TEORIA

IN SINTESI
Esponenziali

Potenze con esponente reale

- **Potenza a^x**, con a e x numeri reali positivi:
  se $a > 1$, è il numero reale
  - *maggiore* di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per *difetto*;
  - *minore* di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per *eccesso*;

  se $0 < a < 1$, è il numero reale
  - *maggiore* di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per *eccesso*;
  - *minore* di tutte le potenze di a con esponenti razionali che approssimano x per *difetto*.

- Definiamo: $1^x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \qquad a^0 = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+;$

  $0^x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+; \qquad a^{-r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}, \quad \forall a, r \in \mathbb{R}^+.$

  Non si definiscono le potenze con base 0 ed esponente negativo o nullo e quelle con base negativa.

- **Proprietà**
  - Anche per le potenze con esponente reale valgono le cinque proprietà delle potenze.
  - All'aumentare di x, la potenza a^x aumenta se $a > 1$, diminuisce se $0 < a < 1$.

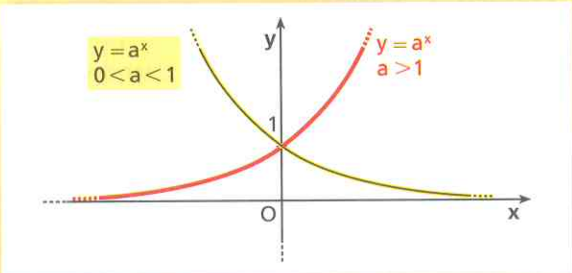
Funzione esponenziale

Ogni funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$ del tipo

$$y = a^x, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^+,$$

è una **funzione esponenziale**.

La funzione esponenziale è o **sempre crescente** se $a > 1$ o **sempre decrescente** se $0 < a < 1$.



Equazioni esponenziali

Equazione esponenziale: contiene almeno una potenza in cui compare l'incognita nell'esponente.
L'equazione esponenziale più semplice è del tipo: $a^x = b$, con $a > 0$.

Quando l'equazione è determinata, può essere **risolta in modo immediato** se si riescono a scrivere a e b come potenze con la stessa base.

ESEMPIO: $27^x = 81 \rightarrow 3^{3x} = 3^4 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3}$.

Disequazioni esponenziali

Disequazione esponenziale: contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.
Per risolvere le disequazioni esponenziali si tiene presente che:

- se $a > 1$ e $a^x > a^y$, allora $x > y$;
- se $0 < a < 1$ e $a^x > a^y$, allora $x < y$.

ESEMPIO: 1. $2^{2x} > 2^3 \rightarrow 2x > 3 \rightarrow x > \frac{3}{2}$. 2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^5 \rightarrow x < 5$.

CAPITOLO 10
ESERCIZI

1 Potenze con esponente reale

Potenze con esponente intero o razionale

▶ Teoria a p. 574

1 Fra le seguenti potenze con esponente razionale elimina quelle prive di significato e spiega il motivo della tua scelta.

$(2\pi)^{-44}$; $(-2)^{\frac{1}{8}}$; $(-3)^{-2}$; $(9-3^2)^0$; $(\sqrt[4]{5})^{-\frac{2}{7}}$; 0^{-2}.

2 Ricordando che $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, scrivi le seguenti potenze con esponente razionale sotto forma di radice.

a. $3^{\frac{5}{8}}$; $4^{\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$;

b. $2^{-\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{11}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

$\left[\text{a) } \sqrt[8]{3^5}; 2\cdot\sqrt[3]{2}; \frac{\sqrt{3}}{9}; \text{ b) } \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{2}}; 4\cdot\sqrt[3]{4}; \sqrt[5]{\frac{9}{121}}\right]$

Scrivi le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale.

3 $\sqrt{7}$; $\sqrt[6]{2^5}$; $\sqrt[4]{243}$; $\sqrt[4]{0,25}$. $\left[7^{\frac{1}{2}}; 2^{\frac{5}{6}}; 3^{\frac{5}{4}}; 2^{-\frac{1}{2}}\right]$

4 $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt[19]{\frac{1}{256}}$; $\sqrt[7]{\frac{1}{125}}$; $\sqrt[4]{3^{-1}}$. $\left[2^{-\frac{1}{2}}; 2^{-\frac{8}{19}}; 5^{-\frac{3}{7}}; 3^{-\frac{1}{4}}\right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

5 $4^{-\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$; $\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}}}$. $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{9}\sqrt{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right]$

6 $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $27^{-\frac{1}{3}}$; $64^{\frac{1}{3}}$; $125^{-\frac{1}{3}}$. $\left[4; \frac{1}{3}; 4; \frac{1}{5}\right]$

Potenze con esponente reale

▶ Teoria a p. 575

7 Indica quali fra le seguenti scritture hanno significato, ossia rappresentano potenze con esponente reale.

a. $-5^{\sqrt{3}}$; **b.** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{1+\sqrt{2}}$; **c.** $(\sqrt{5}+1)^{\pi}$; **d.** $(1-\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$; **e.** $1^{\sqrt{3}}$. [a; c; e]

8 TEST $3^{\pi-1}$ ha un valore compreso tra:

A 9 e 10. B 1 e 9. C 9 e 27. D 27 e 81. E 3 e 9.

Indica quali valori possono assumere le variabili affinché le seguenti espressioni rappresentino potenze reali con esponenti reali.

9 $(a+4)^{\pi}$; $\left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{3}}$. $[a \geq -4; a > 0]$

10 $(2a-a^2)^{\sqrt{2}}$; $(-2a)^{-\sqrt{3}}$. $[0 \leq a \leq 2; a < 0]$

11 $\left(\frac{1-a}{a}\right)^{\sqrt{2}}$; $(a^2-4a+4)^{-\sqrt{2}}$. $[0 < a \leq 1; a \neq 2]$

12 $a^{\sqrt{2}+1}$; $(a^2+1)^{\pi}$. $[a \geq 0; \forall a \in \mathbb{R}]$

13 $(a-8)^{\pi-4}$; $\left(\frac{2a}{a-3}\right)^{-\sqrt{5}}$. $[a > 8; a < 0 \vee a > 3]$

14 $\left(\frac{a-1}{a+2}\right)^{\sqrt{3}}$; $a^{\sqrt{a-1}}$. $[a < -2 \vee a \geq 1; a \geq 1]$

15 $(-a)^a$; $(4-|x|)^x$. $[a < 0; -4 < x \leq 4]$

16 $(\sqrt{x+2})^{\frac{1}{x}}$; x^x. $[x > -2 \wedge x \neq 0; x > 0]$

ESERCIZI

Proprietà delle potenze con esponente reale

▶ Teoria a p. 576

VERO O FALSO?

17 a. $4^{\frac{1}{x}} = 4^{-x}$ V F

b. $-8^x = (-8)^x$ V F

c. $6^{x^2} = (6^x)^2$ V F

d. $5^x + 5^y = 5^{x+y}$ V F

18 a. $\frac{1}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ V F

b. $0^x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ V F

c. $a^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}, \forall a \in \mathbb{R}^+$ V F

d. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 = 1$ V F

19 a. $7^{x-1} = 7^x - 1$ V F

b. $5^{x-2} \cdot \frac{1}{25} = 5^{x-4}$ V F

c. $8^{1+3x} = 2^{3+3x}$ V F

d. $(a^3)^x \cdot \frac{1}{(a^2)^x} = a$ V F

20 a. $5^{2x-1} = \frac{25^x}{5}$ V F

b. $\sqrt[5]{64^x} = 2^{\frac{6}{5}x}$ V F

c. $9 \cdot 3^{2x+1} = 27 \cdot 9^x$ V F

d. $\sqrt{64^{2x}} = 8^x$ V F

Semplifica le seguenti espressioni, applicando le proprietà delle potenze.

