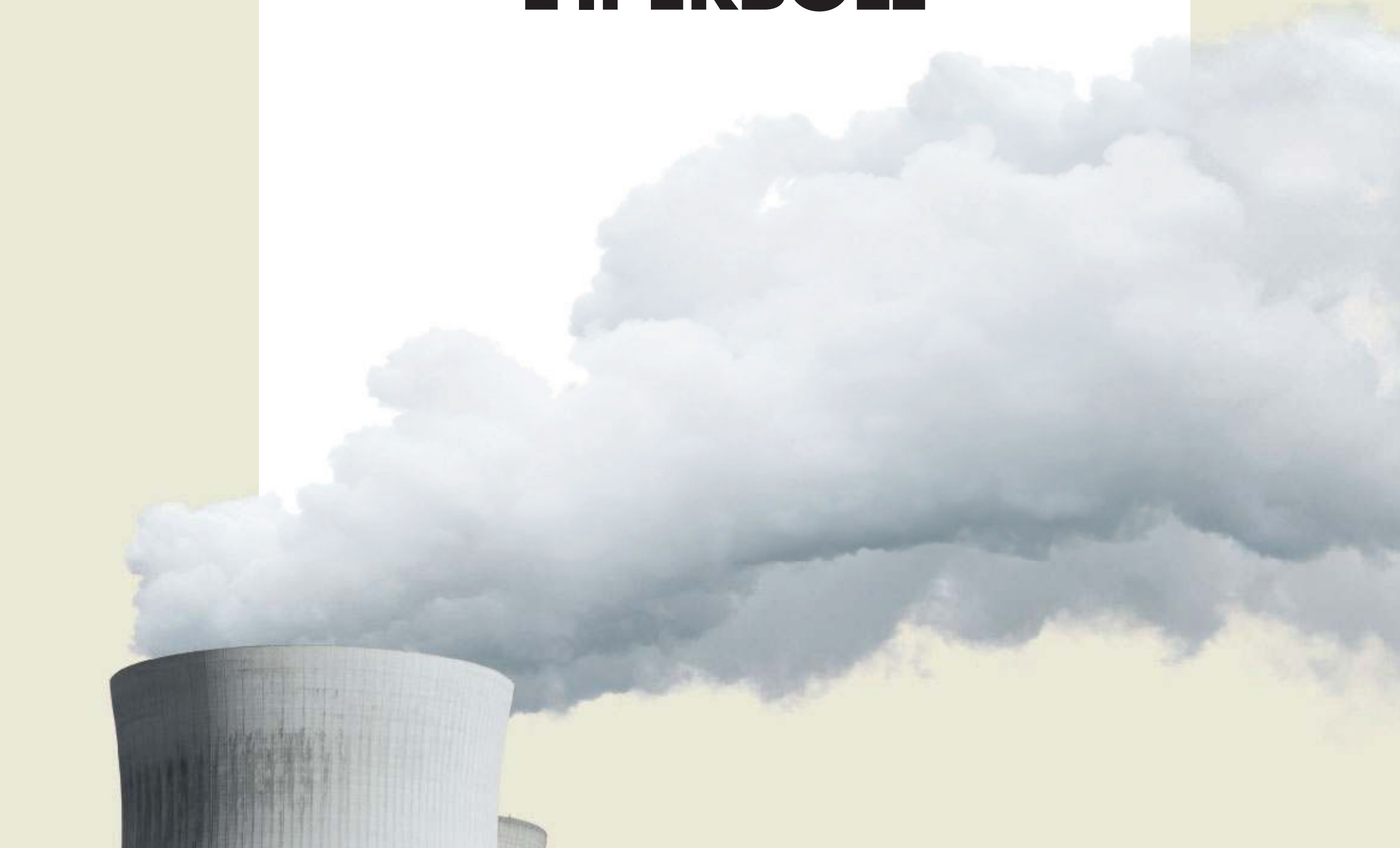
CAPITOLO 7

٧ [numerazione araba]

७ [numerazione devanagari]

七 [numerazione cinese]

