$-20k+29<0 \rightarrow 20k>29 \rightarrow k>\frac{29}{20}.$$

d) Sostituiamo a x il valore 0:

$$(k-1)\cdot 0^2+(2k-5)\cdot 0+k+1=0$$

$$k+1=0 \rightarrow k=-1.$$

Per ogni equazione di secondo grado nell'incognita x determina per quali valori del parametro k sono soddisfatte le condizioni indicate a fianco.

660 $x^2-2kx+5k-6=0$; soluzioni reali coincidenti. $[k=2 \vee k=3]$

661 $6x^2+(2k-3)x-k=0$; soluzioni reali. $[\forall k \in \mathbb{R}]$

662 $(k-2)x^2+2(2k-3)x+4k+2=0$, con $k\neq 2$; $x_1=0$. $\left[k=-\frac{1}{2}\right]$

663 $(2k-1)x^2+(k-3)x+3k-1=0$, con $k\neq\frac{1}{2}$; $x_1=-2$. $\left[k=-\frac{1}{9}\right]$

664 $kx^2+(4k-1)x+4k=0$, con $k\neq 0$; soluzioni reali distinte. $\left[k<\frac{1}{8}\right]$

665 $6kx^2-(5k+2)x+9-k^2=0$, con $k \neq 0$; $x_1=0$. $[k=\pm 3]$

666 $(8k-2)x^2-(1-2k)x+2-5k=0$, con $k \neq \frac{1}{4}$; $x_1=-1$. $[k=-1]$

667 $9x^2-2(3k+1)x-1+k^2=0$; soluzioni reali. $\left[k \geq -\frac{5}{3}\right]$

668 $(1+m^2)x^2+(m+1)x+10m-3m^2-5=0$; $x_1=-3$. $\left[m=-\frac{1}{6} \vee m=-1\right]$

669 $x^2-2(k+1)x+4k=0$; non esistono soluzioni reali. $[\nexists\, k \in \mathbb{R}]$

Condizioni che riguardano la somma delle radici

ESERCIZIO GUIDA

670 Nell'equazione di secondo grado, nell'incognita x,

$$kx^2+(4k-1)x+4k=0, \quad \text{con } k \neq 0,$$

determiniamo il valore del parametro k tale che la somma s delle radici sia $-\frac{9}{2}$.

Dobbiamo porre due condizioni:

1. $\Delta \geq 0$, affinché le radici siano reali;

2. $s=-\frac{b}{a}=-\frac{9}{2}$.

1. Calcoliamo Δ:

$$\Delta=(4k-1)^2-4\cdot k\cdot 4k=$$
$$=16k^2-8k+1-16k^2=-8k+1.$$

Poniamo $\Delta \geq 0$:

$$-8k+1 \geq 0 \rightarrow -8k \geq -1 \rightarrow k \leq \frac{1}{8}.$$

2. Calcoliamo la somma delle radici $s=-\frac{b}{a}$:

$$s=-\frac{4k-1}{k}.$$

Poniamo $s=-\frac{9}{2}$:

$$-\frac{4k-1}{k}=-\frac{9}{2} \rightarrow 2(4k-1)=9k \rightarrow$$
$$\rightarrow -k-2=0 \rightarrow k=-2.$$

Poiché $-2<\frac{1}{8}$, il valore trovato per k è accettabile.

Per ogni equazione di secondo grado nell'incognita x determina i valori del parametro k tali che sia soddisfatta la condizione scritta a fianco riguardante la somma s delle radici.

671 $kx^2+(4k+2)x+4k+5=0$; radici opposte $(x_1=-x_2)$. $\left[k=-\frac{1}{2}\right]$

672 $5kx^2-2(k-1)x+\frac{1}{5}k=0$, con $k \neq 0$; radici opposte. $[k=1$ non accettabile$]$

673 $(4k-1)x-4x^2-k^2=0$; $s=-\frac{5}{4}$. $[k=-1]$

674 $x^2-2(k+1)x+4k=0$; $s>10$. $[k>4]$

675 $x^2-4(k-3)x+4(k^2-2k)=0$; $s>8$. $[k>5$ non accettabile$]$

676 $(9k-1)x^2-12(k-2)x+3+4k=0$, con $k \neq \frac{1}{9}$; $s=4$. $\left[k=-\frac{5}{6}\right]$

Condizioni che riguardano il prodotto delle radici

ESERCIZIO GUIDA

677 Data l'equazione parametrica di secondo grado, nell'incognita x,

$(k-1)x^2 - 2kx + k + 3 = 0, \quad \text{con } k \neq 1,$

determiniamo i valori del parametro per i quali l'equazione ha:
a) le radici reciproche;
b) il prodotto p delle radici uguale a $\frac{1}{2}$.

Calcoliamo per quali valori di k le radici sono reali, ponendo $\frac{\Delta}{4} \geq 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - (k-1)(k+3) = k^2 - k^2 - 3k + k + 3 = -2k + 3$$

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \Rightarrow -2k + 3 \geq 0 \to 2k \leq 3 \to k \leq \frac{3}{2}.$$

a) Le radici sono **reciproche** se $x_1 = \frac{1}{x_2}$, ossia se $\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = 1}$, cioè se $p = 1$.

Poniamo $p = \frac{c}{a} = 1$:

$$\frac{k+3}{k-1} = 1 \to k + 3 = k - 1 \to 3 = -1 \text{ impossibile}.$$

Non esiste alcun valore di k tale che le radici siano reciproche.

b) Poniamo $p = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$:

$$\frac{k+3}{k-1} = \frac{1}{2} \to 2(k+3) = k - 1 \to 2k + 6 = k - 1 \to k = -7.$$

Poiché $-7 \leq \frac{3}{2}$, il valore trovato per k è accettabile.

Per ogni equazione parametrica nell'incognita x determina i valori del parametro affinché le radici siano reali e siano soddisfatte le condizioni scritte sotto. Il prodotto delle radici è indicato con p.

678 $x^2 - kx + 4k = 0$;
a) le radici sono reciproche;
b) $p = 12$.

$\left[\text{a) } k = \frac{1}{4} \text{ non accettabile; b) } k = 3 \text{ non accettabile}\right]$

679 $(k-2)x^2 - 2kx + k - 3 = 0, \quad (k \neq 2)$;
a) le radici sono reciproche;
b) $p = -1$;
c) $p > \frac{1}{2}$.

$\left[\text{a) } \nexists k \in \mathbb{R}; \text{ b) } k = \frac{5}{2}; \text{ c) } \frac{6}{5} \leq k < 2 \vee k > 4\right]$

680 $x^2 - 8x + 4m - 5 = 0$;
a) $p = -5$;
b) $p > 1$;
c) le radici sono concordi.

$\left[\text{a) } m = 0; \text{ b) } \frac{3}{2} < m \leq \frac{21}{4}; \text{ c) } \frac{5}{4} < m \leq \frac{21}{4}\right]$

681 $3x^2 - (2k - 3)x - 2k = 0$;
a) $x_1 = \frac{1}{x_2}$;
b) $p = -\frac{2}{3}$.

$\left[\text{a) } k = -\frac{3}{2}; \text{ b) } k = 1\right]$

682 $2x^2 - 7x + 4k = 0$;
a) le radici sono reciproche;
b) le radici sono concordi;
c) $p = -10$.

$\left[\text{a) } k = \frac{1}{2}; \text{ b) } 0 < k \leq \frac{49}{32}; \text{ c) } k = -5\right]$

683 $kx^2 - 4kx + 4k - 1 = 0$, con $k \neq 0$;
a) le radici sono reciproche;
b) $p = 9$;
c) le radici sono discordi.

$\left[\text{a) } k = \frac{1}{3}; \text{ b) } k = -\frac{1}{5}, \text{ non accettabile; c) } 0 < k < \frac{1}{4}\right]$

Alcune applicazioni di somma e prodotto delle radici

ESERCIZIO GUIDA

684 Data l'equazione parametrica, nell'incognita x,

$$4x^2 - 2(k + 2)x + 2k = 0,$$

determiniamo i valori di k per i quali sono soddisfatte le seguenti condizioni:
a) la somma dei reciproci delle radici sia uguale a 6;
b) la somma dei quadrati delle radici sia uguale a 10;
c) la somma dei reciproci dei quadrati delle radici sia uguale a 2;
d) la somma dei cubi delle radici sia uguale a 2.

