CAPITOLO

G3

Perpendicolari e parallele. Parallelogrammi e trapezi

Il volo delle falene

Ti sarà capitato, nelle sere d'estate, di notare come volano le farfalle notturne intorno alla luce emessa da un lampione o da una lampada in veranda: ruotano vicine alla fonte luminosa, accostandosi sempre di più, fino a bruciarsi le ali…

…perché le falene sono attratte dalla luce artificiale?

La risposta a pag. G125

1. Le rette perpendicolari

Abbiamo visto che per due punti passa una e una sola retta; di conseguenza se due rette hanno come intersezione due punti, allora coincidono. Pertanto due rette distinte possono intersecarsi in un solo punto.

Due rette che si intersecano in un solo punto si dicono **rette incidenti**.

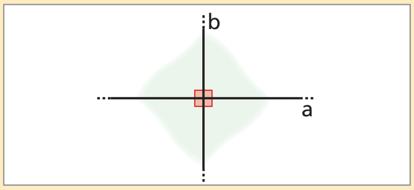
Due rette incidenti dividono il piano in due coppie di angoli opposti al vertice congruenti. Se poi i quattro angoli sono tutti congruenti, ognuno è un angolo retto.

Diamo allora la seguente definizione.

DEFINIZIONE

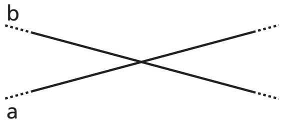
Rette perpendicolari

Due rette incidenti sono perpendicolari quando dividono il piano in quattro angoli retti.



Per indicare che la retta a è perpendicolare alla retta b, si scrive: $a \perp b$.

Due rette incidenti che non sono perpendicolari si dicono **oblique**.



rette oblique

Il teorema dell'esistenza e dell'unicità della perpendicolare

TEOREMA

Esistenza e unicità della perpendicolare

Per un punto del piano passa una e una sola retta perpendicolare a una retta data.

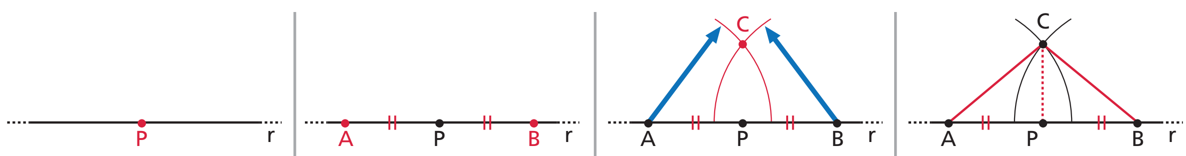
Ipotesi 1. P punto del piano;
2. r retta qualunque.

Tesi 1. Esiste una retta $s \perp r$ passante per P;
2. la retta s è unica.

DIMOSTRAZIONE Si presentano due casi: il punto P appartiene alla retta r, oppure non le appartiene.

Primo caso. $P \in r$.

▼ **Figura 1** Costruzione.



a. Disegniamo il punto *P* sulla retta *r*.

b. Prendiamo su *r* due punti *A* e *B* equidistanti da *P*.

c. Puntiamo il compasso in *A* e tracciamo un arco con apertura a piacere, purché maggiore di *AP*. Con la stessa apertura puntiamo in *B* e tracciamo un arco che interseca il primo in *C*.

d. Congiungiamo il punto *C* con *A* e con *B*. Tratteggiamo il segmento *CP*.

Dimostriamo la tesi 1

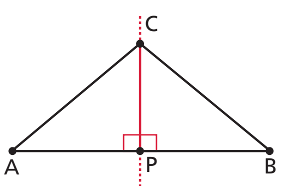
Per dimostrare l'esistenza della retta è sufficiente indicarne la costruzione e dimostrare che la retta costruita è proprio la perpendicolare cercata.

Osserviamo che, per costruzione, il triangolo ABC (figura 1*d*) è isoscele e CP è la mediana relativa alla base AB.

In un triangolo isoscele la bisettrice, la mediana e l'altezza rispetto alla base coincidono, *pertanto* CP è anche altezza relativa alla base AB, *quindi* la retta CP è la perpendicolare cercata.

Dimostriamo la tesi 2

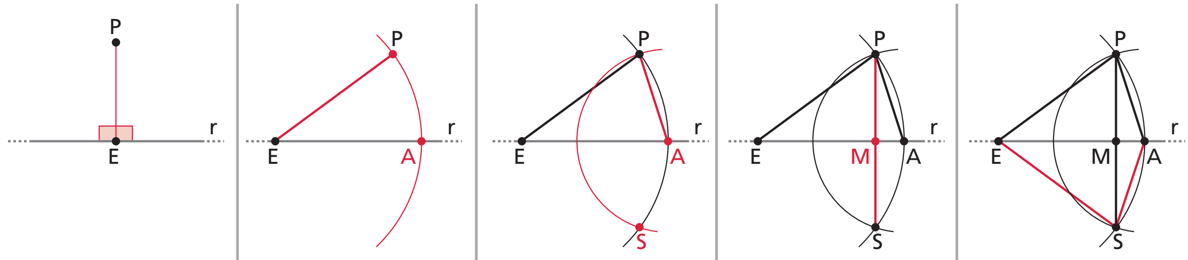
Per dimostrare l'unicità della retta perpendicolare dobbiamo provare che non ne esiste un'altra.



Osserviamo nella figura a fianco che l'angolo $A\hat{P}B$ è piatto e la retta PC divide tale angolo in due angoli retti, *quindi* PC è bisettrice dell'angolo piatto. Dal postulato che afferma l'unicità della bisettrice di un angolo, *deduciamo* che la retta perpendicolare a r passante per P è unica.

Secondo caso. $P \notin r$.

▼ **Figura 2** Costruzione.



a. Disegniamo il punto *P* fuori dalla retta *r*. Scegliamo su *r* un punto *E* a caso. Se i due angoli formati da *PE* con la retta *r* risultano congruenti, e quindi retti, *PE* è la perpendicolare cercata.

b. Se i due angoli formati da *PE* con *r* sono diversi, congiungiamo *E* con *P*, poi puntiamo il compasso in *E* con apertura *PE* e descriviamo un arco che interseca *r* in *A*.

c. Congiungiamo *A* con *P*; puntiamo il compasso in *A* e descriviamo un secondo arco, con apertura *AP*. Esso interseca il primo arco in *P* e in *S*.

d. Congiungiamo *P* con *S* e indichiamo con *M* il punto in cui *PS* interseca la retta *r*.

e. Congiungiamo il punto *S* con *E* e con *A*.

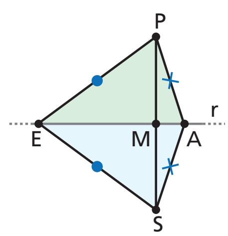
Dimostriamo la tesi 1

I triangoli *EPA* ed *ESA* (figura *a*) hanno:

- $EP \cong ES$ per costruzione;
- $AP \cong AS$ sempre per costruzione;
- EA in comune.

Quindi, sono congruenti per il terzo criterio. In particolare, essi hanno $P\hat{E}A \cong S\hat{E}A$, *quindi* EM è bisettrice dell'angolo $P\hat{E}S$.

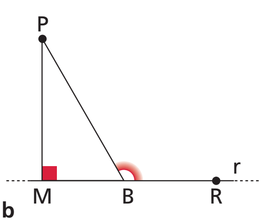
Il triangolo EPS è isoscele, *quindi* la bisettrice EM è anche altezza relativa alla base PS, per il teorema sulla bisettrice di un triangolo isoscele. *Pertanto* possiamo affermare che EM e PS sono perpendicolari, e quindi PS è la perpendicolare cercata.



a

Dimostriamo la tesi 2

Supposto che PM sia perpendicolare a r, dimostriamo che una qualsiasi altra retta passante per P e per un punto B qualunque di r, distinto da M, non lo è (figura *b*).

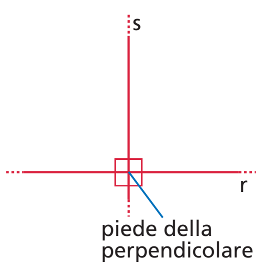


b

Nel triangolo PBM, l'angolo esterno $R\hat{B}P$ è maggiore dell'angolo interno non adiacente $B\hat{M}P$.

Poiché tale angolo è retto, per la condizione iniziale, $R\hat{B}P$ è ottuso e la retta PB non è perpendicolare a r.

Il punto in cui la perpendicolare interseca la retta data si chiama **piede della perpendicolare**.



Le proiezioni ortogonali

La **proiezione ortogonale, o più semplicemente proiezione, di un punto** su una retta è il piede della perpendicolare condotta da quel punto alla retta (figura 3*a*).

La **proiezione ortogonale di un segmento** su una retta è il segmento appartenente alla retta avente per estremi le proiezioni degli estremi del segmento dato (figura 3*b*).

a. *H* è la proiezione del punto *P* su *r*.

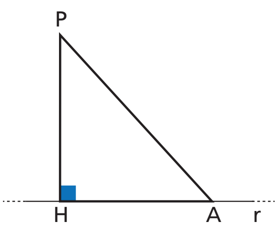
b. *A*'*B*' è la proiezione del segmento *AB* su *r*.

▲ **Figura 3**

La distanza di un punto da una retta

TEOREMA

Il segmento perpendicolare condotto da un punto a una retta è minore di ogni segmento obliquo condotto dallo stesso punto alla stessa retta.



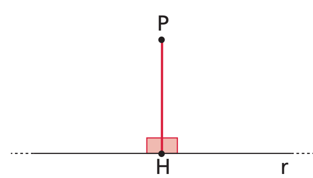
DIMOSTRAZIONE Il triangolo *APH* è rettangolo in *H* per l'ipotesi 1, *quindi* il cateto *PH* è minore dell'ipotenusa *PA*.

Il teorema precedente ci porta alla seguente definizione.

DEFINIZIONE

Distanza di un punto da una retta

La distanza di un punto da una retta è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto stesso e il piede della perpendicolare condotta dal punto alla retta.



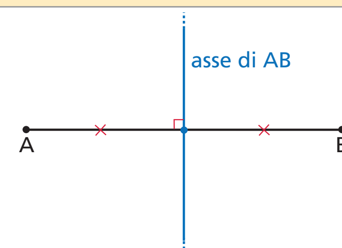
◗ Se vuoi attraversare una strada, qual è il percorso più breve che puoi scegliere?

L'asse di un segmento

DEFINIZIONE

Asse di un segmento

Si chiama asse di un segmento la retta perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio.



2. Le rette parallele

Le rette tagliate da una trasversale

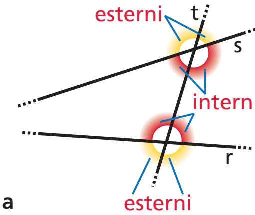
Consideriamo nel piano due rette r e s e una terza retta t detta **trasversale**, che interseca le prime due. Le tre rette individuano nel piano otto angoli.

Questi angoli vengono denominati a seconda della loro posizione rispetto alla trasversale e alle altre due rette. In particolare sono chiamati **interni** gli angoli compresi fra le due rette r e s, **esterni** gli altri (figura *a*).

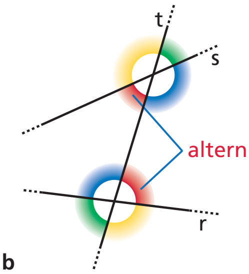
Gli angoli **alterni** sono da parti opposte rispetto alla trasversale t ma entrambi interni o esterni e non adiacenti (figura *b*).

Gli angoli **corrispondenti** sono dalla stessa parte della trasversale t, uno interno e l'altro esterno e non adiacenti (figura *c*).

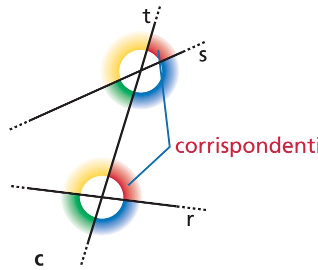
Gli angoli **coniugati** sono entrambi interni (o esterni) dalla stessa parte della trasversale t (figura *d*).



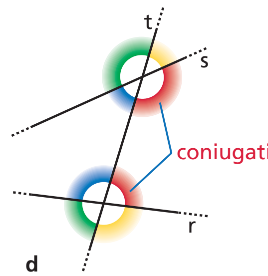
a



b



c



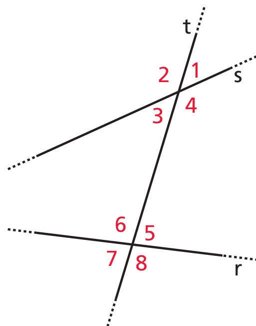
d

In sintesi

$$\text{Alterni}\begin{cases}\text{interni: } (4; 6), (3; 5);\\ \text{esterni: } (1; 7), (2; 8).\end{cases}$$

Corrispondenti: (1; 5), (2; 6), (4; 8), (3; 7).

$$\text{Coniugati}\begin{cases}\text{interni: } (4; 5), (3; 6);\\ \text{esterni: } (1; 8), (2; 7).\end{cases}$$

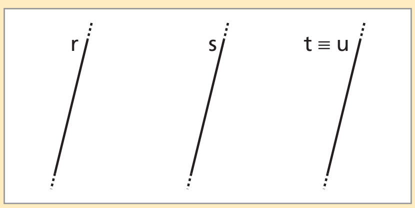


Le rette parallele

DEFINIZIONE

Rette parallele

Due rette sono parallele quando non hanno alcun punto in comune oppure quando coincidono.



Da questa definizione si deduce che la relazione di parallelismo fra rette è **riflessiva:** $a \parallel a$.
Inoltre tale relazione è anche **simmetrica**: **se** $a \parallel b$**, allora** $b \parallel a$.

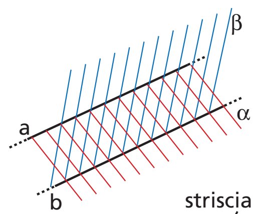
Consideriamo due rette parallele a e b (figura *a*).

La retta a risulta contenuta interamente in uno dei due semipiani individuati da b; indichiamo tale semipiano con β.

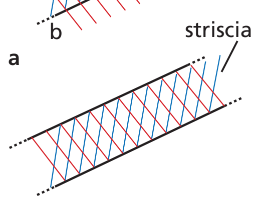
A sua volta la retta b risulta contenuta interamente in uno dei due semipiani individuati da a; indichiamo quest'altro semipiano con α.

L'intersezione fra i due semipiani α e β viene chiamata **striscia** (figura *b*).

Una striscia è una figura convessa poiché un qualunque segmento avente gli estremi all'interno della striscia giace interamente in ognuno dei semipiani e quindi anche all'interno della striscia stessa.



a



b

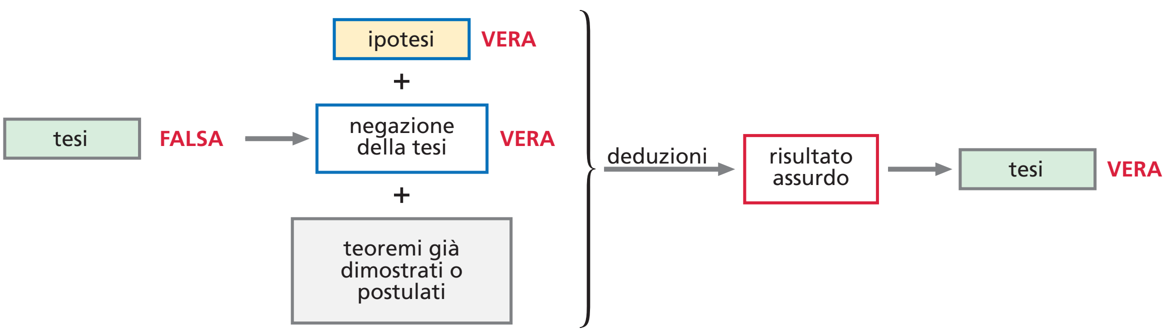
LA DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

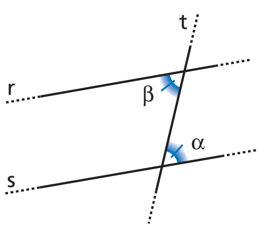
Una **dimostrazione per assurdo** segue il seguente procedimento:

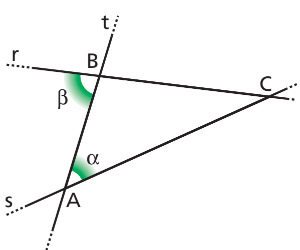
- **si suppone falsa la tesi**, cioè si considera vera la sua negazione;
- sulla base di tale verità **si fanno deduzioni** come nelle dimostrazioni dirette;
- a un certo punto **si giunge a un risultato contraddittorio**, ossia alla negazione di qualche teorema dimostrato in precedenza, o alla negazione di un postulato o della stessa ipotesi; risultato che, per questo motivo, chiamiamo assurdo;
- dalla contraddizione ottenuta è possibile dedurre che **la tesi è vera**.

La figura 4 illustra i passi logici della dimostrazione per assurdo. Useremo questo schema nella dimostrazione del prossimo teorema.

▼ Figura 4







◗ Una qualsiasi delle ipotesi è una **condizione sufficiente per il parallelismo** delle rette.

Il teorema delle rette parallele

TEOREMA

Se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti, allora sono parallele.

Ipotesi $\alpha \cong \beta$.

Tesi $r \parallel s$.

DIMOSTRAZIONE Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che le rette r e s non siano parallele ma si incontrino in un punto C.

Osservando il triangolo ABC e applicando a esso il teorema dell'angolo esterno a un triangolo, concludiamo che β è maggiore di α. Siamo giunti a contraddire l'ipotesi che diceva $\alpha \cong \beta$; dobbiamo quindi ritenere falsa la supposizione iniziale.

Allora r e s non possono intersecarsi, esse *pertanto* risultano parallele.

Più in generale, scriviamo il seguente **criterio per il parallelismo**.

TEOREMA

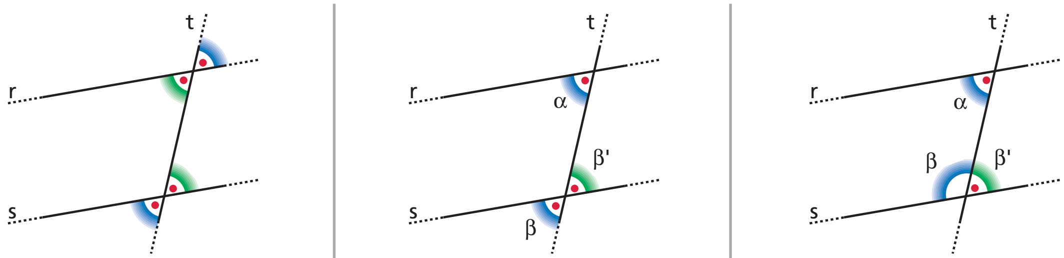
Se due rette, incontrandone una terza, formano

- angoli alterni (interni o esterni) congruenti, *oppure*
- angoli corrispondenti congruenti, *oppure*
- angoli coniugati (interni o esterni) supplementari,

allora le due rette sono parallele.

Per la dimostrazione basta notare che in ogni caso possiamo ricondurci a quello degli angoli alterni interni (figura 5).

▼ **Figura 5**



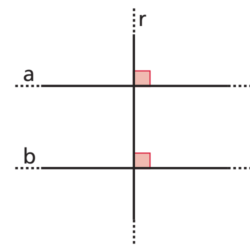
a. Gli angoli alterni esterni e gli angoli alterni interni sono opposti al vertice: se sono congruenti i primi, lo sono anche i secondi.

b. Se gli angoli corrispondenti α e β sono congruenti, lo sono anche α e β', perché β e β' sono opposti al vertice.

c. Se gli angoli coniugati α e β sono supplementari, α e β' sono congruenti: infatti $\alpha + \beta = \hat{P}$ e $\beta' + \beta = \hat{P}$.

Corollario. Due rette perpendicolari a una stessa retta sono parallele.

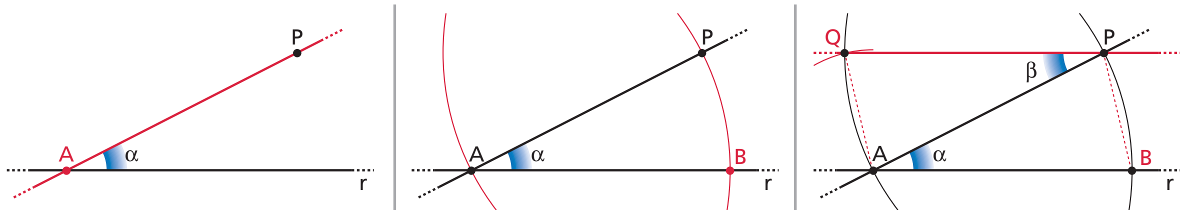
Infatti, nella figura a lato le due rette *a* e *b* formano con *r* angoli corrispondenti congruenti, in quanto retti, *quindi* le rette sono parallele.



La parallela per un punto a una retta

L'**esistenza** di una parallela a una retta data e passante per un punto fissato è dovuta al fatto che è sempre possibile costruire una coppia di angoli alterni interni congruenti. Infatti, disegnato un angolo α, si può sempre costruire un angolo β, congruente ad α, alterno interno di α.

▼ **Figura 6** Costruzione.



a. Dati una retta *r* e un punto *P* fuori di essa, tracciamo una qualsiasi retta obliqua rispetto a *r* e passante per *P*. Chiamiamo *A* il punto di intersezione con *r*. Consideriamo l'angolo acuto α di vertice *A*.

b. Con apertura uguale a *PA*, disegniamo due archi, uno di centro *P* e uno di centro *A*. Quest'ultimo interseca la retta *r* nel punto *B*.

c. Con centro in *A* e apertura *BP*, tracciamo un arco che interseca nel punto *Q* l'arco di centro *P* e raggio *PA*. I due triangoli *APQ* e *PAB* sono congruenti per il terzo criterio, quindi $\alpha \cong \beta$; inoltre α e β sono alterni interni delle rette *r* e *QP*, tagliate dalla trasversale *AP*. Pertanto *QP* è la parallela a *r* cercata.

L'**unicità** della parallela per un punto a una retta data non si può invece dedurre dalle proprietà finora esaminate e deve essere accettata come postulato.

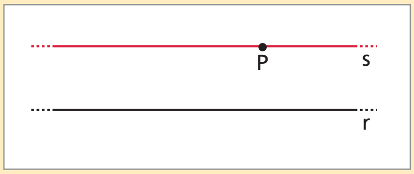
Esso è storicamente noto come il **quinto postulato di Euclide** o **postulato delle parallele**.

▶ Per la precisione, questa formulazione del postulato va attribuita a Proclo (V secolo d.C.).

POSTULATO

Quinto postulato di Euclide

Dati una retta e un punto fuori di essa, è unica la retta passante per quel punto e parallela alla retta data.



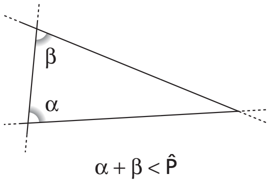
IL QUINTO POSTULATO E LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

L'enunciato di Euclide, equivalente a quello di Proclo, con i termini da noi usati, può essere scritto nella seguente forma:

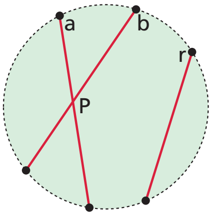
> «Due rette tagliate da una trasversale si incontrano dalla parte dove si formano angoli coniugati interni la cui somma è minore di due angoli retti» (figura *a*).

Questo postulato è diventato famoso perché nel corso dei secoli, vista l'impossibilità della sua dimostrazione, si è cercato di costruire una geometria indipendente da esso. Nella prima metà del secolo scorso alcuni grandi matematici (Lobacevskij, Bolyai, Riemann, Klein...) hanno dimostrato l'esistenza di più geometrie in cui sono validi tutti i postulati di Euclide, tranne il quinto. Tali geometrie si chiamano, appunto, non euclidee. Vista la complessità dell'argomento, forniamo in questa scheda solo un'idea intuitiva della geometria di Lobacevskij, mediante un modello.

Il piano è rappresentato dai punti interni a una circonferenza e le rette sono corde del cerchio (esclusi i punti estremi). Il quinto postulato in questo modello non è valido. Infatti per il punto *P* della figura passano infinite rette che non intersecano la retta *r*, quindi per un punto passano infinite parallele a una retta data (figura *b*).



a



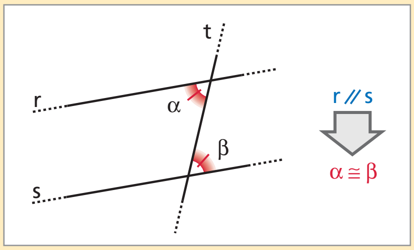
b

L'inverso del teorema delle rette parallele

Vale anche il teorema inverso del teorema delle rette parallele.

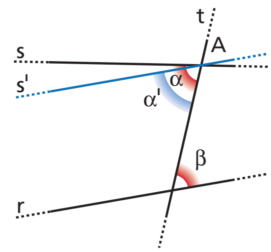
TEOREMA

Se due rette sono parallele, formano con una qualunque trasversale due angoli alterni interni congruenti.



Ipotesi $r \parallel s$. **Tesi** $\alpha \cong \beta$.

DIMOSTRAZIONE Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che risulti α diverso da β, precisamente $\alpha > \beta$.
Per il punto *A* possiamo allora tracciare la retta s' in modo che risulti $\alpha' \cong \beta$.
In tal modo s' e *r* risultano parallele.
Per il punto *A* esistono allora due parallele alla stessa retta *r*, contrariamente a quanto afferma il quinto postulato.
Poiché la negazione della tesi conduce a un risultato assurdo *deduciamo* che la tesi è vera, cioè che gli angoli alterni interni sono congruenti.



Più in generale, tenendo conto delle osservazioni fatte in precedenza, vale il seguente teorema.

TEOREMA

Se due rette sono parallele, allora formano con una trasversale:

- angoli alterni (interni o esterni) congruenti;
- angoli corrispondenti congruenti;
- angoli coniugati (interni o esterni) supplementari.

Il teorema delle rette parallele e il suo inverso formano insieme una **condizione necessaria e sufficiente** per il parallelismo di due rette.

Corollario 1. Date due rette parallele, se una retta è perpendicolare a una di esse, è perpendicolare anche all'altra.

Osservando la figura 7 è anche possibile dimostrare la seguente proprietà.

Corollario 2. Due rette perpendicolari a due rette incidenti sono anch'esse incidenti.

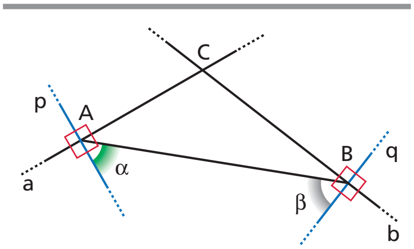


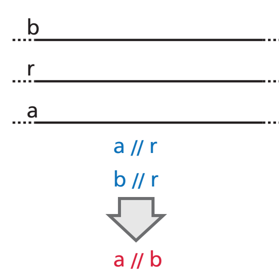
Figura 7 Le rette *a* e *b* si incontrano in *C*. Vogliamo dimostrare che le rette a esse perpendicolari, *p* e *q*, sono incidenti. Gli angoli α e β sono coniugati di *p* e *q* rispetto alla trasversale *AB* e sono acuti in quanto parti di angoli retti. La loro somma non è un angolo piatto, come è richiesto nel caso delle rette parallele, *quindi p* e *q* sono incidenti.

Qui ragioniamo per assurdo: se le rette *p* e *q* fossero parallele, la somma di α e β sarebbe un angolo piatto. Poiché non lo è, le rette sono incidenti.

Osservazione. Le condizioni enunciate nei due teoremi precedenti sono necessarie per il parallelismo. Quando le rette sono parallele, valgono tutte queste proprietà, che potrai utilizzare in altre dimostrazioni.

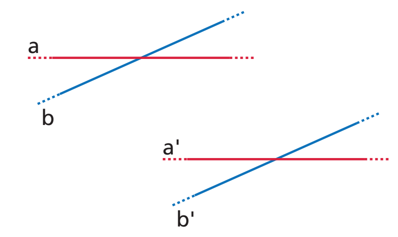
Corollario 3. Due rette parallele a una terza retta sono parallele fra loro.

Ragioniamo per assurdo. Se *a* non fosse parallela a *b*, le due rette si incontrerebbero in un punto. Per quel punto passerebbero due rette (*a* e *b*) parallele a una retta data (*r*). Ciò è in contraddizione con il quinto postulato di Euclide, quindi la tesi non può essere negata: *a* e *b* sono parallele.



Dal corollario 3 si ricava che per le rette parallele vale la proprietà transitiva. Infatti, se è vero che $a \parallel b$ e $b \parallel c$, le rette *a* e *c* sono entrambe parallele a *b*, quindi sono parallele fra loro, ossia $a \parallel c$.

Corollario 4. Due rette a' e b', che siano rispettivamente parallele a due rette a e b incidenti, sono anch'esse incidenti (figura 8).



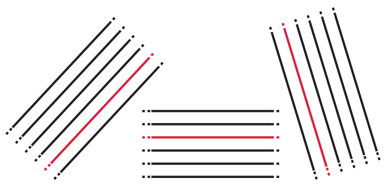
◀ **Figura 8** a e b sono incidenti. b' è parallela a b, a' è parallela ad a. b' non può essere parallela ad a', altrimenti si avrebbe $a \parallel a'$, $a' \parallel b'$, $b' \parallel b$, e quindi, per la proprietà transitiva, si avrebbe $a \parallel b$. Questa condizione è contro l'ipotesi, pertanto a' e b' sono incidenti.

Corollario 5. Date due rette parallele, se una terza retta incontra una delle due allora incontra anche l'altra.

RETTE PARALLELE E DIREZIONE

Nell'insieme delle rette di un piano la relazione di parallelismo gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza. Suddividiamo allora l'insieme delle rette di un piano in classi di equivalenza. Ogni classe contiene tutte le rette parallele fra loro.
L'insieme di tutte le rette appartenenti a una classe viene anche detto **fascio di rette parallele** o **fascio improprio** di rette. Come rappresentante di una classe scegliamo una retta qualunque di quella classe.

Essa ha in comune con tutte le altre rette della stessa classe una caratteristica, la **direzione**. L'insieme quoziente è quindi l'insieme di tutte le possibili direzioni delle rette di un piano.

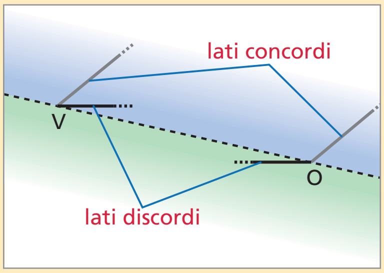


Le proprietà degli angoli con i lati paralleli

DEFINIZIONE

Lati concordi, lati discordi

In due angoli con i lati paralleli, si dicono concordi i lati paralleli che giacciono dalla stessa parte rispetto alla retta che congiunge i vertici. In caso contrario i lati si dicono discordi.



◗ Può accadere che due angoli abbiano due lati paralleli concordi e gli altri due discordi.

TEOREMA

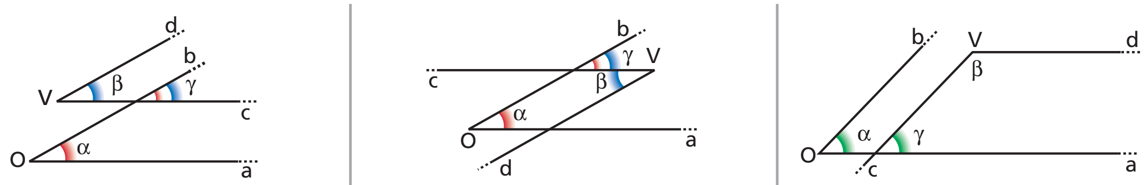
Angoli con i lati paralleli

Due angoli che hanno i lati paralleli possono essere congruenti o supplementari:

- sono congruenti se entrambi i lati paralleli sono concordi (oppure discordi);
- sono supplementari se due lati paralleli sono concordi e gli altri due discordi.

DIMOSTRAZIONE

▼ **Figura 9**



a. Gli angoli hanno i lati paralleli concordi. $\alpha \cong \gamma$ perché angoli corrispondenti delle rette parallele *a* e *c* tagliate dalla trasversale *b*, $\gamma \cong \beta$ perché corrispondenti delle parallele *b* e *d* tagliate da *c*; per la proprietà transitiva: $\alpha \cong \beta$.

b. Gli angoli hanno i lati paralleli discordi. $\alpha \cong \gamma$ perché corrispondenti delle parallele *a* e *c* tagliate da *b*, $\gamma \cong \beta$ perché alterni interni delle parallele *b* e *d* tagliate da *c*; per la proprietà transitiva: $\alpha \cong \beta$.

c. Gli angoli hanno due lati paralleli e concordi (*a* e *d*) e due paralleli e discordi (*b* e *c*). β è supplementare di γ perché coniugati delle parallele *a* e *d* tagliate da *c*, $\gamma \cong \alpha$ perché corrispondenti delle parallele *b* e *c* tagliate da *a*, quindi β è supplementare di α.

