1. LA PARABOLA E LA SUA EQUAZIONE

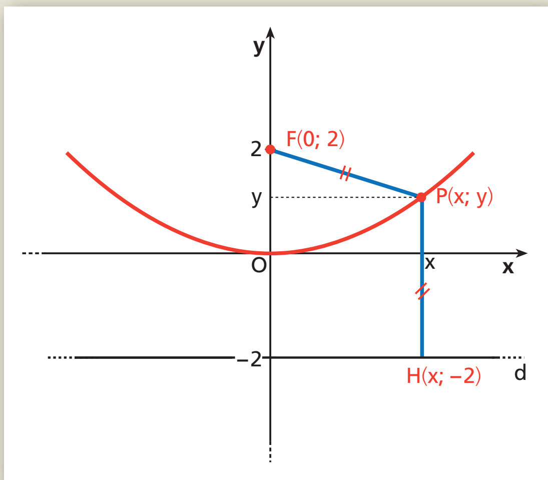
▶ Teoria a pag. 308

La parabola con asse coincidente con l'asse *y* e vertice nell'origine

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Applicando la definizione, determiniamo l'equazione della parabola che ha fuoco $F(0; 2)$ e direttrice d di equazione $y = -2$.

La parabola è il luogo dei punti equidistanti dal fuoco e dalla direttrice. Disegniamo il fuoco F e la direttrice d. Indichiamo con $P(x; y)$ un punto generico della parabola e con H il piede della perpendicolare condotta da P alla direttrice.



Se $P(x; y)$ sta sulla parabola, le sue coordinate soddisfano la condizione $\overline{PF} = \overline{PH}$.
Pertanto, poiché

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4}$$

$$\overline{PH} = |y - (-2)| = |y + 2|$$

abbiamo:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = |y + 2|.$$

Eleviamo i due membri al quadrato e svolgiamo i calcoli:

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = (y + 2)^2$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 4y + \cancel{4} = \cancel{y^2} + 4y + \cancel{4}$$

$$x^2 = 8y.$$

Ricaviamo y:

$$y = \frac{x^2}{8}.$$

Questa è l'equazione della parabola richiesta.

Determina l'equazione della parabola della quale sono assegnati il fuoco F e la direttrice d.

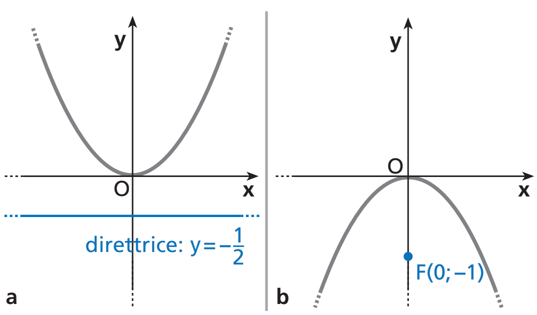
2 $F(0; 3)$ $\quad d: y = -3$

3 $F\left(0; \frac{1}{3}\right)$ $\quad d: y = -\frac{1}{3}$

4 $F(0; -4)$ $\quad d: y = 4$

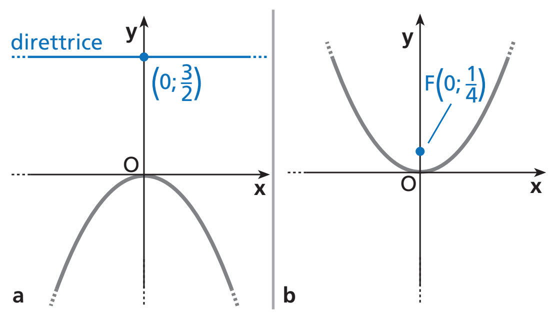
Trova le equazioni delle seguenti parabole, utilizzando i dati delle figure.

5



$\left[y = \frac{1}{2}x^2;\ y = -\frac{1}{4}x^2\right]$

6



$\left[y = -\frac{1}{6}x^2;\ y = x^2\right]$

7 Una parabola ha per asse l'asse y e il vertice nell'origine degli assi. Il fuoco è nel punto $F\left(0; \frac{5}{2}\right)$ e la direttrice passa per il punto $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$. Determina l'equazione della parabola. $\left[y = \frac{1}{10}x^2\right]$

8 Una parabola ha vertice nell'origine, asse coincidente con l'asse y e direttrice di equazione $y = \frac{4}{3}$. Dopo aver individuato le coordinate del fuoco, scrivi l'equazione della parabola. $\left[F\left(0; -\frac{4}{3}\right); y = -\frac{3}{16}x^2\right]$

9 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo nel piano cartesiano la parabola di equazione $y = \frac{x^2}{4}$ e determiniamo le sue caratteristiche, cioè le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice.

La parabola è del tipo $y = ax^2$, pertanto il vertice è l'origine degli assi e l'asse di simmetria è l'asse y.

Costruiamo la tabella, tenendo presente che i punti della parabola di ascissa opposta hanno la stessa ordinata, e disegniamo la parabola per punti. Il fuoco F ha ascissa nulla e ordinata

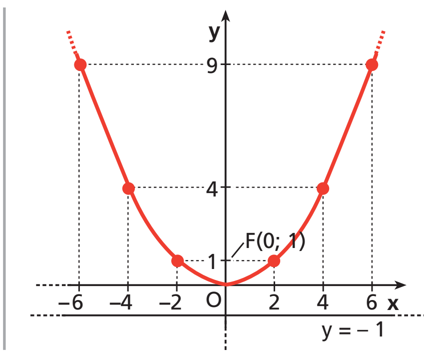
$$y_F = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 1,$$

quindi $F(0; 1)$. L'equazione della direttrice è

$$y = -\frac{1}{4a},$$

quindi $y = -1$.

x	y
0	0
±2	1
±4	4
±6	9



Dopo aver trovato le caratteristiche della parabola di equazione assegnata, disegnala nel piano cartesiano.

10 $y = \frac{3}{2}x^2$

11 $y = -\frac{5}{8}x^2$

12 $x^2 = \frac{2}{5}y$

13 $x^2 + 2y = 0$

14 $4y + 3x^2 = 0$

15 $2x^2 = 5y$

16 Per quali valori di a l'equazione $y = \frac{1}{a-1}x^2$ rappresenta una parabola? Trova a affinché il fuoco abbia coordinate $(0; 2)$ e disegna la parabola ottenuta. $[a \neq 1; a = 9]$

17 L'equazione $ay - 3x^2 = 0$ può rappresentare una parabola per qualsiasi valore di a? Trova per quali valori di a la direttrice ha equazione $y = \frac{1}{2}$ e disegna la parabola ottenuta. $[a \neq 0; a = -6]$

18 Quale valore deve avere il coefficiente a nell'equazione $y = ax^2$ affinché la parabola che essa rappresenta passi per il punto $P(-2; 8)$? $[2]$

19 Una parabola di equazione $y = ax^2$ ha fuoco nel punto $F(0; 5)$. Quanto vale il coefficiente a? $\left[\frac{1}{20}\right]$

20 Per quale valore di a la parabola di equazione $y = ax^2$ ha direttrice di equazione $y = \frac{1}{8}$? $[-2]$

21 Data l'equazione $y = ax^2$, trova a affinché la direttrice abbia equazione $y = -4$. Stabilisci poi se i punti $P(4; 1)$, $Q\left(1; \frac{1}{4}\right)$, $R\left(-2; \frac{1}{4}\right)$ appartengono alla parabola. $\left[\frac{1}{16}\right]$

22 Nella parabola di equazione $y = ax^2$, trova a affinché il fuoco, che ha ordinata negativa, abbia distanza dalla direttrice uguale a $\frac{8}{3}$. $\left[-\frac{3}{16}\right]$

23 Stabilisci come è rivolta la concavità delle seguenti parabole, determina le loro caratteristiche e disegna il loro grafico: $y = -4x^2$, $\quad 2y + 3x^2 = 0$, $\quad 2x^2 = \frac{1}{3}y$.

24 Nell'equazione $y = ax^2$ determina per quale valore di a si ha una parabola con la concavità rivolta verso il basso e con il fuoco che ha distanza da $O(0; 0)$ uguale a $\frac{2}{3}$. $\left[-\frac{3}{8}\right]$

25 Verifica che la parabola di equazione $y = x^2$ ha un'apertura maggiore della parabola $y = 2x^2$, disegnandone i grafici.

Per ogni coppia di parabole assegnata, stabilisci quale delle due parabole ha apertura minore.

26 $y = \frac{3}{4}x^2$ e $y = -\frac{4}{3}x^2$.

27 $y = -3x^2$ e $y = \frac{1}{3}x^2$.

28 $y = 6x^2$ e $y = 5x^2$.

La parabola con asse parallelo all'asse y

Qui di seguito sono assegnate le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice di alcune parabole. Determina l'equazione di ciascuna parabola applicando la definizione.

29 $F(-2; -1)$, $\quad d: y = -3$. $\left[y = \frac{1}{4}x^2 + x - 1\right]$

30 $F(2; 3)$, $\quad d: y = -3$. $\left[y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right]$

31 $F\left(-2; -\frac{19}{4}\right)$, $\quad d: y = -\frac{21}{4}$. $\left[y = x^2 + 4x - 1\right]$

32 $F(-1; -1)$, $\quad d: y = -\frac{3}{2}$. $\left[y = x^2 + 2x - \frac{1}{4}\right]$

33 $F\left(2; -\frac{15}{4}\right)$, $\quad d: y = -\frac{17}{4}$. $\left[y = x^2 - 4x\right]$

34 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le caratteristiche della parabola $y = x^2 + 3x + 2$ e disegniamo il suo grafico.

Le caratteristiche della parabola sono l'asse di simmetria, il vertice, il fuoco, la direttrice.

- L'asse ha equazione $x = -\frac{b}{2a}$, quindi $x = -\frac{3}{2}$.
- Il vertice ha ascissa $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$ e l'ordinata è $y_V = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{9-8}{4} = -\frac{1}{4}$.

Poiché il vertice è un punto della parabola, l'ordinata del vertice si può ottenere anche sostituendo l'ascissa $x = -\frac{3}{2}$ nell'equazione della parabola. Il vertice è allora $V\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

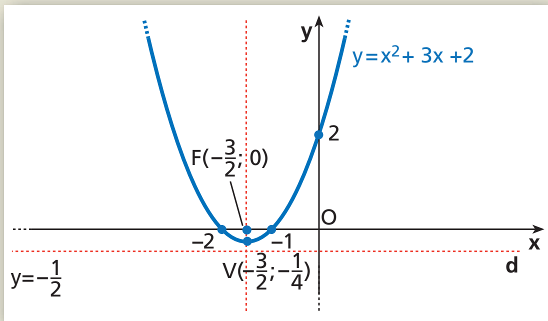
Bergamini, Trifone, Barozzi **MANUALE BLU 2.0 DI MATEMATICA - Vol.3** © Zanichelli 2012 *Moduli S+L*

- Il fuoco F ha la stessa ascissa del vertice, $x_F = -\frac{3}{2}$. L'ordinata è $y_F = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-(9-8)}{4 \cdot 1} = 0$.

  Pertanto è $F\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.
- L'equazione della direttrice è

  $y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

Per disegnare la parabola è utile determinare i punti di intersezione con gli assi cartesiani.
Per $x = 0$ si ha $y = 2$ e per $y = 0$ si ha $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$. I punti di intersezione sono allora $(0; 2)$, $(-1; 0)$ e $(-2; 0)$.
Rappresentiamo ora la parabola.



Determina le caratteristiche delle seguenti parabole, cioè trova le coordinate del vertice, del fuoco, l'equazione della direttrice e dell'asse di simmetria e rappresentale graficamente.

35 $y = x^2 - 4x + 3$; $\quad y = -2x^2 + 4x$.

36 $y = -x^2 + 4$; $\quad y = x^2 - 4x + 4$.

37 $y = (x-1)(x+2)$; $\quad x^2 - 2x + y = 0$.

38 $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$; $\quad y + 4x = x^2 + 2$.

39 $y = x^2 - 2x - 8$; $\quad y = -x^2 - 2x + 3$.

40 $3y = x^2 - 4x$; $\quad y = -x^2 - 8x$.

41 $y = -x^2 + 3x + 4$; $\quad y = -3x^2 + 3$.

42 $y = x^2 - x$; $\quad y = (x-1)^2$.

43 $y = 3x^2 + 6$; $\quad y = -x^2 + 2x + 3$.

44 $y = -x^2 - \frac{1}{2}$; $\quad y = x^2 - 4x$.

45 $y = 4 + x^2$; $\quad y = -x^2 + \frac{1}{4}x$.

46 $y = (x+3)^2$; $\quad y = -x^2 + 6x$.

---

47 Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $ay = (a+1)x^2 + ax$ rappresenta una parabola? $[a \neq 0 \wedge a \neq -1]$

48 Per quali valori di k l'equazione $y = (k^2 - 1)x^2 + x - k - 3$:
a) rappresenta una parabola con la concavità rivolta verso l'alto?
b) rappresenta una parabola che passa per l'origine? [a) $k < -1 \vee k > 1$; b) $k = -3$]

49 Let $y = f(x) = x^2 - 6x + 8$. Find the vertex and axis of symmetry. Does its graph open up or down? Find the maximum or minimum value of $f(x)$ and state which it is. Sketch the graph. Label the vertex and intercepts on your graph.

(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, Fall 2001)

$[V(3; -1); x = 3]$

50 **TEST** L'insieme di tutti i valori del parametro m per cui le curve di equazioni $x^2 + y^2 = 1$ e $y = x^2 + m$ hanno esattamente un unico punto in comune è:

A $\left\{-\frac{5}{4}, -1, 1\right\}$ **B** $\left\{-\frac{5}{4}, 1\right\}$ **C** $\{-1, 1\}$ **D** $\left\{-\frac{5}{4}\right\}$ **E** $\{1\}$

(*Kangourou Italia, Categoria Student*, 2003)

51 **TEST** Per quale valore non nullo di k la distanza tra i vertici delle parabole $y = kx^2 - 2x + 1$ e $y = -2x^2 + 2$ è uguale a 1?

A Per ogni k. **B** 1 **C** -1 **D** ± 1 **E** Per nessun valore di k.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*)

La parabola con asse parallelo all'asse x

52 Scrivi l'equazione del luogo dei punti equidistanti da $F(-1; -1)$ e dalla retta di equazione $x = -\frac{3}{2}$.
$\left[x = y^2 + 2y - \frac{1}{4}\right]$

53 Scrivi l'equazione della parabola che ha il vertice nell'origine e per fuoco il punto $F\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. Disegna la parabola e trova l'equazione della direttrice.
$\left[x = -\frac{1}{2}y^2; x = \frac{1}{2}\right]$

54 Una parabola ha il vertice nell'origine degli assi e asse di simmetria coincidente con l'asse x. La direttrice passa per il punto $P(2; 4)$. Scrivi l'equazione della parabola e disegnala nel piano cartesiano.
$\left[x = -\frac{1}{8}y^2\right]$

55 Disegna in uno stesso piano cartesiano le parabole di equazione $x = ay^2$, con $a = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = 2$, $a = -2$. Scrivi le caratteristiche delle parabole al variare di a.

56 Una parabola ha il vertice nell'origine e il fuoco di coordinate $\left(0; \frac{1}{16}\right)$; una seconda parabola ha il vertice nell'origine e direttrice di equazione $x = -\frac{1}{8}$. Trova le equazioni delle due parabole e i loro punti di intersezione. (Suggerimento. Per trovare i punti di intersezione di due parabole basta risolvere il sistema formato dalle loro equazioni.)
$\left[y = 4x^2, x = 2y^2; (0; 0), \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{4}; \frac{\sqrt[3]{4}}{4}\right)\right]$

57 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la parabola di equazione $x = -y^2 + 6y - 5$, determiniamo le sue caratteristiche e disegniamola nel piano cartesiano.

- Poiché $a < 0$, la concavità è verso sinistra.
- Calcoliamo il discriminante.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 20 = 16.$$

- Troviamo le coordinate del vertice.

$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$; pertanto:

$$x_V = -\frac{16}{-4} = 4;\ y_V = -\left(-\frac{6}{2}\right) = 3;\ V(4; 3).$$

- L'asse ha equazione $y = 3$.
- Troviamo le coordinate del fuoco.
  Il fuoco ha la stessa ordinata del vertice:

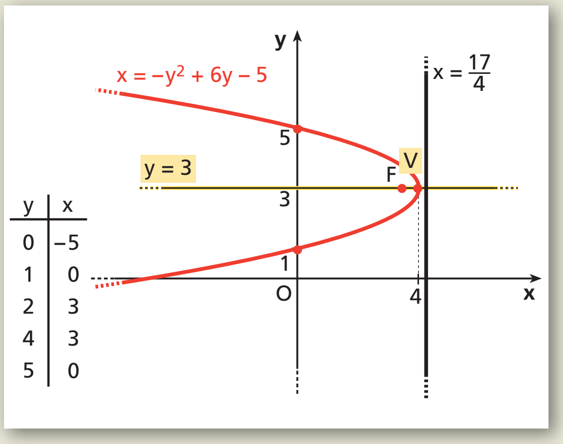
$$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; 3\right),\ x_F = \frac{1-16}{-4} = \frac{15}{4}.$$

- La direttrice ha equazione

$$x = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1+16}{-4} = \frac{17}{4}.$$

- Determiniamo alcuni punti della parabola, osservando che per $x = 0$, si ha

$$-y^2 + 6y - 5 = 0, \text{ da cui } y = 1 \text{ e } y = 5.$$



Determina le caratteristiche delle seguenti parabole e traccia il loro grafico.

58 $x = -2y^2 + 3y$; $x = \frac{1}{4}y^2 + y$.

59 $x - y^2 + 2y + 8 = 0$; $x = (y-3)^2$.

60 $x = y^2 + y$; $x = -y^2 - 8$.

61 $x = -2y^2 + \frac{1}{2}y$; $x = -y^2 - 4y - 4$.

62 $x = \frac{1}{4}y^2 + 1$; $x + y^2 - 2 = 0$.

63 $y^2 - x + 2y + 1 = 0$; $x = y^2 - 9$.

64 $x = \frac{1}{2}y^2 - 8y$; $x = 4y^2 + 12y + 9$.

65 $y^2 - 6y + x = 0$; $y^2 - x - 3y + 2 = 0$.

66 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $2x - (y-1)(y+2) + 1 = 0$ rappresenta una parabola. V F

b) L'equazione $x(x-1) = y - 2$ rappresenta una parabola con l'asse parallelo all'asse x. V F

c) L'equazione $x - 2y(y-1) = 0$ rappresenta una parabola che passa per l'origine. V F

d) L'equazione $x(1-x) = y(2-y)$ rappresenta una parabola. V F

e) L'equazione $x^2 + y^2 = y(1+y) + 3$ rappresenta una circonferenza. V F

67 L'equazione $x = (b-2)y^2 + by$ rappresenta una parabola per ogni valore di b? Trova:
a) per quali valori di b il fuoco ha ascissa positiva;
b) per quali valori di b la parabola rivolge la concavità verso la direzione positiva dell'asse x.

[$b \neq 2$; a) $b < -1 \vee 1 < b < 2$; b) $b > 2$]

68 L'equazione $ax - (a+1)y^2 = 0$ può rappresentare una parabola? Determina il valore di a affinché il suo fuoco sia il punto $(3; 0)$.

$\left[a \neq 0 \wedge a \neq -1;\ a = -\frac{12}{11}\right]$

69 **TEST** Una parabola è rappresentata da un'equazione della forma $x - h = a(y-k)^2$. Se $|a| < 1$, l'enunciato che correttamente ne identifica il grafico è:

A la parabola non è una funzione.

B la parabola ha un vertice nel punto $(-h; -k)$.

C la parabola ha un asse di simmetria verticale.

D il grafico ha subìto una dilatazione verticale di fattore a.