Imponiamo che le radici siano reali:

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \quad \rightarrow \quad (k + 2)^2 - 8k =$$
$$= k^2 + 4k + 4 - 8k = k^2 - 4k + 4 =$$
$$= (k - 2)^2 \geq 0$$

condizione verificata $\forall k \in \mathbb{R}$.

a) La somma dei reciproci delle radici è:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{s}{p}.$$

$$s = \frac{k+2}{2}; \quad p = \frac{k}{2}.$$

Poniamo $\frac{s}{p} = 6$, con $p \neq 0$, ossia $k \neq 0$.

$$\frac{s}{p} = \frac{\frac{k+2}{2}}{\frac{k}{2}} = \frac{k+2}{2} \cdot \frac{2}{k} = \frac{k+2}{k} = 6$$

$$k + 2 = 6k \quad \rightarrow \quad 5k = 2 \quad \rightarrow \quad k = \frac{2}{5}.$$

b) La somma dei quadrati delle radici è:

$x_1^2 + x_2^2$.

Poiché

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$

possiamo scrivere:

$\boldsymbol{x_1^2 + x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = s^2 - 2p.}$

Poniamo la condizione $s^2 - 2p = 10$:

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{k}{2} = 10$$

$$\frac{k^2 + 4k + 4}{4} - k = 10$$

$$k^2 + 4k + 4 - 4k = 40$$

$k^2 = 36 \quad \rightarrow \quad k = \pm 6$.

c) $$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} =$$

$$= \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{s^2 - 2p}{p^2}.$$

Poniamo la condizione $\dfrac{s^2 - 2p}{p^2} = 2$;

deve essere $p^2 \neq 0$, ossia $k \neq 0$:

$$\frac{\dfrac{(k+2)^2}{4} - 2 \cdot \dfrac{k}{2}}{\left(\dfrac{k}{2}\right)^2} = 2$$

$$\frac{k^2 + 4k + 4 - 4k}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{k^2} = 2$$

$\dfrac{k^2 + 4}{k^2} = 2 \quad \rightarrow \quad k^2 + 4 = 2k^2 \quad \rightarrow \quad k^2 = 4$

$k = \pm 2$.

d) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 =$

$= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = s^3 - 3ps$.

Poniamo la condizione $s^3 - 3ps = 2$:

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{k+2}{2} \cdot \frac{k}{2} = 2$$

$$\frac{k^3 + 6k^2 + 12k + 8}{8} - \frac{3k(k+2)}{4} = 2$$

$$k^3 + 6k^2 + 12k + 8 - 6k(k+2) = 16$$

$$k^3 + 6k^2 + 12k + 8 - 6k^2 - 12k = 16$$

$k^3 - 8 = 0$.

Scomponiamo la differenza dei cubi:

$(k - 2)(k^2 + 2k + 4) = 0$, da cui

- $k - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad k = 2$;
- $k^2 + 2k + 4 = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad \nexists\, k \in \mathbb{R}$, perché $\dfrac{\Delta}{4} = 1 - 4 < 0$.

Per ogni equazione parametrica nell'incognita *x* determina i valori del parametro affinché le radici siano reali e siano soddisfatte le condizioni scritte sotto.

685 $(k - 1)x^2 - 2(k + 1)x + k + 2 = 0$, con $k \neq 1$;
a) la somma delle radici è nulla;
b) la somma dei reciproci delle radici è uguale a 8.
$\left[\text{a) } k = -1; \text{ b) } k = -\dfrac{7}{3}\right]$

686 $kx^2 + 2(1 - k)x - 3 + k = 0$, con $k \neq 0$;
a) la somma delle radici è -4;
b) la somma dei reciproci delle radici è 3.
$\left[\text{a) } k = \dfrac{1}{3}; \text{ b) } k = 7\right]$

687 $x^2 - 2(k + 1)x + 4k = 0$;
a) la somma dei reciproci delle radici è nulla;
b) la somma dei quadrati delle radici è 12.
$[\text{a) } k = -1; \text{ b) } k = \pm\sqrt{2}]$

688 $(2m-3)x^2-4mx+2m-1=0$, con $m \neq \frac{3}{2}$;
a) la somma dei reciproci delle radici è uguale a 4;
b) la somma dei reciproci delle radici è nulla. [a) $m=1$; b) $m=0$ non accettabile]

689 $3mx^2-2(3m-1)x-3(1-m)=0$, con $m \neq 0$;
a) la somma dei reciproci delle radici è $\frac{1}{3}$;
b) la somma dei reciproci dei quadrati delle radici è 2. $\left[\text{a) } m=\frac{1}{5}\text{; b) } m=\frac{7}{15}\right]$

690 $kx^2-(2k+1)x+k+1=0$;
a) la somma dei quadrati delle radici è uguale a 6;
b) la somma dei reciproci delle radici è uguale a -2;
c) la somma dei cubi delle radici è uguale a 2. $\left[\text{a) } k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\text{; b) } k=-\frac{3}{4}\text{; c) } \nexists k \in \mathbb{R}\right]$

691 $x^2-(m+1)x+m=0$;
a) la somma dei reciproci dei quadrati delle radici è $\frac{5}{4}$;
b) la somma dei cubi delle radici è 9;
c) la somma dei cubi dei reciproci delle radici è 28. $\left[\text{a) } m=\pm 2\text{; b) } m=2\text{; c) } m=\frac{1}{3}\right]$

692 $x^2-2x+k=0$;
a) la somma dei quadrati delle radici è 4;
b) la somma dei cubi delle radici è -12;
c) la somma dei reciproci dei cubi delle radici è 0.
$\left[\text{a) } k=0\text{; b) } k=\frac{10}{3}\text{ non accettabile; c) } k=\frac{4}{3}\text{ non accettabile}\right]$

ESERCIZIO GUIDA

693 Data l'equazione parametrica, nell'incognita x,

$$x^2-4x+2m=0,$$

determiniamo per quali valori di m:
a) una radice è doppia dell'altra;
b) il rapporto fra le radici è uguale a -3.

Calcoliamo $\frac{\Delta}{4}$ per imporre che le radici siano reali:

$$\frac{\Delta}{4}=4-2m \geq 0 \quad \rightarrow \quad m \leq 2.$$

a) Una radice è doppia dell'altra: $x_1=2x_2$.

Scriviamo la somma e il prodotto delle radici in funzione di x_2:

$$s=x_1+x_2=2x_2+x_2=3x_2, \quad p=x_1 \cdot x_2=2x_2 \cdot x_2=2x_2^2.$$

Scriviamo s e p in funzione dei coefficienti dell'equazione:

$$s=4, \quad p=2m.$$

Uguagliamo fra loro le due espressioni trovate per s e le due espressioni trovate per p, ottenendo il sistema di due equazioni nelle incognite x_2 e m:

$$\begin{cases} 3x_2 = 4 \\ \cancel{2}x_2^2 = \cancel{2}m \end{cases}$$

Ricaviamo x_2 nella prima equazione e sostituiamo il valore nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{4}{3} \\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = m \end{cases}$$

$m = \dfrac{16}{9}$ è accettabile perché minore di 2.

b) Il rapporto fra le radici è uguale a -3:

$$\frac{x_1}{x_2} = -3$$

oppure, moltiplicando i due membri per $x_2 (\neq 0)$:

$$x_1 = -3x_2.$$

Scriviamo s e p in funzione di x_2:

$$s = x_1 + x_2 = -3x_2 + x_2 = -2x_2,$$
$$p = x_1 \cdot x_2 = -3x_2 \cdot x_2 = -3x_2^2.$$

Abbiamo già scritto s e p in funzione dei coefficienti:

$$\begin{cases} s = 4 \\ p = 2m \end{cases}$$

Uguagliamo le espressioni trovate per s e per p:

$$\begin{cases} -2x_2 = 4 \\ -3x_2^2 = 2m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = -2 \\ -3 \cdot (-2)^2 = 2m \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -12 = 2m \quad \rightarrow \quad m = -6.$$

$m = -6$ è accettabile perché minore di 2.

Per ogni equazione parametrica nell'incognita x determina i valori del parametro affinché siano soddisfatte le condizioni scritte sotto.