3. Le proprietà degli angoli dei poligoni

Il teorema dell'angolo esterno (somma)

TEOREMA

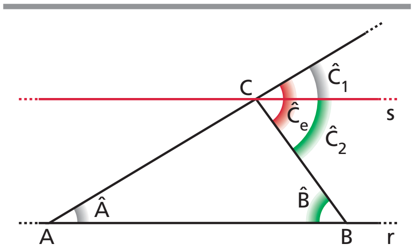
Teorema dell'angolo esterno

In un triangolo ogni angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti a esso.

Ipotesi 1. ABC è un triangolo;
2. $\hat{C}_e$ è l'angolo esterno di vertice C.

Tesi $\hat{C}_e \cong \hat{A} + \hat{B}$.

DIMOSTRAZIONE



◀ **Figura 10 Costruzione.** Disegniamo la retta *s* passante per *C* e parallela alla retta *r* che contiene *AB*. La retta *s* divide l'angolo esterno $\hat{C}_e$ nei due angoli $\hat{C}_1$ e $\hat{C}_2$.

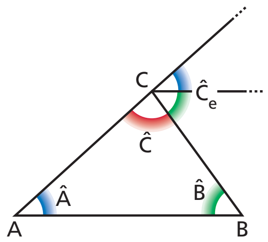
Gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{C}_1$ sono corrispondenti delle rette parallele r e s tagliate dalla trasversale AC, *quindi* essi sono congruenti per l'inverso del teorema delle rette parallele.
Gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}_2$ sono alterni interni delle stesse parallele tagliate dalla trasversale BC, *quindi* sono congruenti, ancora per l'inverso del teorema delle rette parallele.
Poiché $\hat{C}_e \cong \hat{C}_1 + \hat{C}_2$, $\hat{A} \cong \hat{C}_1$, $\hat{B} \cong \hat{C}_2$, possiamo *dedurre* che $\hat{C}_e \cong \hat{A} + \hat{B}$.

La somma degli angoli interni di un triangolo

TEOREMA

La somma degli angoli interni di un triangolo

La somma degli angoli interni di un triangolo qualunque è congruente a un angolo piatto.



Ipotesi ABC è un triangolo. **Tesi** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \cong \hat{P}$.

DIMOSTRAZIONE

Ogni angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti. Per esempio: $\hat{C}_e \cong \hat{A} + \hat{B}$.
$\hat{C}_e$ è anche adiacente a $\hat{C}$, *quindi* supplementare a esso: $\hat{C}_e + \hat{C} \cong \hat{P}$.
Perciò: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \cong \hat{P}$. La somma dei tre angoli interni è un angolo piatto.

Corollario 1. In ogni triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari.

Corollario 2. Ogni angolo di un triangolo equilatero è la terza parte di un angolo piatto.

Corollario 3. Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un lato e due angoli qualsiasi. (**Secondo criterio di congruenza dei triangoli generalizzato**.)

In seguito, parlando di secondo criterio, ci riferiremo a questo enunciato. In questa forma generale, in cui non si richiede che gli angoli siano adiacenti al lato, il criterio risulta facilmente applicabile.

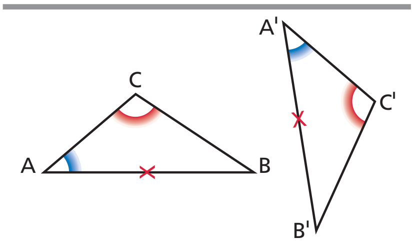


Figura 11 Gli angoli congruenti $\hat{C}$ e $\hat{C}'$ non sono adiacenti ai lati (congruenti) AB e $A'B'$. Sappiamo però che $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \cong \hat{P} \cong \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}'$, dunque risulta $\hat{B} \cong \hat{B}'$. Pertanto $ABC \cong A'B'C'$ per il secondo criterio.

La somma degli angoli interni di un poligono convesso

TEOREMA

In un poligono convesso di n lati, la somma degli angoli interni è congruente a $(n - 2)$ angoli piatti.

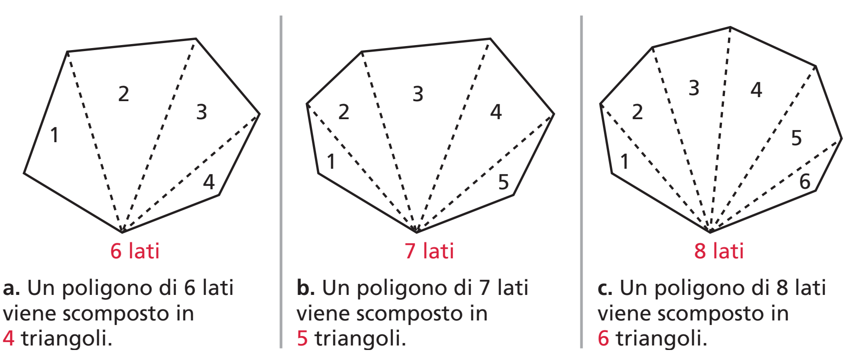


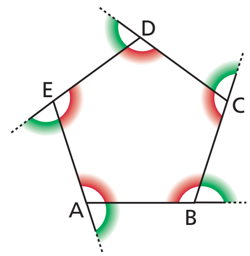
Figura 12 Un poligono di n lati viene diviso dalle diagonali che partono da ogni vertice in $n - 2$ triangoli, quindi la somma degli angoli interni è $(n - 2)\hat{P}$.

La somma degli angoli esterni di un poligono convesso

TEOREMA

La somma degli angoli esterni di un poligono convesso è congruente a un angolo giro.

▶ **Figura 13** **Ogni angolo esterno insieme al proprio angolo interno forma un angolo piatto. Quindi la somma degli angoli interni ed esterni, essendo n i vertici, vale $n\widehat{P}$. Poiché la somma degli angoli interni vale $(n-2)\widehat{P}$, la somma degli esterni è $n-(n-2)=n-n+2=2$ angoli piatti.**



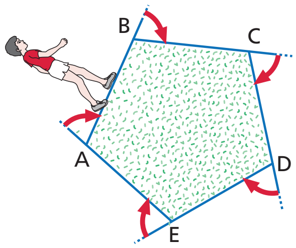
La somma degli angoli esterni non dipende dal numero dei lati del poligono considerato.
In particolare, anche in un triangolo la somma degli angoli esterni è congruente a un angolo giro.

ANGOLI ESTERNI E CAMBIO DI DIREZIONE

Il teorema della somma degli angoli esterni di un poligono convesso è collegato alla vita quotidiana in modo molto immediato.

Immagina un'aiuola pentagonale convessa e poi prova a pensare di camminare attorno a essa, lungo il suo recinto.

Se parti dal punto A, quando arrivi in B, per seguire il lato BC, devi cambiare direzione. Per fare ciò devi ruotare su te stesso di un angolo che è proprio l'angolo esterno di vertice B. Ogni angolo esterno rappresenta dunque il cambiamento di direzione necessario per seguire il percorso. Una volta tornato al punto di partenza, nella stessa posizione, cioè con direzione AB, hai ruotato complessivamente su te stesso di un angolo giro.



4. I criteri di congruenza dei triangoli rettangoli

TEOREMA

Primo criterio

Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti i due cateti.

TEOREMA

Secondo criterio

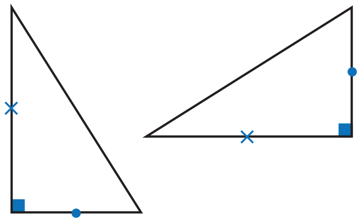
Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti rispettivamente un cateto e un angolo acuto corrispondenti.

TEOREMA

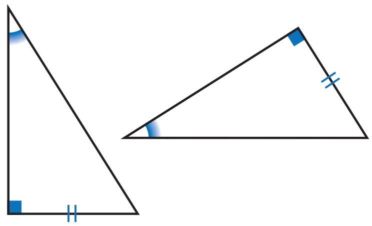
Terzo criterio

Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti rispettivamente l'ipotenusa e un angolo acuto.

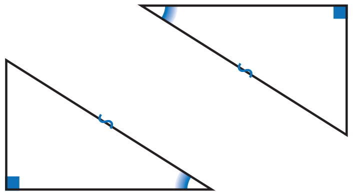
Se due triangoli sono rettangoli, hanno senz'altro l'angolo retto congruente; pertanto, per stabilire se sono congruenti, basta trovare, oltre all'angolo retto, altri due elementi che siano rispettivamente congruenti (e non tre, come avviene per i triangoli in generale).



a. Primo criterio. I triangoli hanno congruenti due lati (i cateti) e l'angolo fra essi compreso (l'angolo retto), quindi sono congruenti per il primo criterio di congruenza.



b. Secondo criterio. I triangoli hanno congruenti due angoli (uno acuto e l'altro retto) e un lato (il cateto), quindi sono congruenti per il secondo criterio di congruenza.



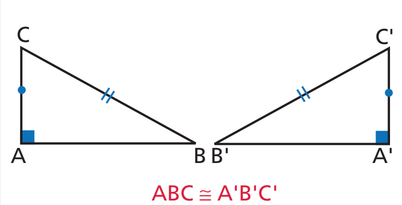
c. Terzo criterio. I triangoli hanno congruenti due angoli (uno acuto e l'altro retto) e un lato (l'ipotenusa), quindi sono congruenti per il secondo criterio di congruenza.

▲ **Figura 14** I primi tre criteri di congruenza dei triangoli rettangoli.

TEOREMA

Quarto criterio

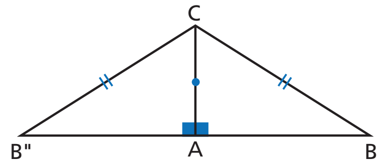
Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti rispettivamente l'ipotenusa e un cateto.



Ipotesi 1. ABC è un triangolo rettangolo;
2. $A'B'C'$ è un triangolo rettangolo;
3. $BC \cong B'C'$;
4. $AC \cong A'C'$.

Tesi $ABC \cong A'B'C'$.

DIMOSTRAZIONE



◀ **Figura 15** Costruzione. Disegniamo il triangolo $AB''C$ congruente ad $A'B'C'$ in modo che sia in comune il cateto AC congruente al cateto $A'C'$. Gli altri due cateti, AB e AB'', appartengono alla stessa retta, perché i due angoli nel vertice A sono retti.

Il triangolo $B''BC$ è isoscele sulla base $B''B$: $BC \cong B'C'$ per l'ipotesi 3 e $B'C' \cong B''C$ per costruzione, *quindi* $BC \cong B''C$ per la proprietà transitiva. *Quindi* $\hat{B} \cong \hat{B}''$.

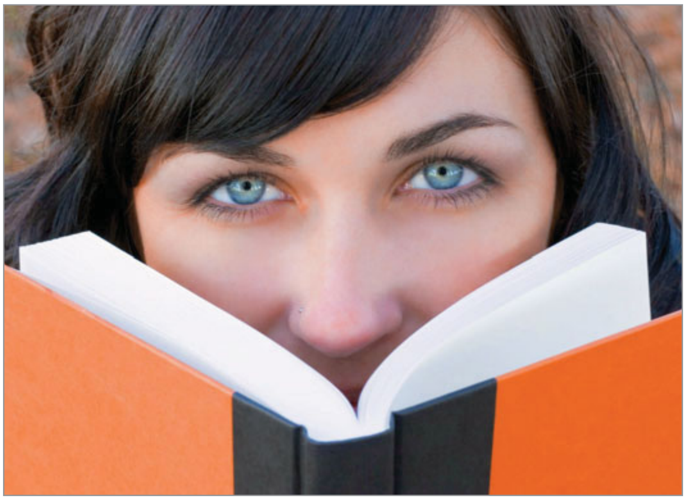
I triangoli rettangoli ABC e $AB''C$ hanno:

- l'ipotenusa congruente, $BC \cong B''C$, per ipotesi;
- un angolo acuto congruente, $\hat{B} \cong \hat{B}''$, per la deduzione precedente.

Essi sono perciò congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

Il triangolo ABC è congruente al triangolo $AB''C$ che è congruente, per costruzione, al triangolo $A'B'C'$. Per la proprietà transitiva: $ABC \cong A'B'C'$.

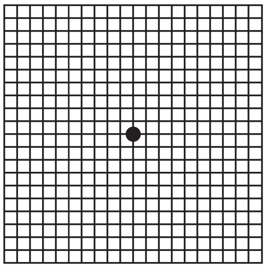
ESPLORAZIONE: GEOMETRIA PER GLI OCCHI



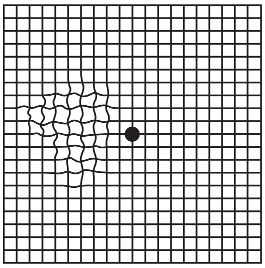
▲ Come può contribuire la geometria alla salute degli occhi?

La retina è il tessuto nervoso che riveste la parte interna posteriore dell'occhio e che converte gli stimoli luminosi ricevuti in impulsi elettrici. Questi vengono trasportati lungo le fibre del nervo ottico fino al cervello, che li decodifica e fornisce la percezione dell'immagine. La zona centrale della retina è chiamata *macula* e permette di distinguere i dettagli più fini delle immagini. Le parti più esterne della retina, invece, sono responsabili della visione laterale o periferica e permettono di vedere tutto ciò che si trova intorno al punto che stiamo fissando, anche in condizioni di scarsa luminosità. Poiché dalla macula dipendono alcune abilità importanti (come la capacità di distinguere i volti, i caratteri della scrittura, i dettagli e le sfumature dei colori), è evidente che anche un piccolo disturbo di questa zona comporta sensibili variazioni nella qualità della visione.

È quindi importante poter disporre di tecniche adeguate alla rilevazione precoce di una malattia della macula, ossia di una *maculopatia*. Uno degli strumenti più utilizzati è il *reticolo di Amsler*: una griglia definita da un insieme di linee parallele e perpendicolari che formano tanti quadrati uguali tra loro. Il paziente deve indossare gli occhiali da lettura (se utilizzati), coprirsi un occhio e fissare il puntino al centro del reticolo da una distanza di 35 cm.



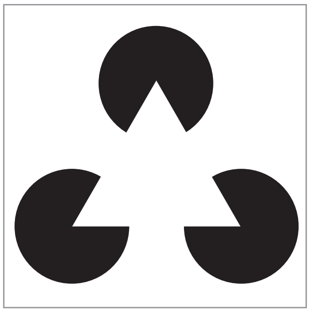
▲ Visione corretta del *reticolo di Amsler*.



▲ Visione di un paziente affetto da maculopatia.

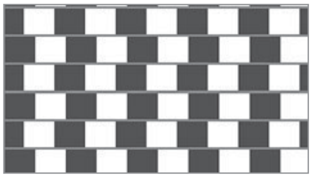
Se le linee circostanti non appaiono tutte diritte, o i quadrati non risultano tutti uguali, o in alcune zone manca la percezione del parallelismo, ci sono problemi alla macula.

IN CINQUE SLIDE



▲ *Triangolo di Kaniszka*. Si tratta di 3 dischi neri privi di un settore circolare di 60 gradi. Il triangolo non c'è, ma si vede.

Non sempre la percezione della realtà è corretta e univoca. A volte «vediamo» quello che non c'è, altre volte «non vediamo» quello che c'è. Può capitare infine di guardare un'immagine e darle significati diversi. Questi «passi falsi» della visione, detti *illusioni ottiche*, non derivano da una patologia oculare, ma dal nostro modo di percepire gli oggetti.
Cerca in Internet qualche esempio di illusione ottica collegato alla geometria e in particolare alle rette parallele. Realizza una presentazione multimediale.



▲ Questa illusione ottica è chiamata «del muro del caffè», perché fu notata per la prima volta sul muro di un caffè di Bristol che aveva una parete decorata con mattonelle bianche e nere disposte in questo modo.

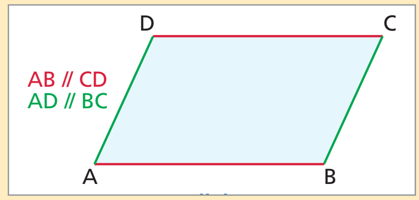
Cerca nel web: illusioni ottiche, rette parallele.

5. Il parallelogramma

DEFINIZIONE

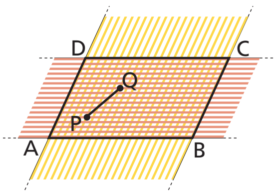
Parallelogramma

Un parallelogramma è un quadrilatero avente i lati opposti paralleli.



▶ **Parallelogramma** è una parola composta che deriva dai termini greci *parállelos* (parallelo) e *grammé* (linea).

Un parallelogramma può anche essere visto come *intersezione di due strisce non parallele*. Ciò permette di affermare che un parallelogramma è una figura convessa (figura 16).



▲ Figura 16

Le proprietà dei parallelogrammi

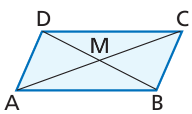
Esaminiamo cinque **condizioni necessarie** affinché un quadrilatero sia un parallelogramma.

TEOREMA

Condizioni necessarie

Se un quadrilatero è un *parallelogramma* allora:

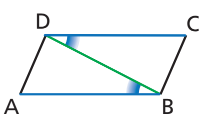
1. ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti;
2. i lati opposti sono congruenti;
3. gli angoli opposti sono congruenti;
4. gli angoli adiacenti a ogni lato sono supplementari;
5. le diagonali si incontrano nel loro punto medio.



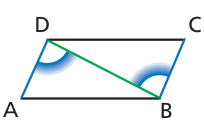
Ipotesi ABCD è un parallelogramma.

Tesi
1. $ABD \cong BCD$ e $ABC \cong ACD$;
2. $AD \cong BC$ e $AB \cong CD$;
3. $\hat{A} \cong \hat{C}$ e $\hat{B} \cong \hat{D}$;
4. $\hat{A}+\hat{B} \cong \hat{P}$ e $\hat{C}+\hat{D} \cong \hat{P}$;
5. $AM \cong MC$ e $BM \cong MD$.

DIMOSTRAZIONE



a



b

1. Consideriamo il parallelogramma $ABCD$ e tracciamo la diagonale BD (figura *a*). Gli angoli $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$ sono alterni interni delle rette parallele AB e CD tagliate dalla trasversale BD, *quindi* $A\hat{B}D \cong B\hat{D}C$.

   Gli angoli $A\hat{D}B$ e $D\hat{B}C$ (figura *b*) sono alterni interni delle rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale BD, *quindi* sono congruenti.

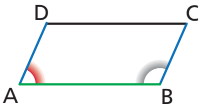
   I triangoli ABD e BCD hanno $A\hat{D}B \cong D\hat{B}C$, $A\hat{B}D \cong B\hat{D}C$ e il lato BD in comune; *quindi* sono congruenti per il secondo criterio di congruenza.

   Tracciando in modo analogo la diagonale AC, *deduciamo* che anche i triangoli ACD e ABC sono congruenti.

2. Dalla congruenza dei triangoli ABD e BCD *deduciamo* che $AB \cong CD$ e $AD \cong BC$, *pertanto* i lati opposti del parallelogramma sono congruenti.

3. I triangoli ABD e BCD sono congruenti, *quindi* $\hat{A} \cong \hat{C}$.
   Anche i triangoli ABC e ACD sono congruenti, *quindi* $\hat{B} \cong \hat{D}$.
   Pertanto gli angoli opposti del parallelogramma sono congruenti.

4. Gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ (figura *c*) sono coniugati interni delle rette parallele AD e BC, tagliate dalla trasversale AB, *quindi* sono supplementari.
   Un ragionamento analogo vale anche per gli altri angoli adiacenti ai lati, che *pertanto* risultano supplementari.

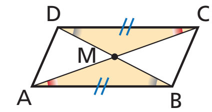


c

5. Consideriamo i triangoli ABM e DCM (figura d).
   Per essi si ha:
   - $AB \cong CD$, per la tesi 2;
   - $B\widehat{A}M \cong M\widehat{C}D$, alterni interni delle parallele AB e DC tagliate dalla trasversale AC;
   - $A\widehat{B}M \cong M\widehat{D}C$, per le stesse parallele tagliate dalla trasversale DB.

   Quindi sono congruenti per il secondo criterio.

   In particolare, hanno $AM \cong MC$ e $BM \cong MD$, perciò nel parallelogramma le diagonali si intersecano nel loro punto medio.



d

LA PRIMA LEGGE DELLE PROPOSIZIONI INVERSE

Un teorema è una proposizione logica del tipo «Se I, allora T». Se chiamiamo **diretta** questa proposizione:

- la sua **inversa** è: «Se T, allora I»;
- la sua **contraria** è: «Se $\overline{I}$, allora $\overline{T}$» ($\overline{I}$ si legge «non I»);
- la sua **contronominale** è «Se $\overline{T}$, allora $\overline{I}$».

Se è vera la proposizione diretta, non sempre è vera l'inversa e neppure la contraria, mentre **è sempre vera la contronominale**.
Facciamo un esempio. Sono date le proposizioni:

I = «$ABCD$ è un parallelogramma»;

T = «$ABCD$ è diviso da una diagonale in due triangoli congruenti».

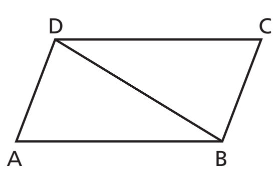
La figura illustra le proposizioni diretta (vera), inversa (falsa), contraria (falsa) e contronominale (vera).
Il fatto che, se la proposizione diretta è vera, è sempre vera anche la sua contronominale prende il nome di **prima legge delle proposizioni inverse**.
Essa era già nota ad Aristotele.
In logica, tale legge si giustifica dimostrando che

$$(I \Rightarrow T) \Rightarrow (\overline{T} \Rightarrow \overline{I})$$

è una tautologia, quindi, applicando il *modus ponens*:

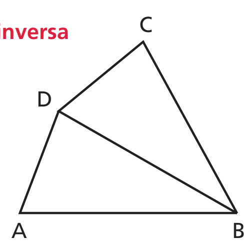
se è vera $I \Rightarrow T$, allora è vera $\overline{T} \Rightarrow \overline{I}$.

diretta



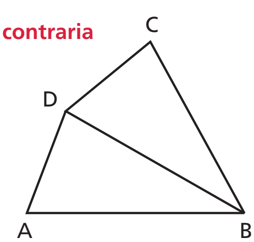
a. Se *ABCD* è un parallelogramma, allora $ABD \cong BCD$: **VERO!**

inversa



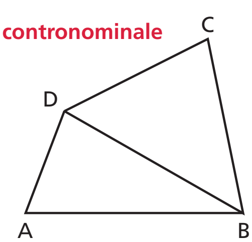
b. Se $ABD \cong BCD$, allora *ABCD* è un parallelogramma: **FALSO!**

contraria



c. Se *ABCD* non è un parallelogramma, allora $ABD \not\cong BCD$: **FALSO!**

contronominale



d. Se $ABD \not\cong BCD$, allora *ABCD* non è un parallelogramma: **VERO!**

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu - 1** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Statistica*

I criteri per stabilire se un quadrilatero è un parallelogramma

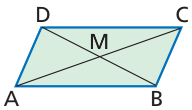
I seguenti teoremi forniscono quattro **condizioni sufficienti** affinché un quadrilatero sia un parallelogramma.

TEOREMA

Se un quadrilatero convesso ha

1. i lati opposti congruenti, *oppure*
2. gli angoli opposti congruenti, *oppure*
3. le diagonali che si incontrano nel loro punto medio, *oppure*
4. due lati opposti congruenti e paralleli,

allora è un parallelogramma.



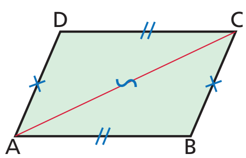
Ipotesi ABCD è un quadrilatero convesso in cui:

1. $AB \cong CD$ e $BC \cong AD$, o
2. $\hat{A} \cong \hat{C}$ e $\hat{B} \cong \hat{D}$, o
3. $AM \cong MC$ e $BM \cong MD$, o
4. $AB \cong CD$ e $AB \parallel CD$.

Tesi ABCD è un parallelogramma.

DIMOSTRAZIONE

1. Dobbiamo dimostrare che i lati opposti di $ABCD$ sono paralleli. Disegniamo la diagonale AC, che divide il quadrilatero nei triangoli ABC e ACD (figura a lato).



   I triangoli ABC e ACD hanno:
   - $AB \cong CD$ per ipotesi;
   - $BC \cong AD$, sempre per ipotesi;
   - AC in comune.

   Quindi sono congruenti per il terzo criterio.

   In particolare, sono congruenti gli angoli $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}D$, che sono alterni interni delle rette AB e CD tagliate dalla trasversale AC, *quindi* AB e CD sono parallele.

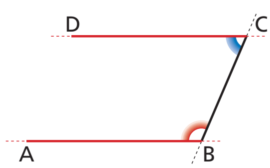
   Anche gli angoli $D\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$, che sono alterni interni delle rette AD e BC tagliate dalla trasversale AC, sono congruenti, *quindi* anche AD e CB sono parallele.
   Dunque $ABCD$ è un parallelogramma.

2. La somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è congruente a due angoli piatti, *quindi* $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} \cong 2\hat{P}$.

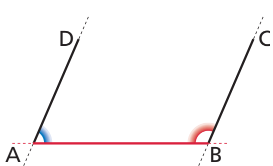
   La somma degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{D}$ è congruente alla somma degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$, perché somme di angoli congruenti, *quindi* $\hat{A} + \hat{D} \cong \hat{P}$ e $\hat{B} + \hat{C} \cong \hat{P}$.
   Pertanto $\hat{B}$ e $\hat{C}$ sono supplementari, così come $\hat{A}$ e $\hat{D}$.

   Gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$, supplementari, sono coniugati interni delle rette AB e CD tagliate dalla trasversale BC, *quindi* AB risulta parallela a CD (figura *a*).

   Anche gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$, supplementari, sono coniugati interni delle rette AD e BC tagliate dalla trasversale AB, *quindi* AD è parallela a BC (figura *b*).



a



b

3. I triangoli AMD e BMC (figura *c*) hanno:
   - $AM \cong MC$ per ipotesi;
   - $DM \cong MB$ per ipotesi;
   - $A\hat{M}D \cong B\hat{M}C$ perché opposti al vertice.

   Quindi sono congruenti per il primo criterio.

   In particolare, sono congruenti gli angoli $A\hat{D}B$ e $D\hat{B}C$, i quali sono alterni interni delle rette AD e BC, tagliate dalla trasversale BD. *Pertanto* AD e BC sono parallele.

   Ragionando allo stesso modo sui triangoli ABM e DCM, si conclude che anche AB e CD sono parallele (figura *d*).

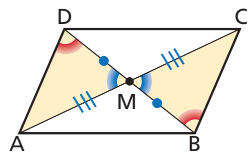
4. Tracciamo la diagonale AC (figura *e*). Gli angoli $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}D$ sono alterni interni delle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale AC, *quindi* sono congruenti.

   I triangoli ABC e ACD hanno:
   - $AB \cong CD$ per ipotesi;
   - AC in comune per costruzione;
   - $B\hat{A}C \cong A\hat{C}D$ per la deduzione precedente.

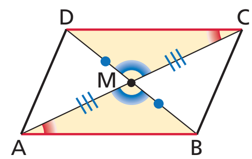
   Quindi sono congruenti per il primo criterio.

   In particolare, sono congruenti gli angoli $A\hat{C}B$ e $D\hat{A}C$.

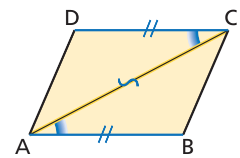
   Gli angoli congruenti $A\hat{C}B$ e $D\hat{A}C$ sono alterni interni delle rette AD e BC tagliate dalla trasversale AC (figura *f*), *quindi* AD e BC risultano parallele.



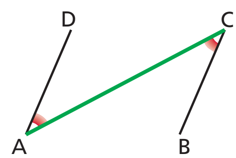
c



d



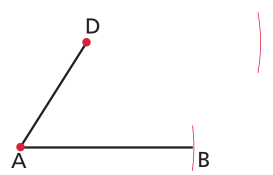
e



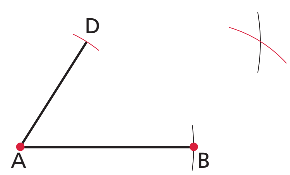
f

La costruzione di un parallelogramma

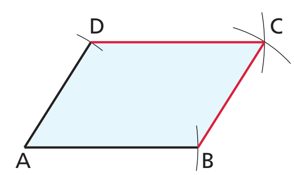
Come abbiamo visto, è sufficiente che un quadrilatero convesso abbia i lati opposti congruenti affinché sia un parallelogramma. Per costruire un parallelogramma, possiamo allora procedere come nella figura 17.



a. Disegnamo due lati consecutivi *DA* e *AB*. Con apertura di compasso *AB*, puntiamo in *D* e tracciamo un arco.



b. Con apertura di compasso *AD*, puntiamo in *B* e tracciamo un arco, che incontra il precedente nel punto *C*.



c. Congiungiamo *C* con *B* e con *D*. Il quadrilatero *ABCD* è un parallelogramma.

▲ **Figura 17** La costruzione di un parallelogramma.

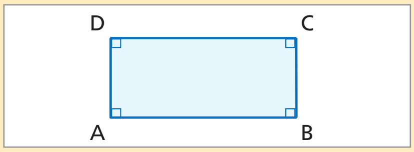
Puoi verificare che gli archi tracciati nelle figure *a* e *b* si incontrano anche in un altro punto, che puoi chiamare C'. Tuttavia $ABC'D$ non è un quadrilatero convesso, perciò non lo consideriamo.

6. Il rettangolo

DEFINIZIONE

Rettangolo

Un rettangolo è un parallelogramma avente i quattro angoli congruenti.



Se due angoli sono supplementari e congruenti, ognuno è un angolo retto.

Poiché gli angoli adiacenti a un lato di un parallelogramma sono supplementari, **ogni angolo di un rettangolo è un angolo retto**.

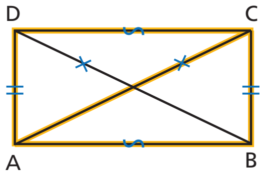
Di conseguenza, per affermare che un parallelogramma è un rettangolo, è sufficiente dimostrare che ha un angolo retto.

Una proprietà delle diagonali del rettangolo

TEOREMA

Un rettangolo ha le diagonali congruenti.

Ipotesi ABCD è un rettangolo.
Tesi AC ≅ BD.



DIMOSTRAZIONE

I triangoli ABD e ABC sono rettangoli e hanno rispettivamente congruenti i due cateti, poiché $ABCD$ è un parallelogramma, *quindi* sono congruenti per il primo criterio di congruenza.
In particolare, risultano congruenti le ipotenuse AC e BD, che sono le diagonali del rettangolo.

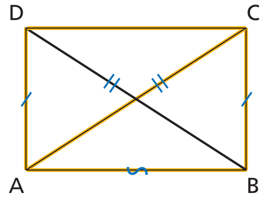
Condizione sufficiente perché un parallelogramma sia un rettangolo

TEOREMA

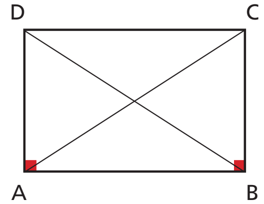
Un parallelogramma avente le diagonali congruenti è un rettangolo.

Ipotesi 1. $ABCD$ è un parallelogramma;
2. $AC \cong BD$.

Tesi $ABCD$ è un rettangolo.



a



b

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo i triangoli ABD e ABC (figura a). Essi hanno:

- $AD \cong BC$ per l'ipotesi 1;
- $BD \cong AC$ per l'ipotesi 2;
- AB in comune.

Quindi sono congruenti per il terzo criterio.
In particolare, sono congruenti gli angoli $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$.
$ABCD$ è un parallelogramma, *quindi* gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono supplementari e, poiché sono congruenti, ognuno è un angolo retto (figura b).

Il parallelogramma $ABCD$ ha gli angoli retti, *pertanto* è un rettangolo.

TEOREMA

In un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.

Ipotesi 1. $C\hat{A}B$ retto;
2. $CM \cong MB$.

Tesi $AM \cong CM \cong MB$.

DIMOSTRAZIONE

Prolunghiamo la mediana AM di un segmento $MD \cong AM$.

- $AM \cong MD$ per costruzione;
  $CM \cong MB$ per ipotesi;
  dunque $ABDC$ è un parallelogramma, poiché le diagonali si incontrano nel loro punto medio.
- $C\hat{A}B$ è retto per ipotesi, *quindi* $ABDC$ è un rettangolo (essendo un parallelogramma con un angolo retto).
  $AD \cong BC$ per la proprietà delle diagonali del rettangolo.

Pertanto $AM \cong \frac{1}{2} AD$, ma $AD \cong BC$ e *perciò* $AM \cong \frac{1}{2} BC$, ossia $AM \cong CM \cong MB$.

La distanza fra rette parallele

TEOREMA

Date due rette parallele, ogni punto di ciascuna retta ha la stessa distanza dall'altra.

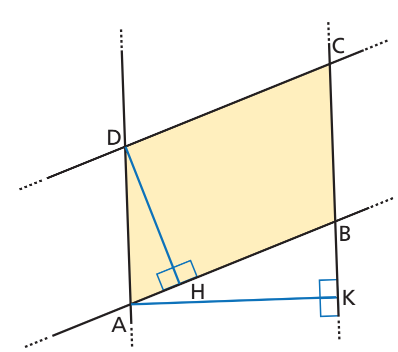
DIMOSTRAZIONE

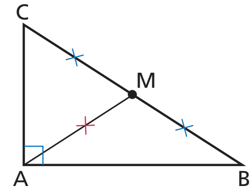
Ogni retta perpendicolare a una delle parallele è perpendicolare anche all'altra, *quindi* $AHBH'$ è un rettangolo.