(CAN *Barry Mabillard Learning Centre*, 2006)

I grafici di funzioni che contengono archi di parabola

70 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = x^2 - 3x - |x-1| + 1.$$

Poiché

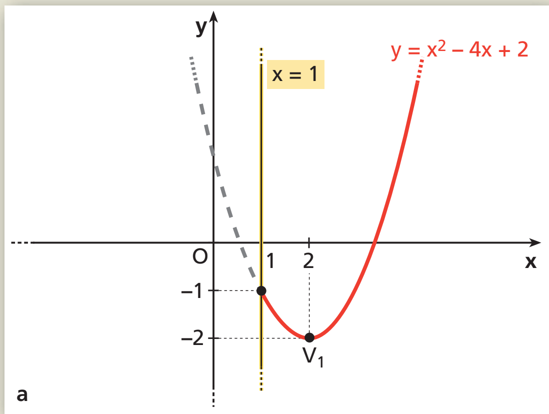
$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

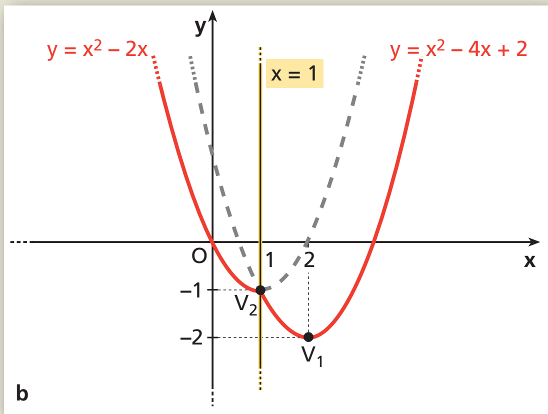
la funzione data è la seguente:

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 - 2x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Le equazioni $y = x^2 - 4x + 2$ e $y = x^2 - 2x$ sono le equazioni di due parabole rispettivamente di vertici $V_1(2; -2)$ e $V_2(1; -1)$.
Consideriamo la prima equazione e disegniamo solo l'arco di parabola contenuto nel semipiano con $x \geq 1$.

Consideriamo la seconda equazione e disegniamo solo l'arco di parabola contenuto nel semipiano delle $x < 1$.
Il grafico della funzione è rappresentato dalla linea continua.





Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

71 $y = x^2 - x - |x - 1|$

72 $y = -x^2 + |x + 4|$

73 $y = -x^2 + |x|$

74 $y = x^2 + |x - 2| + 2$

75 $y = x \cdot |x - 1|$

76 $y = x^2 - 2|x|$

77 $y = x^2 - |x^2 - 1|$

78 $y = |x^2 - 4x|$

79 $y = x^2 - |x| - |x - 2|$

80 $y = |x^2 - 2|x||$

81 **ESERCIZIO GUIDA**

Dopo averne determinato il dominio, rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = 1 + \sqrt{x + 1}.$$

Per determinare il dominio occorre porre il radicando maggiore o uguale a 0, cioè:

$$x + 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq -1.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -1\}$.
Tracciamo nel piano cartesiano la retta $x = -1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ascissa minore di -1 (figura *a*).
Per rappresentare la funzione isoliamo la radice:

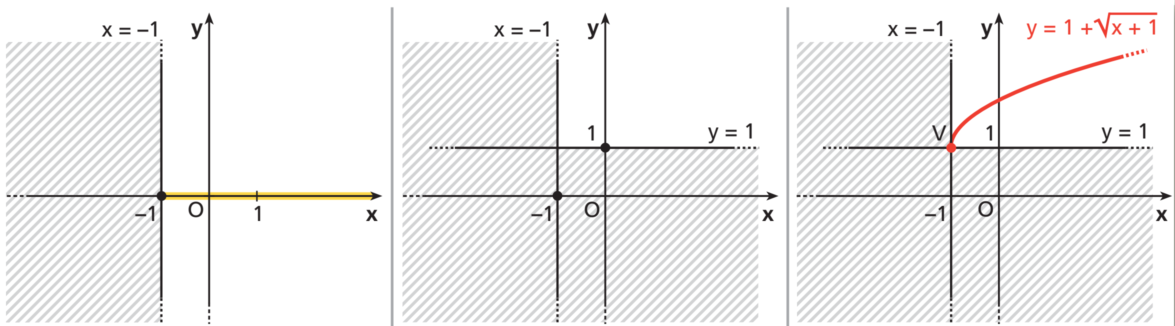
$$y - 1 = \sqrt{x + 1}.$$

Questa equazione è equivalente a:

$$\begin{cases} y - 1 \geq 0 \\ (y - 1)^2 = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y^2 - 2y + 1 = x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x = y^2 - 2y \end{cases}$$

Tracciamo nel piano cartesiano la retta $y = 1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ordinata minore di 1 (figura *b*).

L'equazione $x = y^2 - 2y$ è l'equazione di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse x con vertice $V(-1; 1)$.
Tracciamo il ramo di parabola contenuto nella parte di piano che non abbiamo oscurato (figura *c*).



a. Il dominio di $y = 1 + \sqrt{x+1}$.
b. Regione contenente il grafico della funzione.
c. Il grafico della funzione.

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

82 $y = 2 + \sqrt{x+2}$

83 $y = 1 - \sqrt{x}$

84 $y = 3 - \sqrt{2x+3}$

85 $y = -\sqrt{x-1}$

86 $y = 2\sqrt{x+4}$

87 $y = 2 - \sqrt{2x-4}$

88 $y = \sqrt{x-9}$

89 $x = 2 + \sqrt{2y}$

90 $y = 2 + \sqrt{x+1}$

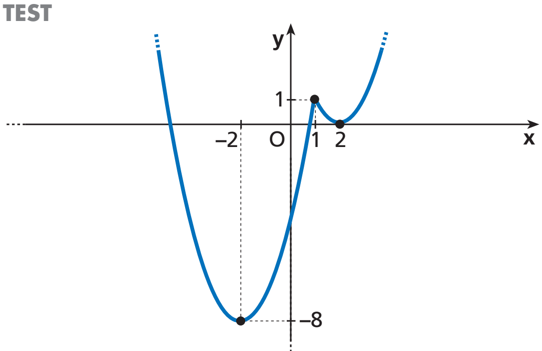
91 $x - \sqrt{y+3} = 0$

92 $y = \sqrt{|x|+1}$

93 $y = 1 + \sqrt{|x-1|-2}$

ESERCIZI VARI I grafici con archi di parabola

94 **TEST**



Nel grafico è rappresentata la funzione:

A $y = x^2 - 4|x-1|$.
D $y = x^2 + 4|x-1|$.
B $y = x^2 - 4|x| - 4$.
E $y = x^2 - 4|x| + 4$.
C $y = -x^2 + 4|x-1|$.

95 **TEST** La curva di equazione $y = 2\sqrt{x+1} - 2$ rappresenta un arco di parabola. Qual è la sua equazione?

A $x = \dfrac{y^2}{2} + y + 1$, con $y \geq -2$.

B $x = \dfrac{y^2}{4} + y$, con $y < -2$.

C $x = \dfrac{y^2}{4} - 2$, con $y \geq 0$.

D $x = \dfrac{y^2}{4} + y$, con $y \geq -2$.

E $x = \dfrac{y^2}{2} - 3$, con $y > 0$.

96 **TEST** Quale fra le seguenti funzioni *non* ha come grafico uno o più archi di parabola?

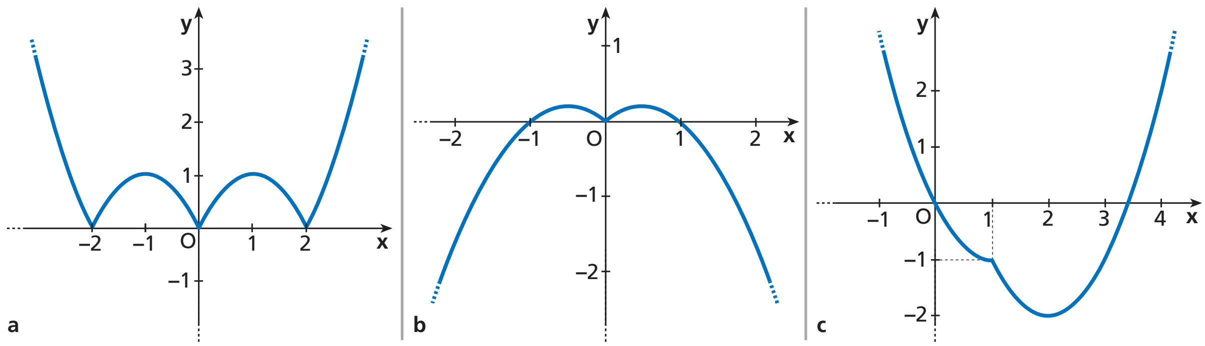
A $y = \sqrt{x+1}$ B $y = 1 + \sqrt{2-3x}$ C $y = 1 - \sqrt{-x}$ D $y = 2 + \sqrt{-1-|x+1|}$ E $y = \sqrt{|x|} + 1$

97 **ASSOCIA** a ciascuna funzione il suo grafico.

1) $y = -x^2 + |x|$

2) $y = |x^2 - 2|x||$

3) $y = x^2 - 3x - |x - 1| + 1$



Disegna i grafici relativi alle seguenti equazioni.

98 $y = x|x| - 3$

99 $y = -2\sqrt{x}$

100 $y + 1 = \sqrt{x}$

101 $\sqrt{y} = 1 - x$

102 $x = |y^2 - 2y|$

103 $x = 2 - \sqrt{y}$

104 $y = |x^2 - 3x|$

105 $|y| + 2x = x^2$

106 $y = \dfrac{x^3 - x}{x}$

107 $y = 3 + \sqrt{1 - x}$

108 $y = x^2 - |x|$

109 $y + 1 = \sqrt{x}$

110 $y = \dfrac{x^3 - 4x}{x - 2}$

111 $x - 1 = \sqrt{y - 3}$

112 $y = -\sqrt{x - 2}$

113 $x - \sqrt{y + 1} = 2$

114 $x = |y^2 - 4|$

115 $x - \sqrt{y + 3} = 0$

116 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \le 0 \\ 4x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

117 $f(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 & \text{se } x \le 1 \\ -2x + 6 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

118 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 2 \\ -(x - 2)(x - 6) & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$

119 $|x| + 2x^2 - y = 0$

120 $|y| - 4x^2 + x = 0$

121 $y = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$

122 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \le 1 \\ x - 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

123 $y = |x - 2| \cdot x + 3$

124 $y = \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1} \cdot x$

125 $|x| + |y| = x^2$

126 $|y| = 1 - x^2$

127 $y = 2\sqrt{1 - |x|}$

128 $y = 2\sqrt{2|x| - x}$

129 $y = \sqrt{2 - 3|x| + x}$

130 $f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & \text{se } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{se } -2 \le x \le 1 \\ 3x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

131 $y = -4\sqrt{|x| - 1}$

132 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1} & \text{se } x \ge 2 \\ 2x^2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

133 $y - |3|x| - x^2| = 0$

134 $y - |x^2 - |x|| = 0$

135 $y = |x^2 - 4x| - 2$

136 $y|y| = |x| - 4$

137 $y = -|-x^2 + 4x| + 1$

138 $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x^2 - 2x} & \text{se } x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

139 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{se } |x| \leq 1 \\ -\sqrt{|x| - 1} & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$

140 $f(x) = \begin{cases} |x + 4| - 1 & \text{se } x \leq -3 \\ x^2 + 3x & \text{se } x > -3 \end{cases}$

141 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 2|x|} & \text{se } x \geq -1 \\ (x + 2)^2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

2. LA POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO A UNA PARABOLA

▶ Teoria a pag. 318

142 **ESERCIZIO GUIDA**

Stabiliamo se le rette di equazioni $y = x - 2$ e $y = x - 1$ sono secanti, tangenti o esterne alla parabola di equazione $y = x^2 + 3x - 1$ e rappresentiamo graficamente la parabola e le rette.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

Per confronto, otteniamo:

$$x^2 + 3x - 1 = x - 2$$

$$x^2 + 3x - 1 - x + 2 = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 1 = 0.$$

Quindi l'unica soluzione è:

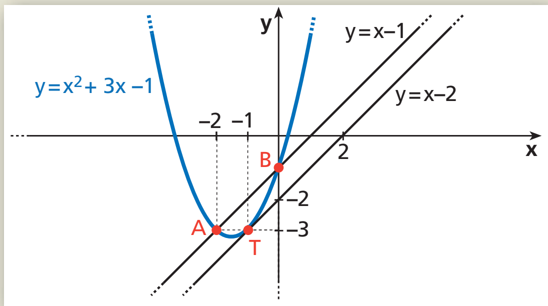
$$x = -1.$$

Poiché $\Delta = 0$, la retta è tangente alla parabola. Il punto di tangenza ha ascissa $x = -1$ e la rispettiva ordinata è $y = -3$.
Il punto di tangenza è $T(-1; -3)$.

Risolviamo ora il sistema:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

Si ha $x - 1 = x^2 + 3x - 1$, da cui $x^2 + 2x = 0$.
L'equazione ha $\Delta > 0$, quindi si hanno due soluzioni $x_1 = -2$ e $x_2 = 0$. La retta $y = x - 1$ è quindi secante la parabola nei punti $A(-2; -3)$ e $B(0; -1)$.
Rappresentiamo il grafico della parabola e delle due rette.



Nei seguenti esercizi sono assegnate le equazioni di una retta e di una parabola. Determina per ciascuna coppia i punti di intersezione delle due curve e disegna il loro grafico.

143 $y = 3x + 1, \quad y = x^2 + 4x - 1.$ $[(1; 4); (-2; -5)]$

144 $y = -x, \quad y = x^2 - x - 1.$ $[(1; -1); (-1; 1)]$

145 $y = 2x + 5, \quad y = x^2 + 2x + 5.$ $[(0; 5)]$

146 $y = -8, \quad y = x^2 + 8.$ [nessuna intersezione]

147 $y = x + 4, \quad x = y^2 + 2y + 4.$ [nessuna intersezione]

148 $x = 2, \quad x = -2y^2 - 3y + 1.$ $\left[\left(2; -\frac{1}{2}\right); (2; -1)\right]$

149 Determina le coordinate del punto di intersezione della parabola $y = 2x^2 + 4x - 2$ con la retta parallela all'asse della parabola passante per il punto $P(-2; 6)$. $[(-2; -2)]$

150 Calcola la lunghezza del segmento AB, dove A e B sono i punti di intersezione della bisettrice del I e III quadrante con la parabola di equazione $y = x^2 - 3x + 3$. $[2\sqrt{2}]$

151 Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 6x$, indicato con V il vertice, determina l'area del triangolo AVB, dove A e B sono i punti di intersezione della parabola con la retta di equazione $y = 5$. $[8]$

152 Date la parabola $y = x^2 - 2x + 7$ e la retta r di equazione $y = 2x - 1$, determina l'equazione della retta parallela a r passante per il vertice della parabola e calcola le coordinate dei punti di intersezione di tale retta con la parabola. $[y = 2x + 4; (1; 6); (3; 10)]$

153 Scrivi l'equazione della retta che interseca la parabola $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ nei due punti A e B di ascissa 0 e 4. Calcola la lunghezza della corda AB e l'area del triangolo ABO, essendo O l'origine degli assi. $[y = x - 1; 4\sqrt{2}; 2]$

154 Dopo aver verificato che la retta di equazione $y = -6x - 1$ è tangente in un punto A alla parabola di equazione $y = x^2 - 4x$, determina l'area del triangolo AVF, dove V e F sono rispettivamente il vertice e il fuoco della parabola. $\left[A(-1; 5); \frac{3}{8}\right]$

155 Determina l'area del triangolo ABF, dove A e B sono i punti di intersezione della retta di equazione $x - 3y - 1 = 0$ con la parabola di equazione $x = -y^2 + 2y + 1$ e F è il fuoco della parabola. $\left[\frac{9}{8}\right]$

156 Data la parabola di equazione $y = 2x^2 - 8x$, trova la misura della corda AB che si ottiene intersecando la parabola con la retta di equazione $y = 3x - 12$. Determina poi sull'asse y un punto C che formi con A e B un triangolo isoscele ABC di base AB. $\left[\frac{5}{2}\sqrt{10}; C\left(0; -\frac{17}{6}\right)\right]$

157 Determina per quali valori di m la parabola di equazione $y = 2x^2 - 4x + 3$ e il fascio di rette di equazione $y = mx + m$ hanno dei punti in comune. $[m \leq -8 - 6\sqrt{2} \vee m \geq -8 + 6\sqrt{2}]$

158 Dopo aver determinato le intersezioni A e B della retta $y = x - 3$ con la parabola $y = -x^2 + 3x + 5$, di vertice V, calcola l'area del triangolo ABV. $\left[A(4; 1); B(-2; -5); \text{area} = \frac{105}{4}\right]$

159 Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x + 5$, determina:
a) le intersezioni della parabola con la retta di equazione $y = -x + 5$ e indicale con A e B (A punto di ascissa minima);
b) un punto P sull'arco di parabola AB in modo che il triangolo OPB abbia area 20.
[a) $A(0; 5)$, $B(5; 0)$; b) due soluzioni: $(1; 8)$, $(3; 8)$]

160 Rappresenta nel piano cartesiano la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x$. Determina quindi le rette del fascio con centro $C\left(\frac{3}{2}; 3\right)$ che hanno almeno un punto comune con la parabola data.
[rette del fascio di centro C con coefficiente angolare $m \leq -4 \vee m \geq 2$]

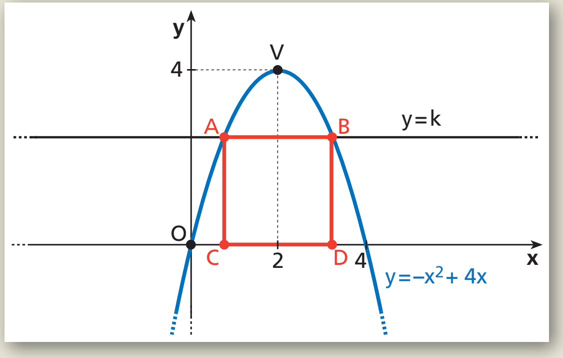
161 Data la parabola di equazione $y = x^2 - 6x + 8$, trova quale punto della retta $y = -2x - 1$ ha distanza minima dalla parabola. $[(0; -1)]$

Inscrivere quadrilateri o corde

162 **ESERCIZIO GUIDA**

Inscriviamo nella parte di piano compresa tra la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e l'asse x un rettangolo di perimetro uguale a 10.

La parabola ha il vertice V di coordinate $(2; 4)$ e interseca gli assi cartesiani nei punti $(0; 0)$ e $(4; 0)$.



Tracciamo ora una retta parallela all'asse x. Essa ha equazione $y = k$, con $0 < k < 4$, e interseca la parabola nei punti A e B, le cui coordinate si determinano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + k = 0 \\ y = k \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-k} \\ y = k \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A(2-\sqrt{4-k}; k) \\ B(2+\sqrt{4-k}; k) \end{matrix}$$

Consideriamo poi le proiezioni di A e B sull'asse x, che indichiamo con C e D, e troviamo il perimetro del rettangolo $ABDC$. Si ha:

$$\overline{AB} = 2+\sqrt{4-k} - 2 + \sqrt{4-k} = 2\sqrt{4-k},$$
$$\overline{AC} = k.$$

Quindi il perimetro del rettangolo è uguale a:

$$4\sqrt{4-k} + 2k.$$

Troviamo ora per quale valore di k il perimetro risulta uguale a 10 risolvendo l'equazione:

$$4\sqrt{4-k} + 2k = 10.$$

Si ha $2\sqrt{4-k} = 5 - k$, da cui, posto $k \leq 4$, si ottiene, elevando al quadrato:

$$4 \cdot (4-k) = 25 + k^2 - 10k \rightarrow k^2 - 6k + 9 = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione sono:

$$k_1 = k_2 = 3.$$

Dovendo essere $0 < k < 4$, la soluzione è accettabile e la retta che individua il rettangolo ha equazione $y = 3$.