694 $x^2 - 2x + 5m = 0$;
a) una radice è doppia dell'altra;
b) una radice è $\dfrac{1}{3}$ dell'altra. $\left[\text{a) } m = \dfrac{8}{45}; \text{ b) } m = \dfrac{3}{20}\right]$

695 $x^2 - 6x + 3k = 0$;
a) una radice è la metà dell'altra;
b) una radice è sestupla dell'altra. $\left[\text{a) } k = \dfrac{8}{3}; \text{ b) } k = \dfrac{72}{49}\right]$

696 $x^2 - 4x + 2m + 6 = 0$;
a) una radice è quadrupla dell'altra;
b) il rapporto tra le radici è -2. $\left[\text{a) } m = -\dfrac{43}{25}; \text{ b) } m = -19\right]$

697 $x^2 - 4mx + 4m^2 - 1 = 0$;
a) una radice è doppia dell'altra;
b) una radice è quadrupla dell'altra. $\left[\text{a) } m = \pm\dfrac{3}{2}; \text{ b) } m = \pm\dfrac{5}{6}\right]$

698 $4x^2 - 4kx + k^2 - 1 = 0$;
a) il rapporto fra le radici è 3;
b) una radice è cinque volte maggiore dell'altra. $\left[\text{a) } k = \pm 2; \text{ b) } k = \pm\dfrac{3}{2}\right]$

699 $12x^2 - 2(k-3)x - k = 0$;
a) una radice è tripla dell'altra;
b) il rapporto tra le radici è $\dfrac{1}{6}$. $\left[\text{a) } k = -9 \vee k = -1; \text{ b) } k = -18 \vee k = -\dfrac{1}{2}\right]$

700 $x^2 - 2kx + k^2 - 2 = 0$;
a) una radice è sestupla dell'altra;
b) il rapporto tra le radici è 9. $\left[\text{a) } k = \pm\dfrac{7}{5}\sqrt{2}; \text{ b) } k = \pm\dfrac{5}{4}\sqrt{2}\right]$

RIEPILOGO LE EQUAZIONI PARAMETRICHE DI SECONDO GRADO

TEST

701 Per quali valori di k l'equazione $x^2 - 2x + k = 0$ ammette due radici reali positive?

A $k > 0$
B $k < 0$
C $\nexists k \in \mathbb{R}$
D $k > 2$
E $0 < k \leq 1$

702 Data l'equazione parametrica

$$(k^2 + 1)\, x^2 - (2k - 3)\, x + 1 = 0,$$

per quali valori reali di k il prodotto delle radici è uguale a $\frac{1}{5}$?

A $k = \frac{1}{4}$
B $k = -2$
C $k = \pm 2$
D $k = \frac{5}{12}$
E $k = \frac{3}{2}$

703 Considera l'equazione parametrica $3x^2 - 6x + 2k + 1 = 0$. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la somma delle radici è uguale al loro prodotto?

A $k = 3$
B $k = 2$
C $k = 0$
D $\nexists k \in \mathbb{R}$
E $k = \frac{5}{2}$

704 ASSOCIA Considera le seguenti cinque condizioni in cui s e p indicano rispettivamente la somma e il prodotto delle radici di un'equazione parametrica di secondo grado:

1. $p = 3s$;
2. $\frac{1}{s^2} + \frac{1}{p^2} = 16$;
3. $3s^2 = 16p$;
4. $s = 0$;
5. $\frac{s^2 - 2p}{p^2} = 16$.

Tre delle condizioni si riferiscono ai quesiti seguenti. Associa alle condizioni i quesiti corrispondenti.

a) «Determina per quali valori del parametro le radici sono opposte».
b) «Determina per quali valori del parametro la somma dei reciproci dei quadrati delle radici è uguale a 16».
c) «Determina per quali valori del parametro una radice è tripla dell'altra».

705 Nell'equazione $2x^2 - 7x + 3 = 0$, senza calcolare le soluzioni, trova:

a) $(x_2 - x_1)^2 - 3x_1 x_2$;
b) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

$\left[\text{a) } \frac{7}{4}; \text{ b) } \frac{37}{6}\right]$

Per ogni equazione parametrica nell'incognita x determina i valori del parametro relativi alle condizioni poste.

706 $(b - 3)x^2 - 2bx + b - 1 = 0$, con $b \neq 3$;
a) una radice è uguale a $\frac{1}{2}$;
b) le due radici sono reali coincidenti.

$\left[\text{a) } b = 7; \text{ b) } b = \frac{3}{4}\right]$

707 $3x^2 - 2(3k + 2)x + 8k = 0$;
a) le soluzioni sono reali e distinte;
b) una radice è uguale a 1.

$\left[\text{a) } k \neq \frac{2}{3}; \text{ b) } k = \frac{1}{2}\right]$

708 $(9k - 2)x^2 - (6k + 1)x + k = 0$, con $k \neq \frac{2}{9}$;
a) una radice è uguale a -2;
b) la somma delle radici vale $\frac{1}{3}$.

$\left[\text{a) } k = \frac{6}{49}; \text{ b) } k = -\frac{5}{9} \text{ non accettabile}\right]$

709 $kx^2 - (2k - 1)x + k - 3 = 0$, con $k \neq 0$;
a) la somma delle radici è minore di 2;
b) il prodotto delle radici è uguale a 4.

[a) $k > 0$; b) $k = -1$ non accettabile]

710 $x^2 - 2(m-1) = 0$;
a) le radici sono reciproche;
b) $p = 0$;
c) le radici sono concordi.
$\left[\text{a) } m = \frac{1}{2} \text{ non accettabile; b) } m = 1\text{; c) impossibile}\right]$

711 $(k-1)x^2 - 2(k+1)x + k + 2 = 0$;
a) la somma delle radici è positiva;
b) il prodotto delle radici è negativo.
$[\text{a) } -3 \leq k < -1 \vee k > 1\text{; b) } -2 < k < 1]$

712 $9ax^2 - 6ax - 3 + a = 0$, con $a \neq 0$;
a) le radici sono reciproche;
b) le radici sono discordi;
c) $p \leq 3$;
d) $x_1 = -1$.
$\left[\text{a) } a = -\frac{3}{8} \text{ non accettabile; b) } 0 < a < 3\text{; c) } a \geq 0\text{; d) } a = \frac{3}{16}\right]$

713 $mx^2 + 2(3-m)x - 12 = 0$, con $m \neq 0$;
a) le radici sono reali;
b) le radici sono uguali;
c) le radici sono opposte;
d) le radici sono reciproche;
e) una radice è nulla.
$[\text{a) } \forall m \in \mathbb{R}, m \neq 0\text{; b) } m = -3\text{; c) } m = 3\text{; d) } m = -12\text{; e) } \nexists\, m \in \mathbb{R}]$

714 $mx^2 - 6mx + 9m - 2 = 0$, con $m \neq 0$;
a) le radici sono reciproche;
b) le radici sono concordi;
c) le radici sono discordi;
d) la somma dei quadrati delle radici è uguale a 22.
$\left[\text{a) } m = \frac{1}{4}\text{; b) } m > \frac{2}{9}\text{; c) } 0 < m < \frac{2}{9}\text{; d) } m = 1\right]$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E41

715 $(k-3)x^2 - 2kx + k + 1 = 0$;
a) le soluzioni sono reali concordi;
b) $|x_1 + x_2| > 4$;
c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$.

716 $(1+k)x^2 - 2x - k + 1 = 0$, con $k \neq -1$;
a) le radici sono reciproche;
b) le radici sono discordi;
c) $p = 8$;
d) $s > 0$.
$\left[\text{a) } k = 0\text{; b) } k < -1 \vee k > 1\text{; c) } k = -\frac{7}{9}\text{; d) } k > -1\right]$

717 $x^2 - 2(k-2)x + k^2 - 3k = 0$;
a) le soluzioni non sono reali;
b) una radice è nulla;
c) la somma delle radici è positiva;
d) il prodotto delle radici è negativo;
e) $x_1^2 + x_2^2 = 16$.
$[\text{a) } k > 4\text{; b) } k = 0 \vee k = 3\text{; c) } 2 < k \leq 4\text{; d) } 0 < k < 3\text{; e) } k = 0, k = 5 \text{ non accettabile}]$

718 $(a+1)x^2+2ax+a-1=0, \quad \text{con } a \neq -1$;
a) una soluzione è uguale a 2;
b) le soluzioni sono reali e distinte;
c) la somma dei reciproci delle radici è 4;
d) il quadrato della somma delle soluzioni è maggiore del prodotto delle soluzioni moltiplicato per 4;
e) le soluzioni sono opposte.