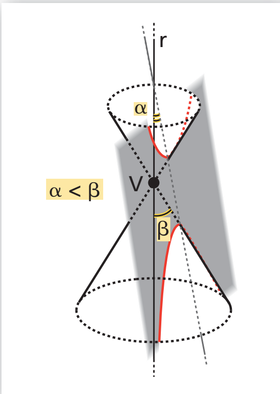
L'IPERBOLE



LE TORRI DI RAFFREDDAMENTO In molti processi industriali si raggiungono temperature di lavorazione elevatissime. C'è quindi la necessità di raffreddare le acque di scarico per evitare che l'alta temperatura danneggi la fauna dei fiumi in cui vengono riversate, favorendo la crescita di batteri, o addirittura catalizzi la formazione di sostanze tossiche nelle fognature. Molti impianti industriali, pertanto, sono dotati di ciminiere a forma iperbolica all'interno delle quali l'acqua di scarico viene vaporizzata e raffreddata a contatto con l'aria che entra dal camino. Il «fumo» che si vede uscire è aria satura di vapore d'acqua, prodotto di scarto del raffreddamento.

Perché le torri di raffreddamento hanno forma iperbolica?

La risposta a pag. 454



▲ **Figura 1** Consideriamo un cono con un angolo al vertice 2β. Se un piano seca il cono formando un angolo α con il suo asse e tale che $\alpha < \beta$, allora l'intersezione fra il piano e la superficie del cono è un'iperbole.

1. L'IPERBOLE E LA SUA EQUAZIONE

Completiamo il nostro studio sulle coniche prendendo in esame l'*iperbole*. Anche per l'iperbole diamo la definizione come luogo geometrico e ne determiniamo l'equazione algebrica.

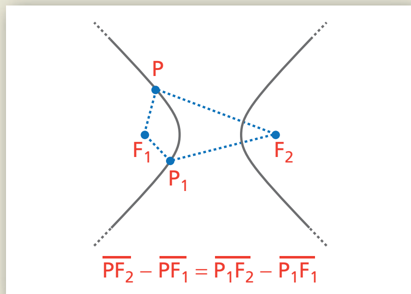
L'iperbole come luogo geometrico

DEFINIZIONE

Iperbole

Assegnati nel piano due punti F_1 e F_2, detti **fuochi**, si chiama iperbole la curva piana luogo geometrico dei punti P che hanno costante la differenza delle distanze da F_1 e da F_2:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \textbf{costante}.$$



Il punto medio del segmento F_1F_2 si chiama **centro** dell'iperbole.
Indichiamo con:

$2c$ la distanza tra F_1 e F_2, detta **distanza focale**;

$2a$ la differenza costante fra le distanze di ciascun punto dell'iperbole da ognuno dei due fuochi.

● a e c indicano due valori costanti e positivi.

Se P è un generico punto dell'iperbole, dalla definizione data segue

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a \quad \text{se} \quad \overline{PF_1} - \overline{PF_2} > 0, \text{ cioè se } P \text{ è più vicino a } F_2,$$

oppure:

$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a \quad \text{se} \quad \overline{PF_2} - \overline{PF_1} > 0, \text{ ovvero se } P \text{ è più vicino a } F_1.$$

Queste due relazioni si possono riassumere nella seguente uguaglianza:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a.$$

In un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due (figura 2). Considerato allora il triangolo PF_1F_2, la differenza dei due lati PF_1 e PF_2 è

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$$

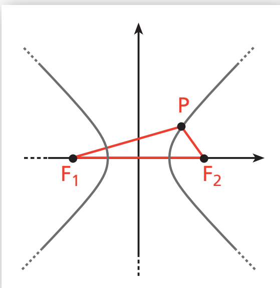
e il terzo lato è il segmento F_1F_2 di lunghezza $2c$, che congiunge i due fuochi, quindi

$$2a < 2c,$$

ossia:

$$\boldsymbol{a < c}.$$

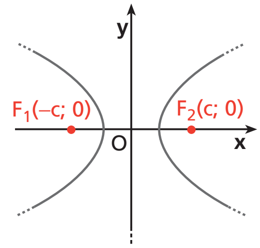
▼ **Figura 2** In un triangolo la differenza fra due lati è minore del terzo.



L'equazione dell'iperbole con i fuochi appartenenti all'asse *x*

Anche per l'iperbole, come per le altre coniche finora esaminate, l'equazione è diversa a seconda della posizione della curva rispetto al sistema di riferimento.