163 Date le parabole di equazioni $y = -x^2 + 4x + 2$ e $y = x^2 - 3x$, conduci una retta parallela all'asse x in modo che intercetti corde uguali sulle due parabole. $\left[y = \frac{15}{8}\right]$

164 Date le parabole di equazioni $x = y^2 - 2y$ e $x = -y^2 + y$, determina l'equazione di una retta parallela all'asse y in modo che intercetti corde uguali su entrambe le parabole. $\left[x = -\frac{3}{8}\right]$

165 Per quale valore di k la parabola $y = x^2 - 2x + k - 1$ stacca un segmento di misura 3 sulla retta $y = 2$? $\left[k = \frac{7}{4}\right]$

166 Inscrivi nella parte di piano compresa fra la parabola di equazione $y = -\frac{x^2}{2} + 4x + 8$ e l'asse x un quadrato avente un lato sull'asse x. $[y = 8]$

167 Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 3x + 2$, inscrivi nella parte di piano compresa fra l'asse x e la curva un rettangolo la cui altezza è doppia della base. $[y = -8 + 2\sqrt{33}]$

168 Inscrivi nella parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = -2x^2 + 16x - 24$ e dall'asse x un rettangolo che ha il perimetro uguale a 16. $[y = 6]$

169 Nella parte di piano definita dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 8x - 7$ e dall'asse x inscrivi un trapezio isoscele $ABCD$ con la base maggiore AB sull'asse x. Trova le coordinate di C e D in modo che il trapezio abbia area 32. $[C(3; 8); D(5; 8)]$

170 Una retta parallela all'asse y interseca la parabola $9x = y^2 + 18$ in due punti A e B. Indica con A' e B' le proiezioni di A e B sull'asse y e determina a che distanza dall'asse y occorre condurre la retta AB in modo che il rettangolo $ABB'A'$ abbia perimetro uguale a 58. $[x = 11]$

171 Data la parabola di equazione $x = 2y^2 - 8y + 9$, trova quale retta, che interseca la parabola ed è parallela alla retta di equazione $2y = x$, definisce una corda lunga $3\sqrt{5}$. $\left[y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right]$

La risoluzione grafica di equazioni e disequazioni irrazionali

172 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo graficamente la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{2x+2} + 1 \geq \frac{3}{2}x.$$

Isoliamo la radice a sinistra del segno di disuguaglianza:

$$\sqrt{2x+2} \geq \frac{3}{2}x - 1.$$

Dai due membri della disequazione ricaviamo le equazioni di due funzioni, cioè poniamo:

$$y = \sqrt{2x+2} \text{ e } y = \frac{3}{2}x - 1.$$

Per disegnare il grafico della prima funzione,

$$y = \sqrt{2x+2},$$

determiniamo il suo dominio ponendo il radicando maggiore o uguale a 0:

$$2x + 2 \geq 0 \quad \to \quad 2x \geq -2 \quad \to \quad x \geq -1.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

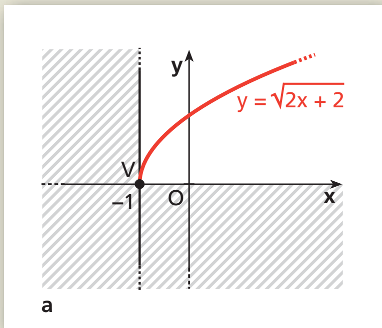
L'equazione $y = \sqrt{2x+2}$ è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 2x + 2 \end{cases} \to \begin{cases} y \geq 0 \\ x = \frac{1}{2}y^2 - 1 \end{cases}$$

L'equazione

$$x = \frac{1}{2}y^2 - 1$$

è l'equazione di una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse e con vertice $V(-1; 0)$. La condizione $y \geq 0$ impone di tracciare solo l'arco di parabola che contiene tutti i punti di ordinata maggiore o uguale a 0 (figura *a*).

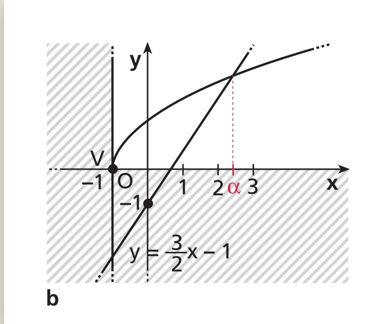


a

Rappresentiamo la seconda funzione, corrispondente alla retta di equazione

$$y = \frac{3}{2}x - 1,$$

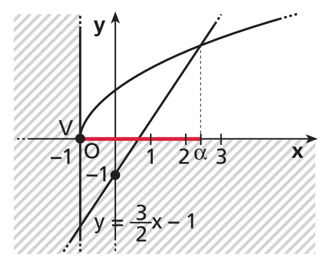
tracciandone il grafico per $x \geq -1$ (figura *b*).



b

Dal grafico leggiamo, in modo approssimato, l'ascissa α del punto di intersezione tra la retta e la parabola, nella parte di piano in cui la disequazione ha significato: $\alpha \simeq 2,4$.

Osserviamo nel grafico tracciato che la disequazione iniziale $\sqrt{2x+2} \geq \frac{3}{2}x - 1$ mette a confronto l'ordinata di un punto della parabola (membro a sinistra) con l'ordinata di un punto della retta (membro a destra) con la stessa ascissa.
Evidenziamo sul grafico la zona in cui i punti della parabola hanno ordinate maggiori o uguali alle ordinate dei punti corrispondenti della retta (figura *c*).
Le ascisse di questi punti sono le soluzioni della disequazione data:



c

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 2{,}4\}.$$

Osservazione. Se dobbiamo risolvere un'**equazione**, per esempio $\sqrt{2x+2} + 1 = \frac{3}{2}x$, procediamo allo stesso modo, ma terminiamo la risoluzione dopo la determinazione dell'ascissa (o delle ascisse) dei punti di intersezione.

Risolvi graficamente le seguenti equazioni e disequazioni irrazionali.

173 $\sqrt{x+1} - 1 \geq x - 2$ $[-1 \leq x \leq 3]$

174 $\sqrt{x} < x$ $[x > 1]$

175 $-\sqrt{x} + 3 \leq -x + 1$ $[S = \varnothing]$

176 $\sqrt{x+4} - 1 = \frac{x-1}{4}$ $[5 + 4\sqrt{5}]$

177 $\sqrt{4x-1} = 2x + \frac{1}{2}$ $[S = \varnothing]$

178 $\sqrt{x+1} + 5 > -x + \frac{7}{2}$ $[x \geq -1]$

179 $-\sqrt{x+2} < \frac{1}{3}x$ $[x > \alpha, \alpha \simeq -1{,}7]$

180 $\sqrt{x} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$ $[x_1 \simeq 0{,}1; x_2 \simeq 1{,}4]$

181 $\sqrt{4x-8} \leq 11 - 3x$ $[2 \leq x \leq 3]$

182 $-\sqrt{x} - 5 > -3x + 3$ $[x > \alpha, \alpha \simeq 3{,}2]$

183 $-\sqrt{2x} + \frac{5}{2} > -\frac{2}{3}x$ $[x \geq 0]$

184 $\sqrt{x+2} \leq 2x + 3$ $[x \geq -1]$

185 $\sqrt{\frac{1}{2}x + 2} + 1 \geq 3x - 1$ $[-4 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 1{,}1]$

186 $\sqrt{-3x-6} \leq 2x + 13$ $[-5 \leq x \leq -2]$

187 $\sqrt{-x^2 - 4x} < 1 - x^2$ $[\alpha < x \leq 0, \alpha \simeq -0{,}2]$

188 $|x| + 1 < 4 - x^2$ $\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$

189 $\sqrt{10x - x^2} = \frac{4}{9}(x-5)^2$ $[2; 8]$

190 $\sqrt{8x - x^2 + 9} = 6 - 2x^2$ $[1]$

191 $3 - \sqrt{x-1} = |x-4|$ $[1; 2; 5]$

192 $\sqrt{x} = |x-6|$ $[4; 9]$

193 $\sqrt{-10x - x^2} = 5 - \sqrt{x+5}$ $[-5; -1]$

194 $2 + \sqrt{12x - x^2 - 11} \geq 3 + \sqrt{x-6}$ $[6 \leq x \leq 10]$

195 $-3 + \sqrt{x} \geq -|x-3|$ $[0 \leq x \leq 1 \vee x \geq 4]$

196 $9\sqrt{x - \frac{1}{3}} < -x + 3$ $\left[\frac{1}{3} < x < \alpha, \alpha \simeq 0{,}4\right]$

197 $\sqrt{x+4} \leq |x-2|$ $[-4 \leq x \leq 0 \vee x \geq 5]$

198 $\sqrt{16 - 6x - x^2} \leq 5 - \sqrt{x+3}$ $[1 \leq x \leq 2]$

Risolvi graficamente i seguenti sistemi di equazioni.

199 $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$

200 $\begin{cases} x - \sqrt{2 - y} = 1 \\ y + x - 1 = 0 \end{cases}$

201 $\begin{cases} y - \sqrt{-\dfrac{x}{4}} = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

202 $\begin{cases} y = |x^2 - 4| \\ y = \dfrac{1}{4}x + 1 \end{cases}$

203 $\begin{cases} y = ||x| - 4| \\ y = 2x^2 \end{cases}$

204 $\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ 2y - |x| - 6 = 0 \end{cases}$

3. LE RETTE TANGENTI A UNA PARABOLA

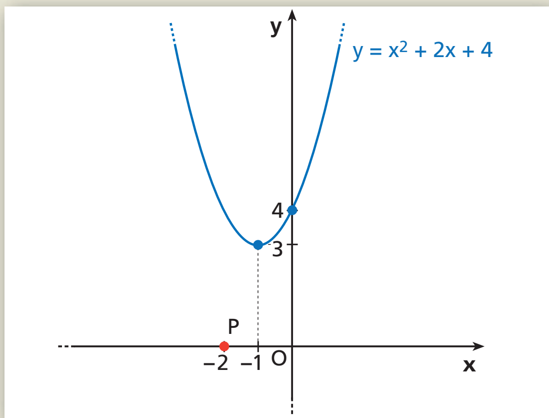
▶ Teoria a pag. 319

IN PRATICA
▶ Videolezione 18

205 **ESERCIZIO GUIDA**

Data la parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 4$, determiniamo le equazioni delle rette passanti per il punto $P(-2; 0)$ e tangenti alla parabola.

La parabola ha il vertice di coordinate $(-1; 3)$.



Poiché l'ordinata del vertice è positiva e la concavità è rivolta verso l'alto, la parabola non ha intersezioni con l'asse x. Essa interseca l'asse y in $(0; 4)$.
Il punto P non appartiene alla parabola.
Scriviamo l'equazione della generica retta passante per P:

$$y = m(x + 2).$$

Mettiamo a sistema l'equazione della retta con quella della parabola:

$$\begin{cases} y = mx + 2m \\ y = x^2 + 2x + 4 \end{cases}$$

Mediante sostituzione, otteniamo:

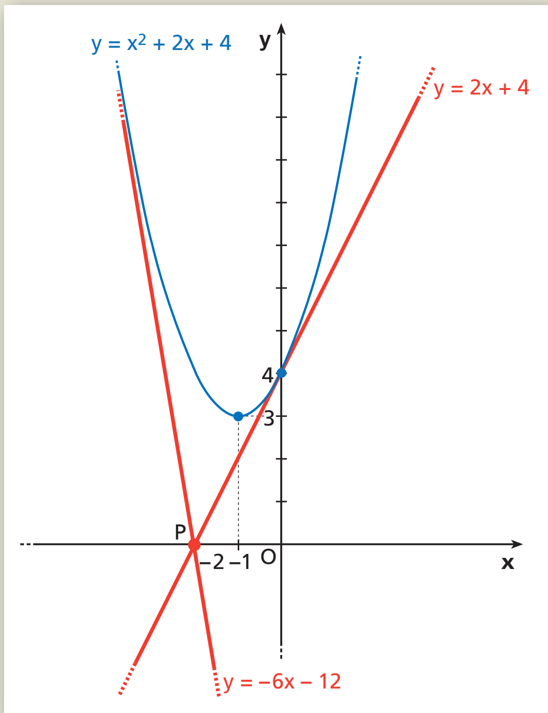
$$\begin{aligned} &x^2 + 2x + 4 = mx + 2m \\ &x^2 + (2 - m)x + 4 - 2m = 0 \\ &\Delta = (2 - m)^2 - 4(4 - 2m) = \\ &\quad = m^2 + 4m - 12. \end{aligned}$$

Ponendo $\Delta = 0$ (condizione di tangenza):

$$m^2 + 4m - 12 = 0$$

$$m = -2 \pm \sqrt{16} = -2 \pm 4 = \left\langle \begin{matrix} -6 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

Poiché abbiamo trovato due valori di m, $m_1 = -6$ e $m_2 = 2$, esistono **due** rette tangenti alla parabola passanti per P, di equazioni $y = -6x - 12$ e $y = 2x + 4$.



206 TEST La rappresentazione grafica della funzione $y = (-2x + 10)^2$ è:

A una parabola con la concavità rivolta verso il basso e che è tangente all'asse delle x.
B una parabola con la concavità rivolta verso l'alto e che è tangente all'asse delle x.
C una parabola che non taglia né è tangente all'asse delle x.
D una circonferenza di centro $x = 5$, $y = 0$.
E una retta con pendenza negativa.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*)

207 Data la parabola di equazione $y = x^2 - 3x + 2$, determina l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa -1. [$y = -5x + 1$]

208 Data la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6$, determina l'equazione della retta tangente nel punto di intersezione fra la parabola e l'asse y. [$y = -4x - 6$]

209 Verifica che la parabola di equazione $y = 2x^2 + 4x + 2$ è tangente all'asse x e scrivi le coordinate del punto di tangenza. [$T(-1; 0)$]

210 Data la parabola di equazione $y = x^2 + 4x + 6$, determina le equazioni delle rette passanti per $P(-4; 5)$ e tangenti alla parabola. [$y = -2x - 3$; $y = -6x - 19$]

211 Scrivi le equazioni delle rette passanti per $P(2; 8)$ e tangenti alla parabola di equazione $y = -2x^2 + 16x - 24$. Determina inoltre le coordinate dei punti di tangenza. [$y = 16x - 24$; $y = 8$; $(0; -24)$; $(4; 8)$]

212 È data la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$. Dopo aver determinato le equazioni delle rette a essa tangenti, uscenti dal punto $C(1; -8)$, trova le coordinate dei punti di intersezione A e B delle tangenti con l'asse x. Calcola l'area del triangolo ABC. [$y = 4x - 12$; $y = -4x - 4$; $A(3; 0)$; $B(-1; 0)$; area $= 16$]

213 Determina le coordinate dei punti di intersezione, A e B, della parabola $y = -x^2 + 4x$ con la retta $y = -x + 4$, essendo A il punto di ascissa minore. Conduci dal punto $C\left(\frac{5}{2}; 6\right)$ le rette tangenti alla parabola e verifica che i punti di tangenza sono A e B. Detto E il punto in cui la tangente in A interseca l'asse x, calcola l'area del triangolo EBC. $\left[A(1; 3); B(4; 0); \text{area} = \frac{27}{2}\right]$

214 Data la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, scrivi le equazioni delle rette tangenti a essa uscenti dal punto $C\left(2; -\frac{7}{2}\right)$ e determina le coordinate dei punti di tangenza A e B. Verifica che il triangolo ABC è equilatero, di lato $2\sqrt{3}$. $\left[y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} - \frac{7}{2}; y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - \frac{7}{2}; A\left(2 - \sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right); B\left(2 + \sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right)\right]$

215 Disegna la parabola di equazione $y = -x^2 - 2x + 7$. Dal punto $C(0; 11)$ traccia le due tangenti e determina le coordinate dei punti A e B di tangenza. Calcola l'area del triangolo ABC. [$y = 2x + 11$; $y = -6x + 11$; $A(2; -1)$; $B(-2; 7)$; area $= 16$]

216 Determina l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = -x^2 + x + 2$ e parallela alla retta di equazione $x - y + 1 = 0$, poi calcola le coordinate del punto di tangenza. [$x - y + 2 = 0$; $P(0; 2)$]

217 Data la parabola di equazione $y = x^2 + 3x + 2k - 1$, determina per quale valore di k essa risulta tangente alla retta passante per i punti $A(-1; -4)$ e $B(1; -1)$. $\left[k = -\frac{15}{32}\right]$

218 Scrivi le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti alla parabola di equazione $x = \frac{1}{2}y^2 - 2y$ e passanti per $P(-2; 3)$.
Condotta poi la tangente t_3 nel punto della parabola di ordinata 1, trova l'area del triangolo definito da t_1, t_2, t_3. $\left[x = -2; x - 2y + 8 = 0; 2x + 2y + 1 = 0; \text{area} = \frac{3}{4}\right]$

219 Trova l'equazione della tangente comune alle due parabole di equazioni $y = -x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 2x + 3$. $\left[y = \frac{3}{2}x + \frac{49}{16}\right]$

220 Determina le equazioni delle rette tangenti a entrambe le parabole di equazioni $y = x^2 - 4x + 3$ e $y = -x^2 + 2x - 6$. $[y = -4x + 3; y = 2x - 6]$

221 Trova le equazioni delle rette tangenti comuni alle due parabole di equazioni $x = \frac{y^2}{2} - 2$ e $x = \frac{y^2}{4}$ e determina l'area del quadrilatero definito dai punti di tangenza. $[x - 2y + 4 = 0; x + 2y + 4 = 0; 24]$

222 Trova la tangente comune alle due parabole di equazioni $y = 2x^2 + 2x + 1$ e $y = 2x^2 - 2x + 2$. Indicati con T_1 e T_2 i punti di tangenza, verifica che la distanza tra T_1 e T_2 è uguale alla distanza tra i vertici delle due parabole. $[8x - 8y + 7 = 0; d = \sqrt{2}]$

La formula di sdoppiamento
Risolvi i seguenti esercizi applicando la formula di sdoppiamento.

223 Calcola l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = -2x^2 + x + 1$ nel suo punto di ascissa nulla e verifica che la retta è parallela alla bisettrice del I e del III quadrante. $[y = x + 1]$

224 Scrivi l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 3x$ nel suo punto di ordinata uguale a -4 e ascissa positiva. $[y = -5x + 16]$

225 Verifica che la retta tangente alla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ nell'origine è la bisettrice del II e del IV quadrante.

226 Data la parabola di equazione $y = \frac{3}{2}x^2 - x + 5$, determina l'equazione della retta tangente nel punto $P(2; 9)$. $[y = 5x - 1]$

227 Verifica che il punto $Q(4; 3)$ appartiene alla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ e scrivi l'equazione della retta passante per Q tangente alla parabola. $[y = 2x - 5]$

L'area del segmento parabolico

228 Trova l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola di equazione $y = x^2 - 4x$ e dalla retta $y = 2x$. [36]

229 Calcola l'area della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = -\frac{1}{3}(x+1)(x-3)$ e dalla retta di equazione $y = \frac{1}{3}(x + 1)$. $\left[\frac{3}{2}\right]$

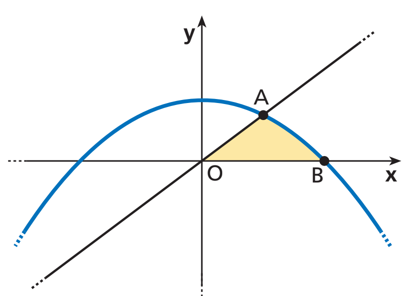
230 Trova l'area del segmento parabolico definito dalla parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$ e dalla retta che congiunge i due punti della parabola di ascissa -7 e -1. [18]

231 Determina il valore positivo di a tale che la parabola $y = x^2 + 1$ divida in due parti uguali l'area del rettangolo di vertici $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(0; a^2 + 1)$ e $(a; a^2 + 1)$.

(USA *Harvard-MIT Math Tournament*, 2002)

$[a = \sqrt{3}]$

232 Trova l'area del triangolo mistilineo OAB rappresentato nella figura, sapendo che la parabola ha equazione $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$ e la retta $y = \frac{3}{4}x$.



$\left[\frac{19}{6}\right]$

233 Trova l'area della regione delimitata dalle due parabole di equazioni $y = -x^2 + 4x$ e $y = x^2 - 4x + 4$. $\left[\frac{16}{3}\sqrt{2}\right]$

4. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA

▶ Teoria a pag. 322

IN PRATICA
▶ Videolezione 19

L'equazione della parabola noti il vertice e il fuoco

234 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y avente per vertice il punto $V(1; 2)$ e per fuoco il punto $F(1; 3)$ e rappresentiamola nel piano cartesiano.

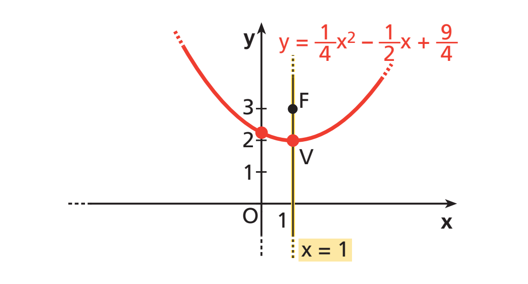
La parabola ha equazione generale $y = ax^2 + bx + c$. Per trovare a, b, c, utilizziamo le formule del vertice $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e quelle del fuoco $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$. Si ha il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 2 \\ \frac{1-\Delta}{4a} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = -8a \\ 1 - (b^2 - 4ac) = 12a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = -8a \\ 1 + 8a = 12a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - c = -2 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{9}{4} \end{cases}$$

L'equazione della parabola è: $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$.