$\left[\text{a) } a=-\frac{1}{3}; \text{ b) } \forall a \in \mathbb{R}; \text{ c) } a=\frac{2}{3}; \text{ d) } \forall a \in \mathbb{R}; \text{ e) } a=0\right]$

719 $x^2-2x+m=0$;
a) le radici sono uguali;
b) le radici sono reali e distinte;
c) una radice è nulla;
d) la somma delle radici è positiva;
e) il prodotto delle radici è positivo.

$[\text{a) } m=1; \text{ b) } m<1; \text{ c) } m=0; \text{ d) } m \leq 1; \text{ e) } 0<m \leq 1]$

720 $(k-3)x^2-2(k+1)x+k=0, \quad \text{con } k \neq 3$;
a) le soluzioni sono reali;
b) la somma delle radici è positiva;
c) il prodotto delle radici è uguale al triplo della loro somma;
d) le radici sono discordi.

$\left[\text{a) } k \geq -\frac{1}{5}, k \neq 3; \text{ b) } k>3; \text{ c) } k=-\frac{6}{5}; \text{ d) } 0<k<3\right]$

721 $(4-k^2)x^2-4x+1=0, \quad \text{con } k \neq \pm 2$;
a) le radici sono reali;
b) $x_1=x_2$;
c) $x_1=-x_2$;
d) $x_1=-2$;
e) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=10$.

$\left[\text{a) } \forall k \in \mathbb{R}, k \neq \pm 2; \text{ b) } k=0; \text{ c) } \nexists k \in \mathbb{R}; \text{ d) } k=\pm\frac{5}{2}; \text{ e) } k=\pm 1\right]$

722 $x^2-4x+4-k^2=0$;
a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4$;
b) $x_1^2+x_2^2=10$;
c) $x_1^3+x_2^3=40$.

$[\text{a) } k=\pm\sqrt{3}; \text{ b) } k=\pm 1; \text{ c) } k=\pm\sqrt{2}]$

723 $2x^2+(3-2k)x-3k=0$;
a) le radici sono reali;
b) le radici sono negative;
c) la differenza delle radici è 1;
d) il prodotto dei reciproci delle radici è $\frac{1}{3}$;
e) una radice è doppia dell'altra.

$\left[\text{a) } \forall k \in \mathbb{R}; \text{ b) } k<0; \text{ c) } k=-\frac{5}{2} \vee k=-\frac{1}{2}; \text{ d) } k=-2; \text{ e) } k=-3 \vee k=-\frac{3}{4}\right]$

724 $4kx^2 - 2(k+1)x + 1 = 0, \quad \text{con } k \neq 0;$

a) le radici sono reali;

b) $x_1 = 2 - x_2$;

c) $|x_1 + x_2| = 4$;

d) $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} = -\frac{1}{3}$;

e) $x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 = 0$.

$\left[\text{a) } \forall k \in \mathbb{R}, k \neq 0; \text{b) } k = \frac{1}{3}; \text{c) } k = -\frac{1}{9} \vee k = \frac{1}{7}; \text{d) } k = -\frac{19}{18}; \text{e) } k = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}\right]$

725 $m^2x^2 + (1-4m)x + 4 = 0, \quad \text{con } m \neq 0;$

a) le radici sono reali;

b) una radice è uguale a -1;

c) il prodotto delle radici è minore di 0;

d) le radici sono opposte;

e) la somma dei reciproci delle radici è uguale a $-\frac{3}{2}$.

$\left[\text{a) } m \leq \frac{1}{8}, m \neq 0; \text{b) } m = -1 \vee m = -3; \text{c) } \nexists\, m \in \mathbb{R}; \text{d) } m = \frac{1}{4} \text{ non accettabile; e) } m = -\frac{5}{4}\right]$

726 $kx^2 - 2x + 1 = 0, \quad \text{con } k \neq 0;$

a) le radici sono reali e distinte;

b) una radice è uguale a -2;

c) le radici sono negative;

d) le radici sono concordi;

e) la somma dei quadrati delle radici è uguale a 2;

f) il rapporto fra le radici è uguale a 3.

$\left[\text{a) } k < 1, k \neq 0; \text{b) } k = -\frac{5}{4}; \text{c) } \nexists\, k \in \mathbb{R}; \text{d) } 0 < k \leq 1; \text{e) } k = -2 \vee k = 1; \text{f) } k = \frac{3}{4}\right]$

727 Nell'equazione $4x^2 + 2kx - m = 0$ trova k e m, sapendo che le soluzioni sono coincidenti e il loro prodotto vale 12. Calcola poi le due soluzioni. $[m = -48, k = \pm 8\sqrt{3}, x_{1,2} = -2\sqrt{3}, x_{3,4} = 2\sqrt{3}]$

728 Nell'equazione $2kx^2 + (m-1)x + k + 2m = 0$, $k \neq 0$, trova k e m, sapendo che la somma delle soluzioni è uguale al loro prodotto e che una soluzione vale 2.

$\left[k = \frac{2}{23}, m = \frac{7}{23}\right]$

729 Determina k e m nell'equazione $x^2 - (k+3)x + 2m - 1 = 0$, sapendo che $x_1 + x_2 = \frac{1}{5}x_1x_2$ e che $x_1 = 3$.

$\left[k = -\frac{15}{2}, m = -\frac{43}{4}\right]$

730 Nell'equazione parametrica $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b, c parametri, $a > 0$, $b = -2$ e x incognita, la somma dei reciproci delle soluzioni è uguale a 4.
Determina per quali valori dei parametri le soluzioni sono reali.

$\left[0 < a \leq 2, c = \frac{1}{2}\right]$

7. La funzione quadratica e la parabola

Teoria a pag. 880

RIFLETTI SULLA TEORIA

731 VERO O FALSO?

a) La parabola di equazione $y = 2x^2 + 1$ ha il vertice sull'asse y. V F

b) Il punto $(1; 2)$ appartiene alla parabola di equazione $y = -x^2 + 2x - 3$. V F

c) La parabola di equazione $y = -2x^2 + x$ rivolge la concavità verso il basso. V F

d) Se nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ si ha $b = 0$, la parabola associata ha il vertice nell'origine degli assi. V F

e) Tutte le parabole che hanno il vertice nell'origine hanno equazione del tipo $y = ax^2$, con $a \neq 0$. V F

732 VERO O FALSO?

La funzione quadratica

$$y = x^2 - 4x + 12$$

rappresenta una parabola che:

a) volge la concavità verso il basso. V F

b) passa per l'origine degli assi. V F

c) ha il vertice di ascissa 2. V F

d) passa per il punto $(-1; 17)$. V F

e) ha come zeri $x_1 = -6$ e $x_1 = 2$. V F

ESERCIZI

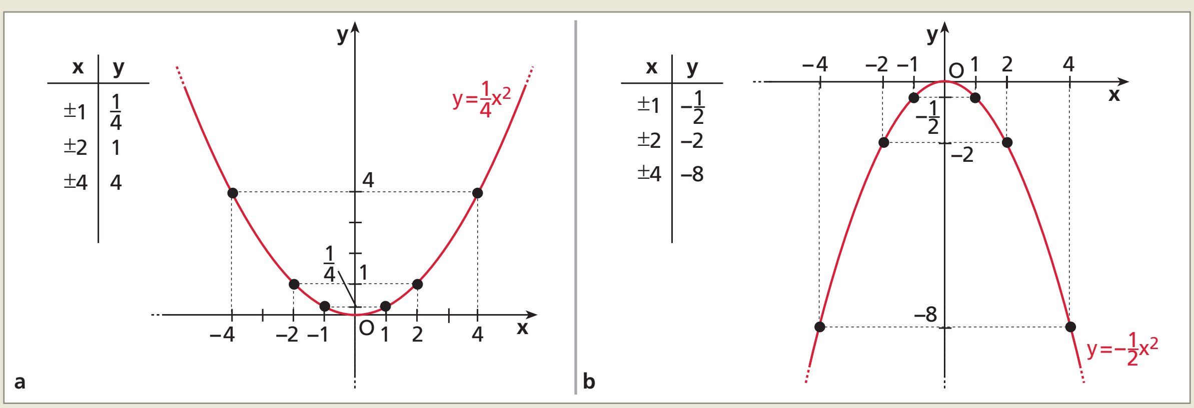
La funzione $y = ax^2$

ESERCIZIO GUIDA

733 Tracciamo il grafico delle seguenti funzioni:

a) $y = \dfrac{1}{4}x^2$; b) $y = -\dfrac{1}{2}x^2$.