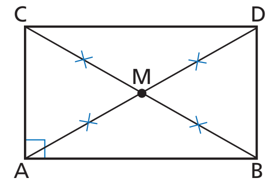
Esso ha i lati opposti congruenti, di conseguenza $AH \cong BH'$.

Il teorema dimostrato permette di chiamare **distanza fra due rette parallele** la distanza di un qualsiasi punto di una retta dall'altra. Tale distanza viene anche detta **altezza della striscia** individuata dalle due parallele.

In un parallelogramma, preso un lato come base, l'**altezza** è la distanza fra il lato opposto alla base e la retta contenente la base.







Si può dimostrare anche il teorema inverso: se in un triangolo la mediana relativa a un lato è congruente alla metà del lato stesso, allora il triangolo è rettangolo.

Ipotesi 1. $a \parallel b$;
2. $AH \perp b$;
3. $BH' \perp a$;

Tesi $AH \cong BH'$.

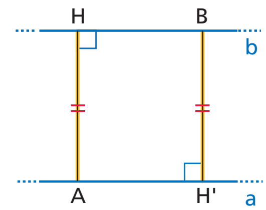
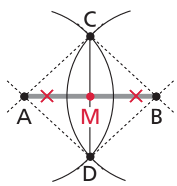


Figura 18 Nel parallelogramma *ABCD*, *DH* rappresenta l'altezza rispetto ad *AB*, *AK* l'altezza rispetto a *CB*.

Per affermare che un parallelogramma è un rombo è sufficiente dimostrare che ha due lati consecutivi congruenti. Infatti, un parallelogramma ha i lati opposti congruenti e, se due lati consecutivi sono congruenti, per la proprietà transitiva tutti i suoi lati sono congruenti.

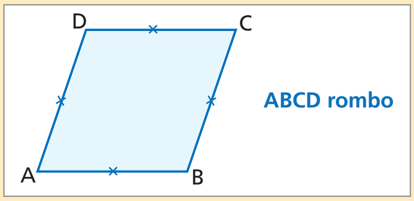


7. Il rombo

DEFINIZIONE

Rombo

Un rombo è un parallelogramma avente i quattro lati congruenti.

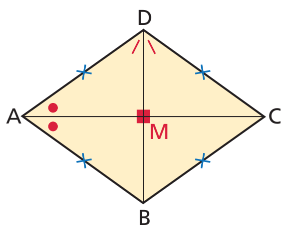


Essendo il rombo un parallelogramma, per esso sono valide tutte le proprietà di quest'ultimo.
Con queste proprietà possiamo giustificare il procedimento (figura 15 nel paragrafo 4 del capitolo G1) per la **determinazione del punto medio di un segmento**.
Esso si basa sulla costruzione di un rombo che ha una delle diagonali coincidente con il segmento, mentre l'altra interseca il segmento nel punto medio: infatti nel rombo, come in tutti i parallelogrammi, le diagonali si tagliano scambievolmente a metà.

Le proprietà delle diagonali del rombo

TEOREMA

Un rombo ha le diagonali che sono perpendicolari fra loro e bisettrici degli angoli.

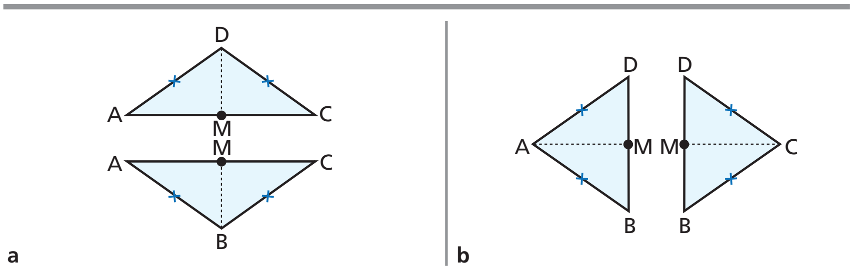


Ipotesi ABCD è un rombo.

Tesi
1. $AC \perp BD$;
2. AC e BD sono bisettrici degli angoli.

▶ Figura 19

DIMOSTRAZIONE



- Il rombo è un parallelogramma, *quindi* le diagonali si bisecano: $BM \cong MD$ e $AM \cong MC$ (figura 19*a*). Poiché $ABCD$ è un rombo, ha i lati congruenti, *quindi* il triangolo ACD è isoscele.
- Il segmento DM è mediana, *di conseguenza* altezza e anche bisettrice dell'angolo al vertice, *pertanto* $DM \perp AC$; possiamo concludere che anche $BD \perp AC$ e inoltre $A\hat{D}B \cong B\hat{D}C$.
- Ripetendo lo stesso ragionamento sul triangolo ADB (figura 19*b*), troviamo che AM è bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, *quindi* $B\hat{A}C \cong C\hat{A}D$.

La proprietà dimostrata permette di giustificare il procedimento per tracciare la perpendicolare a una retta per un suo punto che abbiamo visto all'inizio del capitolo (figura 1).

Condizioni sufficienti perché un parallelogramma sia un rombo

TEOREMA

Condizione sufficiente 1

Se un parallelogramma ha le diagonali perpendicolari, allora è un rombo.

Ipotesi 1. $ABCD$ è un parallelogramma;
2. $AC \perp BD$.

Tesi $ABCD$ è un rombo.

DIMOSTRAZIONE

Per dimostrare che il parallelogramma $ABCD$ è un rombo, dobbiamo dimostrare che ha tutti i lati congruenti (figura a lato).

$ABCD$ è un parallelogramma, *quindi* le diagonali si tagliano a metà, *pertanto* $AM \cong MC$ e $BM \cong MD$.

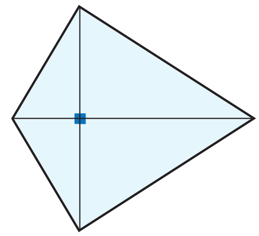
I triangoli AMD e DMC hanno:

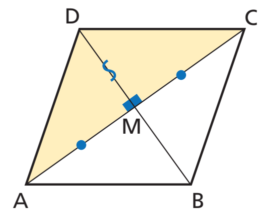
- $AM \cong MC$ per la deduzione precedente;
- DM in comune;
- $A\hat{M}D \cong D\hat{M}C$ in quanto retti per l'ipotesi 2.

Quindi sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.
In particolare, risultano congruenti le ipotenuse AD e DC.

Il parallelogramma $ABCD$, avendo due lati consecutivi congruenti, ha tutti i lati congruenti, *pertanto* è un rombo.

▶ Non è detto che un *quadrilatero* con le diagonali perpendicolari sia un rombo.





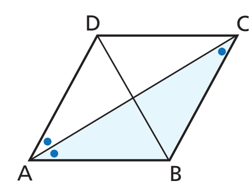
TEOREMA

Condizione sufficiente 2

Se un parallelogramma ha una diagonale bisettrice di un angolo, allora è un rombo.

Ipotesi 1. $ABCD$ è un parallelogramma;
2. AC è bisettrice di $\hat{A}$.

Tesi $ABCD$ è un rombo.



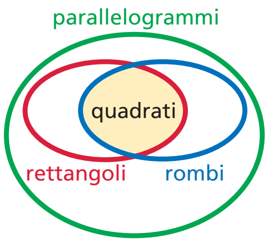
DIMOSTRAZIONE

- $D\hat{A}C \cong C\hat{A}B$ perché AC bisettrice di $\hat{A}$ per l'ipotesi 2;
- $D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$ poiché angoli alterni interni delle rette parallele DA e CB tagliate dalla trasversale AC;
- $C\hat{A}B \cong A\hat{C}B$ per la proprietà transitiva.

Dunque il triangolo ACB è isoscele sulla base AC e *pertanto* $AB \cong BC$.

Il parallelogramma $ABCD$, avendo due lati consecutivi congruenti, è un rombo.

8. Il quadrato

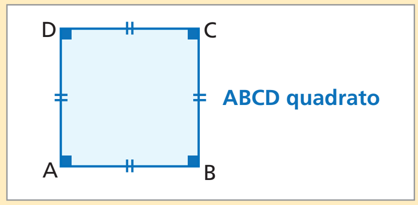


▲ **Figura 20** **L'insieme dei rombi e quello dei rettangoli sono sottoinsiemi dell'insieme dei parallelogrammi. L'insieme dei quadrati è l'intersezione fra l'insieme dei rettangoli e quello dei rombi.**

DEFINIZIONE

Quadrato

Un quadrato è un parallelogramma avente i quattro lati e i quattro angoli congruenti.

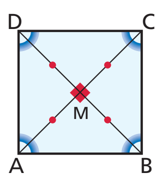


Dalla definizione si deduce che un quadrato è un rettangolo e un rombo contemporaneamente. Se un quadrilatero è un quadrato, gode di tutte le proprietà del rettangolo e del rombo. Viceversa, per dire che un quadrilatero è un quadrato, è sufficiente dimostrare che è un rettangolo e un rombo.

Le proprietà delle diagonali del quadrato

TEOREMA

Un quadrato ha le diagonali congruenti; esse sono perpendicolari fra loro e bisettrici degli angoli.



Corollario. Ogni quadrato è scomposto da ciascuna delle sue diagonali in due triangoli rettangoli isosceli congruenti.
Le diagonali dividono il quadrato in quattro triangoli rettangoli isosceli congruenti.

Condizioni sufficienti perché un parallelogramma sia un quadrato

TEOREMA

Se un parallelogramma ha

1. le diagonali congruenti e perpendicolari, *oppure*
2. le diagonali congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo,

allora è un quadrato.

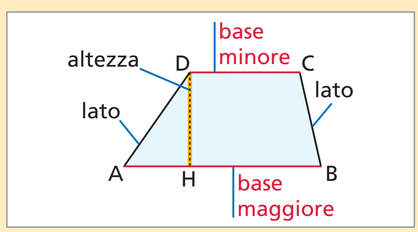
Poiché il quadrato è sia un rettangolo sia un rombo, per le dimostrazioni di questi teoremi basta fare riferimento alle proprietà di queste due figure.

9. Il trapezio

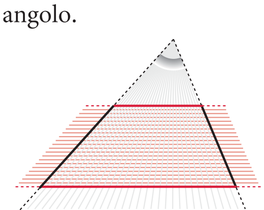
DEFINIZIONE

Trapezio

Un trapezio è un quadrilatero con due soli lati paralleli.



Un trapezio può anche essere visto come l'intersezione fra una striscia e un angolo.



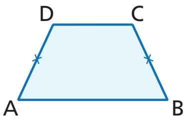
I due lati paralleli si chiamano **basi**; una è la **base maggiore**, l'altra la **base minore**. La distanza fra le due basi è l'**altezza** del trapezio.

I due **lati obliqui**, non paralleli, vengono anche chiamati semplicemente **lati** del trapezio.

DEFINIZIONE

Trapezio isoscele

Un trapezio isoscele è un trapezio avente i lati obliqui congruenti.

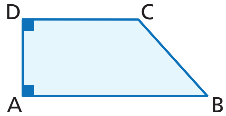


ABCD trapezio isoscele

DEFINIZIONE

Trapezio rettangolo

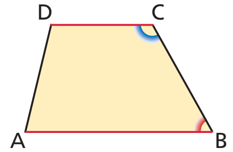
Un trapezio rettangolo è un trapezio avente uno dei lati perpendicolare alle basi.



ABCD trapezio rettangolo

Nel caso di un trapezio rettangolo, il lato perpendicolare alle basi rappresenta l'*altezza* del trapezio.

Gli angoli adiacenti a un lato del trapezio sono coniugati interni, *quindi* supplementari.



Il teorema del trapezio isoscele

TEOREMA

In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti.

Ipotesi 1. $ABCD$ è un trapezio;
2. $AD \cong BC$.

Tesi 1. $\hat{A} \cong \hat{B}$;
2. $\hat{C} \cong \hat{D}$.

DIMOSTRAZIONE

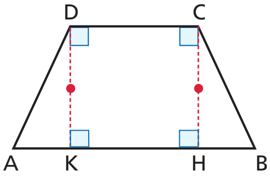
Tracciamo le altezze CH e DK (figura *a*).
Il quadrilatero $KHCD$ ha, per costruzione, gli angoli retti, *quindi* è un rettangolo, *pertanto* possiamo scrivere $DK \cong CH$.

I triangoli rettangoli AKD e HBC (figura *b*) hanno:

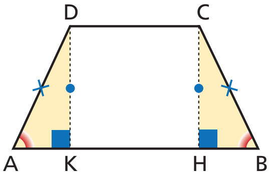
- $AD \cong BC$ per ipotesi;
- $DK \cong CH$ per la deduzione precedente.

Quindi sono congruenti per il quarto criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

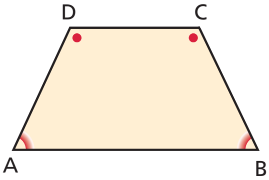
In particolare, sono congruenti gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$.
L'angolo $\hat{D}$ è supplementare di $\hat{A}$ e l'angolo $\hat{C}$ è supplementare di $\hat{B}$ (figura *c*), *quindi* i due angoli $\hat{C}$ e $\hat{D}$, supplementari di due angoli congruenti, sono congruenti fra loro.



a



b



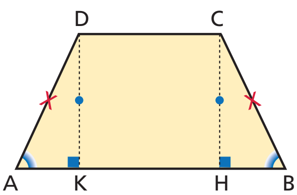
c

Corollario. In un trapezio isoscele, gli angoli opposti sono supplementari.

L'inverso del teorema del trapezio isoscele

Ipotesi
1. $ABCD$ è un trapezio;
2. $\hat{A} \cong \hat{B}$.

Tesi $AD \cong BC$.



TEOREMA

Se in un trapezio gli angoli adiacenti a una delle basi sono congruenti, il trapezio è isoscele.

DIMOSTRAZIONE

Tracciamo le altezze CH e DK.
I triangoli rettangoli AKD e HBC hanno:

- $DK \cong CH$ perché lati opposti del rettangolo $KHCD$;
- $\hat{A} \cong \hat{B}$ per l'ipotesi 2.

Quindi sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. In particolare, hanno le ipotenuse congruenti.
Il trapezio $ABCD$ ha i lati obliqui AD e BC congruenti, *quindi* è isoscele.

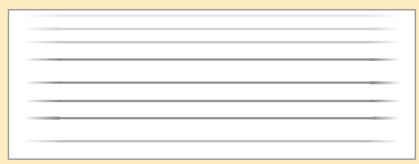
10. Le corrispondenze in un fascio di rette parallele

Per rappresentare un fascio improprio di rette, solitamente disegniamo tre o quattro rette parallele, anche se, in realtà, le rette del fascio sono infinite.

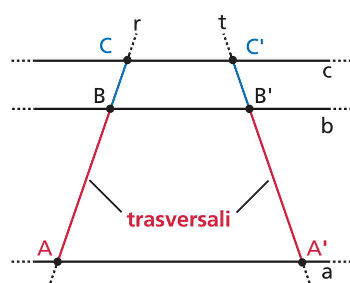
DEFINIZIONE

Fascio improprio di rette

Un fascio improprio di rette è l'insieme di tutte le rette parallele a una retta data.

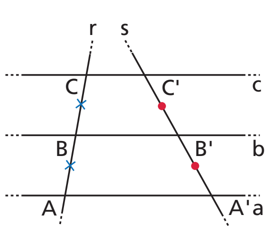


Una retta che interseca una retta del fascio le interseca tutte. Essa è detta **trasversale** del fascio.
Quando le trasversali sono due, i **punti** in cui ogni retta del fascio interseca le trasversali sono detti **corrispondenti**. I **segmenti corrispondenti** sono quelli che hanno per estremi punti corrispondenti. La *corrispondenza* è *biunivoca* ed è detta **corrispondenza di Talete**.



▶ **Figura 21** Sono corrispondenti i punti A e A', B e B', C e C'. I segmenti AB e $A'B'$, BC e $B'C'$ sono corrispondenti.

Il teorema del fascio di rette parallele



TEOREMA

Dato un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.

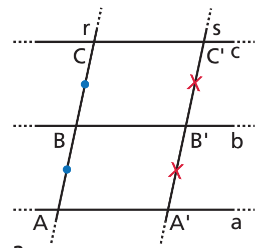
Ipotesi 1. $a \parallel b \parallel c$;
2. r e s sono trasversali del fascio;
3. $A, B, C \in r$;
4. $AB \cong BC$;
5. A', B', C' sono i corrispondenti di A, B, C.

Tesi $A'B' \cong B'C'$.

DIMOSTRAZIONE

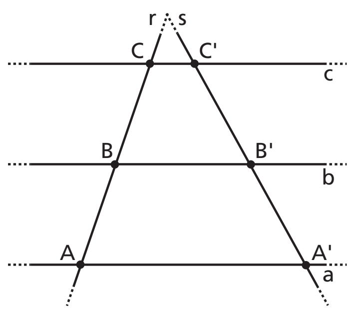
Distinguiamo due casi.

Primo caso: *r* e *s* sono parallele.
$AA'B'B$ (figura *a*) è un parallelogramma, *quindi* i lati opposti sono congruenti. In particolare $AB \cong A'B'$.
Anche $BB'C'C$ è un parallelogramma, *quindi* $BC \cong B'C'$. $AB \cong BC$ per ipotesi, *pertanto* anche $A'B' \cong B'C'$, per la proprietà transitiva della congruenza.

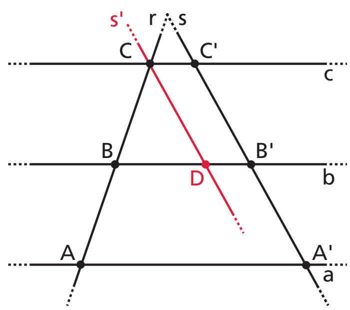


a

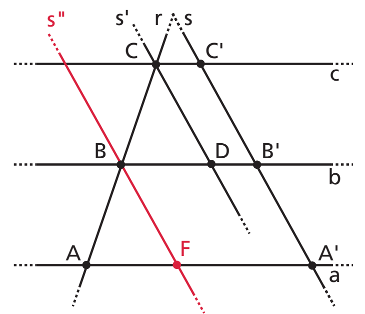
Secondo caso: *r* e *s* sono incidenti.



a. *r* e *s* sono incidenti.



b. Tracciamo la retta *s'* // *s*, passante per *C*. Essa interseca la retta *b* nel punto *D*.



c. Tracciamo una seconda retta *s''* // *s*, passante per *B*. Essa interseca la retta *a* nel punto *F*.

▲ **Figura 22** Costruzione.

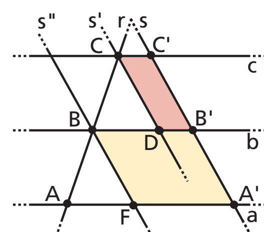
Il quadrilatero $DB'C'C$ (figura *b*) è un parallelogramma, per costruzione, *quindi* $CD \cong C'B'$, perché lati opposti di un parallelogramma.
Anche il quadrilatero $FA'B'B$ è un parallelogramma per costruzione, *quindi* $BF \cong B'A'$.

Consideriamo i triangoli AFB e BDC (figura *c*). Essi hanno:

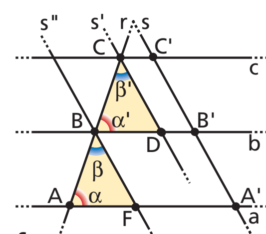
- $AB \cong BC$, per ipotesi;
- $\alpha \cong \alpha'$, perché corrispondenti delle rette parallele a e b, tagliate dalla trasversale r;
- $\beta \cong \beta'$, perché corrispondenti delle rette parallele s' e s'', tagliate dalla trasversale r.

Quindi i triangoli sono congruenti per il secondo criterio. In particolare, risulta $BF \cong CD$.

Dalle congruenze $BF \cong CD$ e $BF \cong A'B'$ *deduciamo* che $CD \cong A'B'$, per la proprietà transitiva.
Da $CD \cong A'B'$ e $CD \cong B'C'$ *concludiamo* che $A'B' \cong B'C'$.



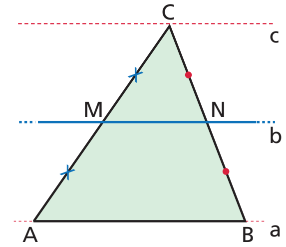
b



c

Corollario. Se in un triangolo tracciamo la retta passante per il punto medio di un lato e parallela a un altro lato, essa incontra anche il terzo lato nel suo punto medio.

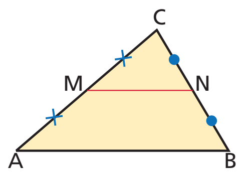
▶ **Figura 23** La retta *b* è la parallela al lato *AB* e passa per il punto medio *M* di *AC*. Disegniamo la retta per *C* parallela ad *AB*. Sulla trasversale *AC* i due segmenti *AM* e *CM* sono congruenti, *quindi* sulla trasversale *BC* i segmenti corrispondenti *BN* e *CN* sono anch'essi congruenti.



Il segmento con estremi nei punti medi dei lati di un triangolo

TEOREMA

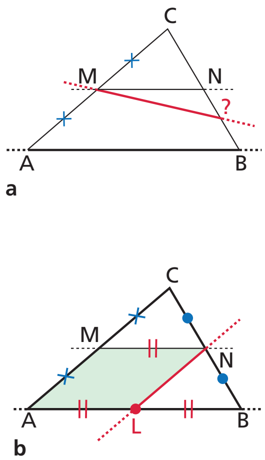
Se in un triangolo si congiungono i punti medi di due lati, il segmento che si ottiene è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.



Ipotesi 1. ABC è un triangolo;
2. $AM \cong MC$;
3. $BN \cong NC$.

Tesi 1. $MN \parallel AB$;
2. $MN \cong \frac{1}{2} AB$.

DIMOSTRAZIONE



1. Tracciamo la retta passante per M parallela al lato AB (figura *a*).
Essa incontra BC nel suo punto medio, per il corollario del teorema del fascio di rette parallele.

Ragioniamo per assurdo: se tale punto non coincidesse con N, il segmento BC avrebbe due punti medi. Ciò è assurdo, *quindi* MN coincide con la parallela tracciata.

2. Disegniamo la retta passante per N parallela al lato AC (figura *b*).
Essa incontra il lato AB nel punto L, che, per il corollario del teorema del fascio di rette, è il punto medio di AB. *Pertanto* $AL \cong LB$.

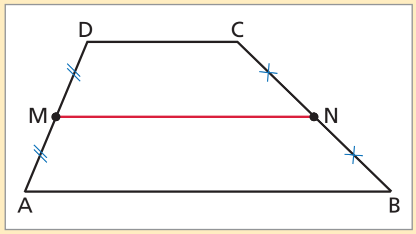
Il quadrilatero $ALNM$ è, per costruzione, un parallelogramma, *quindi* $MN \cong AL$.

Dalle congruenze $MN \cong AL$ e $AL \cong LB$ *deduciamo* che $MN \cong \frac{1}{2} AB$.

Il segmento con estremi nei punti medi dei lati di un trapezio

TEOREMA

In un trapezio, il segmento congiungente i punti medi dei lati obliqui è parallelo alle due basi e congruente alla loro semisomma.



Ipotesi 1. $ABCD$ è un trapezio
2. $DM \cong MA$
3. $CN \cong NB$

Tesi 1. $MN \,/\!/\, AB \,/\!/\, DC$;
2. $MN \cong \frac{1}{2}(AB + DC)$.

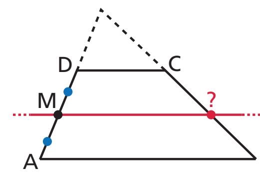
DIMOSTRAZIONE

1. Tracciamo per M la parallela ad AB e DC (figura *a*).
Essendo $DM \cong MA$ per l'ipotesi 2, essa incontra CB nel suo punto medio (per il corollario del teorema del fascio di rette parallele), che per l'unicità del punto medio di un segmento deve essere N. Quindi $MN \,/\!/\, AB \,/\!/\, DC$.

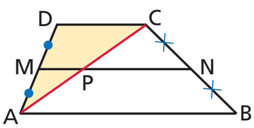
2. Tracciamo la diagonale AC che intersechi MN in P (figura *b*).
Per il teorema precedentemente dimostrato, risulta:
   - nel triangolo ABC, $NP \cong \frac{1}{2} AB$;
   - nel triangolo DAC, $PM \cong \frac{1}{2} DC$.

   Quindi, sommando membro a membro:

$$NP + PM \cong \frac{1}{2}(AB + CD) \qquad \text{ovvero} \qquad NM \cong \frac{1}{2}(AB + CD).$$



a



b

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Il metodo del falegname

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Un falegname deve dividere un righello di legno in sette parti uguali e ha a disposizione solo una riga non graduata e un compasso. Come procede?

GABRIELE: «Se chiedesse di dividerlo in 2 parti uguali, sarei capace…».

LUCIA: «Certo, basterebbe costruire con riga e compasso il punto medio del segmento corrispondente».

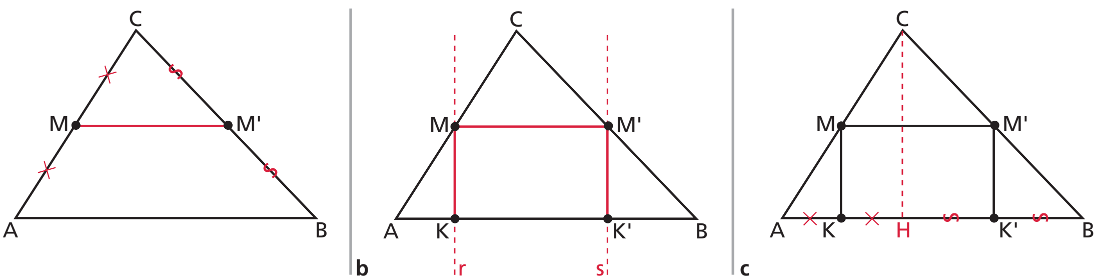
GABRIELE: «Quindi saremmo anche in grado di dividere un segmento in 4, 8, 16, … parti congruenti. Ma sette, come si fa?».

▶ Prendi un segmento AB e una semiretta Ar. Partendo da A, su r riporta 7 segmenti congruenti. Che cosa usi? Disegna poi delle rette parallele che permettano di sfruttare il teorema del fascio…

ESPLORAZIONE: PACCHETTI TRIANGOLARI

Un cartolaio vuole impacchettare degli oggetti rettangolari (segnalibri, biglietti d'auguri, cartoline…) con fogli di carta triangolari. Ogni pacchetto viene ottenuto da un solo foglio, che copre perfettamente l'oggetto. Per risparmiare carta, come si fa a trovare il rettangolo più grande tra quelli che vengono avvolti da un foglio triangolare? Vediamo insieme la soluzione.

Un rettangolo ha due facce: il fronte e il retro. Per avvolgerlo, cioè per ricoprirle entrambe, un foglio deve avere il doppio della superficie del rettangolo: l'area del rettangolo più grande che può essere avvolto in un triangolo è pari alla metà di quella del triangolo stesso.
Il segmento MM' che unisce i punti medi dei due lati AC e BC di un triangolo ABC è parallelo al lato AB (figura *a*).
Se tracciamo le rette r e s perpendicolari ad AB che passano per M e M', dette rispettivamente K e K' le intersezioni di queste rette con il lato AB, il quadrilatero $MM'K'K$ è un rettangolo (figura *b*).
Disegniamo ora l'altezza CH del triangolo relativa al lato AB. Le rette CH e MK sono rette parallele.
Sulla trasversale AC i segmenti AM e MC sono congruenti, quindi, per il teorema del fascio di rette parallele, anche i segmenti AK e KH, sulla trasversale AB sono congruenti. Analogamente otteniamo che $HK' \cong BK'$ (figura *c*).
Da ciò si ricava che, se si piega un foglio che abbia la forma del triangolo ABC, lungo MK, MM' e $M'K'$, i tre triangoli piegati coprono esattamente il rettangolo, che è il rettangolo cercato.
Quindi, se si piegano i tre vertici del foglio fino a far toccare loro il piede dell'altezza, questi tre lembi coprono esattamente il rettangolo.
L'area del rettangolo disegnato è proprio la metà di quella del triangolo. Per quanto abbiamo detto prima, si tratta del rettangolo più grande che può essere avvolto in questo foglio.
Attenzione: se il triangolo è scaleno, i rettangoli che hanno area pari alla metà di quella del triangolo sono tre (tutti diversi tra loro) e si ottengono ciascuno partendo da una coppia di punti medi diversa.



a b c

IN CINQUE SLIDE

Ci sono diversi modi di costruire un parallelogramma, a seconda degli strumenti che si hanno a disposizione. Per esempio, se hai un righello graduato, disegna un quadrilatero qualsiasi e congiungi i punti medi dei lati. Che cosa ottieni? Perché? Cerca altri modi di costruire un parallelogramma e realizza una presentazione multimediale.

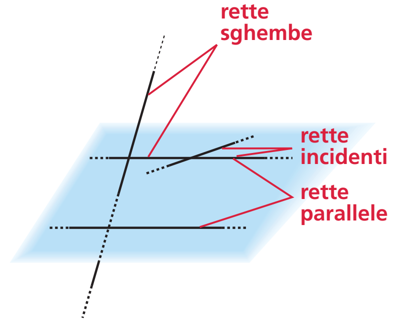
Cerca nel web: costruzione, parallelogramma.

11. Rette, piani, poliedri

La posizione di due rette nello spazio

Se due rette nello spazio appartengono a uno stesso piano, si dicono **complanari**; in caso contrario, si dicono **sghembe**.

Se le rette sono complanari, le posizioni possibili sono quelle già studiate nel piano, cioè le rette possono essere **incidenti** o **parallele**.



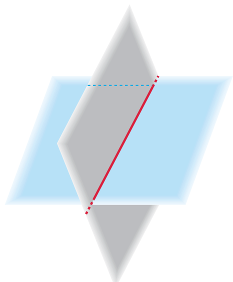
◀ **Figura 24** Le rette complanari possono essere incidenti o parallele. Rette che giacciono su piani diversi sono sghembe.

La posizione di due piani nello spazio

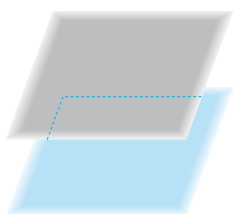
Due piani distinti aventi in comune una retta si dicono **incidenti** (figura *a* a lato). Due piani sono **paralleli** se non hanno punti in comune o se sono coincidenti (figura *b* a lato).

La relazione di parallelismo fra piani gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, come la relazione di parallelismo fra rette:

- proprietà riflessiva: ogni piano è parallelo a se stesso ($\alpha /\!/ \alpha$);
- proprietà simmetrica: se $\alpha /\!/ \beta$, è anche $\beta /\!/ \alpha$;
- proprietà transitiva: se $\alpha /\!/ \beta$ e $\beta /\!/ \gamma$, allora $\alpha /\!/ \gamma$.



a



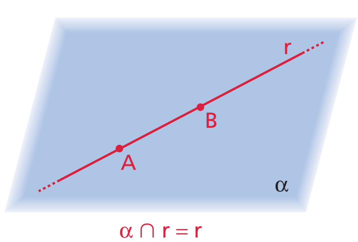
b

La posizione di una retta e di un piano nello spazio

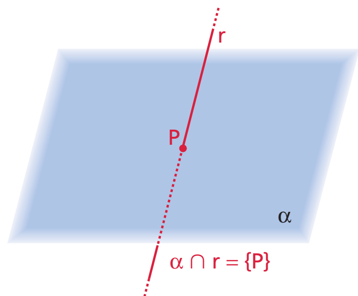
Dati una retta e un piano, sono possibili tre casi:

- tutti i punti della retta appartengono al piano, ossia essa è **giacente** sul piano (o **appartenente** al piano) (figura 25*a*);
- la retta ha un solo punto in comune con il piano, ossia è **incidente** al piano (figura 25*b*);
- la retta non ha alcun punto in comune con il piano, ossia è **parallela** al piano (figura 25*c*).

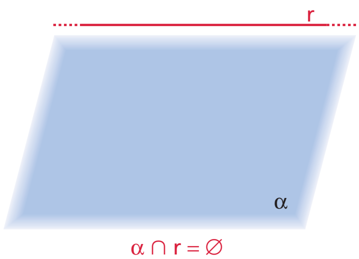
▼ **Figura 25**



a. La retta *r* è giacente sul piano α.



b. La retta *r* è incidente al piano α.



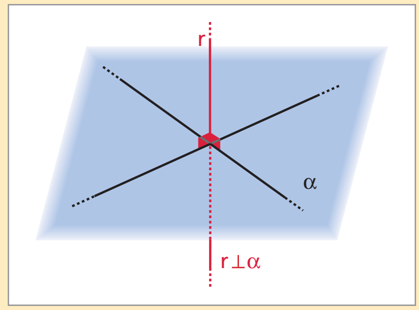
c. La retta *r* è parallela al piano α.