Osservazione. La seconda equazione del sistema può essere sostituita con la condizione di appartenenza del vertice alla parabola:

$$2 = a + b + c.$$



Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, della quale sono indicate le coordinate del vertice V e del fuoco F, e rappresentala nel piano cartesiano.

235 $V(-3; 1)$, $F\left(-3; -\frac{3}{4}\right)$. $\left[y = -\frac{1}{7}x^2 - \frac{6}{7}x - \frac{2}{7}\right]$

236 $V\left(1; -\frac{3}{4}\right)$, $F(1; -1)$. $\left[y = -x^2 + 2x - \frac{7}{4}\right]$

237 $V(2; -1)$, $F\left(2; -\frac{5}{4}\right)$. $[y = -x^2 + 4x - 5]$

238 $V(1; -2)$, $F\left(1; -\frac{23}{12}\right)$. $[y = 3x^2 - 6x + 1]$

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, della quale sono indicate le coordinate del vertice V e del fuoco F, e rappresentala nel piano cartesiano.

239 $V(1; -2)$, $F\left(\frac{5}{4}; -2\right)$. $[x = y^2 + 4y + 5]$

240 $V(0; 3)$, $F\left(\frac{1}{4}; 3\right)$. $[x = y^2 - 6y + 9]$

241 $V\left(\frac{5}{2}; 1\right)$, $F(4; 1)$. $\left[x = \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{8}{3}\right]$

242 $V(-3; 1)$, $F\left(-\frac{47}{16}; 1\right)$. $[x = 4y^2 - 8y + 1]$

L'equazione della parabola noti il vertice e la direttrice

Determina l'equazione della parabola, della quale sono indicate le coordinate del vertice V e l'equazione della direttrice d.

243 $V(6; 2)$, d: $x = \frac{25}{4}$. $[x = -y^2 + 4y + 2]$

244 $V\left(-\frac{5}{2}; 2\right)$, d: $x = -\frac{3}{2}$. $\left[x = -\frac{1}{4}y^2 + y - \frac{7}{2}\right]$

245 $V(0; -1)$, d: $y = -2$. $\left[y = \frac{1}{4}x^2 - 1\right]$

246 $V(16; 0)$, d: $x = \frac{65}{4}$. $[x = -y^2 + 16]$

L'equazione della parabola per due punti, noto l'asse

247 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della parabola che passa per i punti $A(0; -4)$, $B(-1; -1)$ e che ha asse di equazione $x = 1$.

L'asse è parallelo all'asse y e quindi la parabola cercata ha equazione $y = ax^2 + bx + c$.
L'equazione dell'asse della generica parabola è $x = -\frac{b}{2a}$ e quindi vale l'uguaglianza $-\frac{b}{2a} = 1$.

Imponiamo ora che la parabola passi per i punti A e B. Un punto appartiene alla parabola se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione.
Sostituiamo pertanto le coordinate dei due punti al posto di x e y nell'equazione $y = ax^2 + bx + c$:

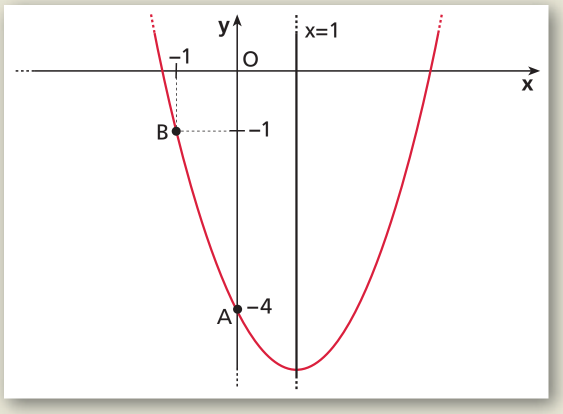
$-4 = c$ (passaggio per A)
$-1 = a - b + c$ (passaggio per B)

Risolviamo il sistema formato dalle tre equazioni nelle tre incognite a, b, c:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -4 = c \\ -1 = a - b + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = -4 \\ a - b + c = -1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = -4 \\ a + 2a - 4 = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -4 \\ a = 1 \end{cases}$$

L'equazione della parabola è $y = x^2 - 2x - 4$.



Determina l'equazione della parabola, di cui sono indicate le coordinate di due suoi punti, A e B, e l'equazione dell'asse di simmetria.

248 $A(-1; -1)$, $B(1; 5)$, $x = -\frac{3}{2}$. $[y = x^2 + 3x + 1]$

249 $A(1; -3)$, $B(4; 0)$, $x = 2$. $[y = x^2 - 4x]$

250 $A(-1; 1)$, $B(0; 4)$, $x = 1$. $[y = -x^2 + 2x + 4]$

251 $A(-6; 1)$, $B(9; -2)$, $y = -3$. $[x = -y^2 - 6y + 1]$

252 $A(-2; 5)$, $B(1; -7)$, $x = -\frac{5}{2}$. $[y = -x^2 - 5x - 1]$

253 $A(1; 1)$, $B(3; 0)$, $y = 1$. $[x = 2y^2 - 4y + 3]$

254 $A(2; -2)$, $B(0; 0)$, $y = -\frac{5}{6}$. $[x = 3y^2 + 5y]$

L'equazione della parabola passante per tre punti

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y che passa per i punti assegnati e rappresentala graficamente.

255 $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(3; 0)$. $[y = -x^2 + 3x]$

256 $A(-1; 0)$, $B(0; 5)$, $C(2; 3)$. $[y = -2x^2 + 3x + 5]$

257 $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -9)$. $[y = -x^2 + 5x - 3]$

258 $A(-1; -3)$, $B(2; 0)$, $C(0; -4)$. $[y = x^2 - 4]$

259 $A(0; -1)$, $B(-2; -3)$, $C(-4; -1)$. $\left[y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\right]$

260 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y passante per l'origine e per $A(6; 9)$ e $B(-6; 15)$. $\left[y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x\right]$

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x che passa per i punti assegnati e disegnala nel piano cartesiano.

261 $A(2; 0)$, $B(4; 1)$, $C(12; 2)$. $[x = 3y^2 - y + 2]$

262 $A(-11; 2)$, $B(13; -2)$, $C(2; 0)$. $\left[x = -\frac{1}{4}y^2 - 6y + 2\right]$

263 $A(2; 1)$, $B(12; -1)$, $C(0; 2)$. $[x = y^2 - 5y + 6]$

264 $A(0; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(-1; 2)$. $[x = -y^2 + 2y - 1]$

L'equazione della parabola passante per un punto, noto il vertice

Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y che passa per il punto A e che ha vertice in V e disegnala.

265 $A(1; -2)$, $V(2; -3)$. $[y = x^2 - 4x + 1]$

266 $A(4; 10)$, $V(1; -8)$. $[y = 2x^2 - 4x - 6]$

267 $A(1; 0)$, $V\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$. $[y = -x^2 + 3x - 2]$

268 $A(0; 1)$, $V\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right)$. $[y = -x^2 + 3x + 1]$

269 **TEST** Qual è l'equazione della parabola passante per l'origine e avente il vertice nel punto $V(-2; 4)$?

- **A** $y = -x^2 - 4x$.
- **B** $y = -x^2 + 4x$.
- **C** $y = x^2 - 4x$.
- **D** $y = x^2 + 4x$.
- **E** $y = -x^2 - 4$.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*)

270 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y passante per l'origine e con il vertice nel punto $V(1; -2)$. $[y = 2x^2 - 4x]$

271 Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse x, passante per l'origine degli assi e con il vertice nel punto $V(4; -2)$. $[x = -y^2 - 4y]$

272 Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, che ha vertice $V\left(\frac{1}{3}; -\frac{16}{3}\right)$ e che incontra l'asse y nel punto di ordinata -5. $[y = 3x^2 - 2x - 5]$

273 Una parabola, con l'asse parallelo all'asse y, ha vertice $V(4; 2)$ e passa per il punto di intersezione delle rette di equazioni $5x - 2y - 10 = 0$ e $3x + 2y + 2 = 0$. Determina la sua equazione. $\left[y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6\right]$

L'equazione della parabola note altre condizioni

274 Determina l'equazione della parabola con asse di equazione $x = \frac{1}{2}$ e passante per i punti di intersezione della retta di equazione $y = -2x + 6$ con gli assi cartesiani. $[y = -x^2 + x + 6]$

275 Scrivi l'equazione della parabola passante per il punto $A(1; -2)$, con l'asse di equazione $x = 2$ e il vertice appartenente alla retta di equazione $x + 2y + 4 = 0$. $[y = x^2 - 4x + 1]$

276 Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y e concavità rivolta verso il basso, passante per l'origine e per $A\left(1; \frac{7}{8}\right)$ e con vertice sulla retta di equazione $y = 2x - 6$. $\left[y = -\frac{1}{8}x^2 + x\right]$

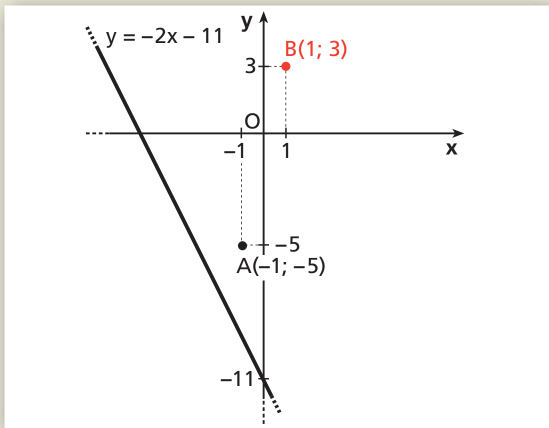
277 Trova l'equazione della parabola che ha asse di equazione $y = -2$, vertice appartenente all'asse y e passa per il punto di intersezione delle rette di equazioni $x + 2y + 1 = 0$ e $3x - y - 4 = 0$. $[x = y^2 + 4y + 4]$

278 Le rette di equazioni $y = 3x - 3$ e $y = -3x + 21$ si intersecano in un punto V e incontrano l'asse x nei punti A e B. Determina e rappresenta graficamente l'equazione della parabola che ha vertice in V e passa per A e B. $[y = -x^2 + 8x - 7]$

279 Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, il fuoco in $F(-1; 1)$ e il vertice appartenente alla retta di equazione $4x + 2y + 3 = 0$. $\left[x = y^2 - 2y - \frac{1}{4}\right]$

280 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y e con il vertice di ascissa minore di -1, passante per i punti $A(-1; -5)$ e $B(1; 3)$ e tangente alla retta di equazione $y = -2x - 11$.



Imponiamo alla parabola di equazione

$$y = ax^2 + bx + c$$

il passaggio per i due punti A e B:

$$\begin{cases} -5 = a - b + c & \text{passaggio per } A(-1; -5) \\ 3 = a + b + c & \text{passaggio per } B(1; 3) \end{cases}$$

Ricaviamo due incognite in funzione della terza. Usiamo il metodo di riduzione, sottraendo membro a membro:

$$\ominus\begin{cases} a - b + c = -5 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$$
$$-2b \qquad = -8 \rightarrow b = 4$$

Sostituiamo $b = 4$ nella prima equazione e ricaviamo c in funzione di a:

$$\begin{cases} a - 4 + c = -5 \rightarrow c = -a - 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

L'equazione della parabola diventa:

$$y = ax^2 + 4x - a - 1.$$

Ora imponiamo che la retta $y = -2x - 11$ sia tangente alla parabola:

$$\begin{cases} y = ax^2 + 4x - a - 1 \\ y = -2x - 11 \end{cases}$$

L'equazione risolvente è:

$$ax^2 + 6x - a + 10 = 0.$$

Imponiamo la condizione di tangenza, cioè $\frac{\Delta}{4} = 0$:

$$a^2 - 10a + 9 = 0 \rightarrow a = 1 \lor a = 9.$$

Le soluzioni trovate sono due:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -2 \end{cases} \lor \begin{cases} a = 9 \\ b = 4 \\ c = -10 \end{cases}$$

Otteniamo le due parabole di equazioni:

$$y = x^2 + 4x - 2 \quad \text{e} \quad y = 9x^2 + 4x - 10.$$

Poiché la parabola richiesta deve avere il vertice con ascissa minore di -1, calcoliamo le coordinate del vertice delle due parabole:

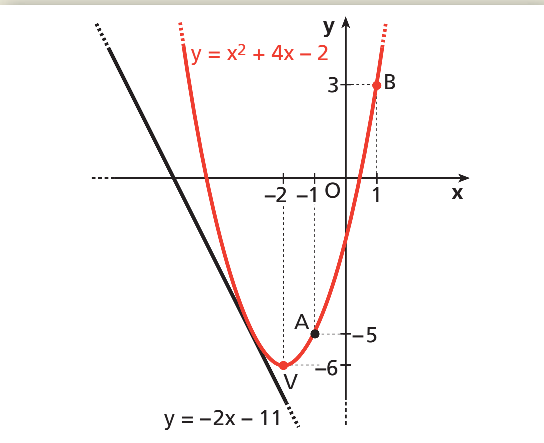
$y = x^2 + 4x - 2$, $V(-2; -6)$, ascissa $-2 < -1$

$y = 9x^2 + 4x - 10$, $V\left(-\frac{2}{9}; -\frac{94}{9}\right)$,

ascissa $-\frac{2}{9} > -1$.

Pertanto la parabola cercata ha equazione:

$$y = x^2 + 4x - 2.$$



281 Determina l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ passante per i punti $A(1; 2)$, $B(3; 0)$ e tangente alla bisettrice del II e IV quadrante. $[y = 3x^2 - 13x + 12]$

282 Scrivi l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ passante per i punti $A(2; 0)$, $B(1; -1)$ e tangente alla retta $y = -2x + 5$. $[y = -x^2 + 4x - 4;\ y = -9x^2 + 28x - 20]$

283 Determina l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ di vertice $V(2; -2)$ e tangente alla retta $y = 2x - 7$. $[y = x^2 - 4x + 2]$

284 Determina l'equazione della parabola $x = ay^2 + by + c$ passante per i punti $A(2; 0)$, $B(0; 1)$ e tangente alla retta di equazione $4x + 8y - 7 = 0$. $[x = y^2 - 3y + 2]$

285 Determina l'equazione della parabola $x = ay^2 + by + c$ di vertice $V(0; 1)$, tangente alla retta di equazione $x - 4y = 0$. $[x = -y^2 + 2y - 1]$

286 Determina per quali valori di k la parabola di equazione $y = x^2 + kx + 4$ è tangente all'asse delle ascisse. Scrivi le equazioni delle parabole corrispondenti ai valori trovati e calcola l'area della parte di piano individuata dalle tangenti a esse nel punto di ascissa 0 e dall'asse delle x. $[k = \pm 4;\ y = x^2 - 4x + 4,\ y = x^2 + 4x + 4;\ \text{area} = 4]$

287 Data l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$, il cui asse di simmetria è $x = 3$, determina i coefficienti a, b e c in modo che la parabola passi per $A(-1; -4)$ e sia tangente alla retta di equazione $4x - 4y + 37 = 0$.

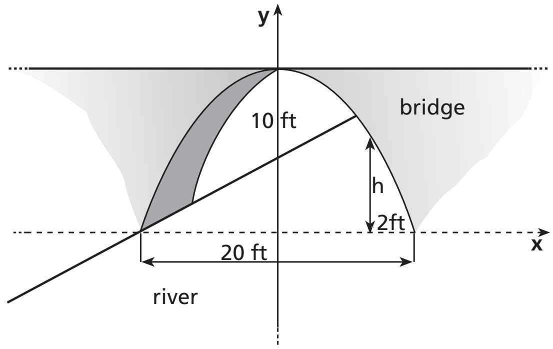
$$\left[y = -x^2 + 6x + 3;\ y = -\frac{1}{64}x^2 + \frac{3}{32}x - \frac{249}{64}\right]$$

288 Determina l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ passante per il punto $A(0; 1)$ e tangente a entrambe le rette di equazioni $y = -4x$ e $4x + 4y - 3 = 0$. $[y = x^2 - 2x + 1;\ y = 9x^2 + 2x + 1]$

289 A bridge over a stream is in the form of a parabolic arch (see diagram). The stream is 20 feet across and the bridge is 10 feet high at midstream.
a) Find the equation of the arch.
b) Find the height of the arch 2 feet from the shore.

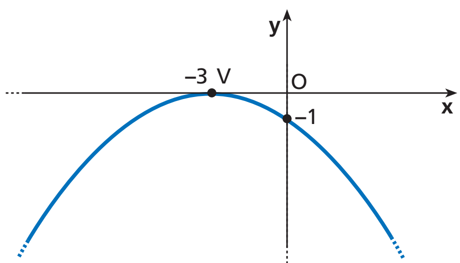
(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, Fall 2001)

$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{10}x^2 + 10\text{; b) } h = 3{,}6 \text{ ft}\right]$



ESERCIZI VARI Le condizioni per determinare la parabola

290 **TEST** La parabola rappresentata in figura



ha equazione:

A $y = -(x+3)^2$.

B $y = -\frac{(x+3)^2}{9}$.

C $y = -(x-3)(x-1)$.

D $y = -\frac{(x-3)^2}{9}$.

E $y = -(x-3)^2$.

291 **ASSOCIA** a ogni parabola o il suo vertice o la sua retta direttrice.

1) $x = \frac{1}{2}y^2 - 2y + 1$.
2) $y = x^2 + 3x + 1$.
3) $x = \frac{1}{2}y^2 - 2y - 1$.
4) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 1$.

a) $y = -\frac{3}{2}$.
b) $V\left(-3; \frac{7}{2}\right)$.
c) $x = -\frac{3}{2}$.
d) $V(-3; 2)$.

292 **TEST** In quale dei seguenti casi *non* puoi determinare univocamente l'equazione di una parabola che soddisfi le condizioni date?

A La parabola che passa per $A(1; 3)$, avente il vertice nell'origine degli assi e asse di simmetria parallelo all'asse y.

B La parabola avente il vertice in $A(1; 1)$ e per direttrice la retta $y = 3$.

C La parabola avente il vertice nel punto $V(0; 3)$ e il fuoco nell'origine degli assi.

D La parabola avente il fuoco $F(0; 1)$ e passante per $P(1; 3)$.

E La parabola passante per $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$ e $C(2; 3)$.

293 **TEST** La direttrice di una parabola ha equazione $y = -5$. Se il suo vertice ha coordinate $(3; -1)$, quali sono le coordinate del suo fuoco?

A $F(3; -3)$
B $F(3; 0)$
C $F(3; 3)$
D $F(-3; -1)$
E La parabola non esiste.

294 **VERO O FALSO?**

La parabola di equazione $y = ax^2 - ax + a + 1$:

a) ha per asse di simmetria la retta $x = \frac{1}{2}$. V F
b) ha il fuoco sull'asse x se $a = -\frac{8}{3}$. V F
c) è tangente all'asse x se $a = \frac{4}{3}$. V F
d) passa per l'origine se $a = -1$. V F
e) interseca l'asse x solo per $-\frac{4}{3} \leq a \leq 0$. V F

COMPLETA le seguenti equazioni di parabole utilizzando i dati a fianco.

295 $y = \dots x^2 + 2x + \dots$ il vertice è $V(1; -3)$.

296 $y = \dots x^2 - \dots x + \dots$ passa per $A(0; 3)$ e $B(1; 0)$ e l'asse di simmetria è $x = 2$.

297 $y = \dots x^2 + \dots x - \dots$ il fuoco è $F\left(-1; -\frac{7}{4}\right)$, passa per $(0; -1)$ e la concavità è rivolta verso l'alto.

298 $y = x^2 - \dots x + \dots$ passa per $(0; 2)$, è tangente alla retta di equazione $y = 2x - 7$ e il vertice ha ascissa positiva.

299 $y = \dots x^2 - 4x + \dots$ passa per l'origine e l'ordinata del vertice è -2.

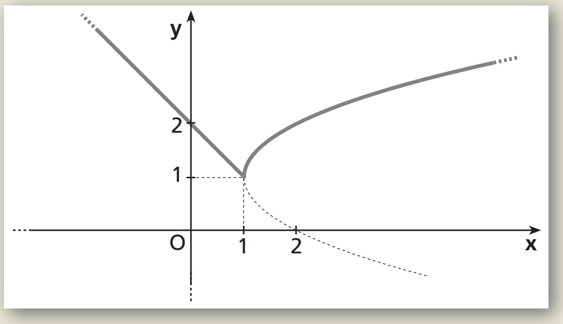
300 $x = \dots y^2 + \dots y + 1$ il fuoco è $F\left(\frac{1}{4}; -1\right)$ e la concavità è rivolta verso destra.

