Risolvi i seguenti integrali indefiniti

IMMEDIATI tempo previsto 5min

$\int \frac{4x+2}{x^2+x}\,dx$ 2 punti

$\int \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx$ 2 punti

SOSTITUZIONE tempo previsto 10min

$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ 4 punti

$\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x}}\,dx$ 4 punti

PER PARTI tempo previsto 10min

$\int 5x^4 \ln x\,dx$ 4 punti

$\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ 4 punti

FUNZIONI RAZIONALI tempo previsto 10 min

$\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx$ 4 punti

$\int \frac{x-1}{x^2+25}\,dx$ 4 punti

Completa lo studio della funzione $y=\frac{1}{\sqrt{\sin 2x}}$ nell'intervallo $]0;2\pi[$

tempo previsto 55 min 32 punti

SPOILER
ALERT!

Prenditi un'ora e mezza per provare a fare gli esercizi per capire quanto faresti nel tempo previsto.

Poi prenditi tutto il tempo che ti serve per provare a fare gli esercizi che mancano.

Quando hai terminato prosegui a leggere le soluzioni e valuta da solo quanto avresti preso se questa fosse stata la verifica.

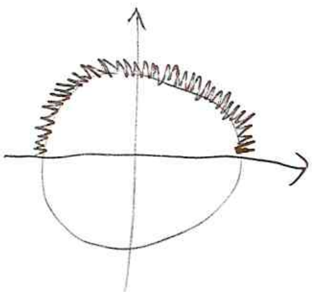
STUDIO DI FUNZIONE

Studia la funzione $y = \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}}$ nell'intervallo $]0; 2\pi[$

DOMINIO Le condizioni di esistenza sono

$$\begin{cases} \sqrt{\sin 2x} \neq 0 \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases}$$

che si possono riassumere con $\sin 2x > 0$



che ha soluzioni per $0 + 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi$

$$0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

che nell'intervallo d'interesse corrisponde al dominio $]0; \frac{\pi}{2}[\cup]\pi; \frac{3}{2}\pi[$

SIMMETRIE Data la asimmetria del dominio, non è possibile che la funzione sia pari o dispari.

La funzione è periodica con periodo π, infatti

$$\frac{1}{\sqrt{\sin(2(x+\pi))}} = \frac{1}{\sqrt{\sin(2x+2\pi)}} = \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}}$$

perché sin è periodica con periodo 2π.

INTERSEZIONI L'ascissa $x = 0$ non fa parte del dominio e non esistono intersezioni con l'asse orizzontale perché la frazione $\frac{1}{\sqrt{\sin 2x}}$ non può annullarsi

SEGNO La funzione è sempre positiva perché è una frazione il cui numeratore è costante e positivo e il cui denominatore $\sqrt{\sin 2x}$ a sua volta è sempre positivo per la definizione di radice quadrata.

LIMITI Nei seguenti limiti, i numeri in rosso sono da considerarsi come applicazioni sintetiche del teorema sull'algebra dei limiti

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin 0^+}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin \pi^-}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\pi^+}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^-} \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin 3\pi^-}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Ci sono dunque quattro asintoti verticali nelle ascisse $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

DERIVATA PRIMA La derivata è $y' = \left(\sin(2x)^{-\frac{1}{2}}\right)' =$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sin(2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos(2x) \cdot 2 = -\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin^3(2x)}}$$

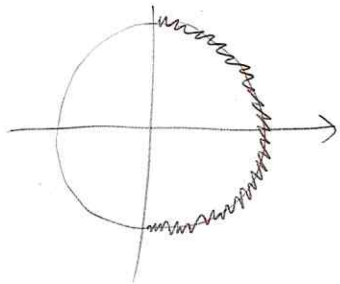
Dato che il denominatore è sempre positivo, la derivata è positiva se il numeratore è positivo