21 $3^{\sqrt{5}} \cdot 3^{\sqrt{20}}$; $\quad 2^{\sqrt{3}} \cdot 3^{\sqrt{3}}$. $\quad [3^{3 \cdot \sqrt{5}}; 6^{\sqrt{3}}]$

22 $5^{3\sqrt{3}} : 5^{\sqrt{3}}$; $\quad (3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$. $\quad [5^{2\sqrt{3}}; 9]$

23 $(5^{4\pi} : 5^4) \cdot 5^{\pi}$; $\quad [(6^{\sqrt{2}})^2]^{\sqrt{2}}$. $\quad [5^{5\pi-4}; 6^4]$

24 $\sqrt{32^{\sqrt{2}}}$; $\quad [(5)^{\sqrt{3}-1}]^{\sqrt{3}+1}$. $\quad [2^{\frac{5}{2}\sqrt{2}}; 25]$

25 $(2^x \cdot 2^3)^x$; $\quad \sqrt{a} \cdot a^{3x}$. $\quad [2^{x^2+3x}; a^{3x+\frac{1}{2}}]$

26 $\sqrt{2\sqrt{4^x}}$; $\quad \left(\frac{2^x}{4^{2x}}\right)^3$. $\quad [2^{\frac{x+1}{2}}; 2^{-9x}]$

27 $(3^{-2x} \cdot 3^3) : 3^x$; $\quad \sqrt{\frac{9^{x+1}}{3^{4x}}}$. $\quad [3^{-3x+3}; 3^{1-x}]$

28 $2^x \cdot 4^{x+1} \cdot 16^{x+2}$; $\quad 3^{-x} \cdot 9^{-\frac{1}{2}x}$. $\quad \left[2^{7x+10}; \frac{1}{9^x}\right]$

29 $[(2^{x+1} \cdot 2^{-x})^3 : 2^{x-1}]^{\sqrt{x}}$ $\quad [2^{\sqrt{x}(4-x)}]$

30 $(5^x)^x \cdot 25^{-x} : [(5^{2-x})^x \cdot 5]^{-1}$ $\quad [5]$

31 COMPLETA inserendo il simbolo > oppure < fra le seguenti coppie di numeri.

$3^{2\pi} \square 3^6$; $\quad 2^{\sqrt{5}} \square 2^{\frac{5}{2}}$; $\quad \left(\frac{5}{6}\right)^{\sqrt{7}} \square \left(\frac{5}{6}\right)^{\sqrt{5}+1}$; $\quad 1,12^3 \square 3^{1,12}$.

Disponi in ordine crescente i seguenti numeri.

32 -2; $\quad -2^{\pi}$; $\quad \sqrt{2}$; $\quad 2^{-1}$; $\quad 2^{\sqrt{2}}$.

33 $3^{-\frac{1}{2}}$; $-3^{\sqrt{2}}$; -3^{π}; 3^{-1}; $3^{-\sqrt{3}}$.

34 EUREKA! Se $2^x = 3$, calcola:

a. 4^{x-2};

b. $\frac{6 \cdot 8^x}{4^{x+1}} - 4^{x-1}$.

2 Funzione esponenziale

▶ Teoria a p. 577

35 Indica quali delle seguenti equazioni definiscono una funzione esponenziale.

$y = 4^{-x}$, $\quad y = (-4)^x$, $\quad y = -4^x$, $\quad y = 0,2^x$, $\quad y = (\sqrt{2})^x$, $\quad y = (1-\sqrt{2})^x$.

Determina per quali valori di *a* le seguenti equazioni definiscono una funzione esponenziale.

36 $y = (a-1)^x$ $\quad [a > 1]$

37 $y = \left(\frac{a-2}{3-a}\right)^x$ $\quad [2 < a < 3]$

Costruisci per punti il grafico delle seguenti funzioni.

38 $y = 3^x$ **39** $y = 5^x$ **40** $y = 2{,}5^x$ **41** $y = 0{,}4^x$ **42** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

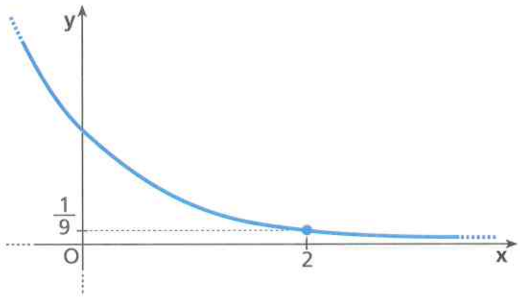
---

43 Disegna i grafici delle funzioni $y = 2^x$, $y = 4^x$, $y = 5^x$ in uno stesso piano cartesiano. Che cosa puoi dedurre dal confronto dei tre grafici?

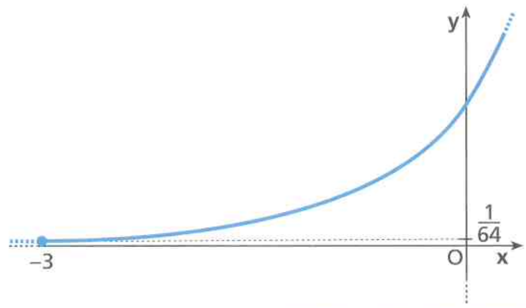
44 Come nell'esercizio precedente, ma con le funzioni $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

LEGGI IL GRAFICO Scrivi le equazioni dei seguenti grafici, che rappresentano funzioni esponenziali.

45



46



47 **VERO O FALSO?**

a. La funzione $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ ha come dominio $\mathbb{R}$ e come codominio $\mathbb{R}^+$. V F

b. La funzione $y = 4^x$ è decrescente per $x < 0$. V F

c. Il grafico di $y = (\sqrt{2})^x$ passa per il punto $(0; 1)$. V F

d. La funzione $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ si annulla in un punto. V F

e. $y = (2 - \sqrt{3})^x$ è una funzione decrescente in $\mathbb{R}$. V F

48 **AL VOLO** Quale delle seguenti funzioni cresce più rapidamente?

a. $y = 4^x$ b. $y = (\sqrt{3})^x$

Determina per quali valori di a le seguenti equazioni definiscono una funzione esponenziale crescente.

49 $y = (5 - a)^x$ $[a < 4]$

50 $y = (a^2 - 3)^x$ $[a < -2 \vee a > 2]$

51 $y = \left(\frac{2a+3}{a-1}\right)^x$ $[a < -4 \vee a > 1]$

52 $y = (2a^2 + 5a - 2)^x$ $\left[a < -3 \vee a > \frac{1}{2}\right]$

Determina per quali valori di a le seguenti equazioni definiscono una funzione esponenziale decrescente.

53 $y = (1 - a)^x$ $[0 < a < 1]$

54 $y = \left(-\frac{2}{a}\right)^x$ $[a < -2]$

55 $y = \left(\frac{2-a}{a+2}\right)^x$ $[0 < a < 2]$

56 $y = (\sqrt{2a} - 3)^x$ $\left[\frac{9}{2} < a < 8\right]$

ESERCIZI

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

AL VOLO

57 $y = 2^{\sqrt{x-1}}$

58 $y = \frac{1}{2} \cdot 3^x + 4^{\frac{1}{x}}$

59 $y = \sqrt{4^x}$

60 $y = \frac{4}{3^x}$

61 $y = \sqrt{-3^{-x}}$

62 $y = x^{2x}$

63 $y = 2^{\frac{x}{x^2-1}}$ $[x \neq \pm 1]$

64 $y = 3^{\frac{x-1}{x^3-4x}}$ $[x \neq \pm 2 \wedge x \neq 0]$

65 $y = \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x^2-4}$ $[x \neq 0 \wedge x \neq \pm 2]$

66 $y = \sqrt{2^x} - \sqrt{x+2}$ $[x \geq -2]$

67 $y = 4^{\sqrt{3-|x|}}$ $[-3 \leq x \leq 3]$

68 $y = (2x-1)^{\pi}$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

69 $y = (2-4x)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\left[x \leq \frac{1}{2}\right]$

70 $y = (x-2)^{\sqrt{4-x}}$ $[2 < x \leq 4]$

71 $y = \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{x}}$ $[x < -1 \vee x > 1]$

72 $y = (\sqrt{2+x})^{\frac{1}{|x|-1}}$ $[x > -2 \wedge x \neq \pm 1]$

73 $y = (\sqrt{4-x^2})^{\sqrt{x}}$ $[0 \leq x < 2]$

74 $y = (x - \sqrt{x^2-2x})^x$ $[x \geq 2]$

75 $y = (\sqrt{2x} - x)^{-\sqrt{2}}$ $[0 < x < 2]$

76 $y = \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^{\sqrt{x+3}}$ $[-3 \leq x < -1 \vee 0 < x < 1]$

77 $y = 2^{\frac{\sqrt{x^3-9x}}{\sqrt{x-3}}}$ $[x > 3]$

78 $y = 4^{\frac{1}{2\sqrt{x}-x}}$ $[x > 0 \wedge x \neq 4]$

79 TEST Se $f(x) = 7^x$, allora $\frac{f(2x)}{f(x-1)}$ è uguale a:

A $7^x - 7$.   B 7^{x-1}.   C 7^{x+1}.   D 7^3.   E $7^x + 1$.

80 Date le funzioni $f(x) = 4^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, calcola:

a. $f(1) - g(0)$;   b. $8f(-2) + g(1)$;   c. $f\left(\frac{1}{2}\right) + 2g(-1)$.

[a) 3; b) 1; c) 6]

81 Nella funzione $f(x) = 1 + b \cdot a^{x-2}$, con $a > 0$, è $f(2) = 3$ e $f(4) = \frac{9}{8}$. Calcola $a + b$. $\left[\frac{9}{4}\right]$

82 EUREKA! Se $f(x) = 3^x$, completa:

$f(f(4)) = 3^{\square}$; $f(f(f(1))) = 27^{\square}$; $f(f(\square)) = 27^{81}$; $f(f(f(0))) = \square$.

Trasformazioni geometriche e grafico delle funzioni esponenziali

Disegna i grafici delle seguenti coppie di funzioni nello stesso piano cartesiano.