Sono due funzioni quadratiche del tipo $y = ax^2$, quindi i grafici sono parabole con vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse y.
La prima ha $a > 0$, quindi ha concavità rivolta verso l'alto; la seconda ha $a < 0$, quindi ha concavità verso il basso. Disegniamo le due curve, compilando una tabella con le coordinate di alcuni punti.



Traccia nello stesso piano cartesiano i grafici delle seguenti funzioni.

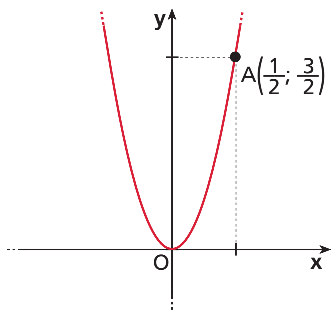
734 $y=x^2, \quad y=\frac{1}{2}x^2, \quad y=4x^2.$

735 $y=-x^2, \quad y=-2x^2, \quad y=-4x^2.$

736 Per quali valori di k la parabola di equazione $y=(k-3)x^2$ rivolge la concavità verso l'alto? Disegna la parabola che si ottiene per $k=6$. $[k>3]$

737 Verifica se i punti $A(2;1)$ e $B(-3;2)$ appartengono alla parabola di equazione $y=\frac{1}{4}x^2$.

738 Che equazione ha la parabola della figura?



$[y=6x^2]$

La funzione $y=ax^2+bx+c$

Nel sito: ▶ 10 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

739 Tracciamo il grafico della funzione:

$$y=-x^2-5x-6.$$

Il grafico è una parabola il cui asse di simmetria ha equazione:

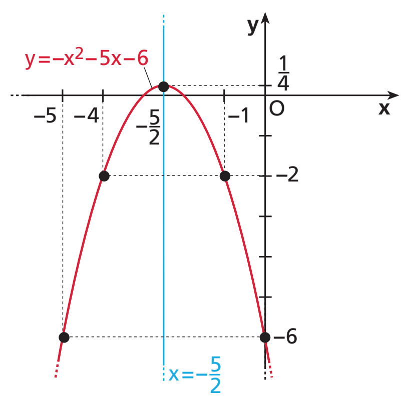
$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-5}{-2}=-\frac{5}{2};$$

Il vertice V ha ascissa $x_V=-\frac{5}{2}$ e ordinata

$$y_V=f(x_V)=f\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{25}{4}+\frac{25}{2}-6=$$
$$=\frac{-25+50-24}{4}=\frac{1}{4}.$$

Compiliamo una tabella con le coordinate di alcuni punti e tracciamo il grafico.

x	y
$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$
−1	−2
−4	−2
0	−6
−5	−6



Traccia il grafico delle seguenti funzioni, determinando le coordinate del vertice e di almeno cinque punti.

740 $y=x^2-4x$ $[V(2;-4)]$

741 $y=-x^2+2x-1$ $[V(1;0)]$

742 $y=x^2+3x+2$ $\left[V\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)\right]$

743 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-1$ $\left[V\left(1;-\frac{1}{2}\right)\right]$

744 $y=2x^2-8x+3$ $[V(2;-5)]$

745 $y=3x^2-5x+2$ $\left[V\left(\frac{5}{6};-\frac{1}{12}\right)\right]$

746 $y=-4x^2+7x-3$ $\left[V\left(\frac{7}{8};\frac{1}{16}\right)\right]$

747 $y=-5x^2+4x+1$ $\left[V\left(\frac{2}{5};\frac{9}{5}\right)\right]$

748 Indica quali dei seguenti punti appartengono alla parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 4$.

$A(2; 2)$, $B(-1; 10)$, $C\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$, $D(0; 4)$.

749 Determina il valore di a per cui la parabola di equazione $y = ax^2 + x - 1$ ha il vertice di ascissa 2. Rappresenta graficamente la parabola ottenuta. $\left[a = -\frac{1}{4}\right]$

750 Per ognuna delle parabole con le seguenti equazioni, indica l'equazione dell'asse di simmetria, le coordinate del vertice e se la concavità è rivolta verso l'alto o verso il basso.

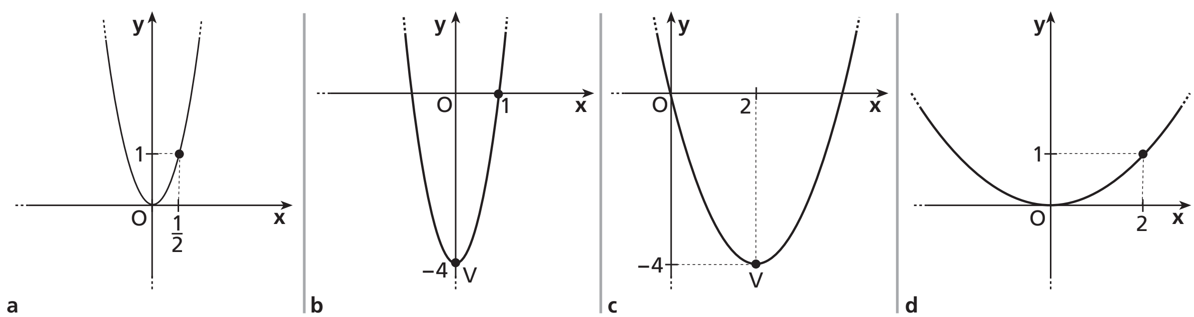
a) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x$;

b) $y = x^2 - 2x + 4$;

c) $y = -2x^2 + 6x$;

d) $y = 3x^2 - 2$.

751 **ASSOCIA** a ogni parabola la relativa equazione.



1. $y = \frac{1}{4}x^2$ 2. $y = x^2 - 4x$ 3. $y = 4x^2 - 4$ 4. $y = 4x^2$

752 Date le equazioni

$y = x(x-2) + 1$, $y = (x-1)(x+1)$,
$y = 2x^2 - 3$, $y = (x-3)^2$, $3x^2 - x^3$,

quale di esse non è rappresentata da una parabola?

753 **ASSOCIA** a ogni equazione di parabola il relativo vertice.

1. $y = 2x^2 - 4x + 3$ A. $V_1(2; 5)$
2. $y = -x^2 + 4x + 1$ B. $V_2(1; 1)$
3. $y = 2x^2 + 8x$ C. $V_3(-2; 0)$
4. $y = x^2 + 4x + 4$ D. $V_4(-2; -8)$

754 Quali delle seguenti parabole passano per l'origine? Quale parabola ha il vertice sull'asse x?

a) $y = -x^2 + 2x$
b) $y = 3x^2 + x - 1$
c) $y = x^2 - 4x$
d) $y = x^2 - 4x + 4$

755 Determina il valore di b per cui la parabola di equazione $y = x^2 - 3bx + 1$ ha il vertice sull'asse y e poi rappresenta il grafico della parabola. $[b = 0]$

756 Trova per quale valore di a la parabola di equazione $y = ax^2 + 2x - \frac{1}{2}$ ha il vertice sull'asse x. Rappresenta il suo grafico. $[a = -2]$

757 Trova per quale valore di c la parabola di equazione $y = -2x^2 + x + c$ passa per il punto $A(1; 3)$. $[4]$

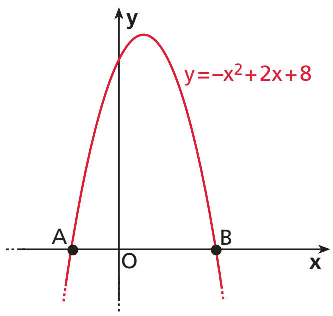
758 Indica per quale valore di b la parabola di equazione $y = 4x^2 + bx + 3$ passa per il punto $P(1; -1)$. $[-8]$

759 Trova per quali valori di a e b la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + 1$ passa per $A(-1; 1)$ e $B(2; -5)$. $[-1; -1]$

Gli zeri della funzione quadratica

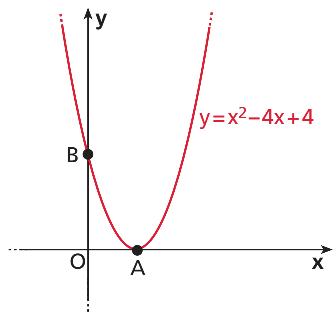
760 Rappresenta il grafico della parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$ e trova quali suoi punti hanno ordinata nulla. $[x_1 = -1, x_2 = 3]$