Le rette perpendicolari a un piano

DEFINIZIONE

Retta perpendicolare a un piano

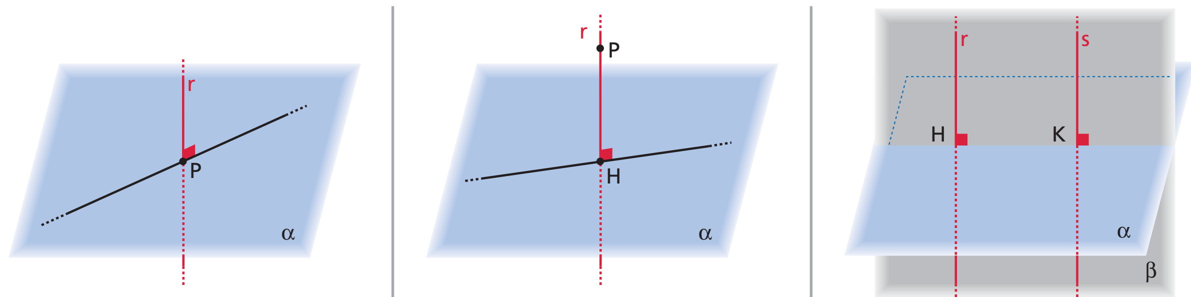
Una retta è perpendicolare a un piano quando è incidente al piano e risulta perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di incidenza.



◗ Una retta incidente ma non perpendicolare a un piano si chiama **obliqua**.

◗ Il punto di incidenza si chiama **piede** della perpendicolare.

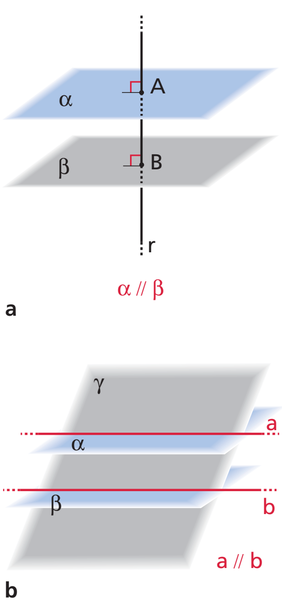
▼ Figura 26



a. Il punto *P* appartiene al piano. **b.** Il punto *P* non appartiene al piano. **c.**

Si possono dimostrare le seguenti proprietà.

- Dati un piano α e un punto *P*, esiste ed è unica la retta passante per il punto e perpendicolare al piano (figure 26*a* e 26*b*).
- Due rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele fra loro (figura 26*c*).
- Se due piani sono perpendicolari a una stessa retta in punti distinti, allora sono paralleli (figura *a* a lato).
- Le intersezioni tra un piano e due piani paralleli sono rette parallele (figura *b* a lato).

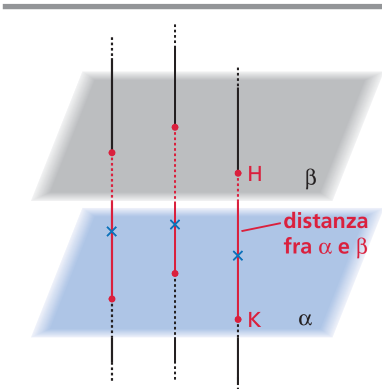


► Figura 27

La distanza fra due piani paralleli

Dati due piani paralleli, si dimostra che una retta perpendicolare a uno di essi è perpendicolare anche all'altro. Inoltre, scelte due rette perpendicolari a due piani paralleli, i segmenti intercettati dai piani su di esse sono congruenti.

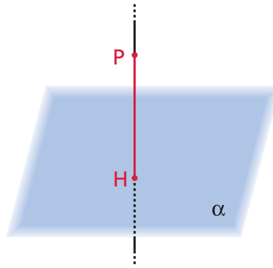
Definiamo allora come **distanza fra due piani paralleli** la lunghezza del segmento intercettato dai due piani su una qualunque retta a essi perpendicolare.



DEFINIZIONE

Distanza di un punto da un piano

Dati un piano e un punto, la distanza del punto dal piano è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto e il piede della perpendicolare al piano passante per il punto.

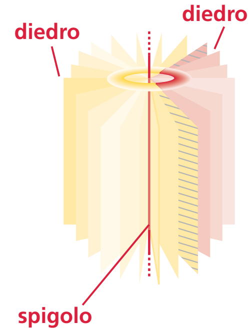


distanza di P da α

Se il punto appartiene al piano, la distanza tra il punto e il piano è nulla.

I diedri e i piani perpendicolari

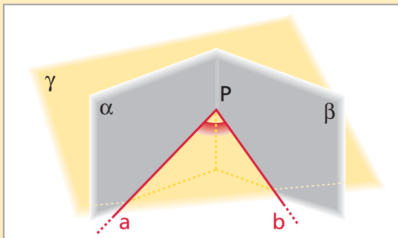
Dati nello spazio due semipiani aventi la stessa retta origine, chiamiamo **diedro** ognuna delle due parti (compresi i semipiani) in cui essi dividono lo spazio. La retta origine dei semipiani si chiama **spigolo** del diedro e i semipiani si chiamano **facce** del diedro.



DEFINIZIONE

Sezione di un diedro

Si chiama sezione di un diedro l'angolo che si ottiene come intersezione fra il diedro e un qualunque piano che interseca il suo spigolo.



Sezione del diedro

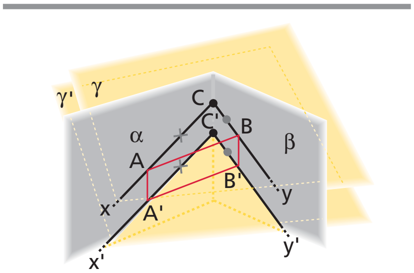
TEOREMA

Sezioni parallele di uno stesso diedro sono congruenti.

Ipotesi $\gamma \parallel \gamma'$.

Tesi $x\hat{C}y \cong x'\hat{C}y'$.

DIMOSTRAZIONE Sui lati dell'angolo di vertice C, intersezione fra il diedro e il piano γ, disegniamo i segmenti CA e CB a piacere (figura 28).



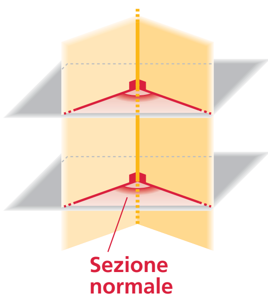
◄ Figura 28

Sui lati dell'angolo di vertice C', intersezione fra il diedro e il piano γ', scegliamo A' e B' in modo che risulti $CA \cong C'A'$ e $CB \cong C'B'$.

Le rette CA e $C'A'$ sono parallele perché sono le intersezioni del piano α con i due piani paralleli γ e γ'.

$CC'A'A$ è un parallelogramma, in quanto ha i lati opposti congruenti e paralleli; *quindi* CC' è congruente e parallelo a AA'.
Analogamente, si dimostra che $CC'B'B$ è un parallelogramma; *quindi* CC' è congruente e parallelo a BB'.
Di conseguenza, anche $AA'B'B$ è un parallelogramma, poiché i lati AA' e BB', per la proprietà transitiva, sono paralleli e congruenti tra loro; *quindi* AB è congruente e parallelo ad $A'B'$.

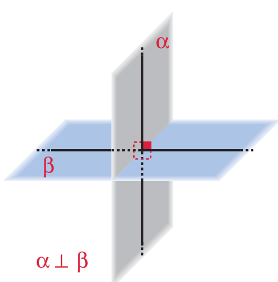
Consideriamo ora i triangoli ABC e $A'B'C'$: sono congruenti per il terzo criterio di congruenza, in quanto hanno tutti e tre i lati ordinatamente congruenti; *di conseguenza*, l'angolo $A\hat{C}B$ è congruente all'angolo $A'\hat{C}'B'$. Concludiamo che $x\hat{C}y \cong x'\hat{C}'y'$.



Una conseguenza del teorema precedente è che, se intersechiamo un diedro con piani perpendicolari allo spigolo, gli angoli che otteniamo sui piani sono congruenti fra loro.
Chiamiamo allora **sezione normale** di un diedro l'angolo che si ottiene come intersezione fra il diedro e un qualunque piano perpendicolare al suo spigolo.

Due diedri sono congruenti se sono congruenti le loro sezioni normali.
Chiamiamo **ampiezza** di un diedro l'ampiezza della sua sezione normale.
Un diedro si dice **retto**, **acuto** o **ottuso** a seconda che la sua sezione normale sia un angolo retto, acuto o ottuso.

Possiamo ora dare nello spazio la definizione di piani perpendicolari, analoga alla definizione di rette perpendicolari nel piano.



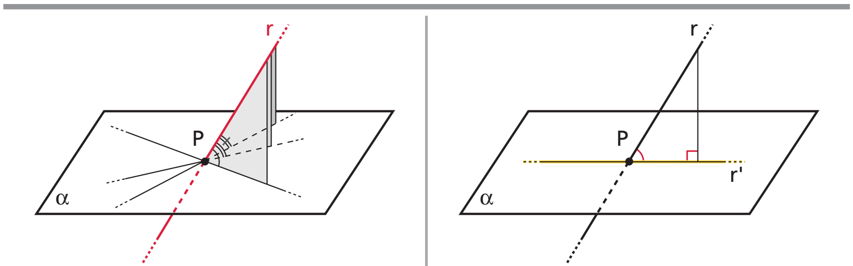
DEFINIZIONE

Piani perpendicolari

Due piani incidenti sono perpendicolari quando dividono lo spazio in quattro diedri retti.

Sia r una retta incidente al piano α: un piano generico, che passa per r, interseca α in un'altra retta (figura 29a). L'angolo formato dalle due rette dipende dalla scelta del piano variabile e risulta minimo quando il piano è perpendicolare ad α. In tal caso, si parla di **angolo della retta *r* con il piano α** (figura 29b) e la retta r' è la **proiezione** di r su α.

▸ **Figura 29**



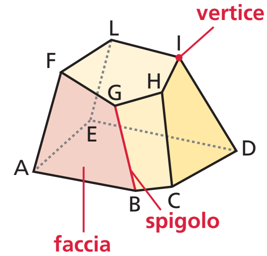
a. Consideriamo l'angolo formato da r con una retta qualsiasi del piano α, passante per P.

b. L'angolo della retta r con il piano α è il più piccolo fra gli angoli descritti con la costruzione in a: la retta r' corrispondente è la proiezione ortogonale di r su α.

I poliedri

Un **poliedro** è una figura solida, limitata da un numero finito di poligoni appartenenti a piani diversi e tali che il piano di ogni poligono non attraversi il solido.

Poliedro



I poligoni sono detti **facce** del poliedro, i lati dei poligoni **spigoli** del poliedro, i vertici dei poligoni **vertici** del poliedro.

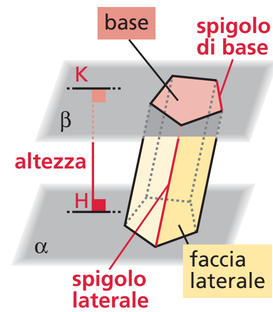
Il prisma

DEFINIZIONE

Prisma

Si chiama prisma un poliedro in cui due facce sono congruenti, parallele fra loro e con i lati rispettivamente paralleli e in cui le altre facce sono parallelogrammi.

Prisma



Le facce parallele e congruenti sono dette **basi** del prisma. Le altre facce sono dette **facce laterali**.

La distanza fra i due piani paralleli su cui giacciono le basi è l'**altezza** del prisma. Ogni lato di base si chiama anche **spigolo di base**, gli altri lati dei parallelogrammi si chiamano **spigoli laterali**. I vertici dei poligoni vengono anche detti **vertici** del prisma.

Le **diagonali** di un prisma sono quei segmenti che congiungono due vertici non appartenenti alla stessa faccia.

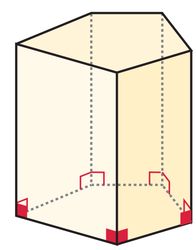
Alcuni prismi particolari

DEFINIZIONE

Prisma retto

Un prisma si dice retto se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.

Prisma retto



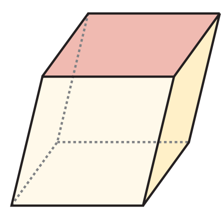
In un prisma retto, le facce laterali sono dei rettangoli e l'altezza coincide con gli spigoli laterali.

Un prisma retto si dice **regolare** quando le sue basi sono poligoni regolari.

DEFINIZIONE

Parallelepipedo

Un parallelepipedo è un prisma le cui basi sono parallelogrammi.

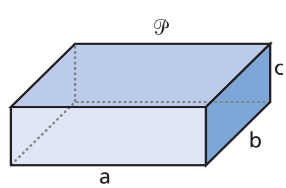


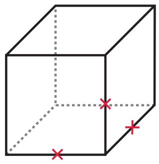
Parallelepipedo

Si possono dimostrare le seguenti proprietà.

- Le facce opposte di un parallelepipedo, ossia quelle che non hanno vertici in comune, sono congruenti e parallele.
- Le diagonali di un parallelepipedo si incontrano in uno stesso punto che le divide in due segmenti congruenti.

Un parallelepipedo retto in cui le basi sono rettangoli si chiama **parallelepipedo rettangolo**.
Le lunghezze dei tre spigoli uscenti da uno stesso vertice si dicono **dimensioni** del parallelepipedo.





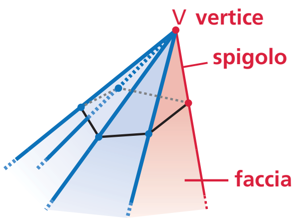
Cubo

Un **cubo** è un parallelepipedo rettangolo con le dimensioni congruenti fra loro.

Le sue sei facce sono dei quadrati.

Gli angoloidi

Angoloide



Consideriamo un poligono e un punto V non appartenente al suo piano. Chiamiamo **angoloide** il solido costituito da tutte le semirette di origine V che passano per i punti del poligono.

Le semirette passanti per i vertici del poligono sono dette **spigoli** dell'angoloide, l'origine V è il **vertice** dell'angoloide, gli angoli di vertice V e lati due spigoli consecutivi sono le **facce** dell'angoloide.

I poliedri regolari

Dato un poliedro, a ogni suo spigolo associamo il diedro individuato dalle due facce che contengono quello spigolo; esso è un **diedro del poliedro**.

A ogni vertice del poliedro associamo l'angoloide i cui spigoli contengono quelli del poliedro uscenti da quel vertice: è un **angoloide del poliedro**.

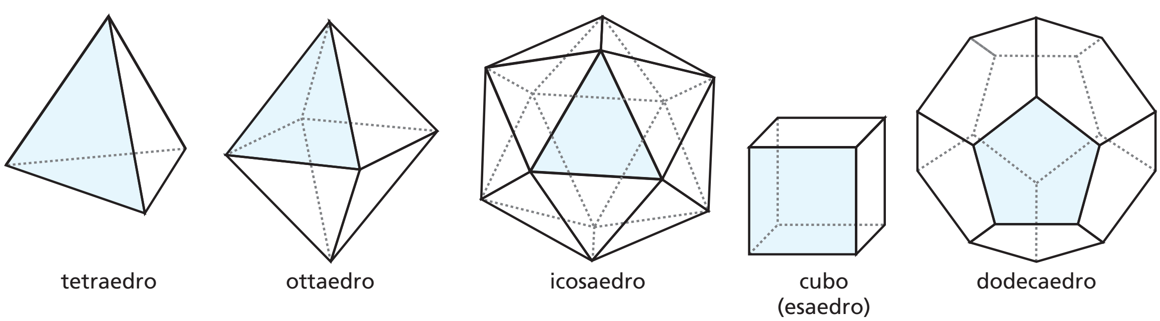
DEFINIZIONE

Poliedro regolare

Un poliedro si dice regolare quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e anche i suoi angoloidi e i suoi diedri sono congruenti.

Nel piano i poligoni regolari possono avere un qualunque numero di lati. Si può invece dimostrare che nello spazio i poliedri regolari sono soltanto cinque.

Il **tetraedro regolare** è racchiuso da 4 triangoli equilateri, l'**ottaedro regolare** da 8, l'**icosaedro regolare** da 20. Il **cubo** è anche chiamato *esaedro regolare*, perché è racchiuso da 6 quadrati (in greco *héx* significa «sei»). Il **dodecaedro regolare** ha 12 facce pentagonali.



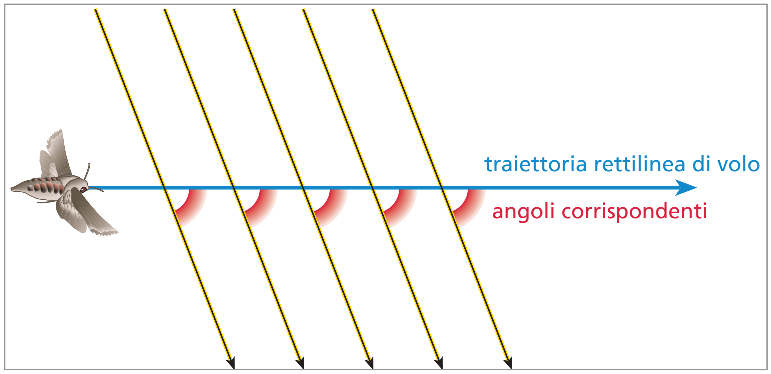
▲ Figura 30

Il volo delle falene

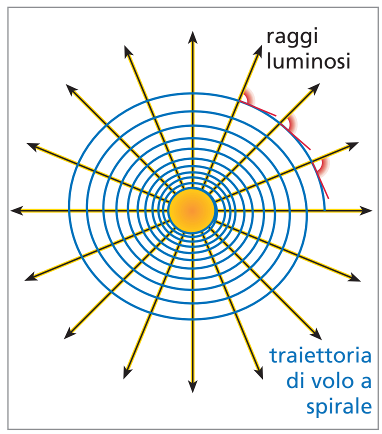
…perché le falene sono attratte dalla luce artificiale?

Il quesito completo a pag. G89

Per spiegare il comportamento, apparentemente folle, delle falene ci sono varie teorie. Secondo la spiegazione più tradizionale, le farfalle notturne confonderebbero la luce delle nostre lampade con quella della Luna. Per millenni, infatti, prima che l'uomo inventasse l'elettricità e illuminasse artificialmente le tenebre, le falene si sono orientate nei voli notturni solo grazie alla luce della Luna, così distante dalla Terra che i suoi raggi luminosi arrivano a noi come se fossero paralleli fra loro. Sfruttando questa proprietà, è facile per gli insetti volare seguendo una direzione rettilinea: basta tagliare i raggi sempre con lo stesso angolo. Ciò deriva dal fatto che l'inverso del teorema delle parallele afferma che, se due rette sono parallele, allora formano con una trasversale angoli corrispondenti congruenti.
Pertanto, mantenendo nel volo un angolo di incidenza costante con i raggi lunari, le falene potevano assicurarsi di seguire una traiettoria in linea retta, come mostrato nella figura.



Questo sistema «geometrico» di navigazione ha funzionato bene per un lunghissimo arco di tempo. Il problema è sorto quando sono arrivate lampade e lampioni a disturbare l'illuminazione naturale della notte.
Infatti, la luce diffonde in tutte le direzioni e, se la sorgente è vicina, è ben evidente che i raggi si distribuiscono in maniera radiale intorno alla sua fonte.
Possiamo considerare i raggi del Sole o della Luna paralleli solo in virtù del fatto che le sorgenti sono enormemente lontane da noi. Ma le falene, imbattendosi in una luce artificiale e scambiandola per la luce della Luna, adottano la stessa tattica, con risultati purtroppo infelici.
Infatti, tagliando sempre con lo stesso angolo la luce, distribuita a raggiera, non procedono più in linea retta, bensì percorrono una traiettoria a spirale che le porta ad avvicinarsi al centro, finché non colpiscono la lampada e si bruciano.



Le falene, quindi, non sono affatto attratte dalla luce artificiale, come potremmo credere osservando il loro comportamento. In realtà questa illuminazione, secondo questa teoria, rappresenta una trappola spesso fatale.

UNA TEORIA ALTERNATIVA

Ci sono scienziati che hanno studiato molto attentamente il volo delle falene e alcuni di loro, negli ultimi anni, hanno proposto ipotesi alternative alla spiegazione che abbiamo qui presentato, considerata a lungo l'unica teoria ragionevole. Secondo alcuni ricercatori, le falene volerebbero verso la luce a causa di un'illusione ottica, un fenomeno noto come *banda di Mach*, comune a gran parte degli esseri vedenti: davanti a un'accecante sorgente di luce (come per noi può essere il Sole di mezzogiorno e per le falene una lampada) l'occhio percepisce una regione che circonda la luce apparentemente più scura rispetto a tutto il resto intorno. Le falene sono animali che amano l'oscurità, perciò tenderebbero a dirigersi verso questa zona buia finendo in realtà per fare esattamente il contrario. Non c'è ancora accordo unanime su quale sia la spiegazione più fondata.

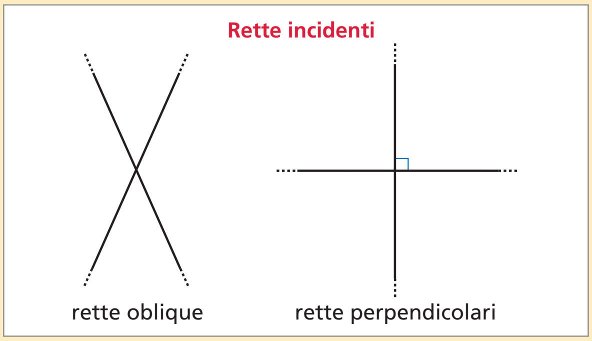
Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu - 1** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Statistica*

LA TEORIA IN SINTESI

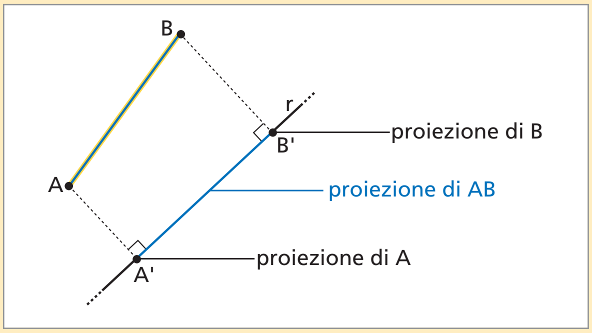
Perpendicolari e parallele. Parallelogrammi e trapezi

1. Le rette perpendicolari

Due rette del piano sono **incidenti** quando hanno un solo punto in comune.
Rette incidenti che, intersecandosi, formano quattro angoli retti sono **perpendicolari**, altrimenti sono **oblique**.



Per **proiettare un segmento** AB su una retta si considera il segmento che ha per estremi le proiezioni di A e di B sulla retta, ossia **i piedi delle perpendicolari** condotte da A e da B alla retta stessa.

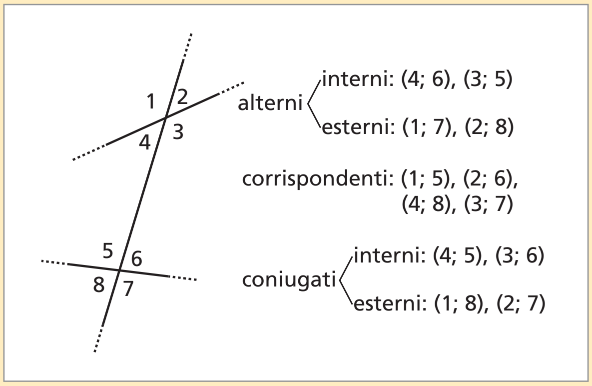


La **distanza di un punto da una retta** è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto e il piede della perpendicolare condotta dal punto alla retta.

ESEMPIO Nella figura precedente AA' rappresenta la distanza di A dalla retta r, BB' la distanza di B da r.

2. Le rette parallele

Due rette tagliate da una trasversale formano coppie di angoli che, a seconda della posizione, hanno nomi diversi.



Due rette sono **parallele** quando sono coincidenti o quando non hanno punti in comune.

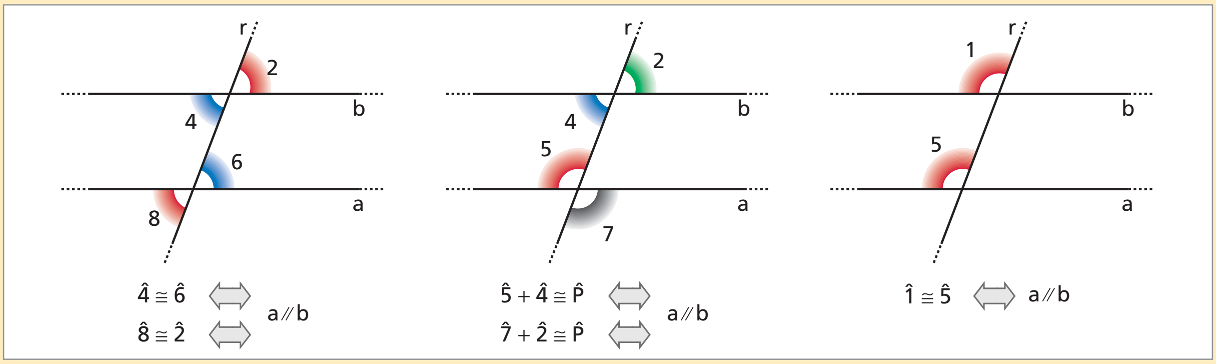
Se due rette formano con una trasversale

- angoli **alterni congruenti**, *oppure*
- angoli **coniugati supplementari**, *oppure*
- angoli **corrispondenti congruenti**,

allora sono **parallele** (teorema delle rette parallele e sue conseguenze).

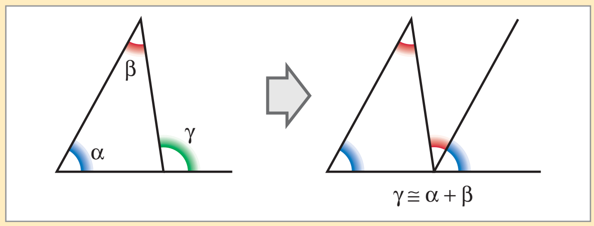
Se due rette sono **parallele**, formano con una trasversale:

- angoli **alterni congruenti**;
- angoli **coniugati supplementari**;
- angoli **corrispondenti congruenti** (inverso del teorema delle rette parallele e sue conseguenze).

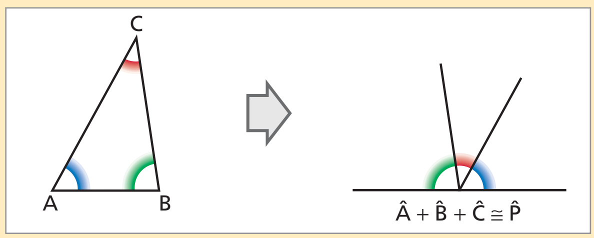


3. Le proprietà degli angoli dei poligoni

Ogni **angolo esterno di un triangolo** è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti a esso (teorema dell'angolo esterno).



La **somma degli angoli interni** di un poligono di n lati è congruente a $(n - 2)$ angoli piatti.
In particolare, **in un triangolo la somma degli angoli interni è congruente a un angolo piatto**.

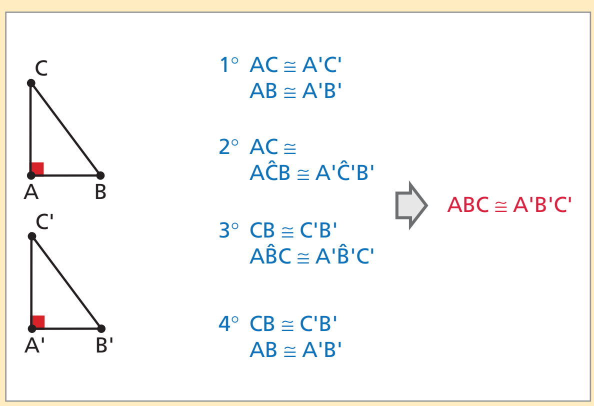


La **somma degli angoli esterni** di un qualsiasi poligono è congruente a un angolo giro.

4. I criteri di congruenza dei triangoli rettangoli

Due **triangoli rettangoli** sono **congruenti** se hanno rispettivamente congruenti:

- **due cateti**, *oppure*
- **un cateto e un angolo acuto corrispondenti**, *oppure*
- **l'ipotenusa e un angolo acuto**, *oppure*
- **l'ipotenusa e un cateto**.

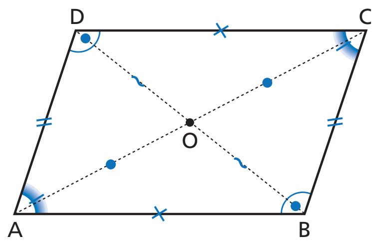


5. Il parallelogramma

Un **parallelogramma** è un quadrilatero con i lati opposti paralleli.

In ogni parallelogramma:
- ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti;
- i lati opposti sono congruenti;
- gli angoli opposti sono congruenti;
- gli angoli adiacenti a ogni lato sono supplementari;
- le diagonali si incontrano nel loro punto medio.

Dato un quadrilatero, esso è un parallelogramma se:
- i lati opposti sono congruenti, *oppure*
- gli angoli opposti sono congruenti, *oppure*
- le diagonali si incontrano nel loro punto medio, *oppure*
- due lati opposti sono congruenti e paralleli.



1. $AB \cong DC$
   $BC \cong AD$ ⇒
2. $\hat{A} \cong \hat{C}$
   $\hat{B} \cong \hat{D}$ ⇒
3. $AO \cong OC$
   $BO \cong OD$ ⇒
4. $AB \cong DC$
   $AB \parallel DC$ ⇒

ABCD è un parallelogramma

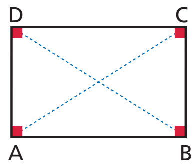
6. Il rettangolo

Un **rettangolo** è un parallelogramma avente i quattro angoli congruenti.

Ogni angolo del rettangolo è un angolo retto.

Le diagonali di un rettangolo sono congruenti.

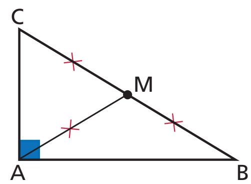
Se in un parallelogramma le diagonali sono congruenti, allora il parallelogramma è un rettangolo.



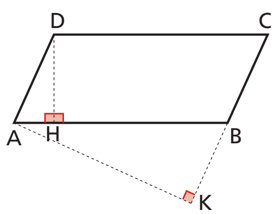
ABCD è un parallelogramma
$AC \cong BD$ ⇒ ABCD è un rettangolo

In un **triangolo rettangolo** la mediana relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.

La **distanza fra due rette parallele** è la distanza di un qualsiasi punto di una delle rette dall'altra retta.



In un parallelogramma, le altezze sono le distanze fra i lati opposti.



DH rappresenta l'altezza relativa alla base AB
AK rappresenta l'altezza relativa alla base BC

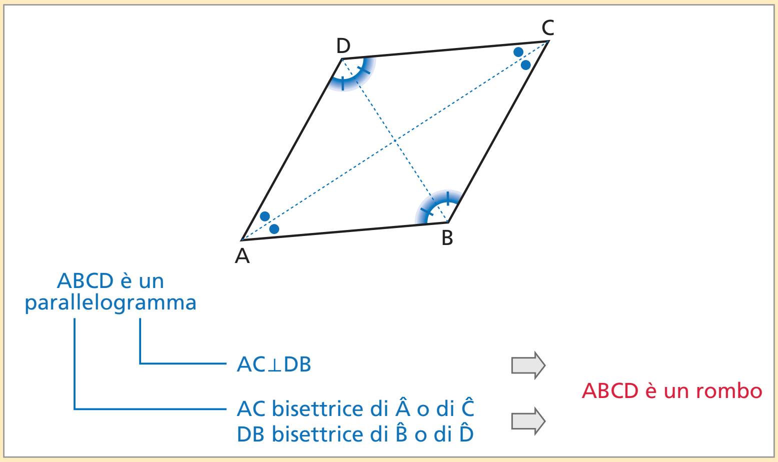
7. Il rombo

Un **rombo** è un parallelogramma avente i quattro lati congruenti.

In un rombo le diagonali sono:
- perpendicolari;
- bisettrici degli angoli.

Se in un parallelogramma le diagonali sono
- perpendicolari, *oppure*
- bisettrici degli angoli,

allora il parallelogramma è un rombo.

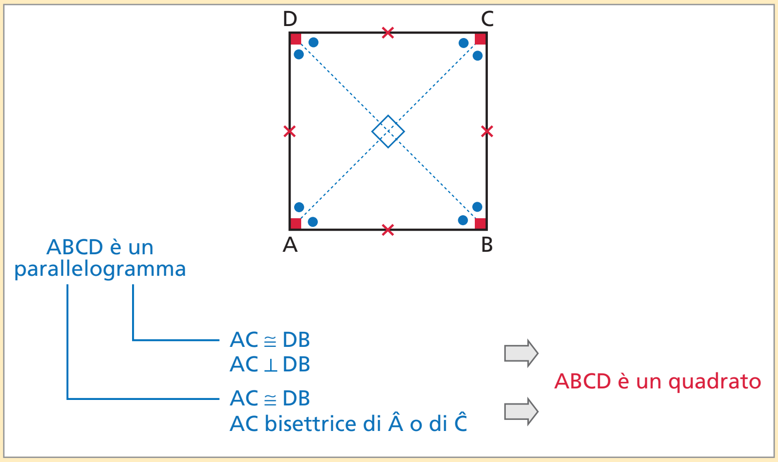


8. Il quadrato

Un **quadrato** è un parallelogramma avente i quattro angoli e i quattro lati congruenti.
In un quadrato le diagonali sono:
- congruenti;
- perpendicolari;
- bisettrici degli angoli.