83 $y = 3^x$ e $y = 3^{2x}$.

84 $y = 2^x$ e $y = 2^{x-1}$.

85 $y = 3^x$ e $y = 3^x - 1$.

86 Disegna i grafici delle funzioni $y = 2^{-x}$ e $y = -2^x$.

87 Rappresenta le seguenti funzioni in uno stesso piano cartesiano. Che cosa puoi notare?

$y = 2^x$, $y = 2^{x+1}$, $y = 2^x + 1$.

Scrivi le equazioni delle funzioni ottenute da quelle date mediante la trasformazione indicata e traccia i loro grafici.

88 $y = 10^x$; traslazione di vettore $\vec{v}(2; -1)$. $[y = 10^{x-2} - 1]$

89 $y = 2^{x-2}$; dilatazione di equazioni $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 4y \end{cases}$. $\left[y = 2^{\frac{x}{3}}\right]$

90 $y = -3^x$; simmetria rispetto alla retta $y = 1$. $[y = 3^x + 2]$

91 $y = 2^{x+2}$; simmetria rispetto all'asse x. $[y = -2^{x+2}]$

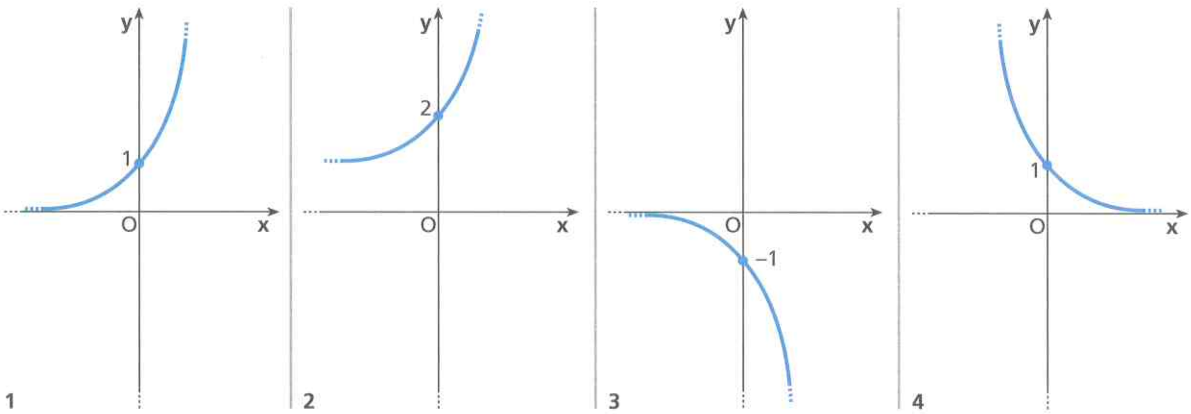
92 AL VOLO Le funzioni $y = 9 \cdot 3^{\frac{x}{2}-2}$ e $y = 3^{\frac{x}{2}}$ sono uguali?

93 TEST Applicando una traslazione di vettore $\vec{v}(-1; -3)$ alla funzione $y = 3^{x+2}$, si ottiene:

A $y = 3^{x+1} - 3$. B $y = 3^{x+3} + 3$. C $y = 3^{x+3} - 3$. D $y = 3^{x+1} + 3$. E $y = 3^x - 2$.

94 LEGGI IL GRAFICO Associa ogni funzione al grafico corrispondente.

a. $y = 4^x$ b. $y = -4^x$ c. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ d. $y = 4^x + 1$



Disegna il grafico delle seguenti funzioni utilizzando le trasformazioni geometriche.

95 $y = 2^{x+2}$; $y = 2^x + 2$.

96 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$; $y = 2^{-x}$.

97 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; $y = -2^x$.

98 $y = 3^{|x|}$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

99 $y = 3^{\frac{x}{2}}$; $y = 5 \cdot 3^x$.

100 $y = \frac{2^x}{3}$; $y = \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}x}$.

101 $y = 2^{3x}$; $y = 3 \cdot 2^x$.

102 $y = 4^{-x} + 1$; $y = -3^x - 3$.

103 $y = -3^{-x}$; $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$.

104 $y = |-2^{-x}|$; $y = |2^{x+1} - 1|$.

105 $y = 2 \cdot 3^{-x}$; $y = 4 \cdot 2^x - 1$.

106 $y = -2^{|x|}$; $y = |2^{x+2}|$.

107 $y = \frac{3^x + 1}{3^x}$; $y = -\left|\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1\right|$.

108 $y = |1 - 4^x| - 1$; $y = \frac{6^{x+1}}{3^x} + 1$.

109 $y = 2^{-x} + \frac{x}{|x|}$; $y = 3^{|x|-2} + 1$.

110 $y = 2 - 4^{|x|}$; $y = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{1-|x|}$.

ESERCIZI

111 $y = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$.

112 $y = |2 - 2^{|x|}| + 1$; $y = 2^{-|x|} - 3$.

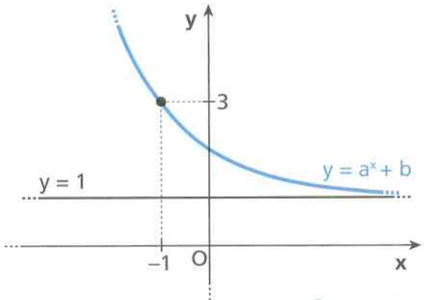
113 $y = 2^{|x-2|}$; $y = 2^{|x|-2}$.

114 $y = 3^{\frac{|x|}{x}} - 3^x$; $y = \left|-\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right|$.

115 Determina l'espressione analitica e traccia il grafico della funzione che si ottiene dalla funzione $y = 2^x$ applicando la traslazione di vettore $\vec{v}(-2; 1)$ e, al risultato, la simmetria rispetto al punto $(1; -4)$.
$[y = -2^{-x+4} - 9]$

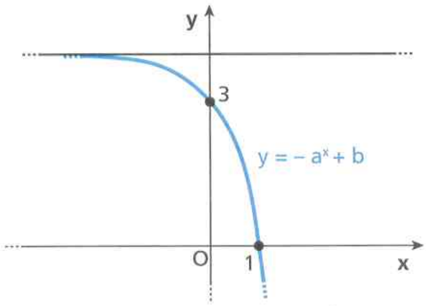
LEGGI IL GRAFICO Utilizzando i dati forniti nelle figure, determina l'equazione dei seguenti grafici.

116



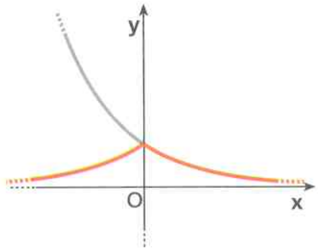
$\left[y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1\right]$

117



$[y = -4^x + 4]$

118 **TEST** La figura rappresenta il grafico (in rosso) di una funzione. Quale?



A $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

B $y = 2^{|x|}$.

C $y = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|$.

D $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

E $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

REALTÀ E MODELLI

119 **Come crescono i risparmi?** Lisa ha depositato su un libretto di risparmio € 500 e la banca ogni tre mesi accredita l'interesse maturato. Quale funzione descrive l'andamento degli importi in funzione del numero dei mesi trascorsi?
Rappresentala graficamente.
$\left[y(t) = 500 \cdot 1{,}005^{\frac{t}{3}}\right]$

importi rilevati nei quattro trimestri successivi al deposito:
€ 502,50
€ 505,01
€ 507,54
€ 510,08

120 **Larve e anatre** Nell'agosto 2015 si è registrata una diffusa moria di anatre e oche selvatiche nell'alta Toscana. La causa risiedeva nelle larve di mosche infettate dalle spore del botulino, larve mangiate dalle anatre e dalle oche. L'andamento nel tempo della diffusione della tossina può essere descritto dalla funzione esponenziale indicata a fianco, dove $y(t)$ è il numero di larve infette al tempo t (misurato in giorni).

diffusione tossina: $y(t) = y_0 e^{kt}$

a. All'inizio dell'osservazione ($t = 0$) le larve infette erano 50. Riporta in una tabella l'andamento del numero di larve infette nei primi cinque giorni di osservazione, considerando $k = 1,1$ e rappresenta graficamente la funzione.

b. Come cambia il grafico della funzione se la costante diventa $k = 0,5$? Confronta i due grafici.

121 ●○ **Il tasso di crescita** Le ultime stime indicano che ogni anno la popolazione mondiale aumenta esponenzialmente (con base e) con un tasso dell'1,18% (dati ONU 2015, World Population Prospects). Il tasso di crescita della popolazione è quella percentuale che deve essere moltiplicata per il tempo di crescita della popolazione (espresso in anni) per ottenere l'esponente di crescita, da attribuire alla base e.

a. Scrivi la funzione di accrescimento della popolazione al passare del tempo.

b. Calcola quante persone abiteranno sulla Terra tra 25 anni *se* il tasso di crescita rimarrà costante.