Se si considerano i fuochi sull'asse x o y e il centro come origine degli assi, si ottiene il tipo d'equazione più semplice.



Esaminiamo il caso in cui la retta passante per i punti F_1 e F_2 è l'asse x.

Le coordinate dei fuochi sono allora:

$$F_1(-c; 0), \quad F_2(c; 0).$$

Indicato con $P(x; y)$ un generico punto del piano, poiché P appartiene all'iperbole se e solo se

$$\left| \overline{PF_1} - \overline{PF_2} \right| = 2a,$$

utilizzando la formula della distanza fra due punti, otteniamo:

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Se eliminiamo il valore assoluto, otteniamo:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Con calcoli analoghi a quelli svolti per l'ellisse, si ha l'equazione equivalente:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Poniamo: $\boldsymbol{c^2 - a^2 = b^2}$.
L'equazione diventa allora: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$,
e, dividendo tutti i termini per a^2b^2, otteniamo:

● Questo è possibile perché da $c > a$ segue $c^2 > a^2$ e quindi $c^2 - a^2 > 0$.

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

che è detta **equazione canonica** o **normale** dell'iperbole.
Viceversa, si può dimostrare che ogni equazione del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rappresenta un'iperbole.

ESEMPIO

Consideriamo l'equazione $25x^2 - 4y^2 = 36$.
Dividendo entrambi i membri per 36, otteniamo

$$\frac{25x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

che si può anche scrivere:

$$\frac{x^2}{\frac{36}{25}} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

L'equazione è quindi quella di un'iperbole, con $a^2 = \frac{36}{25}$ e $b^2 = 9$, ossia: $a = \frac{6}{5}$ e $b = 3$.

Le simmetrie nell'iperbole

Poiché nell'equazione canonica sia la variabile x sia la y compaiono solo elevate al quadrato, se $P_1(x_1; y_1)$ è un punto dell'iperbole, lo sono anche i punti $P_2(-x_1; y_1)$, $P_3(x_1; -y_1)$ e $P_4(-x_1; -y_1)$.

L'iperbole è quindi una curva simmetrica rispetto all'asse x, all'asse y e all'origine.

● $(x_1)^2 = (-x_1)^2$
$(y_1)^2 = (-y_1)^2$.

● Si dice anche che l'equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ rappresenta un'iperbole riferita al centro e ai suoi assi di simmetria o, più semplicemente, *un'iperbole riferita ai propri assi.*

L'intersezione dell'iperbole con gli assi cartesiani

Per determinare le intersezioni dell'iperbole con l'asse x, mettiamo a sistema le rispettive equazioni, ossia risolviamo:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \pm a \\ y = 0 \end{cases}$$

Quindi $A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$ sono le intersezioni con l'asse x e si dicono **vertici reali** dell'iperbole. Il segmento A_1A_2 si chiama **asse trasverso**. Ha lo stesso nome anche la retta che passa per A_1 e A_2, ossia l'asse x. Il numero a è la misura della lunghezza del semiasse trasverso. Inoltre i fuochi, che si trovano sull'asse x, giacciono sull'asse trasverso.

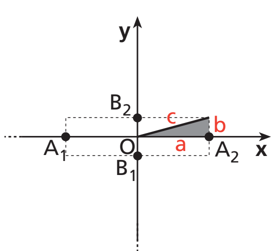
Analogamente, per determinare le intersezioni con l'asse y, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{-y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = -b^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

La prima equazione è impossibile: *l'iperbole non ha intersezioni con l'asse y.*

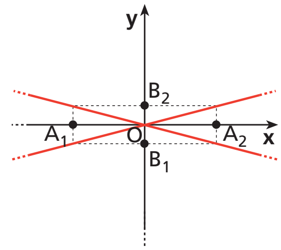
Il grafico dell'iperbole

Per disegnare l'iperbole, è utile evidenziare sull'asse y i punti $B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$, anche se non sono punti di intersezione tra l'iperbole e l'asse delle ordinate.
Tali punti sono anche detti **vertici non reali**. La retta B_1B_2, perpendicolare all'asse trasverso, è detta **asse non trasverso**. Il numero b è la misura della lunghezza del semiasse non trasverso.