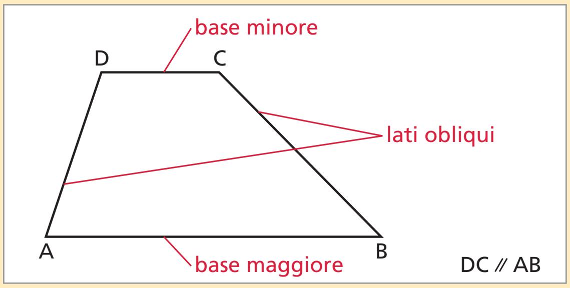
Se in un parallelogramma le diagonali sono
- congruenti e perpendicolari, *oppure*
- congruenti e una di esse è bisettrice di un angolo,

allora il parallelogramma è un quadrato.

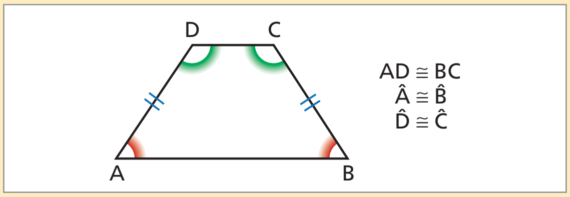


9. Il trapezio

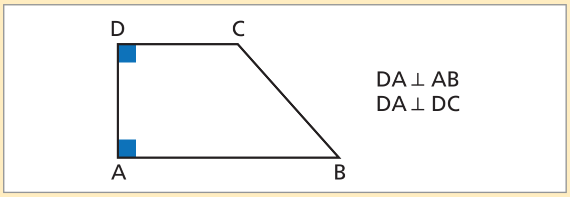
Un **trapezio** è un quadrilatero avente due soli lati paralleli.



Un **trapezio isoscele** è un trapezio avente i lati obliqui congruenti.
Un trapezio isoscele ha gli angoli adiacenti a ciascuna base congruenti.
Viceversa, è sufficiente che gli angoli adiacenti a una base siano congruenti affinché un trapezio sia isoscele.

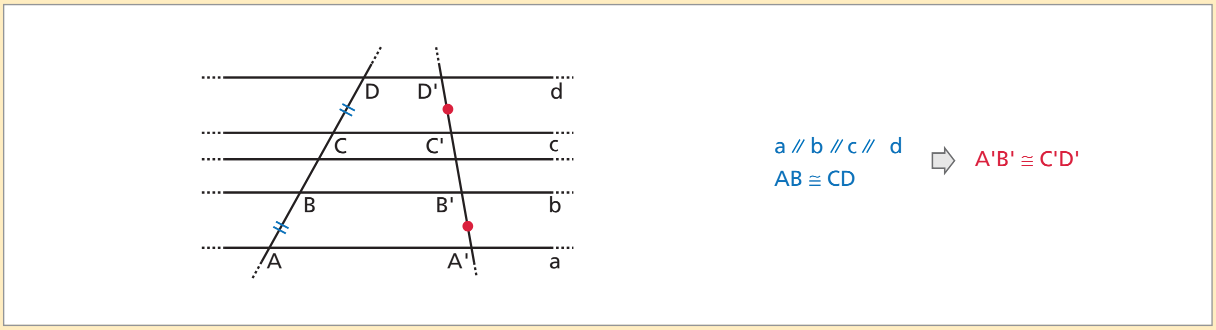


Un **trapezio rettangolo** è un trapezio in cui uno dei lati è perpendicolare alle basi.

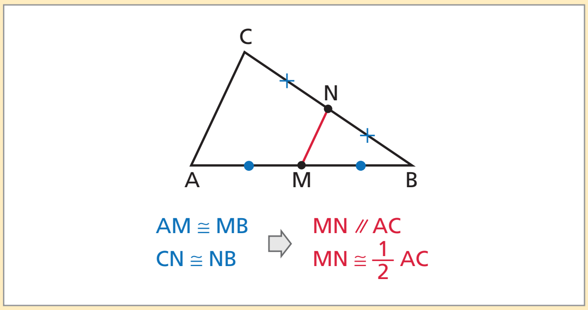


10. Le corrispondenze in un fascio di rette parallele

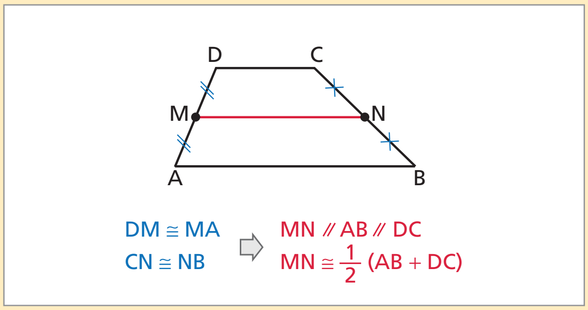
Un **fascio improprio di rette** è l'insieme di tutte le rette parallele a una retta data.
Dato un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti sull'una corrispondono segmenti congruenti sull'altra.



In un triangolo, il segmento con estremi nei punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e congruente alla metà di esso.

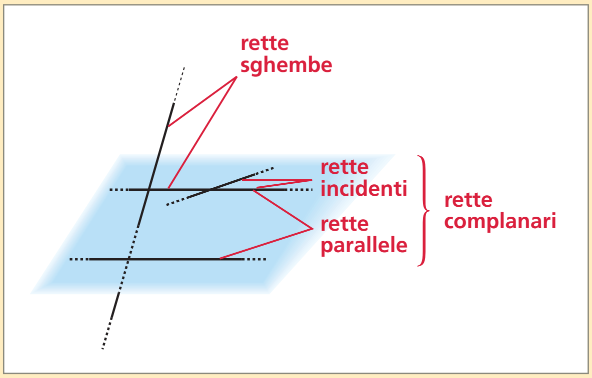


In un trapezio, la congiungente i punti medi dei lati obliqui è parallela alle due basi e congruente alla loro semisomma.



11. Rette, piani, poliedri

Due rette nello spazio sono **complanari** (incidenti o parallele) se appartengono allo stesso piano, altrimenti sono **sghembe**.



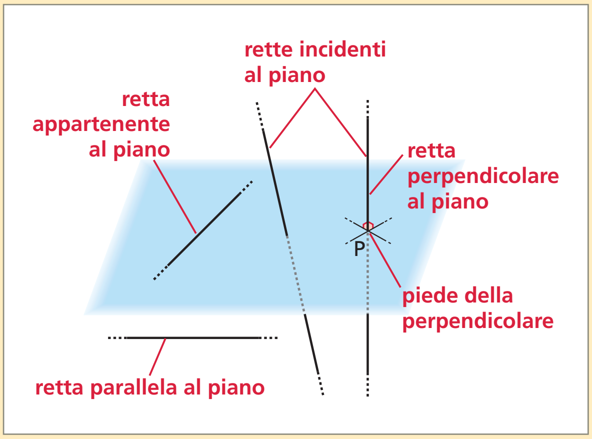
Due piani nello spazio sono:

- **incidenti**, se hanno in comune solo una retta;
- **paralleli**, se non hanno alcun punto in comune, oppure sono coincidenti.

Una retta nello spazio può essere:

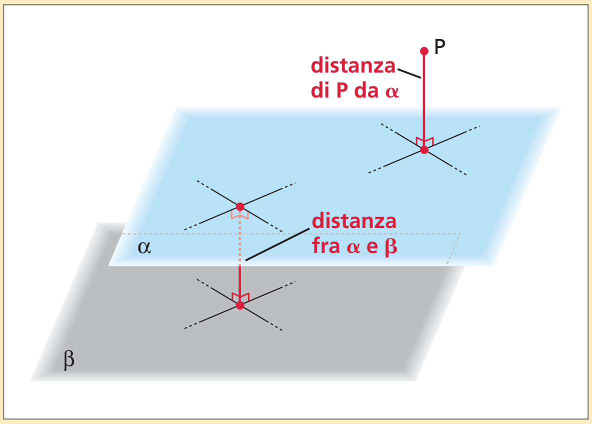
- **appartenente** a un piano, se tutti i suoi punti appartengono al piano;
- **incidente** al piano, se ha un solo punto in comune con il piano;
- **parallela** al piano, se non ha alcun punto in comune con il piano.

Una retta incidente a un piano in un punto P è **perpendicolare al piano** quando è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per P. In tal caso, P è detto **piede della perpendicolare**.



La **distanza fra due piani paralleli** è la lunghezza del segmento intercettato dai due piani su una qualunque retta perpendicolare ai due piani.

La **distanza di un punto da un piano** è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto stesso e il piede della perpendicolare al piano condotta da quel punto.

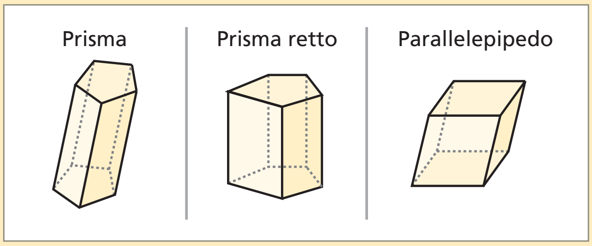


Un **poliedro** è una figura solida limitata da un numero finito di poligoni appartenenti a piani diversi e tali che il piano di ogni faccia non attraversi il solido.

Un **prisma** è un poliedro delimitato da due **basi** che sono poligoni congruenti posti su piani paralleli e da **facce laterali** che sono parallelogrammi. La distanza fra i piani delle basi è l'**altezza** del prisma; le **diagonali** sono segmenti che congiungono due vertici non appartenenti alla stessa faccia.

Un prisma è **retto** se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi, è **regolare** quando è retto e le sue basi sono poligoni regolari.

Un prisma è un **parallelepipedo** se anche le basi sono parallelogrammi.



Un **parallelepipedo rettangolo** è un parallelepipedo retto in cui le basi sono rettangoli. Ha per dimensioni le lunghezze dei tre spigoli uscenti da uno stesso vertice.

Un **cubo** è un parallelepipedo rettangolo con le dimensioni congruenti tra loro.

Dati un poligono e un punto V non appartenente al suo piano, un **angoloide** è il solido costituito da tutte le semirette di origine V che passano per i punti del poligono.

Un **poliedro** è **regolare** quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e anche i suoi diedri e i suoi angoloidi sono congruenti.

1. Le rette perpendicolari

Teoria a pag. G89

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

a) Dati un punto P e una retta r, esiste sempre almeno una retta passante per P e perpendicolare a r. V F

b) La proiezione ortogonale di un segmento su una retta r è sempre minore del segmento dato. V F

c) La proiezione ortogonale di un punto su una retta è un punto. V F

d) La distanza di un punto da una retta è un segmento. V F

e) Per un punto appartenente a una retta r passano infinite rette perpendicolari a r. V F

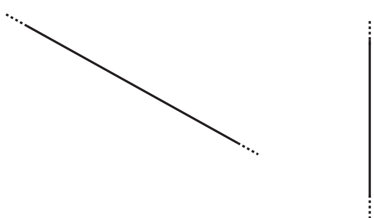
ESERCIZI

COSTRUZIONE GUIDATA

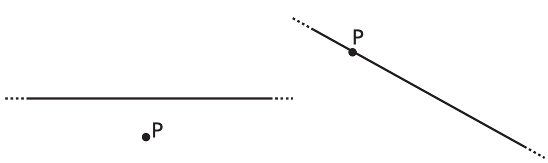
2 Costruisci la perpendicolare a una retta data.

- Scegli un punto qualsiasi O della retta r. Punta il compasso in O e, con apertura a piacere, fissa due punti A e B su r. *Come sono i segmenti OA e OB?* ....
- Punta il compasso in A e, con apertura maggiore di OA, traccia un arco. Con la stessa apertura punta il compasso in B e traccia un secondo arco. I due archi si intersecano nel punto P. *Perché l'apertura del compasso deve essere maggiore di OA?* ....
- Traccia la retta s passante per P e per O. *Le rette r e s sono* .... Perché? ....

3 Per ogni retta della figura, con riga e compasso disegna una qualunque retta a essa perpendicolare.

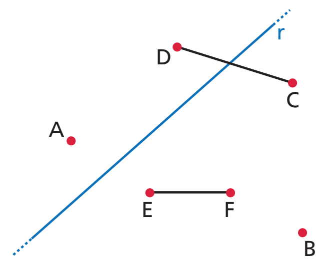


4 Per ogni retta della figura disegna la retta passante per P e perpendicolare alla retta data.

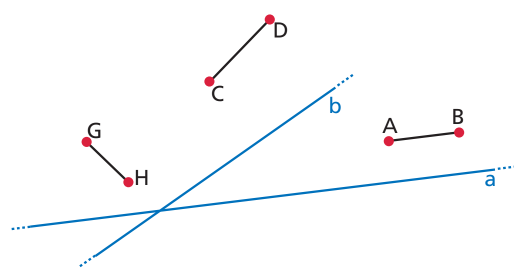


5 Secondo la definizione data, due rette sono perpendicolari quando, incontrandosi, formano *quattro* angoli retti. Spiega perché è sufficiente dire che *uno* dei quattro angoli è retto per essere sicuri che lo siano anche gli altri.

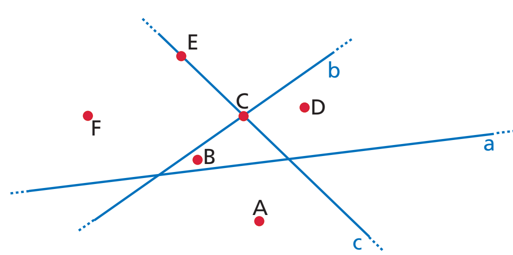
6 Traccia le proiezioni ortogonali dei punti A e B e dei segmenti DC ed EF sulla retta r.



7 Disegna le proiezioni ortogonali dei tre segmenti AB, CD e GH sulle rette a e b.



8 Per ognuno dei punti della figura disegna i segmenti che rappresentano la sua distanza da ognuna delle rette date.



9 Tracciata la bisettrice di un angolo convesso $r\hat{O}s$, disegna la perpendicolare per un suo punto A che incontra i lati dell'angolo in R e S. Dimostra che A è punto medio di RS.

10 Dato il triangolo isoscele ABC, per gli estremi della base AB traccia due rette che si incontrano nel punto D e che formano angoli congruenti con i lati AC e CB.
Dimostra che CD è perpendicolare ad AB.

11 In un qualsiasi triangolo considera, in uno stesso vertice, l'angolo interno e un angolo esterno.
Dimostra che le loro bisettrici sono perpendicolari.

2. Le rette parallele

Teoria a pag. G93

RIFLETTI SULLA TEORIA

12 **VERO O FALSO?**

Le seguenti proposizioni si riferiscono a due rette tagliate da una trasversale.

a) Esse formano quattro angoli interni e quattro esterni. V F

b) Gli angoli corrispondenti sono entrambi esterni o interni. V F

c) Gli angoli coniugati sono dalla stessa parte della trasversale. V F

d) Gli angoli alterni sono da parti opposte della trasversale. V F

e) Non esistono angoli corrispondenti interni. V F

f) Esistono sempre coppie di angoli congruenti. V F

13 **VERO O FALSO?**

a) Due rette coincidenti sono parallele. V F

b) Due rette parallele formano con una terza retta incidente angoli corrispondenti supplementari. V F

c) Esiste un teorema che afferma l'unicità della retta parallela a una retta data, condotta da un punto qualsiasi. V F

d) Se due rette formano con una terza retta angoli coniugati interni supplementari, allora sono parallele. V F

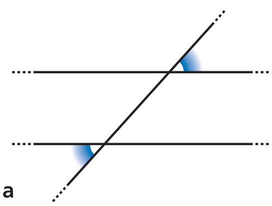
e) Esiste una sola retta parallela a una retta data. V F

f) Se due rette formano con una terza retta incidente angoli alterni esterni congruenti, allora sono parallele. V F

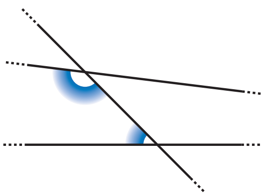
ESERCIZI

Nel sito: ▶ 7 esercizi di recupero

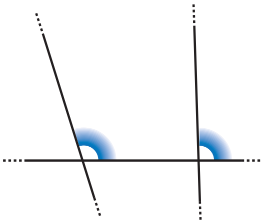
14 **COMPLETA** indicando per ogni figura di quale coppia di angoli si tratta.



a ....



b ....



c ....

La dimostrazione per assurdo

ESERCIZIO GUIDA

15 Dimostriamo per assurdo il secondo criterio di congruenza dei triangoli: se due triangoli hanno ordinatamente congruenti un lato e i due angoli a esso adiacenti, allora sono congruenti.

Ipotesi 1. $AC \cong A'C'$;
2. $\hat{A} \cong \hat{A}'$;
3. $\hat{C} \cong \hat{C}'$.

Tesi $ABC \cong A'B'C'$.

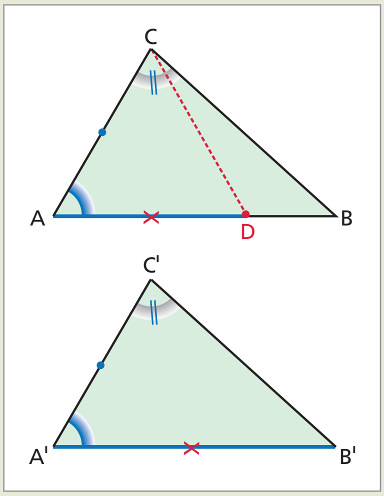
Dimostrazione

Ragioniamo per assurdo. Neghiamo la tesi, supponendo che i due triangoli non siano congruenti. I lati AB e $A'B'$ devono essere disuguali, altrimenti, per il primo criterio di congruenza, i triangoli sarebbero congruenti. Supponiamo allora che AB sia maggiore di $A'B'$. In tal caso esiste un punto D interno ad AB tale che sia $AD \cong A'B'$. Considerando i triangoli ADC e $A'B'C'$ si avrebbe:

- $AC \cong A'C'$ per ipotesi;
- $AD \cong A'B'$ per costruzione;
- $\hat{A} \cong \hat{A}'$ per ipotesi.

Quindi i triangoli sarebbero congruenti per il primo criterio. In particolare, si avrebbe $A\hat{C}D \cong A'\hat{C}'B'$.

Sappiamo che $A'\hat{C}'B' \cong A\hat{C}B$ per ipotesi, *quindi*, per la proprietà transitiva, si avrebbe $A\hat{C}D \cong A\hat{C}B$. Ciò è assurdo in quanto $A\hat{C}D$ è una parte di $A\hat{C}B$ (un angolo non può essere contemporaneamente congruente a un angolo e minore dello stesso). La negazione della tesi è falsa, pertanto la tesi è vera.



Dimostra, ragionando per assurdo, i seguenti teoremi.

16 Per due punti distinti, A e B, non possono passare due rette distinte.

17 Se due rette sono distinte, possono avere in comune al massimo un solo punto.

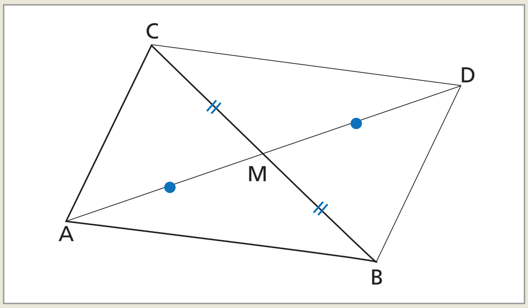
18 Se un triangolo è scaleno, non può avere due angoli congruenti.

19 Il terzo criterio di congruenza dei triangoli. (Suggerimento. La dimostrazione è simile a quella data nell'esercizio guida, ma invece di due lati, dovrebbero essere disuguali due angoli...)

Il teorema delle rette parallele

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

20 Dato il triangolo ABC, prolunga la mediana AM del segmento MD congruente ad AM. Dimostra che la retta DB è parallela ad AC e la retta CD è parallela ad AB.
▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è isoscele sulla base BC, come sono le rette BC e AD?



Ipotesi 1. ABC è un triangolo qualunque;
2. AM è .... ;
3. $MD \cong$ ....

Tesi 1. $DB \parallel$ ...... ;
2. ... $\parallel$ ....

Dimostrazione

- *Dimostra che i triangoli ACM e BMD sono congruenti.*
  Essi hanno:
  $CM \cong$ ......, perché M è .... di BC;
  $AM \cong$ ......, per ....;
  ...... $\cong B\hat{M}D$, perché ....
  Quindi i triangoli ACM e ...... sono ...., per il .... criterio di congruenza dei triangoli.
- *Deduci la congruenza di due angoli.*
  In particolare i triangoli hanno $C\hat{A}M \cong$
  $\cong$ ....
- *Dimostra che le rette BD e AC sono parallele.*
  Gli angoli $C\hat{A}M$ e ...... sono alterni .... delle rette AC e ......, tagliate dalla trasversale ...... e sono congruenti, *quindi* le rette BD e AC risultano .... , per il teorema ....
- *Dimostra in modo analogo la tesi 2.*
  I triangoli ABM e ...... hanno ....
  ....
  ....
  ....

▶ *Caso particolare*
In un triangolo isoscele la mediana è anche ...., *quindi* le rette BC e AD sono ....

21 Date due rette incidenti nel punto O, considera su una, da parti opposte rispetto a O, due punti A e B tali che $AO \cong OB$. Analogamente sull'altra considera i punti C e D tali che $CO \cong OD$. Dimostra che la retta CA è parallela a BD.

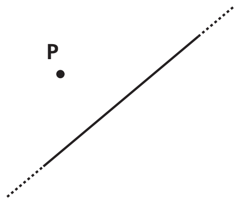
22 Dato il triangolo acutangolo ABC, nel semipiano individuato da AB che non contiene C, traccia il segmento AD congruente a BC in modo che abbia in comune con il triangolo soltanto A e che $D\hat{A}B \cong C\hat{B}A$. Dimostra che la retta BD è parallela alla retta AC.

23 Dato il triangolo isoscele ABC di base AB, dimostra che la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C è parallela alla base. (Suggerimento. Traccia l'altezza CH relativa alla base, che è anche...)

24 In un triangolo isoscele ABC di base AB, dal vertice A, nel semipiano individuato dalla retta AB e che non contiene il triangolo, traccia una semiretta che formi con AB un angolo congruente all'angolo interno di vertice A. Dimostra che la semiretta è parallela a CB.

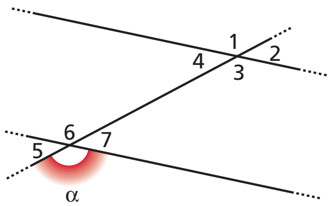
La parallela per un punto a una retta

25 **COMPLETA** Per ogni retta della figura, disegna la retta passante per P a essa parallela.

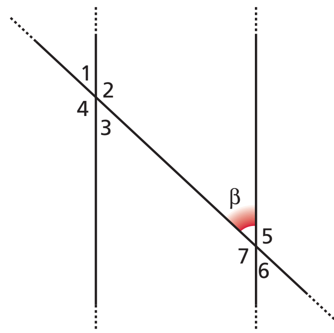


L'inverso del teorema delle rette parallele

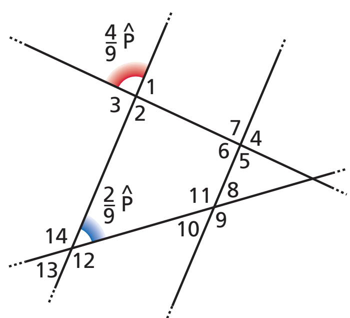
26 Nella seguente figura, che rappresenta due rette parallele tagliate da una trasversale, scrivi i numeri relativi a tutti gli angoli congruenti all'angolo α. Motiva le tue affermazioni.

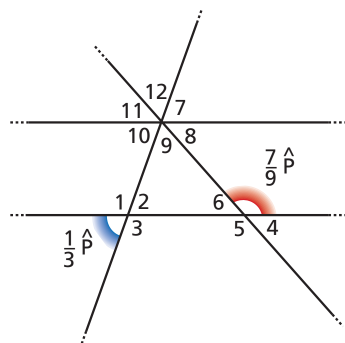


27 Nella seguente figura, che rappresenta due rette parallele tagliate da una trasversale, scrivi i numeri relativi a tutti gli angoli supplementari dell'angolo β. Motiva le tue affermazioni.



28 **COMPLETA** le figure a fianco, che rappresentano due rette parallele tagliate da due trasversali, esprimendo ciascun angolo, indicato con il relativo numero, come frazione dell'angolo piatto $\hat{P}$.





Applicazioni dell'inverso del teorema delle rette parallele

Esegui le seguenti dimostrazioni, utilizzando i suggerimenti della figura 5 della teoria.

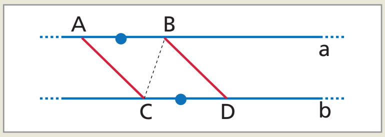
29 Due rette parallele formano con una trasversale angoli alterni interni congruenti. Dimostra che gli angoli alterni esterni sono anch'essi congruenti.

30 Con le stesse ipotesi dell'esercizio precedente, dimostra che angoli corrispondenti sono congruenti.

31 Con le stesse ipotesi dell'esercizio 29 dimostra che sono supplementari:
a) angoli coniugati interni;
b) angoli coniugati esterni.

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

32 Considera le rette parallele a e b. Sulle due rette scegli due segmenti congruenti AB e CD, AB su a e CD su b. Dimostra che i segmenti AC e BD sono congruenti e che le rette AC e BD sono parallele.
▶ *Caso particolare*: come devono essere gli angoli $A\hat{C}D$ e $A\hat{B}D$ affinché i segmenti AC e BD siano di lunghezza minima?



Ipotesi 1. $a \,//\, b$;
2. $AB \cong$ …… .

Tesi 1. …… $\cong BD$;
2. …… // …… .

Dimostrazione

- *Dimostra che i triangoli ABC e BCD sono congruenti.*
Essi hanno:
$AB \cong$ …… per ……;
BC in ……………………………;
…… $\cong B\hat{C}D$ perché angoli ……………………… delle rette parallele ……… e ……… tagliate dalla trasversale …… .
Quindi, i due triangoli sono congruenti per il ………………………… criterio di congruenza.

- *Deduci la congruenza di due segmenti.*
In particolare, i triangoli hanno: …… $\cong$ …… .

- *Dimostra il parallelismo fra rette.*
Nei triangoli congruenti …… e …… è anche vero che $A\hat{C}B \cong C\hat{B}D$, *quindi* le rette AC e …… sono parallele perché formano angoli alterni interni ……………………… con la trasversale …… .

▶ *Caso particolare*
Gli angoli $A\hat{C}D$ e $A\hat{B}D$ devono essere …… .

33 Dagli estremi di un segmento AB traccia due rette parallele. Su tali rette e nei semipiani opposti individuati dalla retta AB considera due punti C e D tali che $CA \cong BD$. Congiungi C con D e chiama O il punto di intersezione fra CD e AB. Dimostra che O è il punto medio di AB e di CD.

34 Disegna un triangolo isoscele ABC e traccia la retta passante per il vertice C parallela alla base AB. Dimostra che tale retta è bisettrice dell'angolo esterno di vertice C.

35 Confronta l'esercizio precedente con l'esercizio 23. Nota le analogie e le differenze.

36 Dal vertice C del triangolo ABC traccia il segmento CE congruente e parallelo ad AB (con il punto E appartenente al semipiano di origine BC opposto a quello che contiene il punto A). Dimostra che il triangolo CBE è congruente ad ABC.
▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è rettangolo in A, come sono i segmenti AE e BC? Perché?

37 Disegna un triangolo isoscele ABC e poi traccia una retta parallela alla base AB, che incontra i lati obliqui nei punti E e F. Dimostra che:
a) il triangolo CEF è isoscele;
b) l'altezza del triangolo ABC rispetto alla base AB e l'altezza del triangolo CEF rispetto alla base EF appartengono alla stessa retta.

38 Dato un triangolo isoscele ABC, traccia una retta parallela alla base AB. Essa incontra il lato AC in E e il lato BC in F. Congiungi E con B e A con F. Dimostra che EB e AF sono congruenti.

39 Date due rette parallele tagliate da una trasversale e tracciate le bisettrici di due angoli alterni interni, dimostra che queste sono parallele.

40 Da ogni vertice del triangolo AC traccia la retta parallela al lato opposto. Dimostra che i tre triangoli che si formano sono congruenti al triangolo ABC.

41 Disegna due rette parallele r e s e una trasversale t che interseca r nel punto A e s nel punto B; scegli sul segmento AB un punto C. Dalla stessa parte rispetto alla trasversale, traccia sulla retta r il segmento $AD \cong AC$ e sulla retta s il segmento $BE \cong BC$. Congiungi C con D e con E. Dimostra che l'angolo $D\hat{C}E$ è retto.
(Suggerimento. Disegna la retta passante per C parallela a r; considera i quattro angoli in cui viene così diviso l'angolo piatto $A\hat{C}B$; essi sono a due a due congruenti...)

42 Disegna un triangolo ABC e la bisettrice dell'angolo A che interseca il lato BC nel punto E. Traccia la retta t passante per E parallela ad AB e chiama F il punto in cui tale retta t incontra il lato AC. Dimostra che il triangolo AEF è isoscele.

43 Con riferimento all'esercizio precedente, traccia la retta passante per F e parallela alla bisettrice AE e indica con G il suo punto di intersezione con il lato BC. Dimostra che nel triangolo FEC il segmento FG è bisettrice relativa al vertice F.

44 Date due rette parallele tagliate da una trasversale, dimostra che le bisettrici di due angoli alterni esterni sono parallele.

3. Le proprietà degli angoli dei poligoni

Teoria a pag. G99

RIFLETTI SULLA TEORIA

45 **VERO O FALSO?**

a) In un triangolo, ogni angolo esterno è congruente alla somma degli angoli interni. V F

b) La somma degli angoli interni di un pentagono convesso è $3\hat{P}$. V F

c) La somma degli angoli esterni di un esagono è congruente a quattro angoli piatti. V F

d) Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti gli angoli alla base e un lato. V F

e) La somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è congruente a $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ volte la somma degli angoli esterni dello stesso poligono. V F

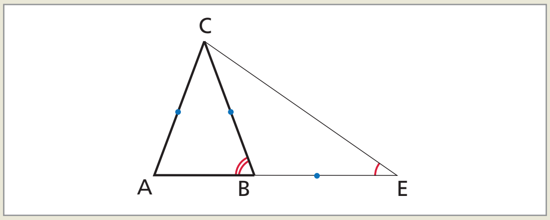
ESERCIZI

Il teorema dell'angolo esterno (somma)

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

46 Nel triangolo isoscele ABC prolunga la base AB di un segmento $BE \cong AC$. Dimostra che l'angolo $A\hat{B}C$ è doppio di $B\hat{E}C$.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è equilatero, come risulta l'angolo $A\hat{C}E$?



Ipotesi 1. ABC triangolo .... ;
2. BE prolungamento di ...... ;
3. ...... $\cong AC$.

Tesi ...... $\cong 2\,B\hat{E}C$.

Dimostrazione

- *Dimostra che il triangolo BEC è isoscele.*
  $BE \cong AC$ per l'ipotesi ……, $AC \cong BC$ perché lati congruenti del triangolo ………, *quindi* per la proprietà ……………… $BE \cong$ ………… e il triangolo BEC è ………
- *Deduci la congruenza degli angoli.*
  In particolare gli angoli $B\hat{E}C$ e …… sono congruenti perché angoli alla …… di un triangolo ………………
- *Dimostra la tesi.*
  L'angolo $A\hat{B}C$ è un angolo …………… del triangolo EBC, *quindi* per il teorema dell'…………… (somma):
  $A\hat{B}C \cong B\hat{E}C +$ ……
  ed essendo $B\hat{E}C \cong$ …… si ha:
  $A\hat{B}C \cong 2$ ……

▶ *Caso particolare*
Poiché $A\hat{C}B \cong \frac{1}{3}\hat{P}$ e $B\hat{C}E \cong$ ………… $\hat{P}$, allora l'angolo $A\hat{C}E$ è …… .

47 Disegna un triangolo isoscele ABC e prolunga la base AB di un segmento $BE \cong BC$. Congiungi E con C e prolunga tale segmento di un segmento CF scelto a piacere. Dimostra che l'angolo $A\hat{C}F$ è il triplo dell'angolo $A\hat{E}C$.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è equilatero, che cosa puoi dire sull'angolo $A\hat{C}F$?

48 Disegna un triangolo isoscele ABC di base AB in modo che l'angolo $\hat{A}$ sia doppio dell'angolo al vertice $\hat{C}$. La bisettrice AD dell'angolo $\hat{A}$ divide il triangolo dato in due triangoli, ADC e ABD. Dimostra che i due triangoli sono isosceli.