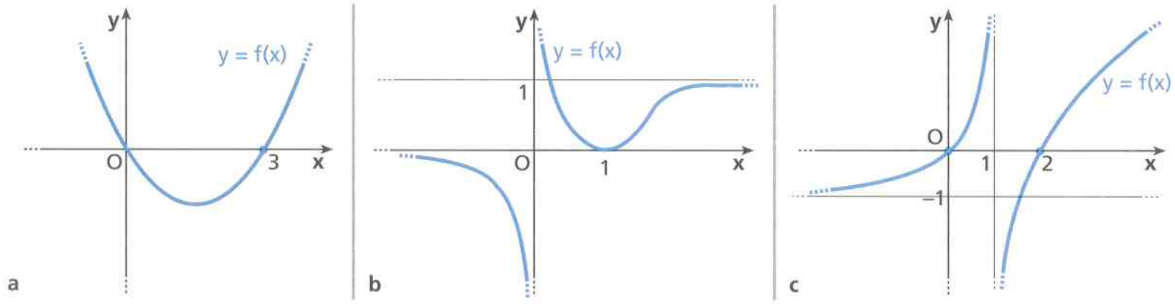
popolazione attuale: circa 7 miliardi

[a) $N(t) = N_0 e^{\frac{1,18}{100}t}$; b) 9,4 miliardi]

Grafico di funzioni del tipo $y = e^{f(x)}$

LEGGI IL GRAFICO Utilizzando i grafici delle funzioni $y = f(x)$ delle figure, disegna quello di $y = e^{f(x)}$.

122 ●●



Disegna il grafico della funzione $f(x)$ e poi quello di $y = e^{f(x)}$.

123 ●○ $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

124 ●○ $f(x) = \frac{x}{x-1}$

125 ●○ $f(x) = x^2 - 1$

126 ●○ $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

127 ●● $f(x) = \frac{|x|}{x-2}$

128 ●● $f(x) = \frac{1}{|x| - 2}$

Traccia i grafici delle seguenti funzioni.

129 ●○ $y = e^{-\sqrt{x+1}}$

130 ●○ $y = e^{|x - x^2|}$

131 ●● $y = e^{\frac{x}{2-x}}$

132 ●● $y = e^{\sqrt{9-x^2}}$

MATEMATICA E STORIA

La crescita della popolazione Nella sua opera del 1748 *Introductio in analysin infinitorum*, Eulero chiede:
«Se la popolazione di una regione aumenta annualmente di un trentesimo e in un certo momento contava 100000 abitanti, vorremmo conoscere la popolazione dopo 100 anni».

a. Prima di risolvere il problema, fai una stima: quale potrà essere, secondo te, il numero di abitanti dopo 100 anni?

b. Interpreta e completa i calcoli seguenti, che consentono di esprimere il numero di abitanti di quella regione dopo un anno:

$$100000 + 100000 \cdot \frac{1}{30} = 100000 \cdot (\ldots + \ldots) = 100000 \cdot \ldots$$

c. Una volta determinato il numero di abitanti dopo un anno, per quale frazione (maggiore di 1) lo puoi moltiplicare in modo da ottenere la popolazione dopo due anni?

d. Per determinare la popolazione dopo 100 anni, ripeterai la moltiplicazione precedente più volte... Scrivi un'espressione che ti consenta (con l'aiuto di una calcolatrice o di un foglio elettronico) di trovare la soluzione del problema.

Risoluzione – Esercizio in più

3 Equazioni esponenziali

▶ Teoria a p. 580

133 ASSOCIA ciascuna equazione alla soluzione corretta.

a. $3^{-x} = -1$ b. $4^x = 1$ c. $2^x = \frac{1}{4}$ d. $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 6$

1. $x = -1$ 2. impossibile 3. $x = 0$ 4. $x = -2$

134 VERO O FALSO?

a. L'equazione $2^x + 1 = 0$ è impossibile. V F

b. L'equazione $5^{2-x} - \frac{1}{5} = 0$ ha per soluzione 3. V F

c. $2^{-x} + 2^x = 0$ è un'equazione impossibile. V F

d. $2 \cdot 4^{x-1} = 0$ ha per soluzione 1. V F

I due membri si possono scrivere come potenze di uguale base

135 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo: a. $3^x = \frac{\sqrt{3}}{9}$; b. $75 \cdot 25^{x-1} - 5^{2x+1} = -50$.

a. $3^x = \frac{\sqrt{3}}{9}$ ⟩ $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$

$3^x = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^2}$ ⟩ seconda proprietà delle potenze

$3^x = 3^{\frac{1}{2}-2}$

$3^x = 3^{-\frac{3}{2}}$ ⟩ potenze con la stessa base: uguagliamo gli esponenti

$x = -\frac{3}{2}$

b. $75 \cdot 25^{x-1} - 5^{2x+1} = -50$ ⟩ proprietà delle potenze

$\overset{3}{\cancel{75}} \cdot \frac{5^{2x}}{\cancel{25}} - 5 \cdot 5^{2x} = -50$ ⟩ raccogliamo 5^{2x}

$5^{2x}(3-5) = -50$

$5^{2x} = 5^2$ ⟩ uguagliamo gli esponenti

$2x = 2 \rightarrow x = 1$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali.

136 $3^{x+1} = 27$ $[2]$

137 $5^{2x} = \frac{1}{25}$ $[-1]$

138 $2^{3x-1} = 16$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

AL VOLO

139 $4 \cdot 3^x = 4$

140 $7^{x+2} + 7 = 0$

141 $4^{x+1} + 3^x = 0$

142 $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

143 $5^x = \frac{1}{25} \cdot \sqrt{5}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

144 $3^x = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$ $\left[\frac{9}{4}\right]$

145 $4^x = 2 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

146 $\sqrt[3]{5^x} = \frac{1}{3125}$ $[-15]$

147 $8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

148 $a^x \cdot a^{2x-1} = \frac{a^2}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

149 $\sqrt{3} \cdot 3^x = 27$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

150 $\sqrt[3]{5^x} = 25$ $[6]$

151 $4^{x+2} = 1 - \sqrt{2}$ [impossibile]

152 $3^x \cdot 27 = 9^{2x}$ $[1]$

153 $t^2 \cdot t^{x+1} = \frac{t^{6x}}{t^5}$ $(t > 0)$ $\left[\frac{8}{5}\right]$

154 $2^x + 9 \cdot 2^x = 40$ $[2]$

155 $3 \cdot 4^x + \frac{7}{4} \cdot 4^x = 19 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

156 $5 \cdot 2^x + 2^{x-3} = 328$ $[6]$

157 $9^{x+2} = \sqrt[3]{3^{x+7}}$ $[-1]$

158 $4^{2x+1} = 8^{2x-1}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

159 $8^{x-1} = \sqrt[3]{2^{x-3}}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

160 $3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 8 \cdot 5^3$ $[3]$

161 $3^x - 3^{x-2} + 3^{x+1} = 35$ $[2]$

162 $3^{3(x+2)} = 9^{\frac{1}{x}+1}$ $\left[\frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}\right]$

163 $\frac{2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2}}{8 \cdot 2^{x+3}} = \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$ $\left[\frac{28}{15}\right]$

164 $\frac{4^{2-x} \cdot 2^{x+3}}{16^x} = \frac{1}{8}$ $[2]$

165 $\sqrt{27\sqrt{9^x}} = 3^{x-2} \cdot 27$ $[1]$

166 $\frac{8^{2-x}}{2^{2+x}} = \frac{16^{2x-1}}{4^x}$ $\left[\frac{4}{5}\right]$

167 $5^x \cdot 25^x = \frac{1}{5}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

168 $3^x - 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}} = 0$ $\left[\frac{21}{10}\right]$

169 $2^x + 2^{x+1} = -2^{x-1} + 7$ $[1]$

170 $3^{x+\frac{1}{2}} - 3^x = 9 \cdot (\sqrt{3} - 1)$ $[2]$

171 $(\sqrt{2})^x + (\sqrt{2})^{x-1} = 2(\sqrt{2} + 1)$ $[3]$

172 $3^{2-x} + 3^{3-x} = 12$ $[1]$

173 $8^{x-\frac{2}{3}} = \sqrt{2^{x+1}}$ $[1]$

174 $4^x + (2^x)^2 - 2^{2(x-2)} = 124$ $[3]$

175 $7^x + 49^{\frac{x}{2}} = 2 \cdot \sqrt[5]{343}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

176 $4^{2x-1} - 4^{2x+1} + 3 \cdot 2^{4x} = -\frac{3}{2}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

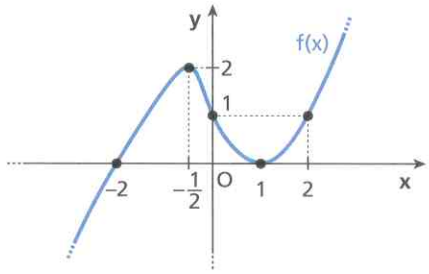
---

177 LEGGI IL GRAFICO Considera il grafico della funzione $f(x)$.

Determina $f(1)$, $2^{f(-2)}$, $3^{f\left(-\frac{1}{2}\right)}$, $4^{f(2)}$. Risolvi le equazioni:

a. $2^x - 4^{f(0)} = 2^{f\left(-\frac{1}{2}\right)}$;

b. $2^{f(x)} = 1$.