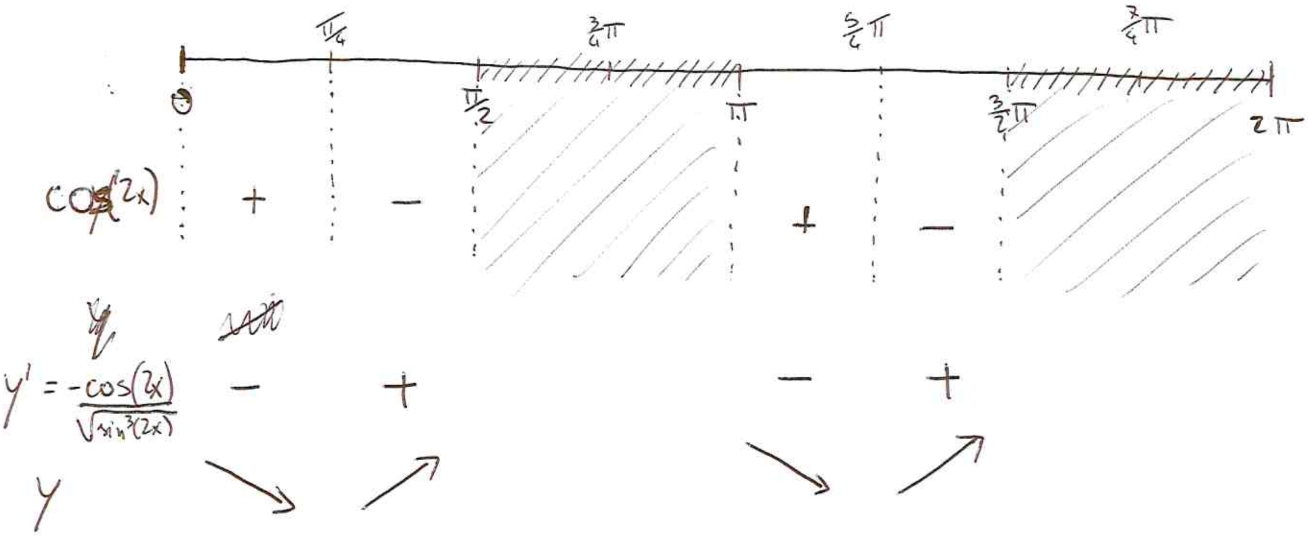
$$-\cos(2x) > 0$$

$$\cos(2x) < 0$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$$





La derivata prima si annulla nei punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5}{4}\pi$ che corrispondono a due minimi nei punti $\left(\frac{\pi}{4} ; 1\right)$ e $\left(\frac{5\pi}{4} ; 1\right)$ dato che

$$\frac{1}{\sqrt{\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

La funzione è derivabile su tutto il dominio, non ci sono quindi flessi verticali, cuspidi o punti angolosi

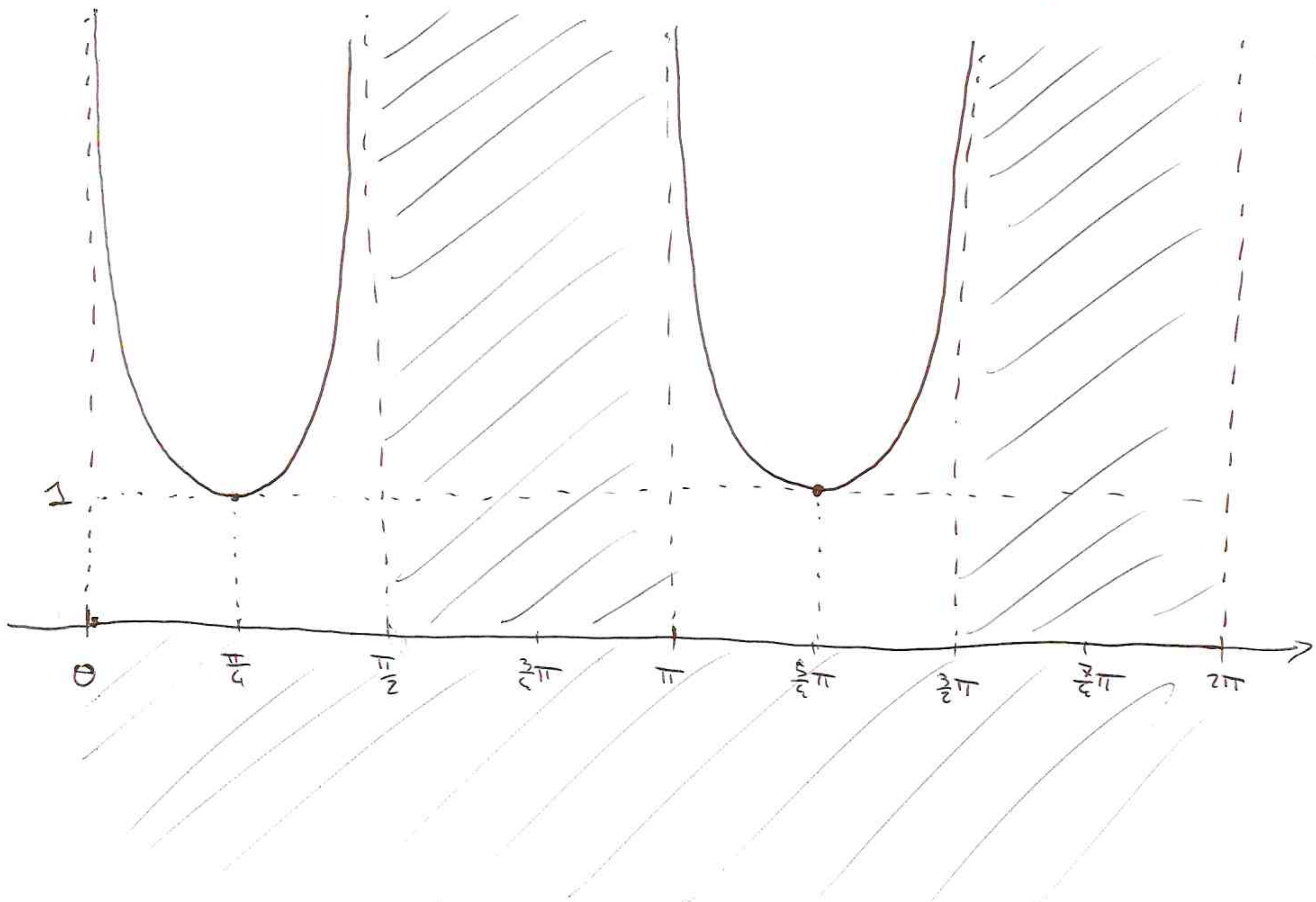
DERIVATA SECONDA Calcoliamo la derivata seconda