301 $x = \dots y^2 + 2y - \dots$ l'asse di simmetria è $y = -1$ e interseca l'asse y nel punto di ordinata 2.

Dal grafico all'equazione

302 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo l'equazione del grafico utilizzando i dati della figura.



Consideriamo la funzione per $x \leq 1$: il grafico è una semiretta di coefficiente angolare -1 e ordinata all'origine 2. L'equazione corrispondente è:

$$y = -x + 2 \qquad \text{se } x \leq 1.$$

Studiamo ora la funzione per $x > 1$: si tratta di un arco di parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x, del tipo $x = ay^2 + by + c$, di vertice $V(1; 1)$ e passante per il punto $(2; 0)$.
Imponiamo il passaggio per il vertice V:

$$1 = a + b + c.$$

Poiché la parabola in questione ha vertice

$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$ e l'ordinata y_V ha valore 1,

risulta:

$$-\frac{b}{2a} = 1 \rightarrow b = -2a.$$

Imponiamo alla parabola il passaggio per il punto $(2; 0)$, ottenendo $c = 2$.

Risolviamo il sistema formato dalle tre equazioni nelle tre incognite a, b e c:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ b = -2a \\ c = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - 2a + 2 = 1 \\ b = -2a \\ c = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Scriviamo l'equazione della parabola:

$$x = y^2 - 2y + 2.$$

Ordiniamo rispetto alla variabile y ed esplicitiamo:

$$y^2 - 2y + 2 - x = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1 - 2 + x} \rightarrow y = 1 \pm \sqrt{x - 1}.$$

Poiché nel grafico dobbiamo considerare tutti i punti con $y \geq 1$, l'equazione dell'arco di parabola è:

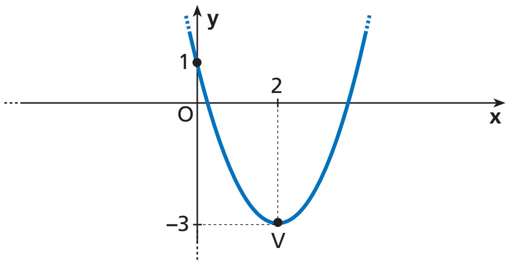
$$y = 1 + \sqrt{x - 1}, \qquad \text{con } x > 1.$$

In sintesi, l'equazione del grafico in figura risulta:

$$y = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x - 1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

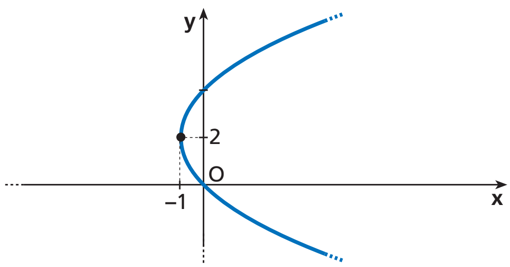
Trova l'equazione dei grafici utilizzando i dati delle figure.

303



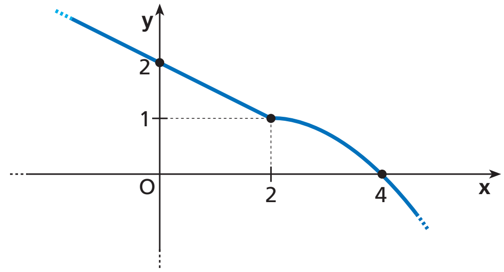
$\left[y = x^2 - 4x + 1\right]$

304



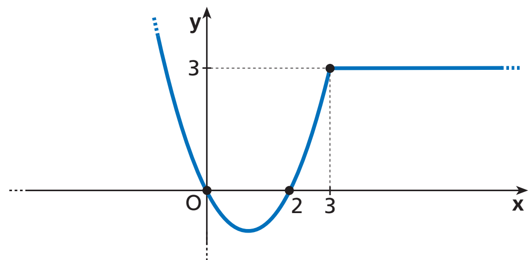
$\left[x = \frac{1}{4}y^2 - y\right]$

305



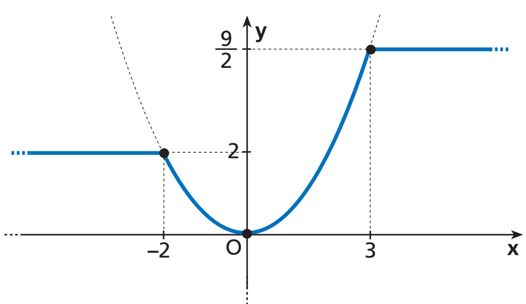
$\left[f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2 & \text{se } x \leq 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + x & \text{se } x > 2 \end{cases}\right]$

306



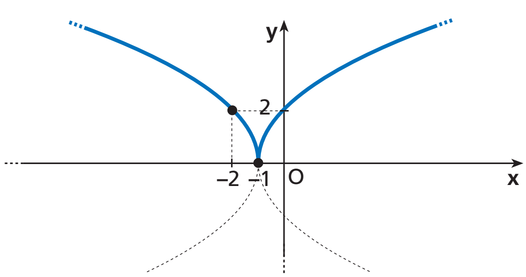
$\left[f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq 3 \\ 3 & \text{se } x > 3 \end{cases}\right]$

307



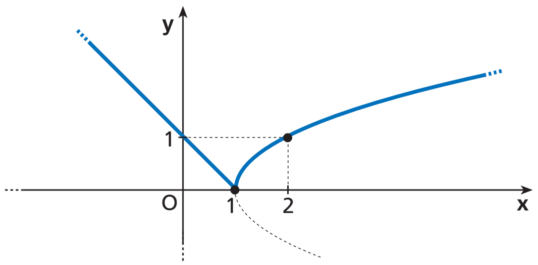
$\left[f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{se } -2 < x \leq 3 \\ \frac{9}{2} & \text{se } x > 3 \end{cases}\right]$

308



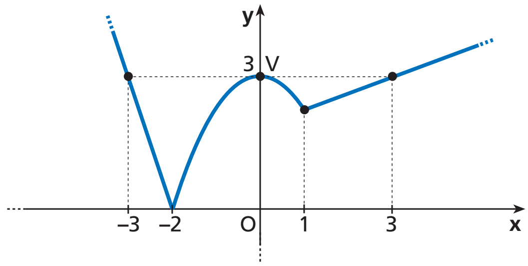
$\left[f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{-x-1} & \text{se } x \leq -1 \\ 2\sqrt{x+1} & \text{se } x > -1 \end{cases}\right]$

309



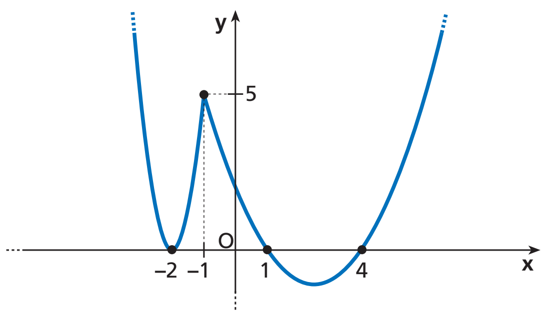
$$\left[f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{se } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases} \right]$$

310



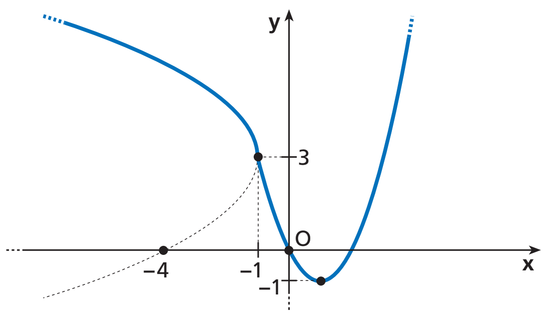
$$\left[f(x) = \begin{cases} -3x-6 & \text{se } x \leq -2 \\ -\dfrac{3}{4}x^2+3 & \text{se } -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{3}{8}x+\dfrac{15}{8} & \text{se } x > 1 \end{cases} \right]$$

311



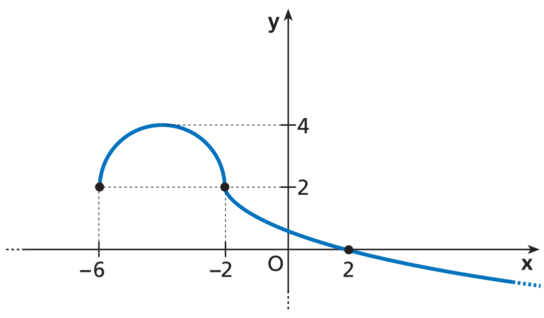
$$\left[f(x) = \begin{cases} 5x^2+20x+20 & \text{se } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x+2 & \text{se } x > -1 \end{cases} \right]$$

312



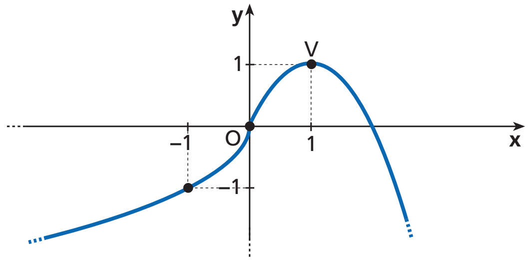
$$\left[f(x) = \begin{cases} 3+\sqrt{-3x-3} & \text{se } x \leq -1 \\ x^2-2x & \text{se } x > 1 \end{cases} \right]$$

313



$$\left[f(x) = \begin{cases} 2+\sqrt{-x^2-8x-12} & \text{se } x < -2 \\ 2-\sqrt{x+2} & \text{se } x \geq -2 \end{cases} \right]$$

314



$\left[f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}\right]$

315 Data la parabola $y = x^2 + bx + 3$, trova b in modo che:

a) abbia il vertice sull'asse y;
b) sia tangente alla bisettrice del II e IV quadrante;
c) sia tangente all'asse x;
d) stacchi sulla retta $y = -3$ una corda lunga 6.

$[\text{a) } b = 0; \text{ b) } b = -1 \pm 2\sqrt{3}; \text{ c) } b = \pm 2\sqrt{3}; \text{ d) } b = \pm 2\sqrt{15}]$

316 Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, con vertice in $V(-1; 1)$ e passante per l'origine O del sistema di riferimento, e rappresentala graficamente. Detto F il fuoco e A il secondo punto di intersezione della parabola con l'asse y, calcola l'area del triangolo AVF. $\left[x = y^2 - 2y; \frac{1}{8}\right]$

317 Trova l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, con vertice in $V(2; 0)$ e passante per $A(6; -2)$, e rappresentala graficamente. Detto F il fuoco, calcola l'area del triangolo AVF. $\left[x = y^2 + 2; \frac{1}{4}\right]$

318 Determina l'equazione della parabola passante per $A(0; 5)$ e $B(5; 0)$ e avente come asse di simmetria la retta di equazione $x = 2$. Sull'arco di parabola AB trova un punto P in modo che il quadrilatero $OAPB$ abbia area $\frac{55}{2}$. $[y = -x^2 + 4x + 5; \text{ due soluzioni: } (3; 8), (2; 9)]$

319 Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 3 = 0$, determina la parabola che ha vertice nel centro e passa per i punti di intersezione della circonferenza con l'asse x. $[y = x^2 - 2x - 3]$

320 Determina l'equazione della parabola p con asse di simmetria l'asse y, con il vertice di ordinata 4 e passante per il punto $A(-2; 0)$. Scrivi poi le equazioni delle rette tangenti alla parabola p passanti per il punto $C(1; 4)$. Detti B e D i punti di tangenza, riconosci la natura del quadrilatero $ABCD$ e calcolane l'area. $[y = -x^2 + 4; y = 4, y = -4x + 8; 10]$

321 Data la parabola con asse parallelo all'asse y, che ha il vertice nell'origine e che passa per il punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, considera il triangolo equilatero ABO che ha un vertice in O e i vertici A e B sulla parabola. Trova le coordinate di A e B e l'area del triangolo. $[A(1; \sqrt{3}), B(-1; \sqrt{3}); \sqrt{3}]$

322 Considera i punti $V(2; -1)$ e $A(0; 3)$ e la retta r di equazione $y = x + 9$.

a) Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, avente come vertice il punto V e passante per il punto A.
b) Trova i punti di intersezione B e C tra la parabola e la retta r.
c) Determina l'equazione della retta tangente alla parabola parallela alla retta r e le coordinate del punto T di tangenza.
d) Calcola l'area del quadrilatero $ABCT$.

$\left[\text{a) } y = x^2 - 4x + 3; \text{ b) } B(-1; 8), C(6; 15); \text{ c) } y = x - \frac{13}{4}, T\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{4}\right); \text{ d) } \frac{189}{4}\right]$

323 Scrivi l'equazione della parabola avente fuoco $F\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ e vertice $V(1; -2)$. Dette A e B le sue intersezioni con la bisettrice del II e IV quadrante, determina:
a) le tangenti in A e in B alla parabola;
b) un punto C sull'asse x tale che l'area del triangolo ABC sia uguale a $4\sqrt{3}$.

$\left[y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}; \text{a) } y = (-1-\sqrt{3})x - 3, y = (-1+\sqrt{3})x - 3; \text{b) } C(-4; 0), C(4; 0)\right]$

324 Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, di vertice $V(3; 5)$, passante per il punto $A(1; 1)$. Determina l'equazione della circonferenza avente come estremi di un diametro i punti di intersezione della parabola con la retta $y = -2x + 11$. $[y = -x^2 + 6x - 4; x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0]$

325 Fra le parabole del tipo $y = ax^2 + bx + c$:
a) determina la parabola p_1 passante per $A(-3; 4)$ e $B(5; 8)$ e avente ascissa del vertice uguale a 2;
b) individua la parabola p_2 passante per A e B e per il punto $(1; 2)$;
c) conduci una retta parallela all'asse y nella parte di piano delimitata da p_1 e p_2 in modo che, intersecando le due parabole, si formi un segmento lungo 2.

$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{37}{4}; \text{b) } y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}; \text{c) } x = 1 \pm 2\sqrt{3}\right]$

326 a) Scrivi le equazioni delle parabole (della forma $y = ax^2 + bx + 4$) tangenti all'asse delle ascisse e aventi, nel punto di ascissa 3, la tangente di coefficiente angolare 2.
b) Determina l'equazione della retta parallela all'asse delle ascisse che forma con le tangenti alle parabole nel loro punto di ascissa $x = 0$ un triangolo di area 32.

$\left[\text{a) } y = x^2 - 4x + 4 \text{ e } y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 4; \text{b) } y = -4 \text{ e } y = 12\right]$

327 Scrivi le equazioni delle parabole $y = ax^2 + bx + c$, tangenti alle rette $2x + 2y + 1 = 0$ e $2x - y - 8 = 0$ e passanti per il punto $O(0; 0)$, e determina la misura della corda intercettata sulla retta di equazione $2x - y - 6 = 0$ dalla parabola avente il vertice di ascissa maggiore.

$\left[y = \frac{1}{2}x^2 - 2x \text{ e } y = \frac{9}{50}x^2 - \frac{2}{5}x; 4\sqrt{5}\right]$

328 Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y tangente alla retta $4x + y - 16 = 0$ nel suo punto di ascissa 4 e passante per l'origine del sistema di riferimento. Trova l'area della parte di piano delimitata dalla parabola trovata e dalla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

$\left[y = -x^2 + 4x; \frac{125}{6}\right]$

5. I FASCI DI PARABOLE

▶ Teoria a pag. 325

IN PRATICA ▶ Videolezione 20

Riconosci fra le seguenti equazioni quelle che rappresentano un fascio di parabole.

329 $(k + 2)x - ky + 3 - k = 0$ [no]

330 $x^2 + y^2 + kx - 3y - 4 = 0$ [no]

331 $(k + 1)x^2 + 2ky - 3k + 1 = 0$ [sì]

332 $x^2 - ky^2 = 1$ [no]

333 $x = y^2 - (a + 1)y - 2$ [sì]

334 $y + 2 = ax^2 + (a - 1)x + 1$ [sì]

335 $kxy = 2 - k$ [no]

336 $(k + 1)x^2 - y + kx = 0$ [sì]

337 $(k + 1)x^2 + (k + 1)y^2 - ky + kx = 0$ [no]

338 $(2k - 1)y^2 - 3x + (k + 3)y = 2$ [sì]

Lo studio di un fascio di parabole

339 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo il fascio di parabole rappresentato dalla seguente equazione:

$$y = -(k+2)x^2 - x + k - 1, \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

- Determiniamo le coordinate dei vertici al variare di k:

$$V\left(-\frac{1}{2(k+2)}; \frac{4k^2+4k-7}{4(k+2)}\right).$$

Le parabole hanno il vertice variabile e quindi anche l'asse di simmetria è variabile.

- Studiamo la concavità.
Se $k < -2$, le parabole volgono la concavità verso l'alto.
Se $k > -2$, le parabole volgono la concavità verso il basso.
Se $k = -2$, si ha la parabola degenere, ossia la retta di equazione $y = -x - 3$.
- Troviamo le parabole generatrici e gli eventuali punti base.
Scriviamo l'equazione del fascio in forma implicita e raccogliamo il parametro k:

$$y + 2x^2 + x + 1 + k(x^2 - 1) = 0.$$

Scriviamo l'equazione della parabola p, corrispondente a $k = 0$:

$$y = -2x^2 - x - 1.$$

Scriviamo l'equazione della parabola p', uguagliando a 0 l'espressione che è moltiplicata per k, $x^2 - 1 = 0$, e troviamo una parabola degenere, ossia la coppia di rette di equazioni $x = 1$ e $x = -1$.
Determiniamo le coordinate dei punti di intersezione di p con p':

$$\begin{cases} y = -2x^2 - x - 1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

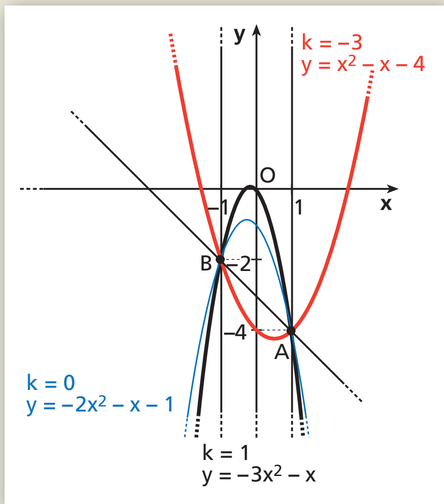
I punti base sono due: $A(1; -4)$ e $B(-1; -2)$.
Si tratta quindi di un fascio di parabole secanti.

- Disegniamo qualche parabola del fascio, attribuendo alcuni valori a k:

$$k = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2x^2 - x - 1 \quad \rightarrow \quad V_0\left(-\frac{1}{4}; -\frac{7}{8}\right);$$

$$k = 1 \quad \rightarrow \quad y = -3x^2 - x \quad \rightarrow \quad V_1\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right);$$

$$k = -3 \quad \rightarrow \quad y = x^2 - x - 4 \quad \rightarrow \quad V_{-3}\left(\frac{1}{2}; -\frac{17}{4}\right).$$



Studia i seguenti fasci di parabole.