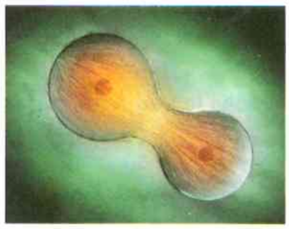


REALTÀ E MODELLI

178 **La mitosi** Il processo che porta a dividere una cellula e a generare due cellule identiche alla cellula madre si chiama *mitosi*. Consideriamo che ogni cellula impieghi 30 ore a dividersi in due.

a. Quante cellule contiene un organismo umano dopo 5 giorni dalla fecondazione?

b. Quanti giorni serviranno per generare complessivamente circa 2^{20} cellule (ossia, più di un milione)? [a) 16; b) 25]



179 **Tre mesi o un anno?** Alberto decide di investire i suoi risparmi sottoscrivendo il contratto che vedi qui a fianco. «Tasso di interesse composto del 4% con capitalizzazione a tre mesi» significa che ogni tre mesi la sua banca gli accrediterà il 4% del denaro presente sul suo conto in quel momento e che questi soldi andranno a sommarsi al capitale. Le condizioni del contratto di Giorgio invece sono quelle riportate più in basso a fianco.
Dopo quanto tempo il capitale di Alberto uguaglierà quello di Giorgio? [1 anno]

deposito di Alberto: € 156 250
tasso di interesse composto: 4%
capitalizzazione: 3 mesi

deposito di Giorgio: € 175 760
tasso di interesse composto: 4%
capitalizzazione: 1 anno

ESERCIZI

180 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo $6 \cdot 2^{x+3} = 4 \cdot 7^x - 2^x$.

$$6 \cdot 2^x \cdot 8 = 4 \cdot 7^x - 2^x \rightarrow 48 \cdot 2^x + 2^x = 4 \cdot 7^x \rightarrow 49 \cdot 2^x = 4 \cdot 7^x \underbrace{\rightarrow}_{\text{dividiamo entrambi i membri per } 49 \cdot 7^x} \frac{2^x}{7^x} = \frac{4}{49} \underbrace{\rightarrow}_{\text{proprietà delle potenze}} \left(\frac{2}{7}\right)^x = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \rightarrow x = 2$$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali.

181 $5 \cdot 2^x = 2 \cdot 5^x$ [1]

182 $3^{x+2} = 2^{2x+4}$ [−2]

183 $26 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x + 2^x$ [2]

184 $7^{x+1} = 3^{x+1}$ [−1]

185 $21 \cdot 3^x - 2^{x+3} = 3^{x+1}$ [−2]

186 $2^{x+2} - 4 \cdot 5^{x+2} = 25 \cdot 5^x - 4 \cdot 2^x$ [−3]

Utilizziamo un'incognita ausiliaria

187 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo l'equazione $6 \cdot 3^x - 3^{2-x} = 15$.

$$6 \cdot 3^x - 3^{2-x} = 15 \underbrace{\rightarrow}_{\substack{\text{seconda proprietà}\\ \text{delle potenze}\\ a^x : a^y = a^{x-y}}} 6 \cdot 3^x - \frac{9}{3^x} = 15 \underbrace{\rightarrow}_{\text{sostituiamo } z = 3^x} {}^{2}\cancel{6}\, z - \frac{\cancel{9}^{3}}{z} = \cancel{15}^{5} \underbrace{\rightarrow}_{\substack{\text{riduciamo allo stesso}\\ \text{denominatore}}} \frac{2z^2 - 3 - 5z}{z} = 0 \underbrace{\rightarrow}_{z \neq 0}$$

$$2z^2 - 5z - 3 = 0 \rightarrow z_1 = -\frac{1}{2} \vee z_2 = 3$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} \rightarrow 3^x = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{impossibile}$$

$$z_2 = 3 \rightarrow 3^x = 3 \rightarrow x = 1$$

L'equazione data ha per soluzione $x = 1$.

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali utilizzando un'incognita ausiliaria.

188 $4^x = 2^x - 2$ [impossibile]

189 $8 + 2^{x+1} = 2^{2x}$ [2]

190 $9^x - 3 = 2 \cdot 3^x$ [1]

191 $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = \frac{1}{3} \cdot 3^x$ [−1; 2]

192 $5^{2x} - 5^x = 5^{x-2} - \frac{1}{25}$ [0; −2]

193 $\frac{2}{3^x - 1} = \frac{1}{3^x - 5}$ [2]

194 $2^x + 8 = \frac{1}{4} + 2^{1-x}$ [−2]

195 $10^x + 10^{2-x} = 101$ [0; 2]

196 $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ [3]

197 $2^{x+1} + 2^{3-x} = 17$ [−1; 3]

198 $3^x + 3^{1-x} = 4$ [0; 1]

199 $2^x - \sqrt{2} = 4 - 2^{\frac{5}{2} - x}$ $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

200 $(3^x - 5)^2 + 1 = 3^x - 5$ [impossibile]

201 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \frac{12}{2^x} + 32 = 0$ [−2; −3]

202 $-2 \cdot 5^{x+2} + 25^{x+1} = 375$ $[1]$

203 $9^x + 9 = 10 \cdot 3^x$ $[0; 2]$

204 $2^{4x+3} + 2 = 17 \cdot 4^x$ $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$

205 $5^{x+2} - 4 \cdot 5^{1-x} - 30 = -5^{2-x}$ $[0; -1]$

206 $3^x - 3^{-1} = 3(2 \cdot 3^{-x} + 8 \cdot 3^{-1})$ $[2]$

207 $\dfrac{4}{2^x - 1} + \dfrac{3}{2^x + 1} = 5$ $[1]$

208 $\dfrac{2 \cdot (3^x + 1)}{3^x} = \dfrac{3 \cdot (3^x + 1)}{2 \cdot 3^x + 1}$ [impossibile]

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali applicando il metodo opportuno.

209 $5^{x+6} = 125$ $[-3]$

210 $9^x - 3^x = 6$ $[1]$

211 $4^x = 3 \cdot 2^x + 4$ $[2]$

212 $2^x = 2^{x-1} + 2^{x+3}$ [impossibile]

213 $5^x + 125^{\frac{x}{3}} = 250$ $[3]$

214 $25^{5x-2} = \sqrt[3]{125^x}$ $\left[\frac{4}{9}\right]$

215 $3^{x-2} \cdot 9^{x+4} \cdot \sqrt{27^x} = 1$ $\left[-\frac{4}{3}\right]$

216 $3^{2+x} + 3^x = 90$ $[2]$

217 $2^{3x} + 8^x = \sqrt[5]{2}$ $\left[-\frac{4}{15}\right]$

218 $5^{2x-1} = 7^{2x-1}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

219 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4 \cdot 64^x = 0$ $\left[-\frac{5}{7}\right]$

220 $7^x \cdot \sqrt{7^x} = \dfrac{1}{343}$ $[-2]$

221 $2 \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} - 8 = 1 - 3^x$ $[2]$

222 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} = \left(\frac{16}{9}\right)^{1+2x}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

223 $12^{x-2} = 2\sqrt{3}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

224 $\sqrt{3\sqrt{3}} = 3 \cdot 9^{2-x}$ $\left[\frac{17}{8}\right]$

225 $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^{-2} \cdot \dfrac{9}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

226 $(27^x)^{x-4} = \dfrac{1}{3 \cdot (3^{4x})^2}$ $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$

227 $2^{\frac{5}{x}} = 4^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{2^3} \cdot 8^{\frac{5}{6}}$ $[-5; 1]$

228 $\sqrt{27^x} \cdot 9^x = \dfrac{1}{81\sqrt{3}}$ $\left[-\frac{9}{7}\right]$

229 $\sqrt{3^{x^2-6x}} \cdot 3^6 = (3^x)^2 : 9$ $[2; 8]$

230 $\dfrac{9^x + 9}{3^x} = 10$ $[0; 2]$

231 $16^x - 3 \cdot 2^{2x+1} + 8 = 0$ $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

232 $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 4 = 3 \cdot 2^{-x}$ $[-2]$

233 $\sqrt[3]{11^{9x}} - 11^{2x} + 121(1 - 11^x) = 0$ $[0; 1]$

234 $\dfrac{\sqrt{3^x}}{\sqrt{3^{x+1} \cdot 9^{x+2}}} = \dfrac{1}{9}$ $\left[-\frac{5}{4}\right]$

235 $\dfrac{\sqrt{3 \cdot \sqrt{9^x}}}{81^{x-1}} = 9^{2x+3}$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