761 La parabola del grafico ha equazione:
$y = -x^2 + 2x + 8$.
Trova le coordinate dei punti A e B.



$[A(-2; 0), B(4; 0)]$

762 La parabola del grafico ha equazione:
$y = x^2 - 4x + 4$.
Trova le coordinate dei punti A e B.



$[A(2; 0), B(0; 4)]$

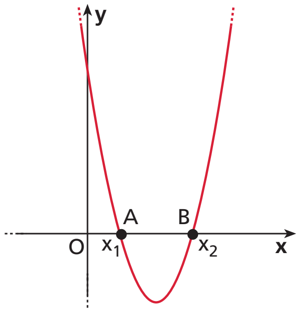
763 Trova gli zeri della funzione quadratica $y = x^2 - 4x$. Cosa rappresentano graficamente i valori trovati? $[x_1 = 0, x_2 = 4]$

764 Disegna il grafico della parabola di equazione $y = 2(x + 2)(x - 3)$, dopo aver determinato le coordinate del vertice e i punti di intersezione con gli assi cartesiani. $\left[V\left(\frac{1}{2}; -\frac{25}{2}\right); A(-2; 0), B(3; 0), C(0; -12)\right]$

765 Data la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}(x - 1)(x - 5)$, trova l'area del triangolo ABC che ha come vertici i punti di intersezione della parabola con gli assi. $[5]$

766 La parabola di equazione $y = (x - 2)(x - 6)$ ha vertice V, mentre A e B sono le sue intersezioni con l'asse x. Determina il perimetro del triangolo AVB. $[4(\sqrt{5} + 1)]$

767



Della parabola data in figura sappiamo che $x_1 + x_2 = 4$ e che $x_1 x_2 = 3$. Trova l'equazione della parabola sapendo anche che il coefficiente a di x^2 è uguale a 2. Determina inoltre x_1 e x_2.

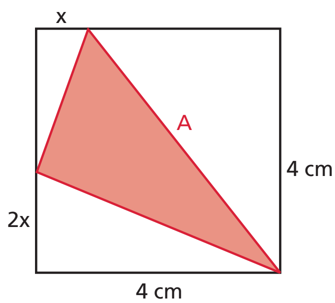
$[y = 2(x^2 - 4x + 3); x_1 = 1, x_2 = 3]$

La funzione quadratica e i problemi

768 Trova per quali valori di a la parabola di equazione $y = -x^2 + (4a+1)x - 4a^2$ interseca l'asse x in due punti distinti.

$\left[a > -\frac{1}{8}\right]$

769



a) Utilizzando i dati della figura dimostra che l'area colorata vale:
$A = x^2 - 4x + 8$.

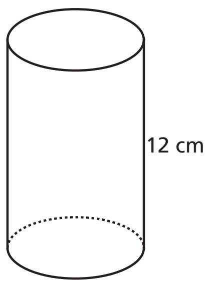
b) Rappresenta graficamente la funzione A.

c) Trova per quale valore di x l'area misura 5 cm^2.

d) Esiste un valore di x per cui l'area è nulla?

[c) 1; d) no]

770



Una lattina di aranciata ha forma cilindrica e altezza 12 cm.

a) Dimostra che, se il raggio di base è variabile e uguale a x, il suo volume è $V = 12\pi x^2$.

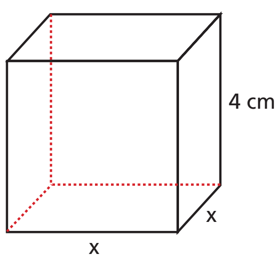
b) Rappresenta graficamente la funzione quadratica che hai ottenuto.

c) Trova per quale valore del raggio la lattina contiene 600 cm^3 di aranciata.

d) Se raddoppia il raggio, la quantità di aranciata che può essere contenuta nella lattina raddoppia?

[c) $x = 3{,}99$ cm; d) no]

771



Considera la scatola di cartone della figura.

a) Trova l'area totale A della scatola in funzione di x e rappresenta la funzione ottenuta.

b) Quanti cm^2 di cartone sono necessari per costruirla se $x = 3$ cm?

c) Quanto deve misurare x se $A = 130$ cm^2?

[a) $A = 2x^2 + 16x$; b) 66 cm^2; c) 5 cm]

772 Si deve costruire una piscina rettangolare di perimetro uguale a 32 m.

a) Dimostra che l'area occupata è $A = -x^2 + 16x$, dove x è la lunghezza della piscina.

b) Rappresenta graficamente la funzione A tenendo conto che x non può essere un numero negativo.

c) Trova per quale valore di x si ha la piscina più grande possibile (con il perimetro invariato).

d) Calcola in questo caso le sue dimensioni.

[c) 8; d) 8,8]

LABORATORIO DI MATEMATICA

Le equazioni di secondo grado con Excel

ESERCITAZIONE GUIDATA

In un rettangolo la misura h dell'altezza è data dalla differenza fra un valore g e $\frac{1}{4}$ della misura della base.

Costruiamo un foglio di Excel che permetta di inserire il valore g e l'area S del rettangolo e dia in uscita, se esistono, le lunghezze della base e dell'altezza.

Detta x la misura della base, abbiamo $h = g - \frac{1}{4}x$ e da $S = bh$ ricaviamo:
$S = x\left(g - \frac{1}{4}x\right)$, da cui otteniamo l'equazione di secondo grado $\frac{1}{4}x^2 - gx + S = 0$.
Calcoliamo il discriminante: $\Delta = g^2 - S$.
Se $\Delta > 0$, otteniamo le due soluzioni $b_1 = 2g - 2\sqrt{\Delta}$ e $b_2 = 2g + 2\sqrt{\Delta}$ (se Δ e g sono positivi, b_1 e b_2 sono sempre positive); se $\Delta = 0$, troviamo la sola soluzione $b_0 = 2g$; se $\Delta < 0$, non abbiamo soluzioni.

- Attiviamo Excel e scriviamo le didascalie come in figura.
- Digitiamo quindi, basandoci sull'analisi svolta: `=SE(E(C2>0; C3>0); "->"; "I dati d'ingresso devono essere positivi")` in A4, `=SE(A4="->"; C2^2-C3; "")` in C5, `=SE(A4="->"; SE(C5<0; "quindi non vi sono soluzioni."; SE(C5=0; "e vi è una soluzione:"; "e vi sono due soluzioni:")); "")` in A6, `=SE(A4="->"; SE(C5>0; 2*C2-2*RADQ(C5); SE(C5=0; 2*C2; "=")); "")` in A8, `=SE(A4="->"; SE(C5>0; 2*C2+2*RADQ(C5); "="); "")` in C8, `=SE(A4="->"; SE(A8="="; "="; C3/A8); "")` in A10, `=SE(A4="->"; SE(C8="="; "="; C3/C8); "")` in C10.
- Proviamo il foglio con i valori 50 di g in C2 e 1600 di S in C3.

	A	B	C
1	Un problema di secondo grado		
2	Dai la lunghezza g		50
3	inserisci l'area S		1600
4	->		
5	Il discriminante vale		900
6	e vi sono due soluzioni:		
7	la base risulta lunga metri		
8	40		160
9	l'altezza risulta lunga metri		
10	40		10

▲ Figura 1

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata con Excel ▶ 12 esercitazioni in più

Esercitazioni

Risolvi i seguenti problemi in modo analogo a quello dell'esercitazione guidata. Prova il foglio nei casi proposti.

1 In un triangolo isoscele ABC il perimetro $2p$ è di 100 m. Determina la misura x dell'altezza AH dopo aver assegnato la misura l del lato obliquo AC.
Casi proposti:
a) $l = 24$ m;
b) $l = 25$ m;
c) $l = 26$ m.
Fai variare x e calcola l, la misura b della base BC e l'ampiezza S dell'area di ABC.
[a) $\nexists x$; b) $x = 0$; c) $x = 10$]

2 In un rettangolo $ABCD$ l'area S è di 36 m^2, la misura x della base AB supera la misura h dell'altezza BC di g. Determina x dopo aver assegnato g.
Casi proposti:
a) $g = 0$ m;
b) $g = 9$ m;
c) $g = 16$ m.
Fai variare x e calcola h e g.
[a) $x = 6$; b) $x = 12$; c) $x = 18$]

Matematica per il cittadino

LO SPAZIO DI FRENATA

Lo spazio di frenata di un veicolo è la distanza che esso percorre da quando inizia l'azione dei freni fino all'arresto della vettura. Il Ministero dei Trasporti fornisce un modello semplificato, ma abbastanza conforme alla realtà, secondo cui la formula per calcolare lo spazio di frenata s_f, espresso in metri, è la seguente:

$$s_f = \frac{v^2}{250 \cdot f},$$

dove v è la velocità del veicolo in km/h e f è un coefficiente dimensionale che dipende dalle condizioni del fondo stradale secondo la seguente tabella.