340 $(a-1)x^2 + 2y + 2x + a + 1 = 0$ [parab. senza punti in comune; parab. deg. per $a = 1$]

341 $y - 3 = ax^2$ [parab. tangenti; parab. deg. per $a = 0$; $A(0; 3)$ punto base]

342 $kx^2 - y + (k-1)x = 0$ [parab. secanti in due punti; parab. deg. per $k = 0$; $A(-1; 1)$ e $B(0; 0)$ punti base]

343 $y = (k+1)x^2 - 2kx - 3$ [parab. secanti in due punti; parab. deg. per $k = -1$; $A(0; -3)$ e $B(2; 1)$ punti base]

344 $(k-2)\,y + kx^2 - 2x + k = 0$
[parab. senza punti in comune; parab. deg. per $k = 0$; $\nexists$ parab. per $k = 2$; non ci sono punti base]

345 $(k-1)\,y = (k+2)\,x^2 - x$
$\left[\text{parab. secanti in due punti; parab. deg. per } k = -2,\ k = 1;\ A(0; 0),\ B\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right) \text{ punti base}\right]$

346 $y = x^2 + 2kx + 2k - 1$ [parab. secanti in un punto; $A(-1; 0)$ punto base]

347 $x^2 + 2(m-2)\,x - (m+1)\,y + 4 - 5m = 0$
[parab. tangenti alla retta $2x - y - 5 = 0$ in $(3; 1)$; parab. deg. per $m = -1$]

348 $(1+m)\,x^2 - 4mx + (m-1)\,y = 0$
[parab. secanti in due punti; parab. deg. per $m = -1$, $m = 1$; $A(0; 0)$ e $B(2; 4)$ punti base]

349 $(m+1)\,x^2 + 2(2-3m)\,x + (m-1)\,y + 4 + 9m = 0$
[parab. senza punti in comune; parab. deg. per $m = -1$; $\nexists$ parab. per $m = 1$]

350 $(1+m)\,x^2 - 4x + (1-m)\,y + 3 - m = 0$
[parab. tangenti alla retta $y = 2x - 2$ nel punto $(1; 0)$; parab. deg. per $m = \pm 1$]

351 $x = -y^2 + (a+2)\,y + 2$ [parab. secanti in un punto; $A(2; 0)$ punto base]

352 $y = (1-k)x^2 - (k+2)x + 2k - 3$
[parab. secanti in due punti; parab. deg. per $k = 1$; $A(-2; 5)$, $B(1; -4)$ punti base]

353 $(k-2)x^2 - ky - 9k + 8 = 0$
[parab. secanti in due punti; parab. deg. per $k = 0$, $k = 2$; $A(-2; -5)$, $B(2; -5)$ punti base]

354 $y = (k+1)x^2 - 2(3k+1)x + 9k + 1$
[parab. tangenti in un punto; parab. deg. per $k = -1$; $A(3; 4)$ punto base]

355 $x = (2-k)y^2 + 2ky + 1$ [parab. secanti in due punti; parab. deg. per $k = 2$; $A(1; 0)$ e $B(9; 2)$ punti base]

356 $y^2 - (m+1)\,x + (m-6)\,y + 9 - m = 0$
[parab. con asse di simmetria parallelo all'asse x, passanti per $(1; 2)$ e $(4; 5)$; parab. deg. per $m = -1$]

357 $y^2 + (m-1)\,x + 2(m-2)\,y + m = 0$
[parab. con asse di simmetria parallelo all'asse x, tangenti alla retta $x + 2y + 1 = 0$ nel punto $(-3; 1)$;
parab. deg. per $m = 1$]

358 Studia il fascio di parabole di equazione $y = (3k-2)x^2 + 2(3-5k)x - 4 + 7k$, poi determina per quale valore di k la parabola del fascio:
a) passa per il punto $P(2; -3)$;
b) ha il vertice sull'asse y.
$\left[\text{parab. secanti; parab. deg. per } k = \frac{2}{3};\ A(1; 0) \text{ e } B\left(\frac{7}{3}; -\frac{8}{9}\right) \text{ punti base; a) } k = 3\text{; b) } k = \frac{3}{5}\right]$

359 Studia il fascio di parabole di equazione $(1-2k)x^2 - (3+3k)x + (1+k)y - 6 - 3k = 0$ e determina l'equazione della parabola del fascio:
a) passante per il punto $P(0; 1)$;
b) che ha asse di simmetria di equazione $x = -\frac{1}{2}$.
[parab. secanti; $(-1; 2)$, $(1; 8)$ punti base; a) $y = 4x^2 + 3x + 1$; b) $y = 3x^2 + 3x + 2$]

360 Dopo aver studiato il fascio di parabole rappresentato dall'equazione $y = (2k + 1)x^2 - kx + k - 3$, determina per quale valore di k si ottiene la parabola del fascio:

a) passante per il punto $P(2; -2)$;
b) avente il vertice sull'asse delle x;
c) avente il fuoco sulla retta $y = -4$.

[parab. senza punti in comune; parab. deg. per $k = -\frac{1}{2}$; a) $k = -\frac{3}{7}$; b) $k = \frac{10 \pm 2\sqrt{46}}{7}$; c) $k = -1$, $k = -\frac{5}{7}$]

361 Considera il fascio di parabole di equazione $(m + 1)\, y^2 + (m - 1)\, x + 2(m - 1)\, y = 0$ e studia le sue principali caratteristiche. Determina poi la parabola del fascio:

a) passante per il punto $(2; -2)$;
b) tangente alla retta $x - 2y - 2 = 0$;
c) che intercetta sul semiasse positivo delle ordinate un segmento di lunghezza 2.

[$m \neq -1$: parab. congruenti con asse di simmetria parallelo all'asse x e tangenti in O alla retta $x + 2y = 0$; a) $x = -\frac{1}{2}(y^2 + 4y)$; b) $x = -2y^2 - 2y$; c) $x = y^2 - 2y$]

362 Studia il fascio di parabole di equazione $(m + 1)x^2 - 4(m + 1)x - (m + 1)y + 4 + 5m = 0$ e determina poi la parabola del fascio:

a) passante per il punto $A(3; -3)$;
b) che intercetta sull'asse delle ascisse un segmento di lunghezza 6;
c) tangente alla retta $2x - y - 3 = 0$;
d) avente il vertice sulla retta di equazione $2x - y - 4 = 0$.

[$m \neq -1$: parab. congruenti con asse di simmetria $x = 2$, senza punti in comune; a) $y = x^2 - 4x$; b) $y = x^2 - 4x - 5$; c) $y = x^2 - 4x + 6$; d) $y = x^2 - 4x + 4$]

363 Considerato il fascio di parabole di equazione $y = mx^2 + mx + 2m - 1$ valutare le seguenti affermazioni:

a) i vertici di tutte le parabole hanno la stessa ascissa;
b) esiste una sola parabola il cui vertice ha ordinata nulla;
c) si hanno parabole con concavità rivolta verso l'alto e che tagliano l'asse delle ascisse in due punti solo con $0 < m < \frac{4}{7}$;
d) con $m < 0$ l'ordinata del vertice della parabola è negativa;
e) con $m \neq 0$ tutte le parabole sono isometriche.

(*Università di Lecce, Facoltà di Scienze, Test di ingresso*)

Come trovare l'equazione di un fascio di parabole

364 ESERCIZIO GUIDA

a) Determiniamo l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti $A(-1; 0)$ e $B(1; 2)$.
b) Determiniamo l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti nel punto T di ascissa 3 alla retta t di equazione $y = 2x - 1$.

a) Determiniamo l'equazione della retta AB utilizzando la formula della retta per due punti:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \rightarrow \frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} \rightarrow \frac{y}{2} = \frac{x + 1}{2} \rightarrow y = x + 1.$$

Scriviamo l'equazione del fascio utilizzando la formula:

$y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B)$.

Sostituendo a x_A e x_B le ascisse di A e B e a m e q i valori trovati per la retta AB, otteniamo:

$y = x + 1 + k(x + 1)(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = x + 1 + k(x^2 - 1) \quad \rightarrow \quad y = kx^2 + x + 1 - k$.

b) Scriviamo l'equazione del fascio utilizzando la formula:

$y = mx + q + k(x - x_T)^2$.

Sostituendo a x_T l'ascissa di T e a m e q i corrispondenti valori dell'equazione di t otteniamo:

$y = 2x - 1 + k(x - 3)^2 \rightarrow y = 2x - 1 + k(x^2 - 6x + 9) \rightarrow y = kx^2 + (2 - 6k)x - 1 + 9k$.

365 Nel fascio di parabole definito dalle parabole di equazioni

$y = x^2 - 2x + 1, \qquad y = -x^2 + 4x + 1,$

determina:
a) l'equazione delle parabole degeneri;
b) l'equazione della parabola passante per il punto $P(-1; -2)$.

$\left[\text{a) } y = x + 1;\ x = 0;\ x = 3;\ \text{b) } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right]$

366 Nel fascio individuato dalle parabole di equazioni $y = 2x^2 + x - 1$ e $y = -x^2 + 2x$, determina la parabola:
a) avente il fuoco di ascissa $\frac{7}{2}$;
b) passante per il punto $P(0; 1)$;
c) avente asse di simmetria di equazione $x = \frac{1}{2}$.

$\left[\text{a) } y = -\frac{x^2}{4} + \frac{7}{4}x - \frac{1}{4};\ \text{b) } y = -4x^2 + 3x + 1;\ \text{c) } y = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}\right]$

367 Date le parabole di equazioni $y = x^2 + 2x$ e $y = -x^2 + 1$, scrivi l'equazione del fascio da esse determinato e quindi trova la parabola del fascio:
a) passante per il punto $P(1; -3)$;
b) avente vertice di ascissa $x_V = 1$.

$\left[\text{a) } y = -3x^2 - 2x + 2;\ \text{b) } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right]$

368 Dopo aver rappresentato le parabole di equazioni $x = 2y^2 - 4y$ e $x = 3y^2 + 4$, scrivi l'equazione del fascio da esse individuato, infine determina e rappresenta le seguenti parabole:
a) degeneri;
b) avente per asse di simmetria la retta di equazione $y = -\frac{1}{2}$;
c) avente il vertice di ordinata $y_V = \frac{1}{4}$.

$\left[\text{a) } x + 12y + 8 = 0;\ y + 2 = 0;\ \text{b) } x = 4y^2 + 4y + 8;\ \text{c) } y = \frac{8}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}\right]$

369 Nel fascio individuato dalle parabole di equazioni $y = x^2 - 2x + 4$ e $y = -x^2 + 2$, determina la parabola:
a) passante per l'origine;
b) avente vertice di ascissa $x_V = \frac{1}{4}$;
c) tangente alla retta di equazione $y = -2x + 4$.

$\left[\text{a) } y = -3x^2 + 2x;\ \text{b) } y = -2x^2 + x + 1;\ \text{c) } y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3},\ y = x^2 - 2x + 4\right]$

370 Scrivi l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per $A(0; 0)$ e $B(1; 4)$.

$[y = kx^2 + (4 - k)x]$

371 Determina l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti $A(-1; 1)$ e $B(1; -1)$. Trova poi la parabola del fascio con concavità verso l'alto e con il vertice sulla retta di equazione $y = -x - \frac{3}{4}$. $[y = kx^2 - x - k; y = x^2 - x - 1]$

372 Scrivi l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti nel punto $T(2; 7)$ alla retta $y = 2x + 3$. $[y = kx^2 + 2(1 - 2k)x + 3 + 4k]$

373 Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti alla retta di equazione $y = 2x + 5$ nel punto di ascissa nulla, determina la parabola:
a) passante per $P(1; 9)$;
b) con vertice di ascissa $-\frac{1}{3}$;
c) tangente alla retta di equazione $y = 6x + 9$.
[a) $y = 2x^2 + 2x + 5$; b) $y = 3x^2 + 2x + 5$; c) $y = -x^2 + 2x + 5$]

374 Fra le parabole del fascio con asse parallelo all'asse y, avente come punti base $A(-3; 0)$ e $B(0; 3)$, determina quella:
a) che ha vertice in $V(-2; -1)$;
b) che ha fuoco in $F\left(-1; \frac{15}{4}\right)$;
c) avente per asse la retta di equazione $x = -\frac{5}{4}$.
[a) $y = x^2 + 4x + 3$; b) $y = -x^2 - 2x + 3$; c) $y = -2x^2 - 5x + 3$]

375 Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti $A(-3; 2)$ e $B(3; -2)$, determina la parabola:
a) passante per $P(-1; -2)$;
b) tangente alla retta di equazione $2x + 3y - 9 = 0$.
$\left[\text{a) } y = \frac{x^2 - 2x - 9}{3}; \text{ b) } y = \frac{-x^2 - 2x + 9}{3}\right]$

376 Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti alla retta di equazione $y = -x + 2$ nel punto di ascissa 1, determina la parabola:
a) passante per $P(2; -1)$;
b) con fuoco di ascissa $\frac{5}{4}$;
c) con direttrice la retta di equazione $y = \frac{5}{4}$.
[a) $y = -x^2 + x + 1$; b) $y = 2x^2 - 5x + 4$; c) $y = -2x^2 + 3x$]

377 Scrivi l'equazione del fascio di parabole tangenti nel vertice $V(2; 4)$ alla retta di equazione $y = 4$ e determina la parabola tangente alla retta di equazione $y = 4x - 6$. $[y = 4 + k(x - 2)^2; y = 2x^2 - 8x + 12]$

378 Fra tutte le parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti nel punto $T(-1; -1)$ alla bisettrice del I e III quadrante, determina quella che è tangente alla retta di equazione $y = 7x + 9$. $[y = -3x^2 - 5x - 3]$

379 Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti $A(2; 3)$ e $B(4; -1)$, determina la parabola:
a) passante per $P(1; 8)$;
b) tangente alla retta di equazione $y = 6x - 7$.
[a) $y = x^2 - 8x + 15$; b) $y = -2x^2 + 10x - 9$, $y = -8x^2 + 46x - 57$]

380 Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti $A(2; 2)$ e $B(3; 0)$, determina la parabola:
a) passante per l'origine;
b) tangente alla retta di equazione $y = x - 4$;
c) avente per asse la retta di equazione $x = 2$.
[a) $y = -x^2 + 3x$; b) $y = x^2 - 7x + 12$, $y = 9x^2 - 47x + 60$; c) $y = -2x^2 + 8x - 6$]

ESERCIZI VARI La parabola

TEST

381 Quali, fra le seguenti coppie di parabole, hanno lo stesso vertice?

A $y = x^2 + 1$ e $y = -x^2 - 1$

B $x = \frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{3}y + 1$ e $x = -\frac{1}{3}y^2 + 2y + 1$

C $y = -x^2 + 2x$ e $y = 2x^2 - 4x + 1$

D $x = -y^2 + 2y$ e $x = -2y^2 + 4y - 3$

E $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{4}$ e $y = 3x^2 + 6x$

382 The graph of two parabolas, $y = 2x^2$ and $y = x^2 + x + 6$, intersects in two points. An equation for the line that passes through these two points is:

A $x - 2x + 18 = 0$.

B $2x - y - 18 = 0$.

C $2x - y + 12 = 0$.

D $2x - y + 4 = 0$.

E $x - 2y + 12 = 0$.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

383 L'equazione $x = ay^2 + by + c$, con $a > 0$, $b = 0$ e $c > 0$, rappresenta una parabola con:

A la concavità rivolta verso destra e vertice sull'asse y.

B asse di simmetria l'asse x e vertice sul semiasse positivo delle x.

C la concavità rivolta verso sinistra e vertice sull'asse x.

D vertice un punto qualunque del I quadrante e passante per l'origine.

E asse di simmetria l'asse x e vertice nell'origine.

384 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $(3k + 6)x^2 + 3y - 6k = 0$ rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse delle y?

A $k = 2$ B $k = 1$ C $k \neq -2$ D $\forall k \in \mathbb{R}$ E $\nexists k \in \mathbb{R}$

385 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $(k - 1)y^2 + (k^2 - 2k - 3)x^2 + 2ky - x + 2k - 1 = 0$ rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse delle ascisse e concavità rivolta verso il semiasse negativo delle ascisse?

A -3 B 3 C 0 D 1 E -1

386 Given that the vertex of the parabola $y = x^2 + 8x + k$ is on the x-axis, what is the value of k?

A 0 B 4 C 8 D 16 E 24

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2001)

387 L'equazione che rappresenta la parabola traslata di un'unità verso destra e di otto unità verso il basso rispetto alla parabola di equazione $y = 5x^2$ è:

A $y = 5(x - 8)^2 + 1$.

B $y = 5x^2 - 8$.

C $y = 5(x - 1)^2 - 8$.

D $y = 5(x - 1)^2 + 8$.

E $y = 5(x + 1)^2 - 8$.

(USA *Pro2Serve Tennessee Math Contest «Fermat 1»*, 2005)

388 Trova tutti i valori di a per i quali le parabole $y = 1 + 2x - x^2$ e $y = x^2 + a^2$ si intersecano.

(USA *Texas A&M University High School Mathematics Contest*, 2001)

$\left[-\sqrt{\frac{3}{2}} \le a \le \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$

389 Trova la retta tangente alla parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 4$, parallela alla retta di equazione $y - 2x = 0$. Indicati con T il punto di tangenza, con V il vertice della parabola e con A il punto d'incontro della retta tangente con l'asse delle x, calcola l'area del triangolo AVT. $[y = 2x + 4; 1]$

390 Determina l'equazione della parabola con fuoco $F\left(-\frac{15}{4}; 1\right)$ e direttrice $x = -\frac{17}{4}$. Trova successivamente l'equazione della circonferenza con centro nel vertice della parabola e passante per i punti di intersezione della parabola con l'asse y. $[x = y^2 - 2y - 3; x^2 + y^2 + 8x - 2y - 3 = 0]$

391 a) Considera la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 5$ e determina il suo punto P di ascissa 4.
b) Scrivi l'equazione della tangente t in P alla parabola.
c) Sia R l'intersezione di t con la tangente nel vertice V alla parabola; siano H e K le proiezioni di P sull'asse di simmetria della parabola e sulla tangente nel vertice. Calcola l'area del quadrilatero $HPRV$ e dimostra che è il triplo dell'area del triangolo PRK.

[a) $P(4; 5)$; b) $4x - y - 11 = 0$; c) $R(3; 1)$, $H(2; 5)$, $K(4; 1)$; 6]

392 Nel fascio individuato dalle parabole di equazioni $y = x^2 - 2x + 4$ e $y = -x^2 + 2$, determina la parabola:
a) passante per l'origine;
b) avente vertice di ascissa $x_V = \frac{1}{4}$;
c) tangente alla retta di equazione $y = -2x + 4$.

$\left[\text{a) } y = -3x^2 + 2x;\ \text{b) } y = -2x^2 + x + 1;\ \text{c) } y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3},\ y = x^2 - 2x + 4\right]$

393 TEST Let $P(a; b)$ and $Q(c; d)$ denote two distinct points on the graph of $y = x^2$. Suppose that the slope of line PQ is 5, and the x-coordinates of P and Q differ by 1. Find $b + d$.

A 41
B 25
C 13
D 5
E None of these.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

394 La parabola $x = y^2$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ si incontrano in P al di sopra dell'asse x e in Q al di sotto dell'asse x. Le tangenti comuni alla circonferenza e alla parabola incontrano la parabola in X al di sotto dell'asse x e in Y al di sopra dell'asse x. Dimostra che XP e YQ sono tangenti alla circonferenza.

(USA *The Blakers Mathematics Competition*, 2002)

395 Una circonferenza e una parabola sono disegnate nel pianto cartesiano. La circonferenza ha centro nel punto (0; 5) e raggio 4, e la parabola ha il suo vertice in (0; 0). Se la circonferenza è tangente alla parabola in due punti, ricava l'equazione della parabola.

(USA *Texas A&M University High School Mathematics Contest*, 2000)

$\left[y = \frac{1}{4}x^2\right]$

396 Considera la parabola che ha il vertice e il fuoco sull'asse y, rispettivamente di ordinata 2 e $\frac{5}{2}$. Trova il punto della parabola più vicino alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}(x + 1)$.

$\left[y = \frac{x^2}{2} + 2; \left(\frac{1}{2}; \frac{17}{8}\right)\right]$

397 a) Determina la retta tangente alla parabola γ_1 di equazione $y = -x^2 + 3x$, parallela alla bisettrice del I e III quadrante. Indicati con T il punto di tangenza e con A e B i punti di intersezione della parabola con l'asse x, calcola l'area del triangolo ATB.
b) Scrivi l'equazione della parabola γ_2 simmetrica di γ_1 rispetto alla retta $y = x$. Trova i punti di intersezione di γ_1 e γ_2 e verifica che in uno di essi hanno la stessa tangente.

[a) $y = x + 1$; $T(1; 2)$; 3; b) $x = -y^2 + 3y$; (0; 0); (2; 2)]

398 Determina per quale valore di k la parabola del fascio $y = -x^2 + 2(k-1)x - k$:
a) passa per il punto $P(-1; 1)$;
b) ha asse di simmetria $x = 5$;
c) ha il vertice di ordinata 5;
d) è tangente alla bisettrice del I e del III quadrante.
e) Trova infine il luogo descritto dai vertici delle parabole del fascio.

$\left[\text{a) } k = 0;\ \text{b) } k = 6;\ \text{c) } k = -1; k = 4;\ \text{d) } k = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{2};\ \text{e) } y = x^2 - x - 1\right]$

399 Studia il fascio di parabole di equazione $y = kx^2 + 2x - k + 1$ e trova la parabola γ_1 che ha il vertice di ordinata 3 e la parabola γ_2 tangente alla retta di equazione $y = 2x - 2$.
Nella parte di piano racchiusa da γ_1 e γ_2, determina l'equazione di una retta parallela all'asse y che intercetta una corda PQ di lunghezza 3.
Tracciate le tangenti alle due parabole nei punti P e Q (con P nel II quadrante) che si intersecano nel punto T, trova l'area del triangolo PQT.