236 $\dfrac{(2^x)^{x-3}}{\sqrt{8^x}} = \dfrac{(\sqrt{2})^{3x}}{32}$ $[1; 5]$

237 $\sqrt[x+2]{25^x} \cdot \sqrt[x]{5^4} = 125$ $[2]$

238 $\dfrac{24}{3^x - 1} - \dfrac{9}{3^x} = 2$ $[2]$

239 $3^{-x} + \dfrac{3^x + 2}{3^x + 6} = \dfrac{24}{3^{2x} + 6 \cdot 3^x}$ $[1]$

240 $1 + 26 \cdot 3^{\frac{1}{2}x-2} = 3^{x-1}$ $[4]$

241 $|8^x - 2| = \sqrt{2^{3x}}$ $\left[\frac{2}{3}; 0\right]$

242 $4^{\sqrt{x+2}} + 6 = 4^{2-\sqrt{x+2}}$ $\left[-\frac{7}{4}\right]$

243 $10^x - 2^x - 5^x + 1 = 0$ $[0]$

244 $25 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-x} - 10\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 1\right] = 4\left(\frac{5}{2}\right)^x$ $[1]$

245 $2^{2x-1} \cdot 3^x = \dfrac{1}{2 \cdot 3^x}$ $[0]$

246 $2 - \dfrac{6}{4^{x+1}} + \dfrac{1}{4^{2x+1}} = 0$ $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$

247 $5^{x+1} \cdot 25^x = \sqrt{5^{1-x}} \cdot \sqrt{125}$ $\left[\frac{2}{7}\right]$

248 $\dfrac{5^{x+2} \cdot 25^{1-x}}{125^x} = \dfrac{1}{5}$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

249 $27^{\frac{2}{3}x} - 3^{2x+3} + 9^{x+2} = 165$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

250 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}} = 0$ $[\pm 1]$

251 $\dfrac{5^x}{5^x + 1} - \dfrac{1}{25^x - 1} = 1$ [impossibile]

252 a. Risolvi algebricamente l'equazione $2 \cdot 3^x = 3 - 9^x$.

b. Interpreta graficamente l'equazione tracciando i grafici delle funzioni che si ottengono in ogni membro.

Sistemi con equazioni esponenziali

Risolvi i seguenti sistemi.

253 $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2^{x-y} = 64 \end{cases}$ $[(3; -3)]$

254 $\begin{cases} 2^x + y = 0 \\ 4^x + y = 2 \end{cases}$ $[(1; -2)]$

255 $\begin{cases} y - 2^x = 0 \\ 5y = 4^x + 4 \end{cases}$ $[(0; 1); (2; 4)]$

256 $\begin{cases} 2^x - 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 24 \end{cases}$ $[(4; 3)]$

257 $\begin{cases} 3^x + 3^y = 10 \\ 3^{x+1} - 3^y = -6 \end{cases}$ $[(0; 2)]$

258 $\begin{cases} 9^{x-y} \cdot 27^y = 1 \\ 4^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^y = 32 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{4}; -\frac{5}{2}\right)\right]$

259 $\begin{cases} 3^x \cdot \sqrt{81^{x-y}} = 1 \\ 25^x \cdot \sqrt{125^y} = 5 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{4}{17}; \frac{6}{17}\right)\right]$

260 $\begin{cases} 36 \cdot 6^{x-y} = 6^{2x} \\ 49^x \cdot \sqrt{7^y} = 1 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)\right]$

261 $\begin{cases} x - 2y^2 = 0 \\ 4^x \cdot 8 = 16^{2y} \end{cases}$ $\left[\left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right]$

262 $\begin{cases} 4^{y^2} - 2^{4x} = 0 \\ \dfrac{625^x \cdot 25^x}{\sqrt{125}} = \left(\frac{1}{5}\right)^y \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{2}; -1\right); \left(\frac{9}{50}; \frac{3}{5}\right)\right]$

4 Disequazioni esponenziali

▶ Teoria a p. 581

263 COMPLETA con i simboli > o <.

a. $2^{\sqrt{2}} \square 2^4$; $\quad 4^{-1} \square 4^{-\sqrt{5}}$.

b. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\pi} \square \left(\frac{1}{5}\right)^2$; $\quad 5^{\sqrt{3}} \square 5^3$.

c. $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \square \left(\frac{4}{3}\right)^2$; $\quad 3^{-6} \square 3^{1-\sqrt{3}}$.

d. $7^{\sqrt{2}} \square 7$; $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 \square \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

264 VERO O FALSO?

a. $5^x < \frac{1}{25}$ ha per soluzione $x < -2$. V F

b. $\left(\frac{5}{3}\right)^{-x} > 1$ se $x < 0$. V F

c. $5^{-x} + 7^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. V F

d. $6^x < -6$ se $x < -1$. V F

e. $a^4 > a^2$ è sempre vera. V F

265 CACCIA ALL'ERRORE Ognuna delle seguenti proposizioni è falsa. Individua l'errore.

a. $x^{-\frac{1}{3}} < x^{-\frac{2}{3}}$ se $x > 1$.

b. Se $a^2 < b^2$, allora $a < b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

c. $x^4 < x^2$ non è mai vera.

d. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} > \left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{6}{7}}$.

e. $3^x > 2^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

I due membri si possono scrivere come potenze di uguale base

266 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo le seguenti disequazioni: **a.** $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2$; **b.** $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81}$.

a. $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2$

$5^{\frac{x}{3}} > \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{250}_{\,125}}$ dividiamo entrambi i membri per 250

$5^{\frac{x}{3}} > 5^{-3}$ la base è 5 > 1

$\frac{x}{3} > -3$

$x > -9$

b. $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81}$ scriviamo $\frac{1}{27}$ e $\frac{1}{81}$ come potenze di $\frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{3}\right)^4$ la base è $\frac{1}{3} < 1$

$3x < 4$

$x < \frac{4}{3}$

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali i cui membri sono riconducibili a potenze di uguale base.

267 $4^x \leq 32$ $\left[x \leq \frac{5}{2}\right]$

268 $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{27}{8}$ $[x < 3]$

269 $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{8}{27}$ $[x < -3]$

270 $3^{2x+2} < \frac{1}{3}$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

271 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} < 64$ $[x > -2]$

272 $0,1^x \leq 100$ $[x \geq -2]$

273 $100^x < 0,001$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

274 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2}$ $\left[x > -\frac{1}{2}\right]$

275 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} < 625$ $\left[x > -\frac{5}{2}\right]$

276 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-2x} < \frac{3}{2}$ $[x \neq 1]$

277 $5^{x^2-1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+1}$ $[x < -3 \vee x > 0]$

278 $2^x \cdot 3^{x+1} \leq \frac{6^{3x}}{2}$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

279 $2 \cdot 3^{2x-1} + 9^{x+1} - 3^{2x+1} \leq \frac{60}{\sqrt[5]{3}}$ $\left[x \leq \frac{9}{10}\right]$

280 $17 \cdot \sqrt{2^{x+1}} > 34 \cdot \sqrt[3]{4^{x-3}}$ $[x < 9]$

281 $\frac{2^x \cdot 8}{4^x} > \frac{16^{-x}}{8}$ $[x > -2]$

282 $\frac{35}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \geq 0,7 \cdot 5^x$ $\left[x \leq \frac{2}{3}\right]$

Utilizziamo un'incognita ausiliaria

283 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo la disequazione $3^x - 2 \cdot 3^{2-x} < 7$.

$$3^x - 2 \cdot 3^{2-x} < 7 \to 3^x - 2 \cdot \frac{9}{3^x} < 7 \underset{z=3^x}{\to} z - \frac{18}{z} < 7 \to \frac{z^2-7z-18}{z} < 0 \underset{z>0 \text{ perché } z=3^x}{\to} z^2 - 7z - 18 < 0 \to$$

$$-2 < z < 9 \to \begin{cases} 3^x > -2 & \to \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ 3^x < 3^2 & \to \quad x < 2 \end{cases}$$

La soluzione della disequazione data è $x < 2$.

284 TEST La disequazione $2^x + \frac{8}{2^x} > 6$:

A è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

B è verificata per $x < 1 \ \vee \ x > 2$.

C è verificata per $x < 2$.

D è verificata $\forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0$.

E non ha soluzioni.

ESERCIZI

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali con l'uso di un'incognita ausiliaria.

285 $2 \cdot 3^{-x} - 3^x \geq 1$ $[x \leq 0]$

286 $7^x - 6 > 7^{1-x}$ $[x > 1]$

287 $-4^x - 3 \cdot 2^x > 2^{2x} - 2^x$ [impossibile]

288 $34\left(\frac{3}{5}\right)^x < 25\left(\frac{9}{25}\right)^x + 9$ $[x < 0 \vee x > 2]$

289 $9\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} \leq 0$ [impossibile]

290 $(0,01)^x - 7(0,1)^x - 30 \geq 0$ $[x \leq -1]$

291 $25\left(\frac{1}{5}\right)^x + 5 - 2\left(\frac{1}{5}\right)^{-x} \leq 0$ $[x \geq 1]$

292 $5^{\frac{2}{x}} - \frac{26}{25} 5^{\frac{1}{x}} > -\frac{1}{25}$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 0 \vee x > 0\right]$

293 $\frac{1}{3^x - 9} - \frac{1}{3^x + 1} > 0$ $[x > 2]$

294 $\frac{-6}{2^x - 2} + \frac{9}{2^x - 1} < 0$ $[x < 0 \vee 1 < x < 2]$

295 $\frac{5}{7}(0,2)^x + \frac{7}{5} - \frac{2}{35}(0,2)^{-x} \leq 0$ $[x \geq 2]$

Risolvi le seguenti disequazioni applicando il metodo opportuno.