CONDIZIONE DELLA STRADA	COEFFICIENTE DI ADERENZA f
strada asfaltata asciutta con fondo granuloso	0,8
strada asfaltata ruvida	0,6
strada asfaltata liscia	0,5
strada asfaltata bagnata	0,4
strada con fanghiglia	0,3
strada ghiacciata	0,1

1. Due motorini, A e B, viaggiano rispettivamente alle velocità di 60 km/h e di 30 km/h su una strada asfaltata liscia. Quanto vale il loro spazio di frenata?
È giusto dire che lo spazio di frenata di A è doppio di quello di B? Perché?

2. A parità di velocità, che rapporto c'è tra lo spazio di frenata su una strada asfaltata ruvida e quello su una strada con fanghiglia?

3. In un caso di tamponamento, la polizia stradale stabilisce che i segni lasciati dalle ruote durante la frenata su una strada asfaltata bagnata sono lunghi circa 92 m. A quale velocità procedeva l'automobile?

4. La tabella a lato mostra lo spazio di frenata in funzione della velocità per diversi valori del coefficiente di aderenza; completala approssimando i valori all'intero. Se vuoi, la puoi costruire con un foglio elettronico.

5. Rappresenta graficamente i valori della tabella a lato mettendo sull'asse delle ascisse le velocità, sull'asse delle ordinate gli spazi di frenata e sovrapponendo in un unico riferimento cartesiano i tre grafici relativi ai tre diversi valori di f.

VELOCITÀ (km/h)	SPAZIO (m), $f = 0,8$	SPAZIO (m), $f = 0,5$	SPAZIO (m), $f = 0,3$
0			
10			
20			
30			
40			
50			
60			
70			
80			
90			
100			
110			
120			
130			

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 30 test interattivi in più

1 L'equazione di secondo grado, nell'incognita x,
$\frac{2ax^2}{3b} - \frac{5bx}{a} + 3 = 0$ è:

- A completa letterale.
- B intera pura.
- C pura letterale.
- D fratta numerica.
- E spuria letterale.

2 È data l'equazione di secondo grado in x:
$5x^2 - bx - c = 0$.
Quale fra le seguenti affermazioni è *vera*?
Le soluzioni:

- A sono reali $\forall\, b, c \in \mathbb{R}$.
- B sono reali se $b > 0$.
- C sono reali se $b < 0$ e $c < 0$.
- D non sono reali $\forall\, b, c \in \mathbb{R}$.
- E sono reali se $c > 0$.

3 È data l'equazione di secondo grado in x:
$ax^2 + c = 0$.
Quale fra le seguenti affermazioni è *vera*?
L'equazione:

- A non ha soluzioni reali.
- B ha due soluzioni reali coincidenti se $c < 0$.
- C ha due soluzioni reali opposte se $c < 0$.
- D ha due soluzioni reali opposte se a e c sono discordi.
- E ha soluzioni reali coincidenti se a e c sono discordi.

4 Quale fra le seguenti affermazioni è *vera*?
L'equazione $3x^2 - 2x + 3 = 0$ non ha soluzioni reali perché:

- A a e c sono concordi.
- B b è negativo.
- C $b^2 - 4ac < 0$.
- D il discriminante è nullo.
- E $b^2 > 4ac$.

5 L'equazione $4x^2 - bx + 9 = 0$ ha due soluzioni reali coincidenti se:

- A $b = 0$.
- B $\Delta < 0$.
- C $b = \pm 12$.
- D $b < 0$.
- E $b = \pm 6$.

6 L'equazione $5x^2 + bx - 9 = 0$ ha due soluzioni reali opposte se:

- A $b = 0$.
- B $\Delta < 0$.
- C $b < 0$.
- D $b^2 = 180$.
- E $b > 0$.

7 Considera l'equazione:
$x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$.
Soltanto una delle seguenti affermazioni è *vera*. Quale?

- A Il prodotto delle radici è uguale alla loro somma.
- B L'equazione ha due radici negative.
- C L'equazione non ha radici reali.
- D L'equazione ha per radici due numeri irrazionali.
- E L'equazione ha due radici positive.

8 Il discriminante di un'equazione di secondo grado è positivo; allora le soluzioni sono:

- A discordi se ci sono due permanenze.
- B positive se ci sono due permanenze.
- C negative se ci sono due variazioni.
- D discordi se ci sono una permanenza e una variazione.
- E coincidenti se ci sono due variazioni.

SPIEGA PERCHÉ

9 Un'equazione di secondo grado pura può avere una soluzione uguale a 0? Perché?

10 Perché l'equazione, nell'incognita x, $x^2 - ax + a^2 = 0$, con $a \neq 0$, non ammette soluzioni reali?

11 Perché puoi affermare che un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ha sicuramente soluzioni reali se a e c sono discordi?

12 Perché l'equazione $\frac{x^2}{x(x+1)} = \frac{-1}{x+1}$ è palesemente impossibile?

13 L'equazione di secondo grado del tipo $(ax + b)^2 = 0$ ha il discriminante necessariamente nullo? Perché?

14 In che modo puoi utilizzare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado per risolvere l'equazione $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$?

15 Se nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ i coefficienti b e c sono opposti, la somma delle radici è uguale al loro prodotto. Spiega perché.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

Risolvi le seguenti equazioni.

16 $\frac{33x-1}{2} - \frac{1}{2}(x+1) = 4x(1-x) - (2x-3)^2$ [impossibile]

17 $4(2-x)(x+2) + 20 = 36(x+1) - x(2x+7)$ $\left[0; -\frac{29}{2}\right]$

18 $\frac{2(x+1)(x-1)}{3} - \frac{(2x+3)^2}{12} = \frac{x^2-3x-6}{4}$ $\left[\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right]$

19 $\frac{3}{2}(x-2) + \frac{1}{6} - x\left(1 - \frac{x}{3}\right) = \frac{(3x-2)(3x+2)}{3} - \frac{3}{2}$ $\left[0; \frac{3}{16}\right]$

20 $[(x+1)^2 - x^2](2x-1) - x(x-1) = 2(x^2 - x) - (1-x)$ $[-2; 0]$

21 $\frac{1}{3}(x+2)^2 - \frac{1}{2} - \frac{4-x^2}{6} = \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$ $\left[0; \frac{1}{3}\right]$

22 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 4(x-1)(x+1)$ $\left[\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$

23 $1 - \frac{3x-2}{5} = \frac{(2+x)(2-x)}{3} + \frac{1+x^2+15x}{15}$ $[0; 6]$

24 $5x - (x+1)^2 + (2x-1)^2 = 2 - (x+3)(x-2)$ $[\pm\sqrt{2}]$

25 $x\left(x + \frac{2}{3}\right) - \frac{2\sqrt{5}}{3}(2x+1) + \frac{5}{3} = 0$ $\left[\sqrt{5}; \frac{\sqrt{5}-2}{3}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni.

26 $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+3}+\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{3}{x-3}$ $[-1\pm\sqrt{17}]$

27 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2x-1}{x+2}+\dfrac{x+4}{3x+6}=\dfrac{2-x}{x^2+x-2}$ $\left[-1;\dfrac{20}{17}\right]$

28 $\dfrac{3x}{x+1}+\dfrac{5x}{x^2-x-2}=\dfrac{2x+1}{x-2}+2$ $[-3;1]$

29 $\dfrac{(x^2-6x+9)(x-1)}{x+1}\cdot\dfrac{3x+3}{x^2-2x-3}=\dfrac{4x+9}{x+1}$ $\left[0;\dfrac{16}{3}\right]$

30 $\dfrac{x+3}{9x^2+6x+1}:\dfrac{1}{3x+1}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{2(4x-x^2-1)}{3x^2-5x-2}$ $\left[-\dfrac{2}{3};1\right]$

31 $\dfrac{1}{x^2-3x}-\dfrac{9}{8x}=\dfrac{29}{2x^3+2x^2-24x}-\dfrac{1}{x^2+4x}$ $\left[\dfrac{7}{9}; 0 \text{ non accettabile}\right]$

32 $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{1-x}{x}-\dfrac{1}{x-x^2}=\dfrac{2-2x-3x^2}{x^2-x}$ [impossibile]

33 $\dfrac{3x^2+4x}{x^2+4x}-\dfrac{6}{2x-1}=\dfrac{27}{4-7x-2x^2}$ $\left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2} \text{ non accettabile}\right]$

34 $\left(\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+2}\right):\left(1-\dfrac{x-2}{x+2}\right)-\dfrac{1}{2}+x=0$ [impossibile]

35 $\dfrac{2(11x-24)}{12x-x^2-32}=\dfrac{5-x}{x-8}-3-\dfrac{16}{x-4}$ $\left[\dfrac{3}{4};12\right]$

36 $\dfrac{3-16x}{8x-4}+\dfrac{8x-1}{4-16x^2}=\dfrac{12x}{4-16x^2}-\dfrac{3}{8x+4}$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni letterali nell'incognita x, discutendone i risultati.