$$\left(-\frac{\cos(2x)}{(\sin 2x)^{3/2}}\right)' = -\cancel{\frac{-\sin(2x)\cdot 2 - \cos(2x)\cdot\frac{3}{2}(\sin 2x)^{1/2}(\cos 2x)\cdot 2}{(\sin 2x)^{3}}} =$$

$$= -\frac{-\sin(2x)\cdot 2\cdot(\sin(2x))^{3/2} - \cos(2x)\cdot\frac{3}{2}(\sin 2x)^{1/2}(\cos 2x)\cdot 2}{(\sin 2x)^{3}}$$

$$= \frac{2(\sin 2x)^{2} + 3(\cos 2x)^{2}(\sin 2x)^{1/2}}{(\sin 2x)^{3}}$$

Tenendo in considerazione che $\sin 2x > 0$ per quanto stabilito dalle condizioni di esistenza si mostra che la derivata seconda è sempre positiva.



INTEGRALI IMMEDIATI

$$\int \frac{4x+2}{x^2+x}\,dx = 2\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = 2\ln|x^2+x| + c$$

$$\int \frac{\cos x}{2-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1+1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \arctan(\sin x) + c$$

INTEGRALI PER SOSTITUZIONE

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \qquad \text{sostituzione } e^x = t$$

$$x = \ln(t)$$

$$= \int \frac{1}{t+\frac{1}{t}}\,\frac{1}{t}\,dt = \qquad dx = \frac{1}{t}\cdot dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t) + c = \arctan(e^x) + c$$

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x}}\,dx = \qquad \text{sostituzione } t = \sqrt{1-x}$$

$$t^2 = 1-x$$

$$\int \frac{1-t^2+3}{t}(-2t)\,dt = \qquad 1-t^2 = x$$

$$-2t\,dt = dx$$

$$\int -8 + 2t^2\,dt =$$

$$-8t + \frac{2}{3}t^3 + c = t\left(\frac{2}{3}t^2 - 8\right) + c = \sqrt{1-x}\left(\frac{2}{3}(1-x) - 8\right) + c =$$

$$= \sqrt{1-x}\left(\frac{2}{3} - 8 - \frac{2}{3}x\right) + c = \sqrt{1-x}\left(-\frac{22}{3} - \frac{2}{3}x\right) + c =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{1-x}\,(11+x) + c$$

INTEGRALI PER ~~SOSTITUZIONE~~ PARTI

$$\int \underset{g}{5x^4} \cdot \underset{F}{\ln x}\, dx = \underset{G}{x^5}\, \underset{F}{\ln x} - \int \underset{G}{x^5}\, \underset{f}{\frac{1}{x}}\, dx = x^5 \ln x - \int x^4\, dx$$

$$= x^5 \ln x - \frac{1}{5}x^5 + c$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = \int \underset{F}{2\sqrt{x}} \cdot \underset{g}{\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}}\, dx =$$

dato che

$$\left[e^{\sqrt{x}}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$= \underset{F}{2\sqrt{x}}\, \underset{G}{e^{\sqrt{x}}} - \int \underset{f}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\, \underset{G}{e^{\sqrt{x}}}\, dx = 2\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} - 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx =$$

$$= 2\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + c = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + c$$

INTEGRALI FUNZIONI RAZIONALI

$$\int \frac{x^2+1}{x+1}\, dx =$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 1 & x+1 \\ \hline -(x^2 + x) & x - 1 \\ \hline -x + 1 & \\ -(-x-1) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$= \int x - 1 + \frac{2}{x+1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln|x+1| + c$$

$$\int \frac{x-1}{x^2+25}\,dx =$$

dato che per x^2+25 $\Delta<0$
e che $(x^2+25)' = 2x$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+25}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+25} - \int \frac{1}{x^2+25}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+25| - \int \frac{5}{25}\,\frac{\frac{1}{5}}{\left(\frac{x}{5}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+25| - \frac{1}{5}\int \frac{\frac{1}{5}}{\left(\frac{1}{5}x\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+25| - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{5}x\right) + C$$