Disegniamo il rettangolo con i lati paralleli agli assi cartesiani e passanti per i punti A_1, A_2, B_1 e B_2. Le misure di metà dei lati del rettangolo sono a e b, mentre c, per il teorema di Pitagora, è la misura di metà della diagonale. Infatti dalla relazione $c^2 - a^2 = b^2$ si ha $c^2 = a^2 + b^2$ (figura a lato).

Disegniamo anche le due rette sulle quali giacciono le diagonali del rettangolo. Poiché passano per l'origine e per i punti $(a; b)$ e $(a; -b)$, esse hanno equazioni, rispettivamente,



$$\boldsymbol{y = \frac{b}{a}x} \text{ e } \boldsymbol{y = -\frac{b}{a}x},$$

e sono dette **asintoti** dell'iperbole.

Dimostriamo che tutti i punti dell'iperbole, eccetto i vertici A_1 e A_2, sono esterni al rettangolo.
Ricaviamo y^2 dall'equazione dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si ha $-\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, da cui:

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \quad \to \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Poiché il primo membro y^2 è positivo o nullo, deve esserlo anche il secondo, cioè:

$$\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \geq 0 \quad \to \quad x^2 - a^2 \geq 0 \quad \to \quad x \leq -a \vee x \geq a.$$

Escludendo i vertici A_1 e A_2, i punti dell'iperbole si trovano fuori dalla striscia limitata dalle rette $x = a$ e $x = -a$.

Deduciamo che l'iperbole è costituita da due **rami** distinti.

Dimostriamo ora che i due rami dell'iperbole sono interni agli angoli formati dai due asintoti e contenenti i fuochi.
Consideriamo le intersezioni dell'iperbole con una retta generica passante per l'origine, cioè risolviamo il sistema:

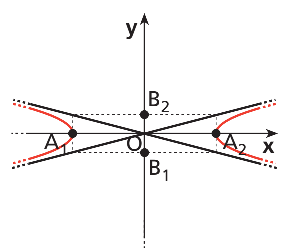
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases}$$

Si ottengono le soluzioni:

$$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}} \qquad \text{e} \qquad y = \pm\frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}.$$

Queste soluzioni sono reali solo se:

$$b^2 - a^2m^2 > 0, \text{ cioè } -\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}.$$



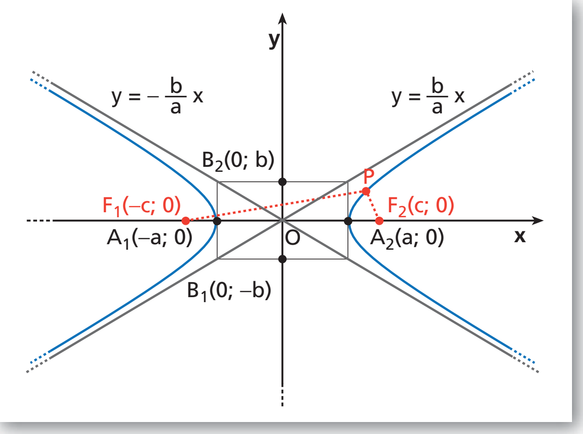
L'iperbole è quindi intersecata da rette passanti per l'origine che si trovano all'interno dei due angoli opposti al vertice formati dagli asintoti e contenenti l'asse x.

Osserviamo che, assegnando a m valori molto vicini a $\pm\frac{b}{a}$, si ha che $b^2 - a^2m^2$ diventa un numero molto piccolo, vicino allo zero, quindi i valori assoluti di x e y tendono a diventare molto grandi. Si dice in questo caso che le rette $y = \pm\frac{b}{a}x$, ovvero gli asintoti, intersecano la curva all'infinito.

Gli asintoti sono quindi rette che non intersecano mai la curva, ma le si avvicinano sempre più man mano che ci si allontana dall'origine.

Il grafico che si ottiene per l'iperbole è disegnato nella figura 3. L'iperbole non è una curva chiusa ed è costituita da due **rami** distinti.