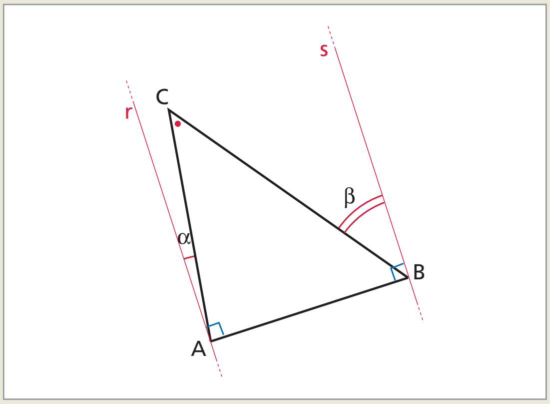
49 Disegna un triangolo isoscele ABC di base AB e prolunga il lato CA di un segmento $AE \cong AB$. Congiungi E con B. Dimostra che l'angolo $E\hat{B}C$ è il triplo dell'angolo $C\hat{E}B$.

La somma degli angoli interni di un triangolo

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

50 In un triangolo acutangolo ABC vengono tracciate le rette r e s perpendicolari ad AB, passanti rispettivamente per A e per B. Dimostra che $r // s$. Chiamati α l'angolo formato da r con CA e β l'angolo formato da s con CB, dimostra che l'angolo $\hat{C}$ è congruente alla somma di tali angoli.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è isoscele di vertice C, come sono gli angoli α e β?



Ipotesi 1. $r \perp$ …… ;
2. …… $\perp$ …… .

Tesi 1. …… // …… ;
2. $\hat{C} \cong$ …… + …… .

Dimostrazione

- *Dimostra il parallelismo delle due rette.*
  Le rette r e s sono entrambe perpendicolari ad ……, quindi sono ……, perché rette ……… a una stessa retta sono ……………… .
- *Scrivi due relazioni sull'angolo piatto.*

α e l'angolo …… sono complementari,
β e l'angolo …… sono ………, *quindi*:
$\alpha + \beta + …… + …… = \hat{P}$.
D'altra parte:
$A\hat{C}B + …… + …… = \hat{P}$,
perché somma degli angoli ……… del triangolo …… .

- *Dimostra la tesi 2.*
Confrontando le due relazioni, si ricava che:
$A\hat{C}B \cong …… + ……$.

▶ *Caso particolare*
Gli angoli α e β sono ………… .

51 Disegna un triangolo acutangolo ABC. Dimostra che la somma dei complementari degli angoli interni $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ è un angolo retto.

52 Disegna un triangolo ABC in modo che l'angolo α', esterno di vertice A, sia congruente alla somma degli angoli interni $\hat{A}$ e $\hat{C}$. Dimostra che il triangolo ABC è isoscele.

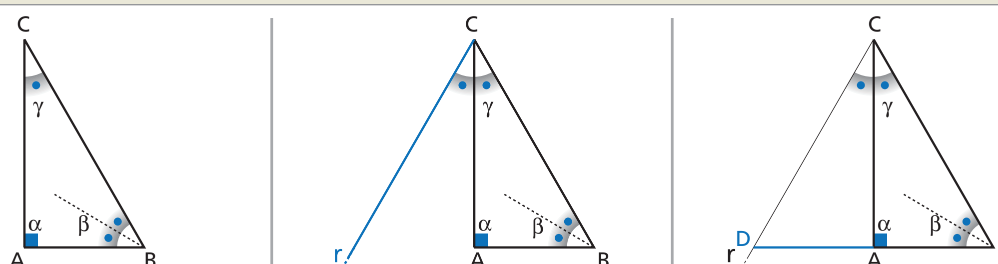
53 Nel triangolo isoscele ABC prolunga la base AB da ambo le parti e chiama α' e β' i due angoli esterni di vertici A e B. Dimostra che la loro somma è congruente alla somma dell'angolo interno $\hat{C}$ con un angolo piatto.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è anche rettangolo, a quale frazione dell'angolo piatto corrisponde la somma degli angoli α' e β'?

Applicazioni delle proprietà angolari dei triangoli rettangoli

ESERCIZIO GUIDA

54 È dato un triangolo rettangolo con un angolo acuto doppio dell'altro. Dimostriamo che l'ipotenusa è doppia del cateto minore.



a. Disegniamo il triangolo ABC. L'angolo $A\hat{B}C$ è doppio dell'angolo $A\hat{C}B$.

b. Disegniamo la semiretta Cr in modo che formi con CA un angolo congruente a γ.

c. Prolunghiamo BA fino a incontrare Cr nel punto D.

Ipotesi 1. ABC è un triangolo rettangolo;
2. $\beta \cong 2\gamma$.

Tesi $CB \cong 2AB$.

Dimostrazione

Indichiamo l'angolo retto con il simbolo $\hat{R}$.
Nel triangolo ABC risulta:

- $\alpha \cong \hat{R}$, per l'ipotesi 1;
- $\beta + \gamma \cong \hat{R}$, per il corollario del teorema della somma degli angoli interni;
- $\gamma + 2\gamma \cong \hat{R}$, per l'ipotesi 2, cioè $3\gamma \cong \hat{R}$.

Dividiamo i membri dell'ultima uguaglianza per 3.

Otteniamo $\frac{3\gamma}{3} \cong \frac{1}{3}\hat{R}$, ossia $\gamma \cong \frac{1}{3}\hat{R}$, *quindi* l'angolo γ risulta la terza parte di un angolo retto.

Troviamo la relazione fra β e $\hat{R}$:

$\beta \cong 2\gamma \cong 2 \cdot \frac{1}{3}\hat{R} \cong \frac{1}{3} \cdot 2\hat{R} \cong \frac{1}{3}\hat{P}$, dunque β è la terza parte di un angolo piatto.

Deduciamo che ABC è metà del triangolo equilatero DBC, *quindi* $CB \cong 2AB$.

55 Disegna un triangolo ABC in modo che l'angolo $\hat{A}$ sia congruente alla somma degli altri due angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Dimostra che il triangolo è rettangolo in $\hat{A}$.

56 Disegna un triangolo isoscele ABC di base AB e l'altezza AE relativa al lato obliquo BC. Dimostra che l'angolo $E\hat{A}B$ è metà dell'angolo $\hat{C}$.

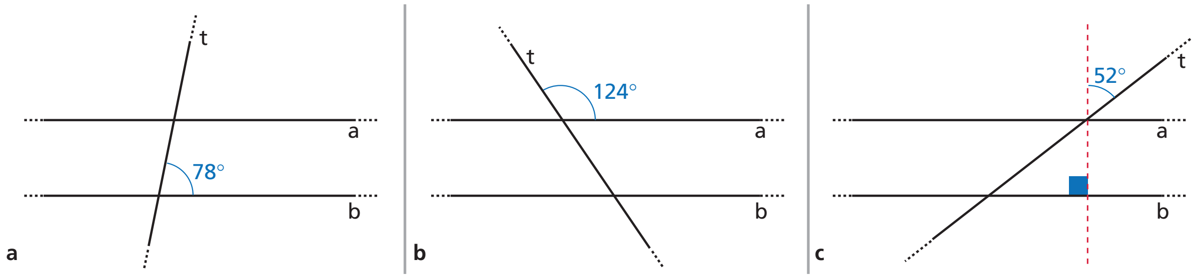
57 Nel triangolo rettangolo ABC di ipotenusa AB, l'altezza CH relativa ad AB divide ABC in due triangoli rettangoli ACH e CHB. Dimostra che tali triangoli hanno gli angoli congruenti a quelli di ABC.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è anche isoscele, come sono i triangoli ACH e CHB?

58 Sulla semiretta Oa dell'angolo acuto $a\hat{O}b$ scegli un punto A. Traccia da A le rette r e s perpendicolari ai lati dell'angolo. Traccia inoltre la bisettrice dell'angolo $r\hat{A}s$ e indica con B il suo punto di intersezione con la semiretta Ob. Dimostra che il triangolo AOB è isoscele. (Suggerimento. Indica con 2α l'angolo $a\hat{O}b$ e con 2β l'angolo $O\hat{A}s$.)

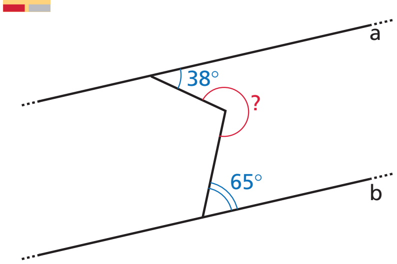
Proprietà geometriche e misure

59 Determina le misure delle ampiezze degli angoli formati dalle rette parallele a e b con la trasversale t.

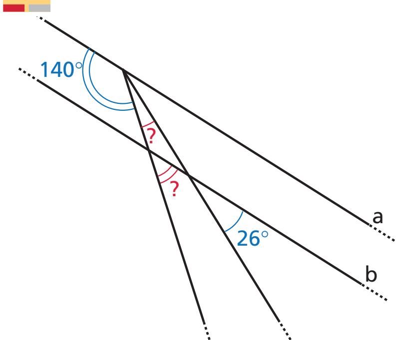


Trova le misure delle ampiezze degli angoli indicati sapendo che $a \parallel b$.

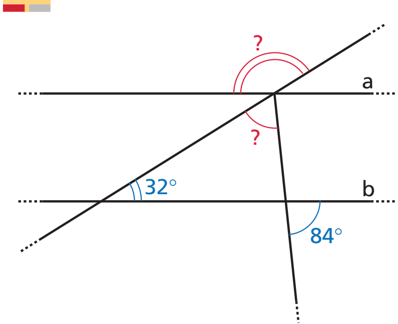
60



61

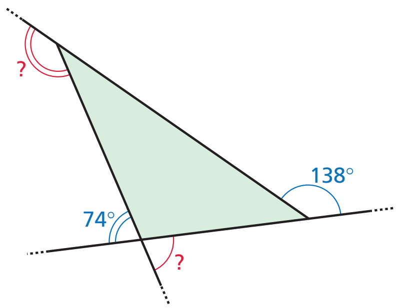


62

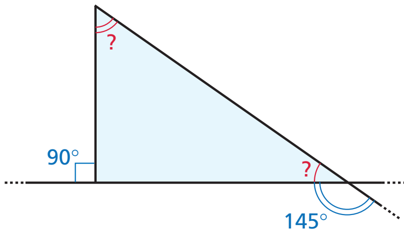


Determina le misure delle ampiezze degli angoli indicati.

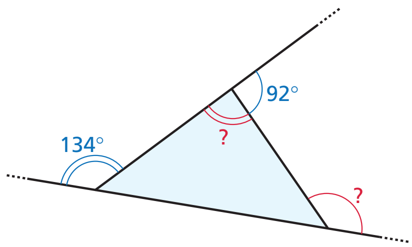
63



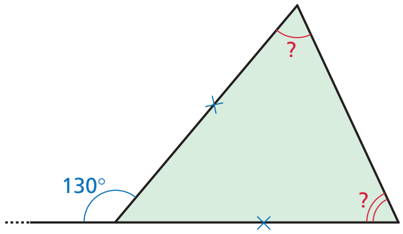
65



64



66

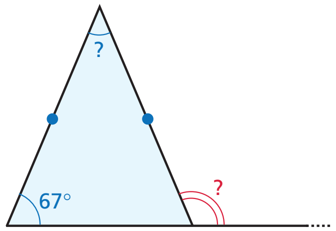


67 COMPLETA

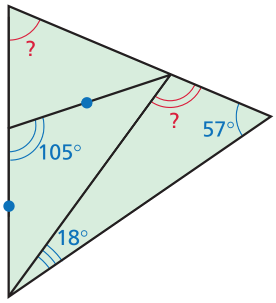
TRIANGOLO				
angolo α	angolo β	angolo γ	rispetto agli angoli	rispetto ai lati
22°	22°	…	…	…
…	…	…	…	equilatero
41°	…	…	ottusangolo	isoscele
27°	…	…	rettangolo	…
124°	…	…	…	isoscele

Utilizza le informazioni fornite per determinare le misure delle ampiezze degli angoli indicati.

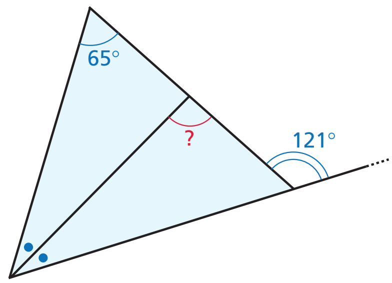
68



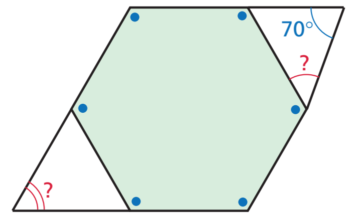
69



70



71



4. I criteri di congruenza dei triangoli rettangoli

Teoria a pag. G101

RIFLETTI SULLA TEORIA

72 **VERO O FALSO?**

a) Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari. V F

b) Affinché due triangoli rettangoli siano congruenti, devono avere almeno un lato congruente. V F

c) Due triangoli rettangoli aventi un cateto in comune sono congruenti. V F

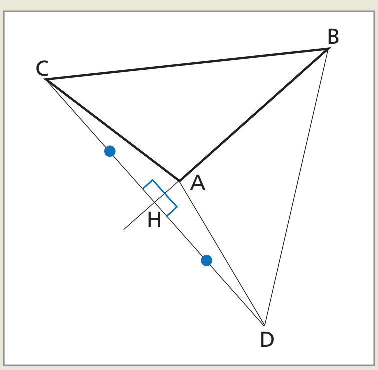
d) Due triangoli rettangoli e isosceli aventi le ipotenuse congruenti sono congruenti. V F

ESERCIZI

Nel sito: ▸ 6 esercizi di recupero

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

73 In un triangolo ottusangolo ABC, con angolo ottuso di vertice A, prolunga l'altezza CH relativa al lato AB di un segmento HD congruente a CH. Dimostra che i triangoli ABC e ABD sono congruenti.



Ipotesi 1. $CH \perp$ …… ;
2. HD prolungamento di ……;
3. $CH \cong$ …… .

Tesi $ABC \cong$ …… .

Dimostrazione

- *Dimostra la congruenza dei triangoli CHB e DHB.*
Essi sono rettangoli perché …… e hanno $CH \cong$ …… per …… e BH ……, *pertanto* i due triangoli sono congruenti per il …… di congruenza dei triangoli rettangoli.
- *Deduci la congruenza di due angoli.*
In particolare, gli angoli $C\hat{B}A$ e …… sono congruenti.
- *Dimostra la congruenza dei triangoli ABC e ABD.*
Essi hanno:
…… $\cong DB$ perché lati di un triangolo ………..,
$C\hat{B}A \cong$ …… per la dimostrazione precedente, AB in ………..., *pertanto* i due triangoli sono congruenti per ……………………………………… .

74 Verifica che la dimostrazione guidata dell'esercizio 73 vale anche per un triangolo ABC acutangolo.

75 Dimostra che in ogni triangolo isoscele il punto medio della base ha la stessa distanza dai lati obliqui.

76 Dimostra che in un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche mediana e bisettrice.

77 Dimostra che due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti:
a) un cateto e la mediana a esso relativa;
b) un cateto e la mediana relativa all'altro cateto.

78 Dimostra che due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti:
a) l'altezza relativa all'ipotenusa e la bisettrice dell'angolo retto;
b) un cateto e la bisettrice dell'angolo acuto adiacente.

79 Per il punto medio M del segmento AB traccia una retta r qualunque. Proietta gli estremi del segmento sulla retta r e indica con C la proiezione di A, con E la proiezione di B.
Dimostra che $AC \cong BE$.

▶ *Caso particolare*: se r è perpendicolare ad AB, dove si trovano i punti C ed E? È ancora vera la tesi?

80 Sui lati dell'angolo convesso $a\hat{O}b$ scegli due segmenti congruenti OA e OB. Traccia per i punti A e B le rette perpendicolari ai lati a cui appartengono. Tali rette si incontrano nel punto E.
Dimostra che il punto E appartiene alla bisettrice dell'angolo di partenza.

81 Disegna un triangolo ABC e la mediana CM, prolungata oltre la base AB. Conduci dal vertice A il segmento AF e dal vertice B il segmento BE, entrambi perpendicolari a CM.
Dimostra che $AF \cong BE$.

82 Nel triangolo isoscele di base AB e altezza CH indica con E un punto qualunque di CH.
Dimostra che i triangoli AEC e BEC sono congruenti.

83 Disegna un triangolo isoscele ABC e prolunga la base AB, da ambo le parti, di due segmenti congruenti AD e BE. Traccia la retta per D perpendicolare ad AB e indica con U il suo punto di intersezione con il prolungamento del lato CA. Analogamente, traccia la retta per E perpendicolare ad AB e indica con F il suo punto di intersezione con il prolungamento del lato CB.
Dimostra che il triangolo CUF è isoscele.

84 Nel triangolo isoscele sulla base AB e rettangolo in C, traccia per C una retta qualunque r, esternamente al triangolo. Proietta su r i vertici A e B, poi indica con D la proiezione di A, con E la proiezione di B.
Dimostra che $DE \cong AD + BE$.

85 Disegna un triangolo rettangolo ABC e prolunga l'ipotenusa AB dalla parte di B. Traccia dal punto B la semiretta perpendicolare al cateto BC, dalla stessa parte del triangolo rispetto ad AB. Su tale semiretta considera il segmento BD congruente all'ipotenusa AB. Proietta infine il punto D sul prolungamento di AB e indica con E la sua proiezione.
Dimostra che i triangoli ABC e BED sono congruenti.

86 Nel triangolo ABC, di base AB, traccia la retta che congiunge i punti medi dei lati AC e BC. Proietta su tale retta i vertici del triangolo, ottenendo i segmenti AF, CH, BE.
Dimostra che $AF \cong CH \cong BE$.
(Suggerimento. Considera coppie di triangoli rettangoli congruenti.)

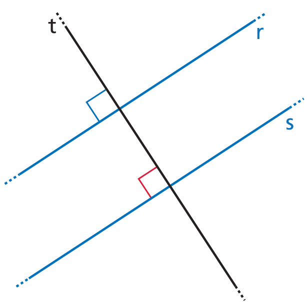
RIEPILOGO PERPENDICOLARI E PARALLELE

Nel sito: ▶ 12 esercizi in più

87 TEST Fra le seguenti affermazioni, solo una *non* è una definizione. Quale?

A Due rette incidenti sono perpendicolari se dividono il piano in quattro angoli retti.
B Due rette sono parallele quando non hanno punti in comune oppure coincidono.
C In due angoli con i lati paralleli, si dicono discordi i lati che giacciono da parti opposte, rispetto alla retta che congiunge i vertici.
D La distanza di un punto da una retta è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto e il piede della perpendicolare condotta dal punto alla retta.
E Per un punto del piano passa una e una sola retta perpendicolare a una retta data.

88 Enuncia il teorema espresso dalla seguente figura e dalle relative ipotesi e tesi. Puoi considerare questo enunciato come un corollario dell'inverso del teorema delle rette parallele?



Ipotesi 1. $r \parallel s$ **Tesi** $t \perp s$
2. $t \perp r$

89 È possibile che la proiezione di un segmento su una retta sia maggiore del segmento stesso? E congruente? Giustifica le risposte.

90 È possibile che la proiezione di un segmento su una retta si riduca a un punto? Giustifica la risposta, illustrandola con una figura.

91 Dati una retta r e un punto P che non le appartiene, dimostra che se due segmenti che uniscono P a due punti di r hanno proiezioni congruenti, allora sono congruenti.

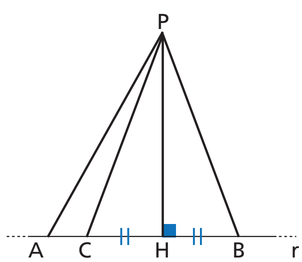
92 Scrivi un teorema con la stessa figura dell'esercizio 88, ma in cui si debba dimostrare che le proiezioni sono congruenti. Dimostralo.

93 Dato il triangolo ABC, dal vertice B traccia la parallela ad AC e su di essa considera il punto D in modo che AD non intersechi BC e che $BD \cong AC$. Dimostra che AD è parallela a BC.

94 Dato il triangolo isoscele ABC di base AB, prolunga AC di un segmento CD congruente a CB. Dimostra che DB è parallela all'altezza relativa ad AB.

95 Dimostra che le bisettrici di due angoli coniugati interni, formati da due rette parallele con una trasversale, sono perpendicolari.

96 Dati una retta r e un punto P che non le appartiene, dimostra che se due segmenti che uniscono P a due punti di r hanno proiezione una maggiore dell'altra, allora anche i segmenti sono uno maggiore dell'altro, ed è maggiore quello che ha proiezione maggiore.
(Suggerimento. Osserva la figura: dimostra che se $AH > HB$, allora $AP > PB$. Su r considera la proiezione H di P e il punto C interno ad AH in modo che $CH \cong HB$. L'angolo $A\hat{C}P$ è ottuso perché…; nel triangolo ACP si ha che… poiché ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore…)



97 Disegna un triangolo isoscele ABC di base AB. Traccia una retta r perpendicolare ad AB in modo che incontri il lato AC in E e il prolungamento del lato BC in F. Dimostra che il triangolo ECF è isoscele sulla base EF. (Suggerimento. Disegna la retta s che contiene l'altezza CH.)

▶ *Caso particolare*: se l'angolo $A\hat{B}C$ è $\frac{1}{6}$ dell'angolo piatto, di che natura è il triangolo ECF?

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu - 1** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Statistica*

98 Disegna due rette parallele r e s tagliate dalla trasversale t. Indica con A il punto di intersezione di t con r, con B il punto di intersezione di t con s. Traccia le bisettrici di una coppia di angoli coniugati interni e chiama C il loro punto di intersezione. Disegna infine la retta per C perpendicolare a r, che incontra r in H e s in K. Dimostra che $AB \cong AH + BK$. (Suggerimento. Traccia l'altezza relativa ad AB nel triangolo ABC.)

99 Disegna un triangolo ABC, l'altezza CH e la mediana CM. Prolunga l'altezza di un segmento $HF \cong CH$ e la mediana di un segmento $ME \cong CM$. Congiungi A con F e B con E. Dimostra che:

a) gli angoli $H\hat{A}F$ e $M\hat{B}E$ sono congruenti;

b) i segmenti AF e BE sono congruenti.

100 Disegna un triangolo isoscele ABC sulla base AB. Prolunga il lato BC di un segmento $CE \cong CB$, poi congiungi E con A. Dimostra che il triangolo ABE è rettangolo in $\hat{A}$.

101 Dimostra che le bisettrici di due angoli con i lati paralleli e concordi sono parallele.
(Suggerimento. Traccia la congiungente dei vertici degli angoli e ragiona con angoli corrispondenti.)

102 Nel triangolo ABC, rettangolo in A, traccia per C la parallela s al cateto AB. Da parti opposte rispetto a C su s considera i segmenti CR e CT congruenti entrambi a BC.
Dimostra che BR e BT sono tra loro perpendicolari e sono rispettivamente le bisettrici dell'angolo interno e dell'angolo esterno di vertice B del triangolo dato.

103 Disegna il triangolo isoscele acutangolo ABC di base AB. Traccia la perpendicolare per C a BC, che intersechi il prolungamento della base AB in P. Traccia poi per A la perpendicolare ad AC che intersechi in Q il segmento CP.
Dimostra che il triangolo APQ è isoscele.

5. Il parallelogramma

Teoria a pag. G104

RIFLETTI SULLA TEORIA

104 **VERO O FALSO?**

a) Un quadrilatero con due lati paralleli è un parallelogramma. V F

b) Le diagonali di un parallelogramma sono le bisettrici dei suoi angoli. V F

c) In un parallelogramma le diagonali non sono mai perpendicolari. V F

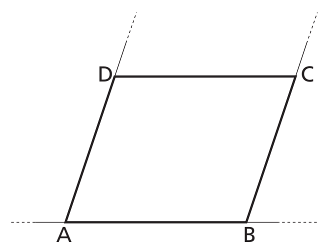
d) Se un quadrilatero viene diviso da una sua diagonale in due triangoli congruenti, allora è un parallelogramma. V F

e) Un parallelogramma non può avere angoli retti. V F

f) Se un quadrilatero ha due angoli opposti congruenti, allora è un parallelogramma. V F

g) Un quadrilatero con tre angoli congruenti è un parallelogramma. V F

105 **TEST** Con riferimento al parallelogramma della figura, fra le seguenti congruenze solo una è *vera*. Quale?



A $AB \cong AD$

B $AB \cong CD$

C $AC \cong BD$

D $AB \cong BD$

E $\hat{A} \cong \hat{D}$

106 **TEST** Con riferimento al parallelogramma della figura dell'esercizio precedente, solo una delle seguenti congruenze è *falsa*. Quale?

A $\hat{A} \cong \hat{C}$

B $\hat{A} \cong \hat{B}_e$

C $\hat{B}_e \cong \hat{D}_e$

D $\hat{A}_e + \hat{B}_e \cong \hat{P}$

E $\hat{A}_e + \hat{C}_e \cong \hat{P}$

107 Di fianco a ognuna delle seguenti condizioni indica se è una condizione necessaria e non sufficiente (CN), sufficiente e non necessaria (CS) o necessaria e sufficiente (CNS) affinché un quadrilatero sia un parallelogramma.

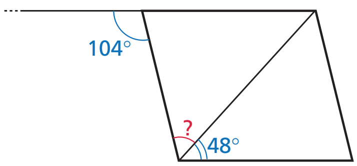
a) Due angoli opposti siano congruenti.
b) Due lati siano paralleli e congruenti.
c) Il quadrilatero sia diviso da una diagonale in due triangoli congruenti.
d) Le diagonali si taglino scambievolmente a metà.
e) I lati siano a due a due congruenti.
f) Due angoli adiacenti allo stesso lato siano supplementari.

ESERCIZI

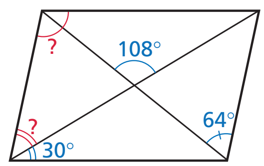
Proprietà geometriche e misure

Nei seguenti parallelogrammi determina gli angoli indicati.

108



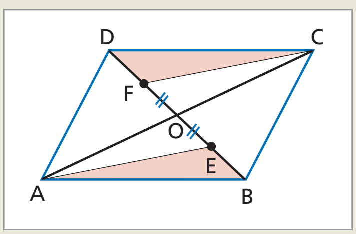
109



Dimostrazioni

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

110 È dato il parallelogramma $ABCD$, con le sue diagonali che si intersecano in O.
Scelti i punti E su OB e F su OD in modo che $OE \cong OF$, dimostra che i triangoli AEB e CFD sono congruenti.



Ipotesi 1. …… parallelogramma;
2. $OE \cong$ …… .

Tesi …… $\cong DCF$.

Dimostrazione

- *Dimostra la congruenza dei triangoli ABE e DCF.*
  Essi hanno:
  …… $\cong DC$, perché lati ……… di un ………… ;
  $A\hat{B}E \cong$ ……, perché angoli ………… interni formati dalle rette ……… DC e …… tagliate dalla trasversale …… ;
  …… $\cong DF$, perché differenze di segmenti ……… ($OB \cong$ ……, perché O è …………… della diagonale del …………… $ABCD$; ………… $\cong OF$ per l'………… 2); *pertanto* i triangoli sono congruenti per il ……………………………………… .

111 Disegna un segmento AC con gli estremi su due rette parallele a e c. Indica con M il punto medio di AC, poi traccia una retta passante per M che interseca a e c, rispettivamente nei punti B e D. Dimostra che $ABCD$ è un parallelogramma.

112 Due rette parallele a e b intersecano la trasversale t, rispettivamente nei punti A e B. Scegli sulle parallele, dalla stessa parte rispetto a t, i segmenti congruenti AD e BC. Dimostra che il quadrilatero $ABCD$ è un parallelogramma.

113 Disegna un triangolo ABC e la mediana CM. Prolunga CM di un segmento $ME \cong CM$. Dimostra che $AEBC$ è un parallelogramma.

114 Nel triangolo ABC, prolunga il lato AC di un segmento $CE \cong AC$ e il lato BC di un segmento $CF \cong BC$. Dimostra che il quadrilatero $ABEF$ è un parallelogramma.

115 Nel parallelogramma $ABCD$ considera su AB il punto E e su CD il punto F in modo che $AE \cong CF$. Dimostra che i triangoli ADF e EBC sono congruenti.

116 Nel parallelogramma $ABCD$, sui lati opposti AD e BC scegli due segmenti congruenti AF e CE. Dimostra che $BEDF$ è un parallelogramma.

117 Nel parallelogramma $ABCD$ traccia le perpendicolari da A e da B alla retta CD e chiama rispettivamente H e K i loro piedi. Dimostra che i triangoli AHD e BKC sono congruenti.

118 Disegna un parallelogramma $ABCD$ e traccia le bisettrici degli angoli interni $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Esse si incontrano in E. Dimostra che $A\hat{E}B$ è un angolo retto.

119 Nel triangolo isoscele ABC segna sulla base AB un punto qualsiasi E. Traccia la retta passante per E e parallela ad AC, che incontra CB in F, e la retta passante per E e parallela a BC, che incontra AC in D. Dimostra che $AC \cong DE + EF$.

▶ *Caso particolare*: se E è il punto medio di AB, D è il punto medio di AC. Perché?

120 Nel parallelogramma $ABCD$ prolunga, sempre nello stesso verso, ogni lato in modo da ottenere i segmenti BM, CN, DE, AF congruenti fra loro. Dimostra che $EFMN$ è un parallelogramma.

121 Nel parallelogramma $ABCD$ segna quattro punti, uno su ogni lato, E, F, M, N in modo che risultino congruenti i segmenti AE, BF, CM, DN. Dimostra che $EFMN$ è un parallelogramma.

122 Nel triangolo isoscele ABC di base AB, prolunga il lato AC e considera sulla bisettrice dell'angolo esterno di vertice C un punto E tale che $CE \cong AB$. Dimostra che $ABEC$ è un parallelogramma.

▶ *Caso particolare*: se ABC è un triangolo equilatero, come sono fra loro le diagonali AE e BC?

123 Disegna un parallelogramma $ABCD$ e una retta r passante per il vertice A esterna al parallelogramma. Traccia poi i segmenti DL, BH e CK perpendicolari a r. Dimostra che $CK \cong DL + BH$. (Suggerimento. Traccia $DP \perp CK$, considera il quadrilatero $DPKL$ e i triangoli DPC e AHB.)

124 Disegna un triangolo isoscele ABC. Scegli sul lato BC un punto E, poi prolunga il lato CA di un segmento $AD \cong BE$. Congiungi D con E e indica con F il punto di intersezione del segmento ottenuto con la base AB. Dimostra che F è punto medio di DE. (Suggerimento. Traccia la retta passante per D e parallela a BE. Chiama con G l'intersezione di r con la retta AB. Il quadrilatero $GDBE$ è … .)

125 La retta t è perpendicolare alle rette parallele a e b e incontra a nel punto A e b in B. Indica con M il punto medio del segmento AB.

a) Disegna una retta passante per M che intersechi a in C e b in D. Dimostra che M è punto medio anche del segmento CD.

b) Traccia per M la perpendicolare a CD che incontri a in E e b in F. Dimostra che $CEDF$ è un parallelogramma.

6. Il rettangolo

Teoria a pag. G108

RIFLETTI SULLA TEORIA

126 VERO O FALSO?

a) Se un quadrilatero ha due angoli retti, allora è un rettangolo. V F

b) Un quadrilatero avente tre angoli retti è un rettangolo. V F

c) Se un quadrilatero ha le diagonali congruenti, allora è un rettangolo. V F

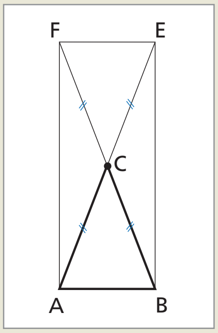
d) Le diagonali di un rettangolo non sono mai perpendicolari. V F

ESERCIZI

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

127 Nel triangolo isoscele ABC di vertice C, prolunga i lati AC e BC dei segmenti CE e CF congruenti a BC. Dimostra che il quadrilatero $ABEF$ è un rettangolo.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è rettangolo in C, come sono i segmenti AF e AB?



Ipotesi
1. ABC è un .... ;
2. CE è prolungamento di ...... ; ...... è prolungamento di ...... ;
3. $CE \cong$ ...... $\cong$ ...... $\cong$ ....

Tesi
$ABEF$ è un ....

Dimostrazione
- *Dimostra che il quadrilatero ABEF è un parallelogramma.*
Le diagonali AE e ...... hanno lo stesso punto ...., *quindi* .... è un ....
- *Dimostra che ABEF è un rettangolo.*
Le stesse diagonali sono anche ...., perché somme di .... Il .... $ABEF$, avendo le diagonali ...., è un ....

▶ *Caso particolare*
Poiché i triangoli ABC e ACF sono ...., allora i segmenti AB e .... sono ....

128 Dato il triangolo rettangolo ABC, con l'angolo retto in A, da un punto P dell'ipotenusa traccia il segmento PH perpendicolare ad AB e poi PK perpendicolare ad AC. Dimostra che $AHPK$ è un rettangolo.

129 Nel triangolo ABC, isoscele sulla base BC, traccia l'altezza AH e la parallela per H al lato AB. La perpendicolare per C a BC interseca tale parallela in P. Dimostra che $AHCP$ è un rettangolo.