$\left[\text{parab. secanti nei punti } A(-1; -1) \text{ e } B(1; 3);\ \gamma_1\text{: } y = -x^2 + 2x + 2, \gamma_2\text{: } y = 3x^2 + 2x - 2;\ x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}; \frac{9}{8}\right]$

400 Due parabole γ_1 e γ_2 hanno il vertice in comune $V(3; 1)$, passano per $A(4; 0)$ e hanno gli assi paralleli agli assi cartesiani. Trova l'area della regione delimitata da γ_1 e γ_2.

$\left[\frac{1}{3}\right]$

401 a) Scrivi l'equazione della parabola γ con asse parallelo all'asse y che ha il vertice V sulla retta $y = 2x + 2$ e che passa per i punti $(-2; -5)$ e $(0; 3)$.
b) Indicati con A e B i punti di intersezione di γ con l'asse x, traccia la retta tangente in A e la parallela all'asse y in B e indica con P il loro punto di intersezione. Verifica che la retta AV passa per il punto medio di PB.

[a) $y = -x^2 + 2x + 3$]

402 Considera la parabola γ di equazione $y = -\frac{x^2}{2} + 4x - 6$ e da un punto C dell'asse di γ conduci le tangenti a γ. Detti A e B i punti di tangenza e M il punto medio di AB, dimostra che il vertice della parabola è il punto medio del segmento CM.

403 Data la parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2$, considera un punto Q della direttrice.
a) Verifica che le due tangenti alla parabola condotte da Q sono perpendicolari.
b) Determina la tangente t alla parabola nel suo punto P di ascissa 3. Trova poi la tangente alla parabola perpendicolare a t. Verifica che le due tangenti si intersecano in un punto della direttrice.

$\left[\text{b) } y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}, y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{9}, \left(\frac{5}{6}; -1\right)\right]$

404 Data la parabola γ di equazione $2y = x^2 - 6x + 5$, trova le equazioni delle rette tangenti nei punti A e B di intersezione di γ con l'asse x.
Verifica che le tangenti in A e B si incontrano in un punto C dell'asse della parabola e che il punto medio del segmento di perpendicolare condotto da C all'asse x è il vertice V di γ. [$y = -2x + 2$, $y = 2x - 10$]

405 Tre parabole con asse parallelo all'asse y hanno vertici $V_1(1; 0)$, $V_2(2; -2)$, $V_3(1; 2)$ e intersecano l'asse y nei punti di ordinate -1, -6 e 3, rispettivamente.
Trova le loro equazioni, verifica che hanno una tangente comune e determina le coordinate dei punti di contatto. [$y = -x^2 + 2x - 1$, $y = -x^2 + 4x - 6$, $y = x^2 - 2x + 3$; $y = -2x + 3$; $(2; -1)$, $(3; -3)$, $(0; 3)$]

406 Nel fascio di parabole congruenti aventi l'asse di simmetria coincidente con l'asse y trova la parabola γ_1 che ha il vertice di ordinata 1 e passa per il punto $(-2; -3)$ e la parabola γ_2 passante per $(3; -7)$.
Traccia la retta tangente in un punto T di γ_1 che interseca γ_2 in P e Q e verifica che T è il punto medio di PQ.

[γ_1: $y = -x^2 + 1$, γ_2: $y = -x^2 + 2$]

407 a) Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per $A(1; 0)$, $B(4; -3)$ e tangente in quest'ultimo punto alla retta t di coefficiente angolare -4.
b) Per un punto P dell'arco AB di parabola, conduci la retta parallela all'asse y e indica con Q il punto che tale retta ha in comune con la corda AB. Determina P e Q in modo che l'area del triangolo APQ sia 2.
c) Scrivi l'equazione del fascio di parabole tangenti in B alla retta t e trova quale di queste ha il vertice sull'asse delle x.

$\left[\text{a) } y = -x^2 + 4x - 3;\ \text{b) } P(3; 0), Q(3; -2);\ \text{c) } y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{25}{3}\right]$

408 a) Considera la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$, rappresentala graficamente e indica con F il suo fuoco e con d la sua direttrice.
b) Determina l'equazione della tangente t alla parabola nel suo punto P di ascissa 0.
c) Verifica che t è la bisettrice dell'angolo formato dalla retta per P e F e dalla perpendicolare condotta da P a d.

$\left[\text{a) } F\left(2; -\frac{3}{4}\right), d\text{: } y = -\frac{5}{4}; \text{ b) } y = -4x + 3\right]$

409 a) Trova l'equazione della parabola γ_1 passante per il punto $A(-1; 0)$, avente per asse di simmetria la retta $x = 1$ e tangente alla retta di equazione $y = 2x - 6$. Indica con V il vertice e con B l'ulteriore punto di intersezione di γ_1 con l'asse x; trova sull'arco VB un punto P tale che l'area del triangolo PAB sia $\frac{7}{4}$.
b) Scrivi l'equazione della parabola γ_2 con vertice $V(2; 1)$ e fuoco $F\left(2; \frac{3}{4}\right)$.
c) Determina la retta parallela all'asse x che stacca sulle parabole due corde uguali.

$\left[\text{a) } y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}, P\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{8}\right); \text{ b) } y = -x^2 + 4x - 3; \text{ c) } y = -1\right]$

410 Dopo aver rappresentato le parabole γ_1 e γ_2 di equazioni $y = x^2 + 4x$ e $y = -x^2 + 2x$, scrivi l'equazione del fascio da esse individuato, poi determina le parabole:
a) degeneri;
b) con asse di simmetria coincidente con l'asse y;
c) con il fuoco sull'asse delle x.
d) Considera la parabola γ_1 e trova il perimetro del triangolo rettangolo isoscele che ha l'ipotenusa sull'asse x e i cateti tangenti alla parabola. Calcola la lunghezza della corda che collega i punti di tangenza.

$\left[\text{a) } y = 3x; x = -1; x = 0; \text{ b) } y = -3x^2; \text{ c) } y = -2x^2 + x, y = -4x^2 - x; \text{ d) } \frac{17}{2}(1 + \sqrt{2}); 1\right]$

411 Studia il fascio di parabole di equazione

$$y = ax^2 - (2a + 1)x + a - 1$$

e determina:
a) la parabola γ avente per tangente la retta $y = -3x$;
b) la parabola γ_1 di vertice il punto $\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{4}\right)$.
c) Dimostra che le due parabole γ e γ_1 sono congruenti.
d) Determina la retta $x = h$ $(h > 0)$ tale che intersechi le due parabole γ e γ_1 in due punti che con l'origine formano un triangolo di area 36.

[parab. tangenti, parab. degenere $y + x + 1 = 0$, punto base $(1; -2)$;
a) γ: $y = x^2 - 3x$; b) γ_1: $y = -x^2 + x - 2$; d) $h = 4$]

412 Determina le equazioni delle parabole $y = ax^2 + bx + c$, aventi per vertice un punto di ordinata -9 e di ascissa la soluzione minore dell'equazione $t^4 - 11t^3 + 25t^2 - 11t + 24 = 0$, e che individuano sulla retta $x - y - 10 = 0$ un segmento AB di misura $3\sqrt{2}$. Calcola l'area del triangolo ABC, dove C è l'intersezione di ascissa positiva della parabola avente la concavità rivolta verso l'alto con l'asse delle x.

$\left[y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x - 10, y = x^2 - 6x; 6\right]$

413 Studia il fascio di parabole di equazione

$$(k - 1)x^2 + (1 - 3k)x + (1 + k)y + k - 1 = 0$$

e determina per quali valori di k si ha la parabola:
a) con il vertice sulla retta di equazione $x = 2$;
b) tangente alla retta $y = -x$;
c) passante per il punto di intersezione delle rette $y = x + 3$ e $3x + y - 11 = 0$.

$\left[\text{parab. tangenti; } (1; 1) \text{ punto base; } y = x, x = 1 \text{ parab. degeneri; a) } k = 3; \text{ b) } k = \frac{1}{3}; \text{ c) } k = -\frac{1}{2}\right]$

414 Determina l'equazione della parabola passante per i punti $P(-1; -8)$ e $Q(0; -3)$ e avente asse di simmetria di equazione $x = 2$. Calcola le coordinate dei punti di intersezione A e B della parabola con l'asse x (B è il punto di ascissa maggiore). Trova l'equazione della tangente t alla parabola passante per B. Detta C l'intersezione della retta t con l'asse y, scrivi l'equazione della circonferenza di centro C e raggio BC.

$[y = -x^2 + 4x - 3;\ A(1; 0), B(3; 0);\ y = -2x + 6; x^2 + y^2 - 12y - 9 = 0]$

415 Determina l'equazione della retta t tangente in $T(1; 3)$ alla circonferenza con centro in $C(-2; 0)$, quindi scrivi l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, tangente in T alla retta t e passante per il punto $A(-1; 9)$. Trova l'equazione di una retta parallela all'asse y che interseca la parabola in P e la retta t in Q in modo che l'area del triangolo PQT sia uguale a 108.

$[y = -x + 4; y = x^2 - 3x + 5; x = -5 \vee x = 7]$

416 Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, con vertice in $V(0; 9)$ e passante per $A(-2; 5)$. Successivamente trova l'equazione della retta t tangente in A alla parabola e scrivi l'equazione della circonferenza con il centro C sull'asse y e tangente in A alla retta t. Detto V il vertice della parabola, calcola l'area del triangolo AVC.

$\left[y = -x^2 + 9; y = 4x + 13; x^2 + y^2 - 9y + 16 = 0; \frac{9}{2}\right]$

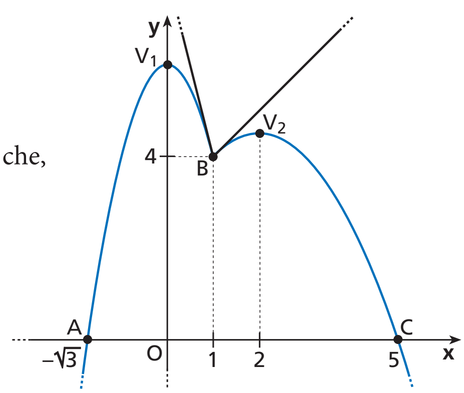
417 Dato il triangolo ABC isoscele su AB con $\overline{AB} = 4$ e di altezza $\overline{CH} = 9$, una parabola passa per A e B e ha il vertice nel baricentro del triangolo. Dopo aver scelto un opportuno sistema di riferimento, trova l'equazione della parabola e la sua tangente nel punto A.

$\left[A(-2; 0), B(2; 0); y = -\frac{3}{4}x^2 + 3; y = 3x + 6\right]$

418 Data una circonferenza di raggio 2, disegna la parabola che passa per i due punti A e B estremi di un diametro e ha il vertice in un estremo del diametro perpendicolare ad AB. Posto un opportuno sistema di riferimento, trova l'equazione della circonferenza e della parabola e inscrivi un quadrato nel segmento parabolico definito dalla retta AB.

$\left[x^2 + y^2 = 4; y = -\frac{1}{2}x^2 + 2; C\left(2(\sqrt{2} - 1); 4(\sqrt{2} - 1)\right) \text{ è un vertice del quadrato}\right]$

419
a) Scrivi la funzione di cui è rappresentato il grafico, utilizzando i dati della figura.
b) Calcola l'area del quadrilatero ABV_2C.
c) Trova le tangenti nel punto B.
d) Determina, sull'arco AV_1 della parabola, un punto P in modo che, dette H e K le sue proiezioni sull'asse x e sull'asse y, sia $\overline{PH} + \overline{PK} = 5$.



$\left[\text{a) } y = -2x^2 + 6 \text{ se } x < 1, y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} \text{ se } x \geq 1; \text{ b) } 13 + 2\sqrt{3}; \text{ c) } y = -4x + 8, y = x + 3; \text{ d) } P(-1; 4)\right]$

420 Scrivi l'equazione della parabola $y = x^2 + bx + c$, passante per l'origine e ivi tangente a una retta di coefficiente angolare 6. Determina l'equazione della tangente t e della normale n alla parabola nel suo punto di ascissa -5. Calcola l'area del triangolo formato da t e da n con la retta avente coefficiente angolare 4 e passante per il punto della parabola di ascissa -2.

$\left[y = x^2 + 6x; t\colon 4x + y + 25 = 0, n\colon x - 4y - 15 = 0; \frac{255}{16}\right]$

421 Rappresenta la parabola di equazione $x = 2y^2 + 1$ e trova una retta parallela all'asse y che intersecando la parabola forma con il vertice un triangolo di area uguale a $\frac{27}{4}$. Scrivi poi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo.
[$2x - 11 = 0$; $x^2 + y^2 - 7x + 6 = 0$]

422 Scrivi l'equazione della parabola p_1: $y = x^2 - 4x + c$ tangente in un punto A alla parabola p_2 di equazione $y = -x^2 + 8x - 18$ e traccia le rette passanti per A e aventi coefficienti angolari -2 e -1. Siano B e C le intersezioni delle rette trovate con p_1 e D ed E quelle con p_2. Verifica che i triangoli ABC e AED sono congruenti e calcolane area e perimetro.
$\left[y = x^2 - 4x; B(-1; 5), C(0; 0), D(7; -11), E(6; -6); \text{area} = 6, 2p = \sqrt{26} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{5}\right]$

423 Determina l'equazione della parabola p_1: $y = ax^2 + bx - 1$ tangente alla retta $2x - y = 0$ nel punto di ascissa 1 e l'equazione della parabola p_2 con asse parallelo all'asse y, avente per vertice il punto di ascissa 4 di p_1 e passante per il punto di ascissa 3 di p_1. Calcola il valore di k per il quale la retta $y = k$ interseca p_1 e p_2 formando segmenti congruenti.
[$y = -x^2 + 4x - 1$; $y = 3x^2 - 24x + 47$; $k = 2$]

424 Considera la parabola di equazione $y = x^2 + 6x$ che interseca l'asse x nei punti O e B. Determina le coordinate di un punto P, appartenente all'arco OB della parabola, tale che la somma delle sue distanze dalla tangente t in B e dalla normale n alla curva in B sia $\frac{60}{\sqrt{37}}$.
$\left[O(0; 0), B(-6; 0); P_1(-1; -5), P_2\left(-\frac{18}{5}; -\frac{216}{25}\right)\right]$

425 Determina le equazioni delle parabole $y = x^2 + bx$ e $y = -x^2 - 2x + c$ che intersecano la retta r: $y = -5$ nel punto di ascissa 1 e le tangenti alle due parabole nei punti che hanno in comune. Calcola poi l'area del poligono formato dalla retta r, dalle tangenti determinate e dall'asse delle ordinate.
[$y = x^2 - 6x$, $y = -x^2 - 2x - 2$; $4x + y + 1 = 0$; 2]

426 Scrivi l'equazione della parabola avente per asse la retta $y = 4$, che intercetta sull'asse y una corda lunga 4 e passante per il punto di ascissa -6 dell'asse delle x. Trova l'equazione della parabola simmetrica della parabola trovata rispetto all'asse y. Nella parte di piano delimitata dalle due parabole inscrivi un rettangolo avente perimetro 10 e individua i suoi vertici.
$\left[x = -\frac{1}{2}y^2 + 4y - 6; x = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 6; \left(\frac{3}{2}; 3\right), \left(\frac{3}{2}; 5\right), \left(-\frac{3}{2}; 3\right), \left(-\frac{3}{2}; 5\right)\right]$

427 Scrivi le equazioni delle parabole $y = ax^2 + bx + c$, tangenti alle rette $2x - y - 5 = 0$ e $2x + y - 3 = 0$ e passanti per il punto di ascissa 4 della retta $3x - 5y + 8 = 0$. Determina l'equazione della retta t tangente nel punto A di ascissa 3 alla parabola avente il vertice di ordinata minore e l'equazione della retta n normale alla stessa parabola in A e poi calcola l'area del triangolo formato da t, n e dall'asse delle ascisse.
$\left[y = x^2 - 4x + 4 \text{ e } y = \frac{1}{4}x^2 - x + 4; t: 2x - y - 5 = 0, n: x + 2y - 5 = 0; \frac{5}{4}\right]$

428 Scrivi l'equazione della parabola avente il fuoco in $F\left(4; -\frac{3}{2}\right)$ e per direttrice la retta $y = -\frac{5}{2}$. Determina l'equazione della tangente t alla parabola nel suo punto A di ascissa 6. Individua il punto G simmetrico del punto F rispetto a t e verifica che il triangolo FAG è isoscele e che il piede dell'altezza condotta da A appartiene alla tangente nel vertice della parabola.
$\left[y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6; 2x - y - 12 = 0; G\left(6; -\frac{5}{2}\right)\right]$

429
a) Rappresenta il grafico della curva di equazione $y = 3 - \sqrt{3 - x}$.
b) Trova l'equazione della parabola con il vertice nel I quadrante che passa per i punti $(1; -1)$ e $(0; -6)$ e che intersecando l'asse x determina una corda lunga $2\sqrt{3}$.
c) Determina le intersezioni A e B delle due curve e calcola l'area del triangolo formato dall'asse del segmento AB e dagli assi cartesiani.
$\left[\text{b) } y = -x^2 + 6x - 6; \text{ c) } A(2; 2), B(3; 3), \frac{25}{2}\right]$

430 La parabola γ_1 ha come asse di simmetria la retta $x = 4$ e ha per tangente nel punto A di ascissa 1 la retta di equazione $y = 6x - 7$. La parabola γ_2 ha il vertice nel punto $V\left(4; -\frac{13}{4}\right)$ e il fuoco in $F\left(4; -\frac{9}{4}\right)$. Determina l'equazione di γ_1 e γ_2 e nella parte di piano da esse racchiusa inscrivi un rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani di perimetro uguale a 24.

$\left[y = -x^2 + 8x - 8,\ y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + \frac{3}{4}; \ldots\right]$

431 Trova le intersezioni A e B fra la retta r di equazione $y = -x + 3$ e la parabola p di equazione $y = x^2 - 2x + 1$. Considera sull'arco AB di parabola un punto P e determina l'equazione del luogo descritto dal baricentro del triangolo APB al variare di P. Scrivi poi l'equazione della circonferenza di diametro AB e determina le ascisse delle altre due intersezioni fra la circonferenza e la parabola.

$\left[A(-1; 4),\ B(2; 1);\ x^2 + y^2 - x - 5y + 2 = 0;\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},\ x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right]$

432 Scrivi l'equazione della circonferenza con il diametro di estremi $A(1; 1)$ e $B(3; 5)$ e della parabola con asse parallelo all'asse y passante per A e con vertice in B. Trova l'ulteriore punto C di intersezione fra la circonferenza e la parabola e verifica che in tale punto le due curve hanno la stessa tangente t. Trova poi per quale punto P della parabola si verifica che:

$$\sqrt{5}\,\overline{PQ} + \overline{PR} = 2,$$

essendo Q e R le proiezioni di P rispettivamente sulla retta t e sull'asse x.

$[x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0;\ y = -x^2 + 6x - 4;\ C(4; 4);\ t: y = -2x + 12;\ P(5; 1)]$

433 Scrivi l'equazione della circonferenza con il centro nel punto $Q(3; 5)$ e tangente all'asse x. Determina le intersezioni A e B della circonferenza con l'asse y.
Detto C il punto di tangenza della circonferenza con l'asse x, trova l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x passante per A, per B e per C. Sull'arco AB di parabola determina il punto P tale che la somma delle sue distanze dagli assi cartesiani sia uguale a $\frac{13}{3}$.

$\left[x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0;\ A(0; 9),\ B(0; 1);\ C(3; 0),\ x = \frac{1}{3}y^2 - \frac{10}{3}y + 3;\ P\left(-\frac{7}{3}; 2\right)\right]$

434 Determina il valore di k per il quale la parabola $y = \frac{3k - 7}{3}x^2 + \frac{6k - 5}{3}x + 3k - 2$ passa per il punto $P(6; -45)$.
Detti A, B e C i punti di incontro della parabola trovata con l'asse x e con l'asse y, determina l'equazione della circonferenza passante per tali punti. Trova la retta $y = k$ che interseca la parabola in D ed E e la circonferenza in F e G in modo che:

$$\frac{11}{5}\overline{DE}^2 + \overline{FG}^2 = 6.$$

$\left[k = 1;\ x^2 + y^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4} = 0;\ k = \frac{1}{2}\right]$

435 Delle due parabole con asse parallelo all'asse y passanti per $A(0; -1)$ e tangenti alle rette $y = 3x$ e $y = -2x + 15$, trova quella il cui vertice V ha ascissa maggiore.
Sull'arco AV di tale parabola considera un punto P di ascissa x e, indicata con $\mathscr{A}(APV)$ l'area del triangolo APV, traccia la funzione $f(x) = \mathscr{A}(APV)$.
Individua il punto P per cui si ha $f(x) = 2$. Trova poi l'equazione della circonferenza con centro nel vertice della parabola e passante per il suo fuoco. Spiega perché la circonferenza è tangente alla direttrice.