37 $4bx^2=-32b^2x$ $[b=0: \text{indet}; b\neq 0: 0, -8b]$

38 $k^2x^2-4kx-5=0$ $\left[k\neq 0: -\dfrac{1}{k},\dfrac{5}{k}; k=0: \text{impossibile}\right]$

39 $2ax^2-3a=6x-a^2x$ $\left[a\neq 0: -\dfrac{a}{2},\dfrac{3}{a}; a=0: 0\right]$

40 $3ax^2-(2a-3)x+1-a=0$ $\left[a\neq 0: -\dfrac{1}{3},\dfrac{a-1}{a}; a=0: -\dfrac{1}{3}\right]$

41 $\dfrac{a^2}{x^2-ax}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x}{x-a}$ $[a=0: \text{impossibile}; a\neq 0: -2a]$

42 $\dfrac{x+b}{x-2b}-1=\dfrac{x-b}{x+2b}-\dfrac{10b^2+bx}{4b^2-x^2}$ $[b=0: \text{impossibile}; b\neq 0: 3b, 2b \text{ non accettabile}]$

43 $\dfrac{5a^2}{x^2-9a^2}+\dfrac{x+2a}{x+3a}=\dfrac{7a}{x-3a}+\dfrac{8ax+6a^2}{9a^2-x^2}$ $[a=0: \text{impossibile}; a\neq 0: \pm 4a]$

44 $\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{a^2-ax}{x^2+2ax+a^2}=1$ $[a=0: \text{impossibile}; a\neq 0: a(-1\pm\sqrt{2})]$

Per ogni equazione nell'incognita x, determina i valori del parametro in modo che siano soddisfatte le condizioni.

45 $kx^2 - 2(k-2)x + k - 7 = 0$, con $k \neq 0$;
a) le radici sono uguali;
b) le radici sono opposte;
c) le radici sono reciproche;
d) una radice è $\sqrt{3}$;
e) la somma delle radici è uguale al loro prodotto.

$\left[\text{a) } k = -\frac{4}{3}\text{; b) } k = 2\text{; c) impossibile; d) } k = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\text{; e) } k = -3 \text{ non accettabile}\right]$

46 $(k+3)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$, con $k \neq -3, k \neq 0$;
a) le radici sono reali;
b) la somma delle radici è -3;
c) le radici sono reciproche e opposte (antireciproche);
d) la somma dei reciproci delle radici è 2;
e) la somma dei quadrati delle soluzioni è 10.

$\left[\text{a) } k \leq \frac{3}{2}\text{; b) } k = -\frac{9}{5}\text{; c) } k = -1\text{; d) impossibile; e) } k = \frac{1}{2}\left(-8 \pm \sqrt{22}\right)\right]$

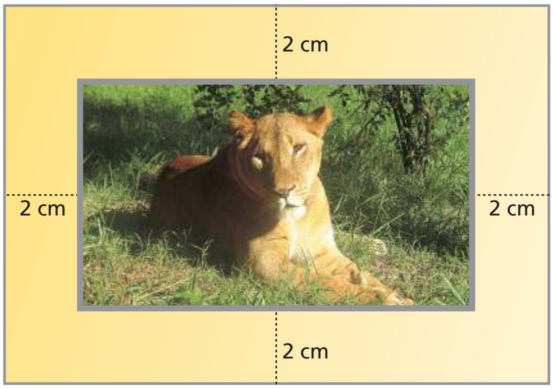
Problemi

47 Piegando un foglio di carta rettangolare, è possibile dividerlo in due parti rettangolari uguali fra loro e simili al foglio originario?
Calcola, se è possibile, il rapporto fra i lati del foglio di carta. $\left[\text{detti } x \text{ e } l \text{ i lati, } \frac{x}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

48 Per l'acquisto di un regalo del costo di € 87,50, due persone, tra quelle che inizialmente avevano aderito, si ritirano; la spesa per ciascuno dei restanti aumenta pertanto di € 5,00.
Determina quante persone avevano aderito inizialmente. [7 persone]

49 Un triangolo rettangolo ha area di 24 cm^2. Il triangolo rettangolo che si ottiene da esso, prolungando i due cateti dalla parte degli angoli non retti, entrambi di 2 cm, ha area di 40 cm^2.
Determina il perimetro del triangolo di partenza. [24 cm]

50



Una fotografia è incollata al centro di un cartone rettangolare di area uguale a 352 cm^2 e largo x cm.
Sapendo che il margine è di 2 cm:

a) dimostra che l'area della fotografia è
$$A = 368 - 4x - \frac{1408}{x};$$
b) trova x quando $A = 216$ cm^2.

[b) $x = 16$ cm, oppure $x = 22$ cm]

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ► 13 esercizi in più

51 TEST Data l'equazione $yx^2 + x - y = 0$, quale delle seguenti affermazioni è *corretta*?

- A Esiste un valore di x che è soluzione dell'equazione per ogni valore di y.
- B Per ogni valore di y vi è almeno un valore di x che risolve l'equazione.
- C Per ogni valore di y esistono due valori distinti di x che risolvono l'equazione.
- D Per ogni valore di x esiste un valore di y che risolve l'equazione.
- E Esiste un valore di y che è soluzione dell'equazione per ogni valore di x.

(*Olimpiadi della matematica*, *Gara Provinciale*, 1995)

52 TEST Quale numero diverso da 0 è tale che la sua decima parte eguagli dieci volte il quadrato del numero stesso?

A $\frac{1}{100}$ B $\frac{1}{10}$ C $\frac{1}{2}$ D 1 E 10

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 1999)

53 Risolvi l'equazione di secondo grado $10000x^2 + 999999999x - 100000 = 0$, utilizzando la notazione esponenziale con potenze in base 10. Utilizza poi i risultati trovati per generalizzare la risoluzione di un'equazione del tipo $n^{\alpha}x^2 + (n^{\alpha+\beta} - 1)x - n^{\beta} = 0$, con $n, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

$[-10^5, 10^{-4}]$

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ► 9 esercizi in più

54 A water rocket is launched upward with an initial velocity of 48 ft/s. Its height h, in feet, after t seconds, is given by $h = 48t - 16t^2$. When will the rocket be exactly 32 feet above the ground?

(USA *Tacoma Community College*, Review for Test, 2002)

$[t = 1 \text{ s}; t = 2 \text{ s}]$

55 TEST Let a and b be distinct real numbers for which:

$$\frac{a}{b} + \frac{a + 10b}{b + 10a} = 2.$$

Find $\frac{a}{b}$.

A 0.6 B 0.7 C 0.8 D 0.9 E 1

(USA *American Mathematics Contest 10*, 2002)
Le gare *American Mathematics Contest 10* (AMC 10) sono rivolte a studenti americani del primo biennio superiore.

56 Two students attempted to solve the quadratic equation $x^2 + bx + c = 0$. Although both students did the work correctly, one miscopied the middle term and obtained the solution set {2, 3}, while the other miscopied the constant term and obtained the solution set {2, 5}. What is the correct solution set?

(USA *Lehigh University: High School Math Contest*, 2005)

[{1, 6}]

57 TEST For how many integer values of n does the equation $x^2 + nx - 16 = 0$ have integer solutions?

(Hint. Remember the relation between the solutions and the coefficients of the equation.)

A 2 B 3 C 4 D 5 E 6

(UK *Senior Mathematical Challenge*, 2002)

GLOSSARY

although: benché	**height**: altezza	**middle**: medio, centrale
to attempt: tentare	**hint**: suggerimento	**quadratic**: quadratico, di 2° grado
distinct: distinto, diverso	**integer**: intero (numero)	**upward**: verso l'alto
ground: suolo	**to launch**: lanciare	**water rocket**: razzo ad acqua