130 Nel parallelogramma $ABCD$ le bisettrici dei quattro angoli, incontrandosi, determinano il quadrilatero $EFGH$. Dimostra che è un rettangolo.

131 Nel rettangolo $ABCD$, traccia le diagonali AC e BD e scegli sul lato CD un punto P. Indica con PH e PK le distanze di P rispettivamente da AC e BD e con CS la distanza di C da BD. Dimostra che $PH + PK \cong CS$. (Suggerimento. Traccia per P la parallela a DB, che incontra CS in T; considera prima $PKST$, che è un ......, poi i due triangoli rettangoli...... .)

132 Nel rettangolo $ABCD$ traccia le diagonali. Sul lato CD scegli due punti P e Q. Dal punto P traccia il segmento PH perpendicolare a DB e il segmento PK perpendicolare ad AC. Allo stesso modo, dal punto Q traccia il segmento QE perpendicolare a DB e il segmento QF perpendicolare ad AC. Dimostra che $PH + PK \cong QE + QF$.
(Suggerimento. Utilizza la proprietà dimostrata nell'esercizio precedente.)

7. Il rombo

➜ Teoria a pag. G110

RIFLETTI SULLA TEORIA

133 **VERO O FALSO?**

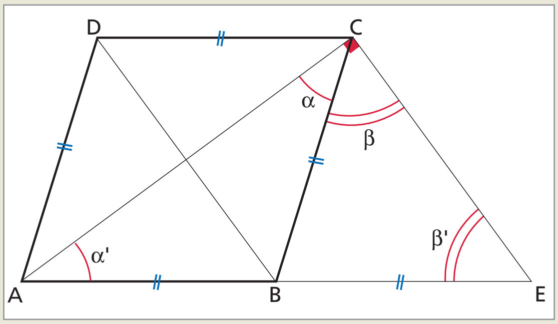
a) Se un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari, allora è un rombo. V F
b) Se un parallelogramma ha due lati consecutivi congruenti, allora è un rombo. V F
c) Un rombo non può avere quattro angoli congruenti. V F
d) Un quadrilatero avente quattro lati congruenti è un rombo. V F

ESERCIZI

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

134 Dato il rombo $ABCD$, traccia le sue diagonali. Prolunga il lato AB di un segmento BE congruente al lato e congiungi E con C. Dimostra che l'angolo $A\hat{C}E$ è retto e che CE è parallelo a DB.

▶ *Caso particolare*: se l'angolo $D\hat{A}B$ è $\frac{1}{3}$ dell'angolo piatto, come sono i triangoli DAB e CBE?



Ipotesi 1. $ABCD$ è un ....;
2. $BE \cong$ ....

Tesi 1. $A\hat{C}E \cong$ ......;
2. ...... // ....

Dimostrazione

- *Considera il triangolo ACE.*
  In esso risulta:
  $\alpha' +$ ...... $+$ ...... $+ \beta' \cong \hat{P}$, perché somma degli angoli .... di un ....
- *Prendi in esame i triangoli ABC e CBE.*
  Essi sono entrambi isosceli per ipotesi, *quindi* $\alpha' \cong$ ...... e $\beta' \cong$ ......, perché angoli alla ....
- *Sostituisci nella relazione precedente.*
  $\alpha + \alpha +$ ...... $+$ ...... $\cong$ ......, ossia:
  $2\alpha +$ ...... $\cong$ ...... e, dividendo per 2:
  $\alpha + \beta \cong$ ......, *pertanto* $A\hat{C}E \cong$ ....
- *Dimostra che CE // DB.*
  Il quadrilatero $BECD$ ha i lati BE e CD .... e paralleli, *quindi* è un ...., *pertanto* i suoi lati CE e .... sono ....

▶ *Caso particolare*

Se l'angolo $D\hat{A}B$ è $\frac{1}{3}$ dell'angolo piatto, allora il triangolo DAB è .... Il triangolo CBE è .... al triangolo DAB, *pertanto* anch'esso è ....

135 Nel rombo $ABCD$, M, N, E e F sono i punti medi dei lati. Dimostra che il quadrilatero $MNEF$ è un rettangolo

136 Nel rombo $ABCD$ l'angolo $\hat{A}$ è doppio dell'angolo $\hat{B}$. Dimostra che la diagonale minore AC è congruente al lato del rombo.

137 Disegna un triangolo ABC e la bisettrice CD dell'angolo $\hat{C}$. Dal punto D traccia le parallele ad AC e a BC. Indicate con E e F le intersezioni delle parallele tracciate rispettivamente con BC e AC, dimostra che $DECF$ è un rombo.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è equilatero, il lato del rombo $DECF$ è congruente alla metà del lato AB. Perché?

138 Dimostra che, se su una diagonale di un rombo si prendono due punti equidistanti dagli estremi, unendo tali punti con gli altri due vertici del rombo si ottiene un altro rombo.

139 Nel rombo $ABCD$, le diagonali si incontrano nel punto O. Traccia le distanze OH, OK, OP, OQ del punto O, rispettivamente dai lati AB, BC, CD, DA. Dimostra che tali distanze sono congruenti e che i punti P, O, H, così come Q, O, K, sono allineati.

140 Dati due segmenti congruenti che si incontrano nel loro punto medio, traccia per i loro estremi le perpendicolari ai segmenti stessi.
Dimostra che i punti d'intersezione di tali rette sono vertici di un rombo.

141 Disegna un rombo $ABCD$ e le sue diagonali. Traccia, per ogni vertice, la retta parallela alla diagonale opposta. Le quattro rette si incontrano a due a due nei punti M, N, E, F.
Dimostra che:
a) $MNEF$ è un rettangolo;
b) ogni vertice del rombo è punto medio dei lati del rettangolo.

8. Il quadrato

Teoria a pag. G112

RIFLETTI SULLA TEORIA

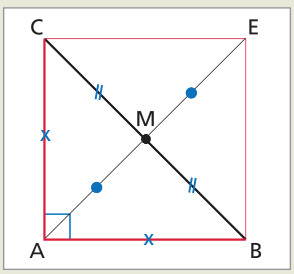
142 VERO O FALSO?

a) Un parallelogramma con due lati consecutivi congruenti è un quadrato. V F
b) Ogni quadrato è un rettangolo. V F
c) Se un rombo ha le diagonali congruenti, allora è un quadrato. V F
d) Condizione sufficiente affinché un quadrilatero sia un quadrato è che abbia quattro angoli retti. V F
e) Condizione necessaria affinché un quadrilatero abbia le diagonali perpendicolari è che sia un quadrato. V F

ESERCIZI

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

143 Considera il triangolo rettangolo isoscele *ABC*, con angolo retto in *A*. La mediana *AM* è prolungata di un segmento *ME* congruente ad *AM*. Dimostra che il quadrilatero *ABEC* è un quadrato.



Ipotesi 1. *ABC* è ....;
2. *AM* ....;
3. *ME* ≅ ....

Tesi *ABEC* ....

Dimostrazione

- *Dimostra che ABEC è un parallelogramma.*
Le diagonali *BC* e ...... si tagliano scambievolmente a ...., *quindi ABEC* è un ....
- *Dimostra che il triangolo ABM è rettangolo.*
Nel triangolo isoscele *ABC*, la mediana *AM* è anche altezza, *quindi* l'angolo $A\widehat{M}B$ è ....
- *Deduci che ABEC è un rombo.*
Le diagonali *AE* e ...... del parallelogramma .... risultano ...., *quindi ABEC* è un ....
- *Deduci che ABEC è un quadrato.*
Poiché il parallelogramma *ABEC* è un .... e $C\widehat{A}B$ è ...., allora *ABEC* è un ....

144 Disegna un rettangolo *ABCD*. Su ogni lato costruisci, esternamente al rettangolo, quattro triangoli rettangoli isosceli, in modo che i lati del rettangolo siano ipotenuse dei triangoli. Indica con *P*, *Q*, *R*, *S* i vertici degli angoli retti.
Dimostra che *PQRS* è un quadrato.

145 Nel triangolo rettangolo *ABC*, con base l'ipotenusa *AB*, traccia i prolungamenti di *AB* da ambo le parti. Esternamente al triangolo, costruisci sul cateto *AC* il quadrato *ACDE* e sul cateto *BC* il quadrato *BFLC*. Dai due vertici *E* e *F*, traccia i segmenti *EK* e *FT* perpendicolari alla retta che contiene *AB*.
Dimostra che $AB \cong EK + FT$. (Suggerimento. Disegna l'altezza *CH* relativa all'ipotenusa. Confronta i triangoli *AHC* e *KAE*, poi i triangoli *HBC* e *BTF*.)

▶ *Caso particolare*: se il triangolo *ABC* è anche isoscele, come sono fra loro *EK* e *FT*? E i segmenti *TB* e *AK*?

146 Nel quadrato *ABCD* indica con *M*, *N*, *E* e *F* i punti medi dei lati. Dimostra che *MNEF* è un quadrato. Se *M*, *N*, *E* e *F* sono diversi dai punti medi dei lati, ma tali che $AM \cong BN \cong EC \cong DF$, si può ancora dire che *MNEF* è un quadrato?

147 Disegna un quadrato $ABCD$ e prolunga AB di un segmento BE, BC di un segmento CF, CD di un segmento DG, DA di un segmento AH, tutti congruenti fra loro. Dimostra che $EFGH$ è un quadrato.

148 Disegna un quadrato $ABCD$. A partire dai vertici opposti A e C, traccia su ogni coppia di lati consecutivi i segmenti AE (su AB), AH, CF (su BC) e CG, fra loro congruenti. Dimostra che $EFGH$ è un rettangolo.

149 Nel quadrato $ABCD$, per il vertice B traccia una retta r esterna al quadrato, e per il vertice opposto D traccia la retta s parallela a r. Proietta gli altri due vertici A e C sulle rette r e s. Indica con E e F le proiezioni sulla retta r di A e di C, con L e H le proiezioni degli stessi punti sulla retta s.
Dimostra che:
a) $EFHL$ è un quadrato;
b) le diagonali dei due quadrati si incontrano nello stesso punto O.

150 Con riferimento alla figura dell'esercizio precedente, dai vertici A e C scegli su ogni lato del quadrato altri quattro segmenti AE', AH', CF' e CG', fra loro congruenti.
Dimostra che $HE + EF \cong H'E' + E'F'$.
(Suggerimento. Traccia la diagonale AC.)

Nel sito: ▶ **8 esercizi di recupero su parallelogrammi, rettangoli, rombi, quadrati**

9. Il trapezio

Teoria a pag. G112

RIFLETTI SULLA TEORIA

151 **VERO O FALSO?**

a) Un trapezio non può mai avere un solo angolo retto. V F
b) Nel trapezio isoscele le diagonali sono bisettrici degli angoli interni. V F
c) Un parallelogramma è anche un trapezio. V F
d) In un trapezio gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo sono complementari. V F

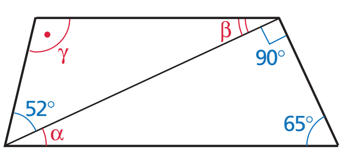
ESERCIZI

Nel sito: ▶ **6 esercizi di recupero**

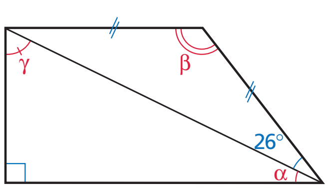
Proprietà geometriche e misure

Utilizza le informazioni sui trapezi delle figure per determinare le misure delle ampiezze degli angoli indicati in rosso.

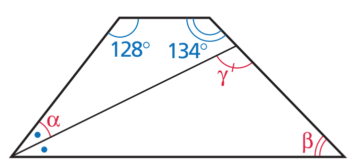
152



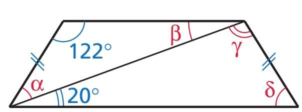
153



154



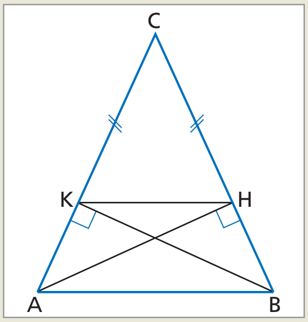
155



Dimostrazioni

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

156 Disegna il triangolo isoscele ABC di base AB e le altezze AH e BK. Dimostra che $ABHK$ è un trapezio isoscele.



Ipotesi 1. ABC è un ....;
2. $AH \perp BC$ e $BK \perp AC$.

Tesi $ABHK$ è ....

Dimostrazione

- *Dimostra la congruenza dei triangoli ABH e ABK.*
  ABH e ABK sono triangoli .... e hanno:
  $C\hat{A}B \cong C\hat{B}A$ perché ....;
  AB in ....
  Quindi $ABH \cong ABK$ per .... In particolare, $AK \cong$ ....
- *Dimostra che CKH è isoscele.*
  $CK \cong CH$ perché ...., *quindi* CKH è ....
- *Dimostra che* $C\hat{K}H \cong C\hat{A}B$ *e* $KH \parallel AB$.
  KCH e ACB sono triangoli .... aventi lo stesso angolo al vertice $\hat{C}$, *quindi* $C\hat{K}H \cong C\hat{H}K \cong C\hat{A}B \cong$
  $\cong$ ..., perché ....
  $C\hat{K}H \cong$ ... sono angoli .... delle rette KH e ..., tagliate dalla trasversale ..., *quindi* KH è parallela a ... .
- *Dimostra la tesi.*
  $AB \parallel KH$, *perciò* $ABHK$ è un .... e, essendo $AK \cong$ ..., il .... è ....

157 Dimostra che le diagonali di un trapezio isoscele sono congruenti.

158 Dimostra che in un trapezio isoscele le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore sono congruenti.

159 Considera i triangoli isosceli ABC e ADE, di vertice A. Dimostra che se BC è parallelo a DE, allora $BCDE$ è un trapezio isoscele.
▶ *Caso particolare*: se $BC \cong DE$, di che natura è il quadrilatero $BCDE$?

160 In un trapezio $ABCD$, le diagonali AC e BD, incontrandosi nel punto O, formano i triangoli isosceli ABO e CDO. Dimostra che il trapezio è isoscele.

161 Dimostra che due trapezi sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti le basi, l'altezza e una diagonale. (Suggerimento. Dimostra che i trapezi hanno ordinatamente congruenti tutti i lati e tutti gli angoli.)

162 Dimostra che due trapezi sono congruenti se hanno i lati ordinatamente congruenti.
(Suggerimento. Devi dimostrare che i trapezi hanno anche tutti gli angoli ordinatamente congruenti. In ogni trapezio, da un estremo corrispondente della base minore traccia una retta parallela a uno dei lati obliqui: ottieni un triangolo e un parallelogramma... .)

163 Disegna un trapezio isoscele con i lati obliqui congruenti alla base minore.
Dimostra che le diagonali sono bisettrici degli angoli adiacenti alla base maggiore.

164 Disegna un trapezio isoscele $ABCD$ e le due diagonali AC e BD, che si incontrano nel punto O. Dimostra che $AO \cong OB$ e $OC \cong OD$.

165 Dimostra che due trapezi sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti le due basi, un angolo adiacente alla base maggiore e il lato obliquo adiacente all'angolo.
(Suggerimento. Traccia le altezze dagli estremi della base minore.)

166 Le diagonali di un trapezio isoscele lo scompongono in quattro triangoli.
Dimostra che solo due dei quattro triangoli sono congruenti, mentre gli altri due, pur essendo diversi, hanno gli angoli congruenti e sono isosceli.

167 Dimostra che, se un trapezio ha le diagonali congruenti, è isoscele. (Suggerimento. Se la base minore è CD, traccia le altezze CH e DK e considera i triangoli CHA e DKB...)

168 Nel parallelogramma $ABCD$, traccia le diagonali e chiama O il loro punto di intersezione. Traccia per O una retta qualunque, che intersechi il lato AB nel punto E e il lato CD nel punto F.
Dimostra che i trapezi $AEFD$ ed $EBCF$ sono congruenti.
▶ *Caso particolare*: se $ABCD$ è un quadrato, di che tipo sono i due trapezi?

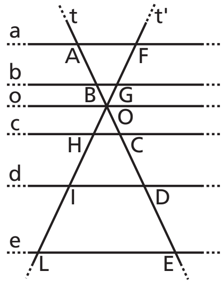
10. Le corrispondenze in un fascio di rette parallele

Teoria a pag. G114

RIFLETTI SULLA TEORIA

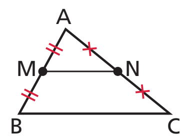
169 **TEST** La figura rappresenta il fascio di rette parallele a, b, o, c, d, e tagliate dalle trasversali t e t'.
Sono corrispondenti i seguenti segmenti:

A CE e HL.
B BG e HC.
C LE e ID.
D IL e LE.
E AO e OE.



170 **TEST** Nel triangolo ABC, il punto M è medio del lato AB e il punto N del lato AC:
Possiamo dire che:

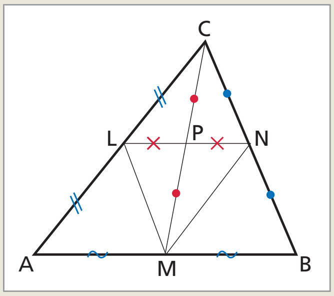
A $MN \cong AM$.
B $MN \cong AN$.
C $BC \cong AM + MN$.
D $BC \cong 2MN$.
E $BC \cong AN + MN$.



ESERCIZI

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

171 Considera il triangolo ABC e la sua mediana CM. L e N sono i punti medi rispettivamente di AC e CB. Traccia i segmenti LN, ML e MN. Dimostra che il punto P di intersezione fra i segmenti CM e LN è punto medio sia di CM sia di LN.
▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è isoscele, di che natura è il parallelogramma $MNCL$?



Ipotesi 1. CM è .... ;
2. L è punto .... di ......;
3. ...... è punto .... di ....

Tesi $PC \cong$ ...... e ...... $\cong PN$.

Dimostrazione

- *Dimostra che il quadrilatero LMNC è un parallelogramma.*
  MN // ......, perché M e .... sono i punti ...... dei lati AB e ...... del triangolo ABC;
  ...... // CN, perché ...... e ...... sono i punti ...... dei lati ...... e ...... di ....
  Quindi $LMNC$ è un ....
- *Dimostra la tesi.*
  In un .... le diagonali ....
  quindi ...... $\cong PM$ e ...... $\cong$ ....

▶ *Caso particolare*
Poiché CM è anche .... dell'angolo $A\hat{C}B$, allora il parallelogramma $MNCL$ è un ....

172 Nel parallelogramma $ABCD$, detto O il punto di intersezione delle diagonali, indica con E, F, G, H i punti medi dei segmenti OA, OB, OC, OD.
Dimostra che $EFGH$ è un parallelogramma.

173 Dimostra che, congiungendo i punti medi dei lati di un quadrilatero qualunque, si ottiene un parallelogramma. In quale caso il parallelogramma è un rettangolo? In quale un rombo? In quale un quadrato?

174 Nel rettangolo $ABCD$, indica con E, F, G, H i punti medi dei lati.
Dimostra che $EFGH$ è un rombo.

175 Nel trapezio $ABCD$, indica con E e F i punti medi dei lati obliqui.
Dimostra che EF dimezza anche le diagonali del trapezio.

176 Disegna un trapezio $ABCD$ e le sue diagonali AC e BD; indica, rispettivamente con M e con N, i punti medi di AC e BD.
Dimostra che il segmento MN è congruente alla semidifferenza delle basi.

177 Nel trapezio $ABCD$, rettangolo in A e in D, la base maggiore AB è il doppio della base minore CD e il lato AD è congruente alla base minore.
Traccia l'altezza CH e la diagonale BD, che si incontrano nel punto N. Disegna inoltre il segmento DH e la diagonale AC, che si incontrano nel punto M. Traccia il segmento MN. Dimostra che:
a) N è punto medio sia di CH sia di BD;
b) M è punto medio sia di DH sia di AC;
c) MN è parallelo a CD ed è congruente alla metà di CD.
Se AD fosse diverso dalla base minore, potresti ugualmente dimostrare le tesi richieste?

178 Nel triangolo ABC, rettangolo in A, il cateto AC è metà dell'ipotenusa BC. Sull'ipotenusa, esternamente al triangolo, disegna il triangolo equilatero BEC. Prolunga i lati EC e BA finché si incontrano in F. Dimostra che:
a) $ABEC$ è un trapezio;
b) A è punto medio di FB.

179 Disegna un triangolo ABC e traccia la mediana BP. Sia M il suo punto medio.
Dimostra che la retta AM divide il lato BC in due parti di cui una è la metà dell'altra. (Suggerimento. Traccia per P la parallela ad AM.)

RIEPILOGO I PARALLELOGRAMMI E I TRAPEZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

180 **TEST** Una sola fra le seguenti affermazioni è *falsa*. Quale?

A «Le diagonali di un quadrilatero si tagliano scambievolmente a metà» è condizione sufficiente affinché il quadrilatero sia un parallelogramma.

B «Gli angoli opposti di un quadrilatero sono congruenti» è condizione sufficiente affinché il quadrilatero sia un parallelogramma.

C «Le diagonali sono congruenti» è condizione necessaria affinché un parallelogramma sia un rettangolo.

D «Le diagonali sono perpendicolari» è condizione necessaria affinché un parallelogramma sia un rombo.

E «Gli angoli adiacenti a uno stesso lato sono supplementari» è condizione sufficiente affinché un quadrilatero sia un parallelogramma.

181 TEST Una sola fra le seguenti affermazioni è *falsa*. Quale?

A Un parallelogramma ha i lati a due a due congruenti.
B Puoi considerare un parallelogramma come la parte di piano comune a due strisce.
C Due lati consecutivi di un rettangolo sono perpendicolari.
D Il punto d'incontro delle diagonali di un rettangolo è equidistante dai lati.
E Il quadrato è un rombo con le diagonali congruenti.

182 TEST Le rette condotte dal punto d'incontro delle diagonali di un rettangolo, e perpendicolari ai lati del rettangolo, *non* individuano con i lati del rettangolo stesso:

A quattro rettangoli congruenti.
B segmenti congruenti ai lati del rettangolo.
C i vertici di un quadrato.
D le diagonali di un rombo.
E i punti medi dei lati del rettangolo.

183 Di fianco a ognuna delle seguenti condizioni indica se è una condizione necessaria e non sufficiente (CN), sufficiente e non necessaria (CS), o necessaria e sufficiente (CNS) affinché un quadrilatero sia la figura indicata.

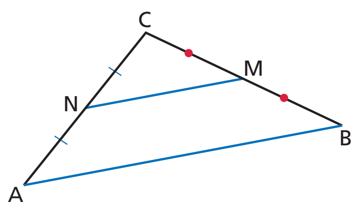
a) I lati siano congruenti; quadrato.
b) Gli angoli siano congruenti; rettangolo.
c) Le diagonali siano perpendicolari; rombo.
d) Le diagonali siano congruenti; rettangolo.
e) Le diagonali siano congruenti e perpendicolari; quadrato.
f) Una diagonale formi due triangoli isosceli; rombo.

184 VERO O FALSO?

Se A, P, Q, R, S, T sono rispettivamente l'insieme dei quadrilateri, parallelogrammi, quadrati, rettangoli, rombi, trapezi, allora:

a) $T \cup P = P$ V F
b) $Q \cap R = Q$ V F
c) $R \cap S = Q$ V F
d) $P \cup R = P$ V F
e) $Q \subset S$ V F
f) $A \cup T = T$ V F
g) $S \subset Q$ V F
h) $R \cup S = P$ V F
i) $A \cap Q = Q$ V F

185 Enuncia il teorema espresso dalla seguente figura e dalle relative ipotesi e tesi.



Ipotesi
1. $AN \cong NC$;
2. $AB \parallel MN$.

Tesi
$CM \cong MB$.

186 Ritaglia un pezzo di carta a forma di trapezio isoscele, avente i lati obliqui congruenti alla base maggiore, e poi piegalo in due lungo una qualsiasi delle sue diagonali. Vedrai che la base minore si trova sulla stessa linea di uno dei lati obliqui. Perché? Dimostralo per via geometrica.

187 Due parallelogrammi $ABCD$ e $DCEF$ hanno il lato CD in comune. Considerando i diversi casi possibili, dimostra che, congiungendo i vertici non comuni, badando che non risulti una figura intrecciata, si ottiene ancora un parallelogramma.

▶ *Caso particolare*: se i parallelogrammi $ABCD$ e $DCEF$ sono due quadrati, di che natura è il parallelogramma $ABEF$?

188 Dimostra che un parallelogramma che ha congruenti le due altezze relative alle coppie di lati opposti paralleli è un rombo.

189 Nel parallelogramma $ABCD$, prolunga la diagonale BD da entrambe le parti di due segmenti congruenti BE e DF.
Dimostra che $AECF$ è un parallelogramma.

▶ *Caso particolare*: se $ABCD$ è un rombo, come sono i segmenti AF e AE?

190 Dimostra che se due parallelogrammi hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo fra essi compreso, allora sono congruenti. (Suggerimento. Dimostra che i parallelogrammi hanno ordinatamente congruenti tutti i lati e tutti gli angoli.)

191 Sui cateti di un triangolo rettangolo, disegna i quadrati esterni a esso.
Dimostra che due diagonali dei quadrati sono parallele e due sono segmenti adiacenti.

192 Dimostra che i punti medi dei lati di un rettangolo sono i vertici di un rombo.

193 Dimostra che due parallelogrammi che hanno ordinatamente congruenti le diagonali e uno degli angoli che esse individuano intersecandosi sono congruenti.

194 Dimostra che due parallelogrammi che hanno ordinatamente congruenti una diagonale e gli angoli che essa forma con due lati consecutivi sono congruenti.

195 Dimostra che due quadrilateri che hanno i lati e un angolo ordinatamente congruenti sono congruenti.

196 Dimostra che due quadrilateri che hanno congruenti tre lati e i due angoli compresi tra loro sono congruenti.
Che quadrilateri ottieni se i due angoli sono supplementari?

197 Nel trapezio isoscele $ABCD$, indica con M e N i punti medi delle basi, con E e F i punti medi dei lati.
Dimostra che $MENF$ è un rombo.

198 Nel trapezio $ABCD$, rettangolo in A e D, la base maggiore AB è il doppio della base minore CD.
Il lato BC è congruente alla base maggiore.
Traccia la diagonale AC e dimostra che il triangolo ABC è equilatero.

199 Disegna un parallelogramma $ABCD$ e un secondo parallelogramma, $EFMN$, inscritto nel primo, in modo che il vertice E stia sul lato AB, F su BC, M su CD e N su DA.
Dimostra che $AE \cong CM$ e $BF \cong DN$.

200 Nel quadrato $ABCD$, su ciascun lato costruisci, esternamente al quadrato, i triangoli equilateri ABP, BQC, CRD, DSA.
Dimostra che $PQRS$ è un quadrato.

201 Nel triangolo ABC traccia la mediana BM. Per il suo punto medio P conduci le parallele ai lati AB e BC, che incontrano AC in E e F.
Dimostra che M è il punto medio di EF.

202 Nel parallelogramma $ABCD$ prolunga il lato AB di un segmento $BM \cong BC$ e il lato AD di un segmento $DN \cong DC$.
Dimostra che i punti M, C, N sono allineati. (Suggerimento. Devi dimostrare che l'angolo $M\hat{C}N$ è un angolo piatto.)

203 Disegna un rombo $ABCD$ e le sue diagonali, che si incontrano nel punto O. Conduci da O i segmenti OH, OK, OP, OQ, perpendicolari ai lati del rombo.
Dimostra che:
a) $HKPQ$ è un rettangolo;
b) l'angolo $H\hat{O}K$ ha per bisettrice una diagonale del rombo e $K\hat{O}P$ ha per bisettrice l'altra diagonale.

204 Le bisettrici degli angoli opposti B e D di un parallelogramma intersecano la retta AD in E e la retta BC in F.
Dimostra che:
a) $BEDF$ è un parallelogramma;
b) AC e EF si tagliano scambievolmente a metà.
▶ *Caso particolare*: se $ABCD$ è un rombo, $BEDF$ non esiste. Perché?

205 Disegna un parallelogramma $ABCD$ in modo che il lato BC sia la metà della base AB. Indica con E il punto medio di AB. Dimostra che l'angolo $D\hat{E}C$ è retto. (Suggerimento. Indica con $\hat{x}$ l'angolo $B\hat{E}C$ e con $\hat{y}$ l'angolo $A\hat{E}D$, dimostra che $\hat{x} + \hat{y}$ è congruente a un angolo retto considerando i triangoli AED ed EBC... .)

206 Disegna un triangolo ABC, traccia l'altezza CH e indica con M, N, P i punti medi rispettivamente dei lati AB, BC, CA.
Dimostra che $HMNP$ è un trapezio isoscele.

207 Nel triangolo ABC traccia per il punto medio M del lato AB la parallela alla mediana AD. Essa incontra le rette dei lati AC e BC nei punti R e T.
Dimostra che $MR + MT \cong \frac{3}{2} AD$.

11. Rette, piani, poliedri

→ Teoria a pag. G119

RIFLETTI SULLA TEORIA

208 **VERO O FALSO?** (Per ogni affermazione traccia la figura relativa.)

a) Dato un punto P e una retta r non passante per P, nello spazio esistono infinite rette passanti per P e parallele a r. V F

b) Dato un punto P e un piano α che non lo contiene, esiste una sola retta passante per P, parallela al piano α. V F

c) Dato un piano α e un punto P fuori di esso, esiste una sola retta passante per P perpendicolare ad α. V F

d) Data una retta r perpendicolare al piano α nel punto P, ogni retta del piano passante per P è perpendicolare a r. V F

e) Dati due piani che si intersecano, per la loro intersezione passano infiniti piani. V F

f) Se due rette nello spazio non si intersecano, allora sono parallele. V F

g) Due rette parallele a uno stesso piano sono parallele. V F

h) Due rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele. V F

ESERCIZI

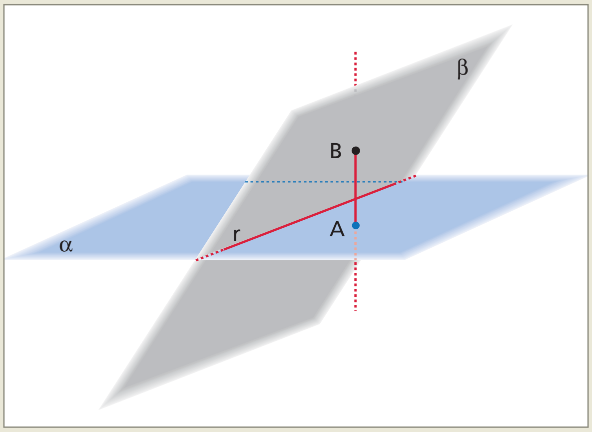
ESERCIZIO GUIDA

209 Siano α e β due piani incidenti e r la loro retta intersezione. Scelti sul piano α un punto A e sul piano β un punto B, non appartenenti a r, determiniamo la posizione della retta AB rispetto a r.

Dimostriamo che la retta AB e la retta r sono sghembe.

Ragioniamo per assurdo. Se le due rette non fossero sghembe, allora sarebbero complanari.

Supponiamo che AB e r appartengano a uno stesso piano: questo dovrebbe contenere r e i due punti A e B. Poiché $A \in \alpha$ e $B \in \beta$, i due piani α e β dovrebbero coincidere, contro l'ipotesi che α e β siano incidenti lungo una retta e quindi distinti. *Pertanto*, la retta AB è sghemba rispetto a r.



210 Dati due piani α e β incidenti nella retta r, da un punto P non appartenente ai piani conduci una retta parallela a r. Come è questa retta rispetto al piano α? E rispetto al piano β?

211 Dato un triangolo ABC, conduci per A la retta perpendicolare al piano di ABC e considera su di essa un punto P qualsiasi. Di che tipo sono i triangoli APC e APB?

212 Disegna un piano α e una retta r parallela ad α. Per r conduci un piano β che interseca α in una retta s. Dimostra che s è parallela a r. (Suggerimento. Ragiona per assurdo: se s non fosse parallela a r, avrebbe un punto in comune con r. Tale punto apparterrebbe non solo a r, ma anche al piano...)

213 Per un punto esterno a un piano disegna due rette parallele al piano. Dimostra che il piano individuato da tali rette è parallelo al piano dato. (Suggerimento. Utilizza l'esercizio precedente e ragiona per assurdo...)

214 Disegna due piani paralleli α e β e un piano γ che li intersechi entrambi, rispettivamente nelle rette a e b. Dimostra che a e b sono parallele.

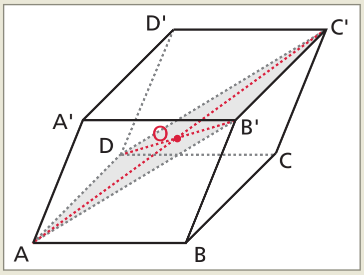
215 Su una retta r parallela a un piano α, considera due punti qualsiasi S e T. Conduci per S e per T due rette parallele s e t che intersechino α nei punti S' e T'. Dimostra che i segmenti ST e $S'T'$ sono congruenti.

216 Dati due piani paralleli α e β e due rette parallele r e s, che intersechino rispettivamente α nei punti R e S e β nei punti R' e S', dimostra che i segmenti RS e $R'S'$ sono congruenti.