$\left[y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1;\ f(x) = \frac{4x - x^2}{2},\ 0 \le x \le 4;\ P(2; 2);\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0\right]$

436 Trova l'equazione della parabola con la concavità rivolta verso l'alto e con asse parallelo all'asse y che passa per $A(1; -4)$ e ha il fuoco in $F\left(-1; -\frac{31}{4}\right)$. Determina l'equazione della circonferenza γ con centro nel vertice della parabola e raggio tale che l'area individuata da γ sia π volte l'area racchiusa nel segmento parabolico compreso tra la parabola e la retta $y = 1$.

$[y = x^2 + 2x - 7;\ x^2 + y^2 + 2x + 16y + 29 = 0]$

437 a) Nel fascio di parabole con asse parallelo all'asse y tangenti alla retta di equazione $2x + y - 8 = 0$ nel suo punto di ascissa 6, individua quella tangente all'asse delle ascisse.

b) Traccia le tangenti alla parabola dal punto $P\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ e indica con A e B i punti di tangenza.

c) Verifica che il triangolo APB è un triangolo rettangolo e determina l'equazione della semicirconferenza circoscritta ad esso.

$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1; \text{ b) } 2x - y = 0, A(-2; -4), 2x + 4y - 5 = 0, B\left(3; -\frac{1}{4}\right);\right.$ $\left.\text{c) } \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 4x + 17y - 20 = 0 \\ 3x - 4y - 10 \le 0 \end{cases}\right]$

438 a) Determina l'equazione della retta t passante per i punti A e B appartenenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 6$, di ascissa rispettivamente 1 e 6.

b) Trova l'area del segmento parabolico individuato dalla retta t e dalla parabola.

c) Determina il punto C ottenuto dall'intersezione delle rette r e s tangenti in A e B alla parabola.

d) Calcola l'area del triangolo ABC.

$\left[\text{a) } 2x - y = 0; \text{ b) } \frac{125}{6}; \text{ c) } C\left(\frac{7}{2}; -\frac{11}{2}\right); \text{ d) } \frac{125}{4}\right]$

439 Considera la retta r di equazione $y = -4$ e il punto $F(0; 8)$. Detto P un punto generico di r, sia Q il punto di intersezione tra l'asse t del segmento PF e la perpendicolare a r per P.

a) Verifica che il luogo descritto da Q al variare di P su r è una parabola avente r come direttrice e F come fuoco e dimostra che la retta t è tangente in Q alla parabola.

b) Determina la posizione di P affinché il triangolo PFQ abbia area doppia di quella del triangolo OPF.

$\left[\text{a) } y = \frac{x^2}{24} + 2; \text{ b) } P_1(-4\sqrt{15}; -4), P_2(4\sqrt{15}; -4)\right]$

440 Considera la parabola γ avente fuoco in $F(0; 8)$ e la retta di equazione $y = -4$ come direttrice, e sia P il punto di γ avente ascissa 3.

a) Determina la retta t, tangente a γ in P.

b) Nel fascio di rette parallele a t trova la retta r su cui γ stacca un segmento di lunghezza $\frac{3}{2}\sqrt{17}$.

c) Calcola l'area del triangolo che ha per vertici gli estremi della corda e il fuoco.

[a) $2x - 8y + 13 = 0$; b) $x - 4y + 8 = 0$; c) 18]

441 a) Considera il fascio di parabole di equazione $y = x^2 - (b + 1)x + 3$ e dimostra che tutte le parabole del fascio passano per uno stesso punto P.

b) Determina la parabola γ del fascio che è tangente alla retta r di equazione $3x + 2y - 6 = 0$.

c) Determina la retta p perpendicolare a r in P e trova il suo ulteriore punto Q di intersezione con γ.

d) Trova la retta t, tangente in Q a γ.

e) Calcola l'area del triangolo individuato dalle rette r, p, t.

$\left[\text{a) } P(0; 3); \text{ b) } 2y = 2x^2 - 3x + 6; \text{ c) } 2x - 3y + 9 = 0, Q\left(\frac{13}{6}; \frac{40}{9}\right);\right.$ $\left.\text{d) } 102x - 36y - 61 = 0; \text{ e) } \frac{2197}{864}\right]$

442 Siano date le parabole α: $y = 2x^2 - 3x + 1$ e β: $x = -y^2 + 1$.

a) Calcola le coordinate dei loro punti di intersezione A e B e indica con A il punto di ascissa minore.

b) Detto P un punto sull'arco di α compreso tra A e B, determina P in modo che si abbia $\overline{BP}^2 - \overline{AP}^2 = \frac{1}{4}$.

c) Trova il punto Q su β in modo che i segmenti AP e BQ siano le basi di un trapezio.

d) Calcola l'area del trapezio.

$\left[\text{a) } A(0; 1), B(1; 0); \text{ b) } P\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{8}\right); \text{ c) } Q\left(\frac{21}{25}; \frac{2}{5}\right); \text{ d) } \frac{123}{400}\right]$

443 Considera la parabola avente il punto $V(0; 4)$ come vertice e $F\left(0; \frac{15}{4}\right)$ come fuoco.

a) Trova le equazioni delle due circonferenze con il centro sull'asse y tangenti alla parabola e all'asse x.
b) Determina le coordinate dei punti di contatto tra le due circonferenze e la parabola.
c) Calcola l'area del quadrilatero formato dai quattro punti appena determinati.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 + 5y = 0,\ x^2 + y^2 - 3y = 0;\ \text{b) } (\pm\sqrt{6}; -2), (\pm\sqrt{2}; 2);\ \text{c) } 4(\sqrt{6} + \sqrt{2})\right]$

444 Sia α la circonferenza di centro $A(-2; 0)$ e raggio 2 e sia β la parabola avente per direttrice la tangente alla circonferenza nel punto di ascissa -4 e per fuoco un generico punto F sull'asse x.

a) Trova le equazioni di α e β.
b) Discuti, al variare del punto F, le posizioni relative di α e β.
c) Tra le posizioni di F tali che α e β siano secanti in due punti distinti P e Q, determina quella per cui PQ è un diametro di α e scrivi l'equazione della parabola corrispondente.

$\left[\text{a) } \alpha\colon x^2 + y^2 + 4x = 0, \beta\colon x = \frac{1}{2(h+4)}y^2 + \frac{h-4}{2};\ \text{b) secanti per } -4 < h < 4, \text{ tangenti per } h = 4,\right.$
$\left.\text{esterne per } h < -4 \vee h > 4, \text{ parab. degenere per } h = -4;\ \text{c) } h = -2,\ y^2 = 4(x+3)\right]$

445 Considera la parabola di equazione $y = 8x - x^2$ e il fascio di rette di equazione $y = 2x + h$, dove h è un parametro reale.

a) Studia, al variare di h, le posizioni relative di retta e parabola.
b) Nel caso in cui la retta è secante, indica con P e Q i punti di intersezione e trova la retta r del fascio tale che le tangenti t_1 e t_2 alla parabola in P e Q siano perpendicolari.
c) Trova le coordinate del punto di intersezione R tra t_1 e t_2.
d) Calcola l'area del triangolo individuato dalle rette t_1, t_2 e r.

$\left[\text{a) } h < 9 \text{ secanti}, h = 9 \text{ tangenti}, h > 9 \text{ esterne};\ \text{b) } 8x - 4y + 31 = 0;\ \text{c) } R\left(3; \frac{65}{4}\right);\ \text{d) } \frac{5}{4}\sqrt{5}\right]$

446 Considera i due fasci di parabole $p_1\colon y = x^2 + (a-1)x + a$ e $p_2\colon y = -x^2 + ax - 2$.

a) Studia, al variare di a, le posizioni relative delle due parabole generiche.
b) Nel caso in cui esse sono tangenti, determina la tangente comune.
c) Nel caso in cui sono secanti, determina a affinché, detti P e Q i loro punti di intersezione, la lunghezza della corda PQ misuri $\frac{\sqrt{29}}{4}$.

$\left[\text{a) } a > -\frac{15}{8} \text{ esterne}, a = -\frac{15}{8} \text{ tangenti}, a < -\frac{15}{8} \text{ secanti};\ \text{b) } 38x + 16y + 31 = 0;\ \text{c) } a = -2\right]$

447 Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, passante per $P(1; 0)$ e avente vertice nel punto $V(2; -1)$. Nel fascio di rette per P trova la retta, con coefficiente angolare positivo, che intersecando la parabola individua un segmento parabolico di area $\frac{32}{3}$. $[y = x^2 - 4x + 3;\ m = 2]$

448 Sia p_1 la parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y passante per i punti $A(0; -5)$, $B(2; 3)$ e $C(3; 4)$ e sia p_2 la parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y avente vertice in $V(2; -4)$ e passante per $D(5; 0)$.

a) Determina le equazioni delle due parabole.
b) Calcola le coordinate dei punti P e Q di intersezione delle parabole e l'equazione della retta PQ.
c) Determina l'area della parte di piano compresa tra le due parabole.

$\left[\text{a) } y = -x^2 + 6x - 5,\ 9y = 4(x^2 - 4x - 5);\ \text{b) } P(5; 0) \equiv D,\ Q\left(\frac{5}{13}; -\frac{480}{169}\right);\ \text{c) } \frac{4000}{169}\right]$

I sistemi parametrici

449 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo il sistema parametrico

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 6 \\ 2kx + (1+k)y - 2k - 2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

al variare del parametro k in $\mathbb{R}$, utilizzando il metodo grafico.

- L'equazione $y = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 6$ rappresenta una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, che ha vertice in $V(4; -2)$ e che interseca gli assi cartesiani in $(0; 6)$, $(2; 0)$ e $(6; 0)$.
  Disegniamo la curva ed evidenziamo l'arco con $0 \leq x \leq 6$ che ha per estremi i punti $A(0; 6)$ e $B(6; 0)$.
- Studiamo ora l'equazione $2kx + (1+k)y - 2k - 2 = 0$.
  Evidenziamo k:

  $$k(2x + y - 2) + y - 2 = 0.$$

  È un fascio proprio di rette, di generatrici:

  $y = 2$, ottenuta ponendo $k = 0$,
  $2x + y - 2$, ottenuta ponendo l'espressione che è moltiplicata per k uguale a 0.

  Il centro del fascio è $C(0; 2)$.
- Imponiamo alla retta generica del fascio il passaggio per $A(0; 6)$:

  $$(1 + k)6 - 2k - 2 = 0 \rightarrow 4k + 4 = 0 \rightarrow k = -1.$$

- Imponiamo ora il passaggio per $B(6; 0)$:

  $$12k - 2k - 2 = 0 \rightarrow 10k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{1}{5}.$$

- Troviamo il valore di k relativo alla retta del fascio tangente alla parabola con il sistema:

  $$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 6 \\ 2kx + (k+1)y - 2k - 2 = 0 \end{cases}$$

  Sostituendo il valore di y ricavato dalla prima equazione nella seconda, otteniamo:

  $$2kx + (k+1)\left(\frac{x^2}{2} - 4x + 6\right) - 2k - 2 = 0 \rightarrow$$

  $$\rightarrow 2kx + k\frac{x^2}{2} - 4kx + 6k + \frac{x^2}{2} - 4x + 6 - 2k - 2 = 0 \rightarrow (k+1)x^2 - 4(k+2)x + 8k + 8 = 0.$$

  Poniamo $\dfrac{\Delta}{4} = 0$:

  $$4(k+2)^2 - 8(k+1)^2 = 0 \rightarrow k^2 + \cancel{4k} + 4 - 2k^2 - \cancel{4k} - 2 = 0 \rightarrow -k^2 + 2 = 0 \rightarrow k = \pm\sqrt{2}.$$

  Le rette tangenti alla parabola sono due, ma quella tangente all'arco AB si ottiene per $k = \sqrt{2}$. Infatti le rette del fascio, al variare di k, ruotano intorno al punto C in senso orario a partire dalla retta $2x + y - 2 = 0$, che si ottiene per $k \rightarrow \infty$.
- Osservando il grafico, deduciamo il numero dei punti di intersezione tra la parabola e le rette del fascio nell'intervallo $0 \leq x \leq 6$ e quindi il numero delle soluzioni, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

– per $k = -1$, una soluzione;

– per $-1 < k < \frac{1}{5}$, una soluzione;

– per $k = \frac{1}{5}$, due soluzioni;

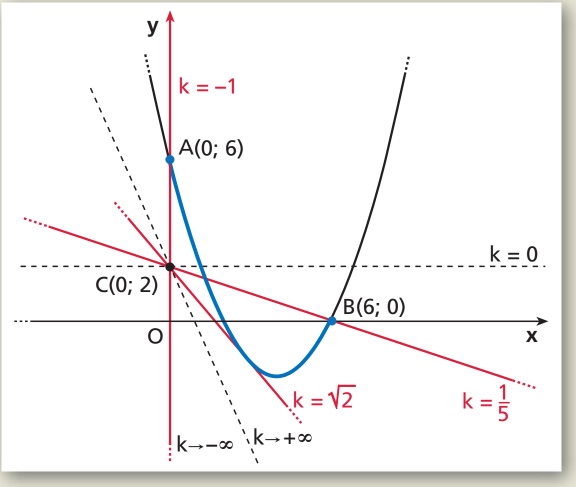
– per $\frac{1}{5} < k < \sqrt{2}$, due soluzioni;

– per $k = \sqrt{2}$, due soluzioni coincidenti.

In sintesi, il sistema ammette:

una soluzione per $-1 \leq k < \frac{1}{5}$;

due soluzioni per $\frac{1}{5} \leq k \leq \sqrt{2}$.



Risolvi i seguenti sistemi parametrici con metodo grafico.

450 $\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ kx - y - 3 - 5k = 0 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } -\frac{3}{2} < k \leq -\frac{1}{2}; 2 \text{ sol.: } -2 \leq k \leq -\frac{3}{2}\right]$

451 $\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ 3x - y + 2k = 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } -6 \leq k < 0; 2 \text{ sol.: } 0 \leq k \leq \frac{1}{8}\right]$

452 $\begin{cases} y = x^2 - 3x - 4 \\ x - 3y - k + 1 = 0 \\ 0 < x \leq 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } 5 \leq k \leq 13; 2 \text{ sol.: } 13 < k \leq \frac{64}{3}\right]$

453 $\begin{cases} x^2 = 2y \\ 4kx + 2(1 + 2k)y - 10k - 1 = 0 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } k \leq -\frac{1}{2} \vee k > 0; 2 \text{ sol.: } \frac{\sqrt{3} - 3}{12} \leq k \leq 0\right]$

454 $\begin{cases} y^2 - 4y - x + 4 = 0 \\ x + (m - 1)y + 4(1 - m) = 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$ $[2 \text{ sol.: } 1 \leq m \leq 2]$

455 $\begin{cases} x = y^2 - 4y \\ x - 2y + m = 0 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.: } 5 \leq m < 8; 2 \text{ sol.: } 8 \leq m \leq 9]$

456 $\begin{cases} x = y^2 - 2y + 1 \\ 2kx + (1 + 5k)y - 2(1 + 5k) = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } k < -\frac{1}{4} \vee k \geq 0; 2 \text{ sol.: } -\frac{1}{4} \leq k \leq -\frac{1}{5} \vee -\frac{1}{13} \leq k < 0\right]$

457 $\begin{cases} x = \sqrt{y + 4} \\ y = 2x + q \\ x \leq 3 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.: } -4 < q \leq -1; 2 \text{ sol.: } -5 \leq q \leq -4]$

458 $\begin{cases} y = 2\sqrt{x + 1} \\ 3x - 2y + k - 2 = 0 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } 4(\sqrt{3} - 1) \leq k < 5; 2 \text{ sol.: } 5 \leq k \leq \frac{19}{3}\right]$

459 $\begin{cases} y = |x^2 - 2x| \\ y = 2k \\ -1 \le x \le 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } \frac{3}{2} < k \le 4;\ 2 \text{ sol.: } \frac{1}{2} < k \le \frac{3}{2};\ 4 \text{ sol.: } 0 \le k \le \frac{1}{2}\right]$

460 $\begin{cases} y = \sqrt{4 - x} \\ (k-1)x + y - 4k + 1 = 0 \\ -5 < x \le 4 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.: } k < 1]$

461 $\begin{cases} x = -1 + \sqrt{1 + y} \\ (m+1)x - y + 2(1-m) = 0 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.: } m < 1;\ 2 \text{ sol.: } m = 1]$

462 $\begin{cases} \sqrt{16 - 4x} + 6k = kx - 1 \\ -2 \le x \le 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } \frac{-1-2\sqrt{6}}{8} < k \le -\frac{1}{2};\ 2 \text{ sol.: } -1 \le k \le \frac{-2\sqrt{6}-1}{8}\right]$

(Suggerimento. Isolata la radice, poni $y = \sqrt{16 - 4x}$ e $y = kx - 1 - 6k$.)

463 $\begin{cases} 1 - \sqrt{x - 1} = 2m - \frac{m+1}{3}x \\ 1 \le x \le 5 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } \frac{4}{5} < m \le 2;\ 2 \text{ sol.: } \frac{1}{2} \le m \le \frac{4}{5}\right]$

464 $\begin{cases} \sqrt{x + 4} = \frac{x + m}{2} \\ x \le 0 \end{cases}$ $[2 \text{ sol.: } 4 \le m \le 5]$

465 $\begin{cases} \sqrt{4 - x} + 5k = kx + 1 \\ -4 \le x \le 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } \frac{1-2\sqrt{2}}{9} < k \le 1;\ 2 \text{ sol.: } \frac{1-\sqrt{2}}{2} \le k \le \frac{1-2\sqrt{2}}{9}\right]$

466 $\begin{cases} x^2 + (m-4)x - 5m - 1 = 0 \\ 2 \le x \le 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } -\frac{5}{3} < m \le -1;\ 2 \text{ sol.: } -2 \le m \le -\frac{5}{3}\right]$

(Suggerimento. Poni: $y = x^2$.)

467 $\begin{cases} x^2 - mx + 2m = 0 \\ -2 \le x \le 2 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.: } m < -1;\ 2 \text{ sol.: } -1 \le m \le 0]$

468 $\begin{cases} x^2 - mx - 4 = 0 \\ -1 \le x \le 2 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.: } m \le 0 \vee m \ge 3]$

469 $\begin{cases} (x+3)^2 = -x + 2k \\ -2 \le x < -1 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol.: } -\frac{1}{2} \le k < \frac{3}{2}\right]$

---

470 $\begin{cases} (k+1)x^2 - (k+3)x + 2 = 0 \\ -2 \le x < 1 \end{cases}$

$[1 \text{ sol.: } k \le -2 \vee k > 1]$

471 $\begin{cases} x^2 - 4x - 4k = 0 \\ -2 < x \le 4 \end{cases}$

$[1 \text{ sol.: } 0 < k < 3;\ 2 \text{ sol.: } -1 \le k \le 0]$

472 $\begin{cases} kx^2 + 2(k-1)x - 4(k-1) = 0 \\ 0 < x \le 3 \end{cases}$

$\left[1 \text{ sol.: } k \le \frac{2}{11} \vee k > 1\right]$

473 $\begin{cases} x^2 - 6x + 4(k-1) = 0 \\ 1 \le x \le 4 \end{cases}$

$\left[1 \text{ sol.: } \frac{9}{4} \le k < 3;\ 2 \text{ sol.: } 3 \le k \le \frac{13}{4}\right]$

474 $\begin{cases} x^2 - (k-2)x - k + 1 = 0 \\ -1 < x \le 1 \end{cases}$ $[1 \text{ sol.: } 0 < k \le 2]$

475 $\begin{cases} kx^2 - 2kx - 3(k+1) = 0 \\ -1 < x \le \frac{3}{2} \end{cases}$

$\left[1 \text{ sol.: } k < -\frac{4}{5};\ 2 \text{ sol.: } -\frac{4}{5} \le k \le -\frac{3}{4}\right]$