296 $\frac{2^x - 4}{1 - 3^x} > 0$ $[0 < x < 2]$

297 $\frac{4 - 8^x}{3^x + 9} \leq 0$ $\left[x \geq \frac{2}{3}\right]$

298 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} < 625$ $\left[x > -\frac{5}{2}\right]$

299 $45 \cdot 2^{2x-2} < -35 \cdot 4^{x-1}$ [impossibile]

300 $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 < 0$ $[1 < x < 2]$

301 $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 8 \geq 0$ $[x \leq -3]$

302 $4 \cdot 2^{3x} - 4^{x+2} < 0$ $[x < 2]$

303 $4^{2x-1} - 10 \cdot 4^{x-1} + 4 > 0$ $\left[x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{3}{2}\right]$

304 $\frac{3^{x+2}}{25} < 5^x$ $[x > -2]$

305 $25^x + 9 \cdot 5^{2x} \leq 2$ $\left[x \leq -\frac{1}{2}\right]$

306 $\frac{5^x - 125}{(1 - 2^x)(3^x - 3)} \geq 0$ $[x < 0 \vee 1 < x \leq 3]$

307 $72 \cdot 2^{2x} > 4 \cdot 9^x \cdot 27$ $\left[x < -\frac{1}{2}\right]$

308 $\frac{3^x - 2}{2} + \frac{2 \cdot 9^x - 1}{2 \cdot 3^x} + 2 > 0$ $[x > -1]$

309 $\frac{4}{2^x - 4} - \frac{2}{2^x - 2} \leq 0$ $[1 < x < 2]$

310 $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4}{9 - 3^{2x}} < 0$ $[-2 < x < 1]$

311 $2^{x+5} \cdot 3^{x+2} \leq 8 \cdot 6^{\frac{3x-1}{x}}$ $[x < 0]$

312 $\frac{3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 4^{2x}}{|-1 + 5^{x+1}| - 4} < 0$ $\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > 0\right]$

313 $\frac{9 \cdot 3^{-x}}{9^x + 3^{2x}} > \frac{27}{2}$ $\left[x < -\frac{1}{3}\right]$

314 $(2^{x+2})^2 \cdot 3^x < \frac{2}{3^{x+3}}$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

315 $\frac{7^{2\sqrt{2x^2-x}}}{\sqrt{9^x - 10 \cdot 3^x + 9}} \geq 0$ $[x > 2]$

316 $\frac{\sqrt{3^{6x} : 3^2}}{3^7} < |-3^{-x}|$ $[x < 2]$

317 $2^x - 1 > \sqrt{3 \cdot 2^x - 3}$ $[x > 2]$

318 $2^x < \frac{7^{x+1}}{2}$ $[x > -1]$

319 $16 \cdot 4^{2x} < 3^{x+1}$ $[x < -1]$

320 $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} > 14$ $[x > 1]$

321 $\sqrt{2 \cdot 6^x + 7} \leq 6^x + 1$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

322 $|2 \cdot 9^x - 1| > 5$ $\left[x > \frac{1}{2}\right]$

323 $|16^x - 4| \geq 4 + 2 \cdot 4^x$ $[x \geq 1]$

324 $3^x - 9 < \sqrt{9^x - 9}$ $[x \geq 1]$

325 $(3^{2-x} - 27) \cdot \left(\frac{1}{2} - 4^x\right) \geq 0$ $\left[x \leq -1 \vee x \geq -\frac{1}{2}\right]$

326 $4^x(4^{x+1} - 33) > -8$ $\left[x < -1 \vee x > \frac{3}{2}\right]$

327 $\dfrac{2^{3x} - 8 + 3 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{2x+1}}{\sqrt{4^x + 3^{-x} + 10}} \geq 0$ $[x \geq 1]$

328 $\left| \dfrac{4^{-x}}{2^{x+2} : 2^6} \right| < 1$ $\left[x > \dfrac{4}{3}\right]$

329 $\left| \dfrac{3 \cdot 5^{x+1} + 5}{5^{2x} - 2 \cdot 5^x + 1} \right| < 5$ $[x > 1]$

330 $\dfrac{5^{\frac{4}{3}x+3}}{\sqrt{49^{x+2}}} \leq \dfrac{7 \cdot \sqrt[3]{25^x}}{\sqrt[3]{7^x}}$ $\left[x \geq -\dfrac{9}{2}\right]$

331 $\sqrt{4^x \cdot 2^x + \sqrt{8^x - 1}} \leq \sqrt{2^{3x+1} - 1}$ $\left[x = 0 \vee x \geq \dfrac{1}{3}\right]$

332 $\dfrac{8^{1+x} + 8^x}{9} \geq 4^{1+2x} + \dfrac{16}{4^{1-2x}}$ $[x \leq -3]$

333 $\dfrac{2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2}{(25^x - 5) \cdot (81 \cdot 3^x - 3)} \leq 0$ $\left[-3 < x \leq -1 \vee \dfrac{1}{2} < x \leq 1\right]$

334 $\dfrac{5}{3^x - 3} + \dfrac{2 \cdot 3^x}{3^x + 3} \geq \dfrac{18 - 2 \cdot 9^x}{9^x - 9}$ $[x \leq 0 \vee x > 1]$

335 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-3}} \cdot \sqrt[x]{4} - 1 \geq 0$ $[x = 2]$

336 $\dfrac{20 - 8^{2\sqrt{x}+1} - 64^{2\sqrt{x}}}{(2^x - 1)(2^x - 4)} > 0$ $\left[\dfrac{1}{36} < x < 2\right]$

Disegna i grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$. Trova il loro punto di intersezione e gli intervalli dove $f(x) > g(x)$.

337 $f(x) = 2^x, \quad g(x) = 4 \cdot 2^{-x}.$

338 $f(x) = 3^{x-1}, \quad g(x) = 3^{2x}.$

---

339 Date le funzioni $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = \dfrac{1}{x}$, risolvi le seguenti disequazioni:

a. $f(x+2) - f(x) \geq 3$; **b.** $g[f(x-1)] \geq 4$; **c.** $h[f(4x)] \leq g[f(-2x)]$.

$[\text{a) } x \geq 0; \text{ b) } x \geq 2; \text{ c) } \forall x \in \mathbb{R}]$

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

340 $y = \sqrt{2^x - 16}$ $[x \geq 4]$

341 $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - 3^x}}$ $[x < 2]$

342 $y = \sqrt{5^{-x} - 25} + \sqrt{5^{-x}}$ $[x \leq -2]$

343 $y = \dfrac{7^x}{\sqrt[3]{8^x - 2}}$ $\left[x \neq \dfrac{1}{3}\right]$

344 $y = \sqrt{4^{x-1} - 2}$ $\left[x \geq \dfrac{3}{2}\right]$

345 $y = \sqrt{3^{-x} - 3^x}$ $[x \leq 0]$

346 $y = \sqrt{\dfrac{3^x - 1}{3^{-x} - 3}}$ $[-1 < x \leq 0]$

347 $y = \sqrt{4^x + 2^x - 6}$ $[x \geq 1]$

Determina il dominio delle seguenti funzioni, studia il segno e determina gli eventuali zeri.

348 $y = \dfrac{5}{6^x + 5}$ $[D: \mathbb{R};\ y > 0: \forall x \in \mathbb{R};\ y = 0: \text{imp.}]$

349 $y = \dfrac{2^{3x} - 1}{8 - 2^x}$ $[D: x \neq 3;\ y > 0: 0 < x < 3;\ y = 0: x = 0]$

350 $y = \sqrt{9^x - 3}$ $\left[D: x \geq \dfrac{1}{2};\ y > 0: x > \dfrac{1}{2};\ y = 0: x = \dfrac{1}{2}\right]$

351 $y = \dfrac{x - 1}{4^{2x-5} - 1}$ $\left[D: x \neq \dfrac{5}{2};\ y > 0: x < 1 \vee x > \dfrac{5}{2};\ y = 0: x = 1\right]$

352 EUREKA! È data la funzione $f(x) = a4^x + b2^x - a + 2b$.

a. Trova a e b in modo che il grafico della funzione passi per i punti $O(0; 0)$ e $A(1; 6)$.

b. Utilizzando i valori di a e b trovati nel punto precedente traccia i grafici di $f(x)$ e di $g(x) = |f(x)| - 2$ e determina i loro punti di intersezione anche algebricamente.

c. Studia il segno delle due funzioni.