Il prisma

DIMOSTRAZIONE GUIDATA

217 Dimostra che le diagonali di un parallelepipedo si incontrano in uno stesso punto che le divide a metà.



Ipotesi $ABCDA'B'C'D'$ parallelepipedo.

Tesi 1. Le diagonali si incontrano in O;
2. O divide a ...... le diagonali.

Dimostrazione

- *Dimostra che le diagonali AC' e DB' si dimezzano scambievolmente.*
  $ADC'B'$ è un .... perché ha i lati opposti .... quindi le sue diagonali AC' e .... si incontrano nel loro punto .... O.
- *Dimostra la tesi.*
  Analogamente anche $ABC'D'$ è un ...., quindi le sue diagonali AC' e ...... si incontrano nel loro punto ...., che, come nel caso precedente, è il punto ...... in quanto la diagonale AC' è in comune ai due .... e il punto medio di un segmento è unico.
  Anche $A'D'CB$ è un parallelogramma e le diagonali $A'C$ e $D'B$ si incontrano nel loro punto ...... O, in quanto la diagonale .... è in comune.

218 Date tre rette parallele nello spazio, non appartenenti allo stesso piano, disegna un prisma che abbia come spigoli tre segmenti appartenenti alle tre rette.

219 Disegna un parallelepipedo e un piano che incontra i quattro spigoli laterali del parallelepipedo. Dimostra che la sezione ottenuta (ossia la figura intersezione fra il solido e il piano) è un parallelogramma.

220 Dimostra che in un parallelepipedo retto le diagonali sono congruenti a due a due.

221 Dimostra che in un parallelepipedo rettangolo le diagonali sono congruenti.

222 Dimostra che, se un parallelepipedo ha le diagonali congruenti, allora è rettangolo.

LABORATORIO DI MATEMATICA

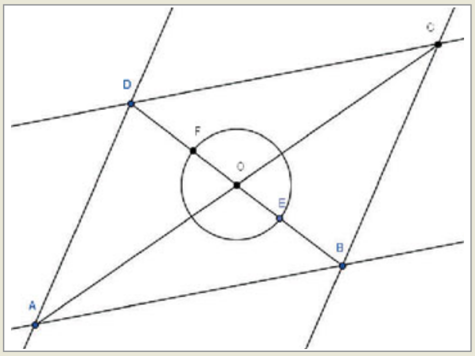
I parallelogrammi e i trapezi con GeoGebra

ESERCITAZIONE GUIDATA

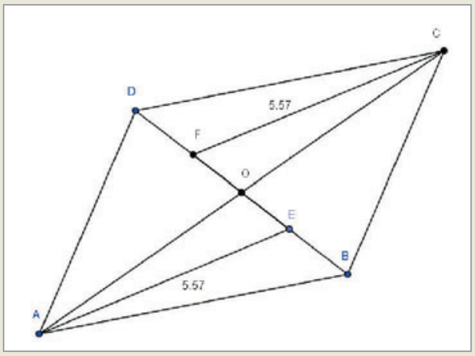
Verifichiamo una proprietà.

Disegniamo un parallelogramma $ABCD$ e le sue diagonali che si incontrano in O. Consideriamo i punti E e F (E su OB e F su OD) in modo che $OE \cong OF$. Verifichiamo che i segmenti AE e CF sono congruenti.

- Entriamo in ambiente GeoGebra e, dopo aver nascosto la finestra algebrica e gli assi cartesiani, realizziamo la figura 1:
  - disegniamo un parallelogramma generico;
  - segniamo i vertici e assegniamo loro i nomi A, B, C e D;
  - tracciamo i quattro lati sovrapposti alle quattro rette;
  - determiniamo il punto medio O del segmento BD;
  - tracciamo i segmenti OB e OD (che formano la diagonale BD) e il segmento AC (l'altra diagonale);
  - segniamo sul segmento OB un punto generico E;
  - ricaviamo il punto F su OD in modo che $OE \cong OF$.
- Dopo aver nascosto gli oggetti usati per la costruzione, congiungiamo A con E e C con F (figura 2) e mettiamo in evidenza le misure dei segmenti AE e CF, che vediamo coincidere.
- Spostiamo il punto E. Vediamo che scorre rimanendo sul segmento OB. Il punto F e i segmenti AE e FC, vincolati per la costruzione a E, si muovono e le misure si aggiornano, ma rimangono sempre uguali fra loro.



▲ **Figura 1**



▶ **Figura 2**

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata su perpendicolari e parallele con Cabri ▶ 17 esercitazioni in più
▶ 1 esercitazione guidata su parallelogrammi e trapezi con Cabri ▶ 19 esercitazioni in più

Esercitazioni

Verifica le seguenti proprietà anche mediante l'animazione della figura.

1 Disegna un quadrilatero, con i lati opposti congruenti, e verifica che hai ottenuto un parallelogramma.

2 Disegna un segmento AC e due rette parallele passanti per A e per C, indica con M il punto medio di AC, poi traccia una retta passante per M che interseca le rette per A e C rispettivamente nei punti B e D. Verifica che $ABCD$ è un parallelogramma.

3 Disegna un rettangolo, basandoti sulla sua definizione, e verifica che le sue diagonali risultano congruenti.

4 Disegna un rombo $ABCD$ e le sue diagonali, traccia per ogni vertice la parallela alla diagonale opposta. Le quattro rette si incontrano a due a due nei punti M, N, E, F. Verifica che $MNEF$ è un rettangolo.

Matematica per il cittadino

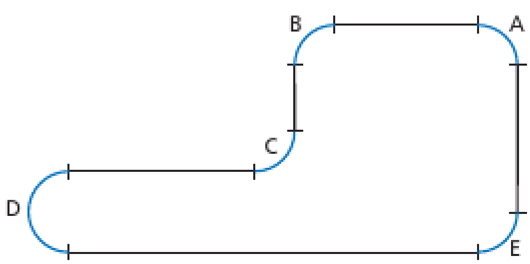
I BINARI

Nella soffitta della sua casa di campagna, Luca trova una scatola con alcuni binari, vari scambi ferroviari, diverse carrozze e il locomotore di un vecchio modellino di treno. Con il materiale trovato riesce a costruire un plastico su cui far correre il trenino.

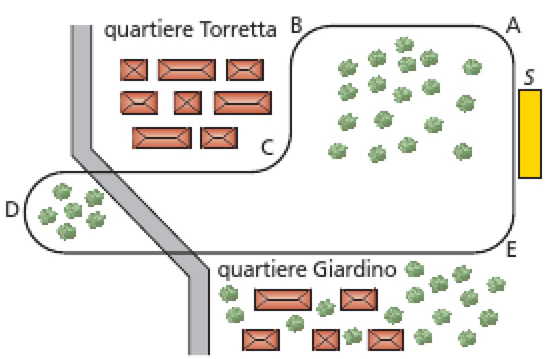
1. Ogni binario curvilineo è lungo 40 cm ed è $\frac{1}{12}$ di una circonferenza (ovvero, montando 12 binari curvilinei uno dopo l'altro, si può costruire un circuito a forma di circonferenza). Quanto vale l'angolo che si ottiene unendo gli estremi di un binario con il centro della circonferenza?

A 12° B 30° C 45° D 60°

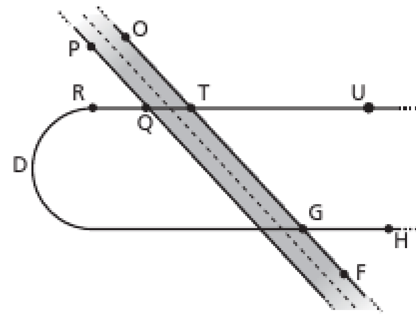
2. I binari curvilinei descritti sono 18. Luca li usa tutti, ottenendo un percorso che ha la forma rappresentata in figura. I tratti curvilinei sono indicati con le lettere *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Calcola per ogni tratto quanti binari sono stati impiegati.



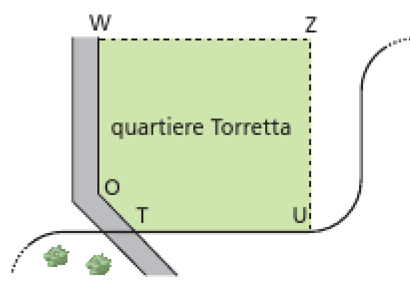
3. Luca si diverte a completare il plastico con una stazione *S* e con numerose case e alberi.



In particolare, la strada che collega le due zone residenziali taglia la ferrovia formando un angolo $P\hat{Q}R$ di 40°. Quanto valgono rispettivamente gli angoli $O\hat{T}U$ e $H\hat{G}F$?



4. Come appare nella figura, la pavimentazione del quartiere Torretta è stata ottenuta utilizzando un rettangolo di plastica adesiva verde, avente le dimensioni *WZ* e *ZU*.



Qual è l'ampiezza degli angoli del triangolo ottenuto come scarto?

A 90°, 30°, 60° C 90°, 40°, 40°

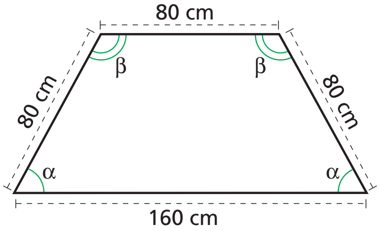
B 90°, 130°, 140° D 90°, 40°, 50°

Matematica per il cittadino

LAVORO D'EQUIPE

L'architetto di una ditta di arredi moderni per uffici deve progettare un modello di tavolo che si adatti alle esigenze di un ambiente di lavoro dinamico, soggetto a continue modifiche. Più tavoli, diversamente accostati, devono soddisfare differenti necessità: lavoro individuale e di gruppo, riunioni, conferenze.
Dopo aver a lungo ragionato, l'architetto propone un tavolo a forma di trapezio isoscele, avente la base minore e i lati obliqui lunghi 80 cm e la base maggiore lunga 160 cm. Valutando che la larghezza necessaria per una singola persona è di 80 cm, intorno al tavolo ci possono stare cinque persone.

1. Indica con α gli angoli adiacenti alla base maggiore e con β gli angoli adiacenti alla base minore, come mostrato in figura.



Quanto misurano gli angoli adiacenti alla base maggiore del tavolo? E quelli adiacenti alla base minore?

A $\alpha = 45°$; $\beta = 135°$.
B $\alpha = 67{,}5°$; $\beta = 112{,}5°$.
C $\alpha = 60°$; $\beta = 120°$.
D $\alpha = 30°$; $\beta = 150°$.

2. Per ottenere un tavolo molto lungo si possono accostare più tavoli con il lato obliquo in comune, alternando l'adiacenza di una base maggiore e di una base minore. La forma geometrica del tavolo risultante dalla composizione di più tavoli è sempre la medesima o dipende dal numero di tavoli utilizzati? Spiega e dimostra le tue affermazioni riguardo alla figura geometrica del tavolo ottenuto componendo più tavoli.

3. Al variare del numero dei tavoli accostati secondo le modalità del quesito 2, si ottiene un numero differente di sedute. Detto n il numero dei tavoli utilizzati, indica l'espressione che esprime il numero delle sedute.

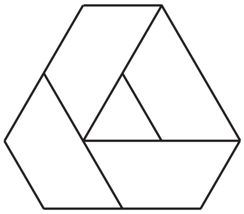
A $4n$ B $4n + 1$ C $3n + 1$ D $3n + 2$

4. Quale figura si ottiene componendo due tavoli con la base maggiore in comune? Quanto misurano i suoi angoli? E i suoi lati?

5. Se accosti due tavoli con il lato obliquo in comune in modo che le basi minori risultino consecutive, ti accorgi che continuando ad accostare tavoli in questo modo ottieni un grande tavolone «circolare».
Quanti tavoli sono necessari per «chiudere» la figura composta?

A 4
B 6
C 7
D 8

6. Nella composizione rappresentata in figura quante sedute si sono ottenute?



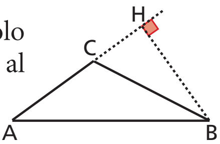
Prendendo come esempio questa composizione, proponine almeno un'altra di tipo «circolare», utilizzando un numero maggiore di tavoli, e conta le sedute che ottieni.

Verifiche di fine capitolo

TEST

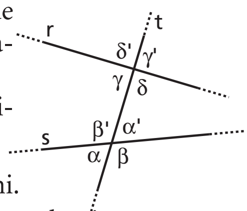
Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 20 test interattivi in più

1 Osserva la figura: nel triangolo ABC, BH è l'altezza relativa al lato AC.
Uno dei seguenti enunciati è *falso*. Quale?



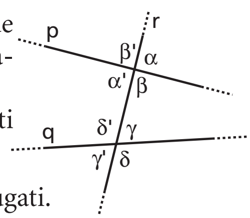
A H è la proiezione ortogonale di BH su AC.
B CH è la proiezione ortogonale di BH su AC.
C AH è la proiezione ortogonale di AB su AC.
D H è la proiezione ortogonale di B su AC.
E CH è la proiezione ortogonale di BC su AC.

2 La figura rappresenta due rette *non* parallele r e s tagliate da una trasversale t.
Una delle seguenti proposizioni è *falsa*. Quale?



A α e γ' sono angoli alterni.
B α e γ sono angoli corrispondenti.
C α e α' sono angoli opposti al vertice.
D β' e γ sono angoli coniugati.
E α' e δ' sono angoli alterni.

3 La figura rappresenta due rette *non* parallele p e q tagliate da una trasversale r.
Quale dei seguenti enunciati è *vero*?

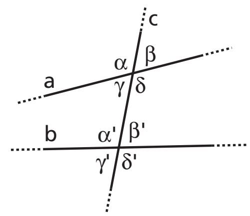


A α' e β sono angoli coniugati.
B δ' e δ sono angoli alterni.
C δ' e α sono angoli alterni.
D β' e γ' sono angoli coniugati.
E β' e γ sono angoli corrispondenti.

4 La somma degli angoli interni di un poligono convesso con 5 lati è congruente a:

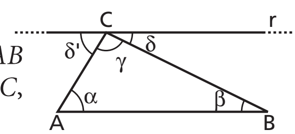
A $5\widehat{P}$.
B $10\widehat{P}$.
C $3\widehat{P}$.
D $2\widehat{P}$.
E $\widehat{P}$.

5 La figura rappresenta due rette *non* parallele a e b tagliate da una trasversale c.
Quale delle seguenti relazioni è *falsa*?



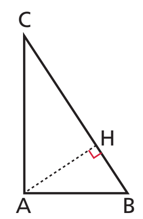
A $\beta' + \delta \cong \widehat{P}$
B $\alpha' + \beta' \cong \widehat{P}$
C $\alpha' \cong \delta'$
D $\beta \cong \gamma$
E $\alpha + \gamma \cong \beta' + \delta'$

6 Se la retta r in figura è la parallela al lato AB condotta per il vertice C, allora:



A $\delta' \cong \alpha + \beta$.
B $\delta \cong \alpha$.
C δ è supplementare di γ.
D $\delta \cong \beta$.
E δ è supplementare di δ'.

7 Nella figura il triangolo ABC è rettangolo in $\widehat{A}$. Se AH è l'altezza relativa all'ipotenusa BC, come sono gli angoli $H\widehat{A}B$ e $A\widehat{C}H$?



A Congruenti.
B Complementari.
C $H\widehat{A}B > A\widehat{C}H$.
D $H\widehat{A}B < A\widehat{C}H$.
E $H\widehat{A}B \cong A\widehat{C}H + C\widehat{H}A$.

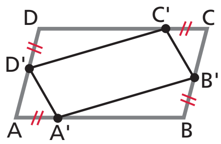
8 Una delle seguenti proposizioni è *falsa*. Quale?
Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti:

A l'ipotenusa e un cateto.
B i due cateti.
C l'ipotenusa e l'angolo retto.
D un cateto e un angolo acuto.
E l'ipotenusa e un angolo acuto.

9 $ABCD$ è un parallelogramma, e valgono le seguenti relazioni:

$AA' \cong BB' \cong CC' \cong DD'$.

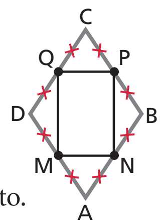
Il quadrilatero $A'B'C'D'$ è:



A un rombo.
B un rettangolo.
C un quadrato.
D un parallelogramma.
E nessuna delle figure precedenti.

10 M, N, P, Q sono i punti medi dei lati del rombo $ABCD$.

Il quadrilatero $MNPQ$ è:



A un quadrato.
B un rombo ma non un quadrato.
C un parallelogramma ma non un rettangolo.
D un rombo o un quadrato.
E un rettangolo.

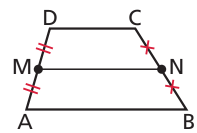
11 Un quadrilatero convesso è un rombo se:

A ha le diagonali congruenti e soltanto due lati paralleli.
B ha le diagonali congruenti e due lati perpendicolari.
C ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti.
D ha due lati opposti paralleli e congruenti.
E ha i lati congruenti.

12 Le diagonali di un trapezio isoscele:

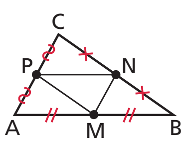
A si incontrano nel loro punto medio.
B sono sempre perpendicolari.
C sono congruenti.
D lo dividono in quattro triangoli congruenti.
E lo dividono in quattro triangoli isosceli.

13 Nella figura è rappresentato un trapezio. M e N sono i punti medi dei lati obliqui:
Possiamo affermare che:



A $MN \cong 2DC$.
B $MN \cong \frac{1}{2}AB$.
C $MN \cong 2AD$.
D $MN \cong 2BC$.
E $MN \cong \frac{AB + DC}{2}$.

14 Osserva la figura. I punti M, N e P sono i rispettivi punti medi dei lati AB, BC e AC del triangolo ABC.
Soltanto una delle seguenti coppie di relazioni è *vera*. Quale?



A $AMP \cong MNP$ e $MBN \ncong AMP$.
B $AMP \cong MBN$ e $MBN \cong PNC$.
C $MNP \cong MNB$ e $AMP \ncong PNC$.
D $PNC \cong MNP$ e $AMP \ncong PNC$.
E $AMP \cong MNB$ e $MNP \ncong PNC$.

SPIEGA PERCHÉ

15 I segmenti AB e CD hanno per asse la stessa retta r; come risultano tali segmenti? Perché?

16 Due triangoli, aventi congruenti due lati e un angolo non compreso fra essi, sono congruenti solo se sono rettangoli. È vera questa affermazione? Motiva la tua risposta.

17 Due rette parallele, tagliate da una trasversale, formano angoli di due sole ampiezze. Perché?

18 Perché in un triangolo equilatero ogni angolo esterno è il doppio dell'angolo interno a esso adiacente?

19 Quanto vale la somma degli angoli interni di un esagono? E di un poligono con $m + 2$ lati?

20 È vera la seguente affermazione? «Condizione sufficiente affinché due rette siano parallele è che formino con una trasversale angoli corrispondenti supplementari». Se invece due rette sono parallele e formano con una trasversale angoli corrispondenti supplementari, qual è la posizione della trasversale rispetto alle due rette?

21 La distanza fra due rette parallele è univocamente determinata? Perché?

22 Perché la proiezione di un segmento su una retta è minore o uguale al segmento dato?

23 La relazione di parallelismo fra rette è simmetrica, transitiva e riflessiva? Come dovrebbe essere la definizione di rette parallele, affinché la relazione di parallelismo non fosse riflessiva?

24 Se una diagonale di un quadrilatero lo divide in due triangoli congruenti, allora il quadrilatero è un parallelogramma? Motiva la risposta.

25 Due triangoli isosceli e congruenti, ma non sovrapposti, aventi la base in comune, formano un rombo? Perché?

26 Avere gli angoli adiacenti a ciascun lato supplementari è condizione sufficiente affinché un quadrilatero sia un parallelogramma? Giustifica la risposta. Perché il trapezio, pur avendo gli angoli adiacenti a ciascun lato obliquo supplementari, non è un parallelogramma?

27 A quali condizioni un rombo può essere un quadrato?

28 Avere le diagonali perpendicolari è condizione necessaria, sufficiente, oppure necessaria ma non sufficiente, affinché un quadrilatero sia un rombo? Giustifica la risposta.

29 Le altezze di un rombo sono congruenti. Perché?

30 Utilizza i diagrammi di Eulero-Venn per rappresentare l'insieme dei quadrilateri e tutti i suoi sottoinsiemi, tenendo conto in particolare del sottoinsieme dei parallelogrammi e di quello dei trapezi.

31 Considera l'enunciato del seguente teorema: «Se dagli estremi di una diagonale di un rettangolo conduci le perpendicolari all'altra diagonale, questa viene divisa in tre parti di cui le estreme sono congruenti fra loro». Qual è l'ipotesi del teorema? Qual è la tesi? Il teorema è ancora valido se il quadrilatero è un generico parallelogramma? E se è un rombo?

32 Per affermare che un parallelogramma è un rombo, è sufficiente dire che un angolo è diviso a metà dalla diagonale che passa per il suo vertice? Giustifica la risposta.

33 Di che natura è il triangolo che ottieni prolungando i lati obliqui di un trapezio isoscele? Come dev'essere un trapezio affinché il triangolo sia equilatero?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

34 In un triangolo, un angolo esterno è congruente alla somma dell'angolo interno, a esso adiacente, con un altro angolo interno.
Dimostra che si tratta di un triangolo isoscele.

35 Disegna un triangolo isoscele ABC sulla base BC e sul lato AB segna un punto P. Traccia la retta passante per P, parallela alla bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$ e indica con M e N le intersezioni di detta parallela con le rette dei lati AC e BC.
Dimostra che $CM \cong CN$.

36 Sulla bisettrice Oc dell'angolo acuto $a\hat{O}b$ scegli un punto P e costruisci l'asse del segmento OP, che interseca la semiretta Ob nel punto Q.
Dimostra che PQ è parallelo alla semiretta a.

37 Disegna un triangolo ABC, isoscele sulla base AB; traccia le altezze AH e BK relative ai due lati congruenti e indica con E il loro punto di intersezione.
Dimostra che la retta CE è l'asse del segmento AB.

▶ *Caso particolare*: se il triangolo ABC è equilatero, che relazione sussiste fra i segmenti CE e KE?

38 In un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, traccia l'altezza AK e prolunga il lato AB dalla parte di A di un segmento $AD \cong AC$. Dimostra che l'altezza AH del triangolo ACD è parallela a BC e che il triangolo AHC è congruente al triangolo ABK.

39 In un triangolo ABC, rettangolo in $\hat{A}$, traccia la bisettrice dell'angolo in C, che interseca il cateto AB nel punto D. Dal punto D conduci la perpendicolare DE all'ipotenusa BC. Dimostra che CD è perpendicolare ad AE.

40 Nel triangolo ABC l'angolo $\hat{B}$ è doppio di $\hat{A}$. Considera un punto qualsiasi P del lato AB e prolunga CB di un segmento $BQ \cong BP$. Traccia la retta QP, che interseca CA in R. Dimostra che il triangolo ARP è isoscele e che $C\hat{R}P \cong C\hat{B}P$.

41 Dato un triangolo ABC rettangolo in A, considera sull'ipotenusa BC un segmento $CD \cong CA$ e un segmento $BE \cong AB$. Dimostra che $E\hat{A}D$ è metà di un angolo retto.

42 Disegna un triangolo ABC rettangolo in A e dal punto medio N del cateto AC traccia la parallela ad AB che incontra CB in Q. Da Q traccia la parallela ad AC che incontra AB in M. Dimostra che:
a) ABQ e ACQ sono triangoli isosceli;
b) $N\hat{Q}M$ è retto.

43 Nel triangolo acutangolo ABC considera un punto qualsiasi E della base AB. Sia M il punto medio di AE e sia N il punto medio di EB. Traccia per M e per N le perpendicolari al lato AB che incontrino rispettivamente le rette AC e CB nei punti R e S. Dimostra che $R\hat{E}S \cong A\hat{C}B$.

44 Dal punto medio M dell'ipotenusa AB di un triangolo rettangolo isoscele ABC, traccia le perpendicolari MH e MK rispettivamente ai cateti AC e CB. Dimostra che il quadrilatero $CHMK$ è un quadrato.

45 Disegna un rettangolo $ABCD$ e considera un punto E sulla diagonale AC. Conduci per E le parallele ai lati.
Dimostra che il rettangolo viene suddiviso in quattro rettangoli e che la somma dei loro perimetri non dipende dalla posizione di E sulla diagonale.

46 In un parallelogramma $ABCD$, le altezze relative alla base AB e al lato BC sono anche mediane.
Dimostra che il parallelogramma è un rombo.

47 Nel parallelogramma $ABCD$ traccia la diagonale AC, poi indica con F il punto medio del lato AD e con E il punto medio del lato BC. Congiungi B con F e D con E.
Dimostra che BF e DE tagliano la diagonale AC in tre parti congruenti.

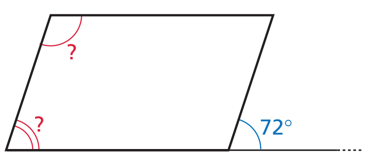
48 Nel triangolo ABC traccia la mediana CM. Dal punto M conduci le parallele ai lati AC e CB.
Dimostra che i quattro triangoli che si vengono a formare nel triangolo ABC sono congruenti a due a due.

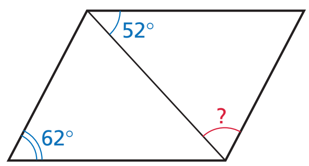
49 Nel parallelogramma $ABCD$ considera le proiezioni H e K, rispettivamente dei vertici A e C, sulla diagonale BD.
Dimostra che $AH \cong CK$.

50 Nel parallelogramma $ABCD$ indica con O il punto di intersezione delle due diagonali. Traccia per O una retta r che incontri il lato AB in E e il lato CD in G. Sempre per O, traccia una retta s che incontri il lato BC in F e il lato AD in H.
Dimostra che $EFGH$ è un parallelogramma.
▶ *Caso particolare*: se $ABCD$ è un rettangolo e le rette r e s sono parallele ai lati, di che natura è il parallelogramma $EFGH$?

51 Dimostra che le bisettrici degli angoli di un rettangolo formano un quadrato.

Nei seguenti parallelogrammi determina gli angoli indicati.

52


53


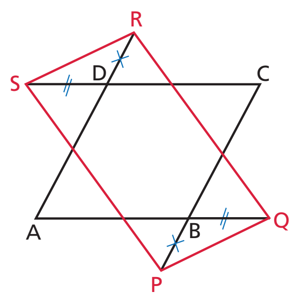
54 Disegna il triangolo ABC e traccia l'altezza BH relativa al lato AC. Siano M e N i punti medi dei lati AB e BC.
Dimostra che il triangolo MBN è congruente al triangolo MHN.

55 Nel triangolo ABC, AH e BK sono le altezze relative ai lati BC e AC. Sia M il punto medio di AB. Dimostra che MHK è isoscele.

56 Disegna un trapezio $ABCD$ con la base maggiore AB doppia della minore CD. Traccia la congiungente i punti medi dei lati obliqui AD e BC.
Dimostra che tale congiungente è divisa in tre segmenti congruenti dalle diagonali del trapezio.

57 Disegna un triangolo equilatero e dividi ciascun lato in tre segmenti congruenti. Congiungi tre punti, ciascuno su un lato diverso, che occupino lo stesso posto.
Dimostra che il triangolo ottenuto è equilatero e che i suoi lati sono perpendicolari a quelli del triangolo equilatero di partenza.

58 Dimostra il teorema illustrato nella figura.



Ipotesi 1. $ABCD$ è un parallelogramma;
2. $DR \cong BP$;
3. $DS \cong BQ$.

Tesi $PQRS$ è un parallelogramma.

59 Disegna un angolo convesso $\hat{A}$ e la sua bisettrice, sulla quale fissi un punto O. Traccia per O la retta perpendicolare alla bisettrice, indicando con B e D i punti in cui tale perpendicolare interseca i lati dell'angolo. Per il punto B conduci la parallela ad AD e per D la parallela ad AB; queste si incontrano nel punto C.
Dimostra che:
a) i punti A, O, C sono allineati;
b) $ABCD$ è un rombo.

60 Nel quadrilatero $ABCD$, traccia le bisettrici degli angoli interni $\hat{D}$ e $\hat{C}$ che s'incontrano in O. Dimostra che la somma delle metà degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ è congruente all'angolo $D\hat{O}C$.
(Suggerimento. Indica rispettivamente con α_1 e α_2, β_1 e β_2, γ_1 e γ_2, δ_1 e δ_2 le metà di $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$.)

61 Nel triangolo rettangolo ABC di ipotenusa AB traccia l'altezza CH. Prolunga AC di un segmento $CE \cong CB$ e BC di un segmento $CF \cong AC$. Prolunga HC e indica con K la sua intersezione con EF. Dimostra che nel triangolo CEF il segmento CK è la mediana relativa a EF.
(Suggerimento. Considera i triangoli ABC e CEF. CK divide il triangolo CEF in due triangoli isosceli.)

62 Disegna un triangolo ABC, isoscele sulla base BC e l'altezza CH relativa al lato AB. Scegli un punto M sulla base del triangolo e traccia il segmento MP, perpendicolare ad AB, e il segmento MQ, perpendicolare ad AC.
Dimostra che la somma di MP con MQ è congruente a CH.
▶ *Caso particolare*: se M è il punto medio di BC, che relazione sussiste fra i segmenti PM e CH?

63 Disegna un triangolo rettangolo di ipotenusa AB e altezza a essa relativa CH. Da H traccia il segmento HD perpendicolare ad AC e prolungalo di un segmento $DE \cong DH$. Da H traccia anche il segmento HF perpendicolare a BC e prolungalo di un segmento $FG \cong HF$.
Dimostra che:
a) i punti E, C e G e sono allineati;
b) EA è parallelo a BG.
Di che natura è il quadrilatero $DHFC$?
▶ *Caso particolare*: a quale frazione di $\hat{P}$ deve corrispondere l'angolo $A\hat{B}C$ affinché il quadrilatero $DHFC$ sia un quadrato? In quest'ultimo caso, come risulta il quadrilatero $EABG$? Dimostralo.

64 Nel triangolo ABC indica con M il punto medio di AB. Traccia per C una retta r, esterna al triangolo. Conduci dagli altri due vertici le perpendicolari AH e BK a r.
Dimostra che il triangolo HKM è isoscele. (Suggerimento. Traccia per M la retta s parallela a r.)

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 20 esercizi in più

65 Nel triangolo isoscele ABC prendi, sulla base AB, due punti P e Q. Traccia da P le parallele ad AC e a CB; esse intersecano rispettivamente CB in E e AC in F. Analogamente, conduci da Q le parallele ai lati; esse intersecano rispettivamente CB in R e AC in S. Dimostra che il perimetro di $PECF$ è uguale al perimetro di $QRCS$. La lunghezza del perimetro dei due quadrilateri dipende da come prendi P e Q? Motiva la risposta.

66 Nel triangolo ABC, di base AB, il lato BC è maggiore del lato AC. Traccia la bisettrice dell'angolo $\hat{C}$ e la perpendicolare al lato AB nel suo punto medio, e sia D il loro punto di intersezione. E è la proiezione di D sulla retta CA e F la proiezione di D su BC. Dimostra che $D\hat{B}F \cong D\hat{A}E$. Il risultato è ancora valido se il lato BC è minore del lato AC?

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 8 esercizi in più

67 TEST If $B\hat{A}D$ is an exterior angle of the triangle ABC, then:

I. $B\hat{A}D > B\hat{C}A$.

II. $B\hat{A}D > A\hat{B}C$.

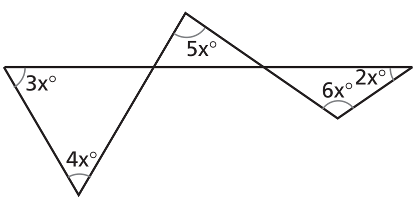
III. $B\hat{A}D = A\hat{B}C + B\hat{C}A$.

Which of the above statements is true?

A I only.
B II only.
C III only.
D II and III only.
E I, II and III.

(USA *Northern State University: 50th Annual Mathematics Contest*, 2003)

68 In the given diagram, what is the value of x?



(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge, COMC*, 2001)

[18]

69 Which of the following statements is not true?

A A rectangle is a parallelogram with four right angles.
B A rhombus is a parallelogram with four congruent sides.
C The diagonals of a rhombus are perpendicular.
D The diagonals of a rectangle are congruent.
E None of these statements.

(USA *Northern State University: 52nd Annual Mathematics Contest*, 2005)

70 Each angle of a rectangle is bisected. Let P, Q, R, and S be the points of intersection of the pairs of bisectors adjacent to the same side of the rectangle. Then $PQRS$ is a:

A rectangle.
B rhombus.
C parallelogram with unequal adjacent sides.
D quadrilateral with no special properties.
E square.

(USA *University of North Carolina: Western Region State Mathematics Finals*, 2003)

GLOSSARY

adjacent: adiacente	**exterior**: esterno	**side**: lato
bisected: diviso in due parti uguali	**rectangle**: rettangolo	**square**: quadrato
bisector: bisettrice	**rhombus**: rombo	**statement**: enunciato, frase
diagram: grafico, schema	**right**: retto	