$\left[\text{a) } a = 2 \wedge b = 0; \text{ b) } \left(-\dfrac{1}{2}; -1\right); \text{ c) } f(x) > 0: x > 0; f(x) = 0: x = 0; g(x) > 0: \dots\right]$

RISOLVIAMO UN PROBLEMA

Il parassita varroa

Nelle due arnie di Niccolò si è diffuso l'acaro varroa, un parassita che attacca le api. Quando se ne è accorto, nella prima arnia erano presenti circa 100 varroe, mentre la seconda era sana. Dopo un solo mese, anche la seconda arnia era infestata da circa 50 varroe.

- Dal giorno in cui si è accorto del problema, in quanto tempo la popolazione complessiva di parassiti nelle arnie supererà le 2000 unità?
- Considerando il limite critico, quanti giorni ha a disposizione Niccolò per salvare le sue api?

ciclo vitale varroa: raddoppia la popolazione ogni 30 giorni

limite critico di sopravvivenza di un'arnia: circa 3200 varroe

▶ Calcoliamo la popolazione nella prima arnia.

Indicato con t il numero di giorni a partire dal momento in cui Niccolò ha visto le prime varroe, la popolazione di parassiti cresce secondo la legge:

$$n_1(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{30}}, \quad \text{con } t \geq 0.$$

▶ Calcoliamo la popolazione nella seconda arnia.

L'infestazione nella seconda arnia inizia dopo 30 giorni rispetto alla prima. La popolazione di varroe nella seconda arnia segue la legge:

$$n_2(t) = 50 \cdot 2^{\frac{t-30}{30}}, \quad \text{con } t \geq 30.$$

▶ Calcoliamo la popolazione complessiva.

Il numero totale di parassiti nelle due arnie si ottiene sommando le varroe presenti nelle due arnie.

$$n(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{30}} + 50 \cdot 2^{\frac{t-30}{30}}, \quad \text{con } t \geq 30.$$

▶ Calcoliamo in quanto tempo le varroe superano le 2000 unità.

Per calcolare dopo quanto tempo la popolazione complessiva di parassiti supera le 2000 unità, dobbiamo risolvere la disequazione:

$$100 \cdot 2^{\frac{t}{30}} + 50 \cdot 2^{\frac{t-30}{30}} \geq 2000 \rightarrow$$

$$100 \cdot 2^{\frac{t}{30}} + 50 \cdot 2^{\frac{t}{30}} \cdot 2^{-1} \geq 2000 \rightarrow$$

$$125 \cdot 2^{\frac{t}{30}} \geq 2000 \rightarrow 2^{\frac{t}{30}} \geq 2^4 \rightarrow \frac{t}{30} \geq 4 \rightarrow$$

$$t \geq 120.$$

Pertanto, dopo 120 giorni (circa 4 mesi) da quando Niccolò ha avvistato i primi parassiti, le varroe avranno raggiunto quota 2000.

▶ Calcoliamo in quanto tempo le varroe raggiungono il limite critico nella prima arnia.

Calcoliamo il tempo che Niccolò ha a disposizione per salvare la prima arnia:

$$100 \cdot 2^{\frac{t}{30}} < 3200 \rightarrow 2^{\frac{t}{30}} < 2^5 \rightarrow t < 150.$$

Niccolò ha a disposizione al più 150 giorni (circa 5 mesi) da quando si è accorto dei primi parassiti per salvare la prima arnia.

▶ Calcoliamo in quanto tempo le varroe raggiungono il limite critico nella seconda arnia.

Nella seconda arnia l'attacco è iniziato dopo, quindi Niccolò avrà più tempo a disposizione.
Infatti:

$$50 \cdot 2^{\frac{t-30}{30}} < 3200 \rightarrow 2^{\frac{t-30}{30}} < 2^6 \rightarrow$$

$$\frac{t-30}{30} < 6 \rightarrow t < 210.$$

Per salvare la seconda arnia, Niccolò ha al massimo 210 giorni di tempo (circa 7 mesi) da quando ha osservato i primi acari nella prima arnia.

Sistemi con disequazioni esponenziali

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

353 $\begin{cases} 3^{2x-1} > 3 \\ 1 - 5^{x^2-4} \geq 0 \end{cases}$ $[1 < x \leq 2]$

354 $\begin{cases} 5^{2x-1} - 25 > 0 \\ \dfrac{3^x + 1}{3^x - 1} \geq 1 \end{cases}$ $\left[x > \frac{3}{2}\right]$

355 $\begin{cases} 4^{3x+2} > 2 \\ 2^x(2^x - 1) < 2 \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 1\right]$

356 $\begin{cases} 49^x - 7^x < 0 \\ 3^{-x} + 4\left(\frac{1}{3}\right)^x > 15 \end{cases}$ $[x < -1]$

357 $\begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{4x+3} < \frac{9}{16} \\ 2^{x+1} + 2^{x+2} \leq 12 \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{4} < x \leq 1\right]$

358 $\begin{cases} 3^x - 3^{3-x} + 6 \geq 0 \\ |2^x - 1| < 3 \end{cases}$ $[1 \leq x < 2]$

359 $\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{49^x} - 7)(3^x - 1)}{64 - 2^x} \geq 0 \\ \sqrt{1 + 4^x} > \dfrac{1}{\sqrt{4^x - 1}} \end{cases}$ $[1 \leq x < 6]$

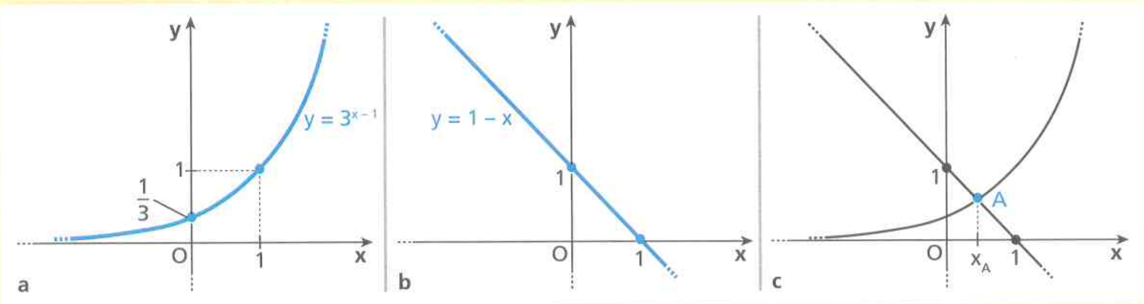
360 $\begin{cases} 7^x \cdot \sqrt[x]{49} : \sqrt[3]{\left(\frac{1}{7}\right)^{-2x-5}} - 1 > 0 \\ \sqrt[3]{1 - 3 \cdot 2^x \cdot (2^x - 1)} - 2^x + 1 < 0 \end{cases}$ $[x = 1 \vee x > 3, x \in \mathbb{N}]$

Equazioni e disequazioni esponenziali risolvibili solo con metodo grafico

361 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo il numero delle soluzioni dell'equazione $3^{x-1} = 1 - x$ utilizzando il metodo grafico e indichiamo un intervallo in cui si trova ogni soluzione.

Disegniamo il grafico delle funzioni $y = 3^{x-1}$ e $y = 1 - x$:

le ascisse dei punti di intersezione dei due grafici sono le soluzioni dell'equazione data.



Nella figura osserviamo che i due grafici si intersecano solo nel punto A, la cui ascissa è la soluzione dell'equazione. x_A è un numero compreso tra 0 e 1.

Determina il numero delle soluzioni delle seguenti equazioni utilizzando il metodo grafico e indica un intervallo in cui si trovano.

362 $2^x - 1 = -x$ $[x = 0]$

363 $3^{-x} = \frac{x}{3}$ $[x = 1]$

364 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = x^2 - 4x$ [una sol.; $4 < x < 5$]

365 $2^{1-x} = x + 1$ [una sol.; $0 < x < 1$]

366 $x^2 + 3 = -3^x$ [impossibile]

367 $\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 = -\frac{2}{x}$ [due sol.; $x_1 = -1$, $2 < x_2 < 3$]

368 $2^x = |x^2 - 2|$ [tre sol.; $-2 < x_{1,2} < -1$, $0 < x_3 < 1$]

369 $\sqrt{3 + 2x - x^2} = 4^x + 2$ [impossibile]

Risolvi le seguenti disequazioni utilizzando il metodo grafico.

370 $2^{-x} > 2x + 1$ $[x < 0]$

371 $\frac{x}{2} - 1 > 3^x$ [impossibile]

372 $3^{x-2} > -x + 3$ $[x > 2]$

373 $4^x + 1 > 1 - x^2$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

374 $x^2 + 6x < 2^{-x}$ $[0 < x < 1]$

375 $\frac{1}{x} > -3^{-x}$ $[x < a \vee x > 0$, con $-1 < a < 0]$