▶ **Figura 3** Grafico dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



▶ **Figura 4** Grafico dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

ESEMPIO

Nell'iperbole di equazione

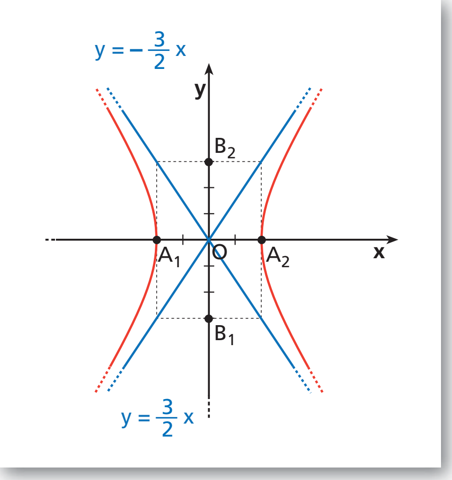
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

essendo $a = 2$ e $b = 3$, i vertici sono

$$A_1(-2;0),\ A_2(2;0),$$
$$B_1(0;-3) \text{ e } B_2(0;3).$$

Le equazioni degli asintoti sono:

$$y = \frac{3}{2}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{3}{2}x.$$



Le coordinate dei fuochi di un'iperbole di equazione nota

Data l'equazione di un'iperbole, è possibile determinare le coordinate dei fuochi. Poiché $c^2 - a^2 = b^2$, otteniamo $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, quindi i fuochi hanno coordinate:

$$\boldsymbol{F_1(-\sqrt{a^2+b^2};0), \quad F_2(\sqrt{a^2+b^2};0).}$$

ESEMPIO

Nell'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,$$

è $a=3$, $b=4$ e $c=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, quindi i vertici sono i punti

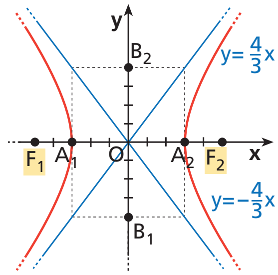
$$A_1(-3;0),\ A_2(3;0),\ B_1(0;-4),\ B_2(0;4),$$

i fuochi sono

$$F_1(-5;0) \text{ e } F_2(5;0)$$

e le equazioni degli asintoti sono:

$$y = \frac{4}{3}x \text{ e } y = -\frac{4}{3}x.$$



L'eccentricità nell'iperbole

Ritroviamo il concetto di **eccentricità** anche nello studio dell'iperbole.
L'eccentricità è il rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse trasverso:

$$e = \frac{\textbf{distanza focale}}{\textbf{lunghezza dell'asse trasverso}}.$$

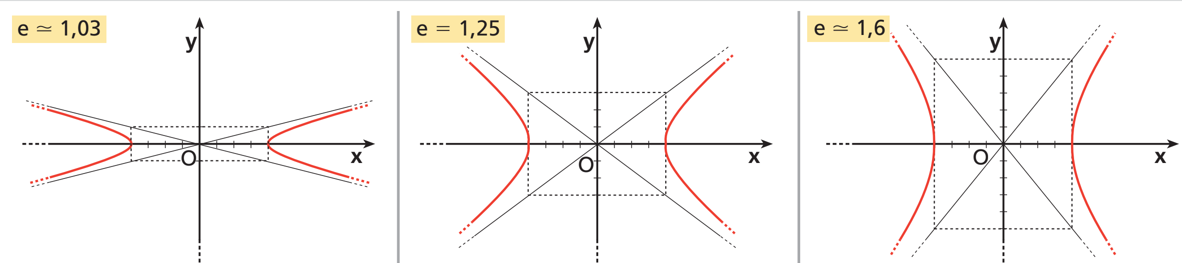
Nell'iperbole con i fuochi sull'asse x la distanza focale è $2c$, mentre la lunghezza dell'asse trasverso è $2a$, quindi l'eccentricità è data dal rapporto:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Poiché $c > a > 0$, osserviamo che $\boldsymbol{e > 1}$.

Per comprendere il significato geometrico dell'eccentricità dell'iperbole, esaminiamo i grafici di tre iperboli con lo stesso valore di a $(a = 4)$ e diversi valori di b. All'aumentare di b, aumenta c, quindi aumenta e. A eccentricità maggiore corrisponde maggiore apertura dei rami dell'iperbole.

▼ **Figura 5**



a. Grafico di $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$.
Essendo $a = 4$, $b = 1$:
$c = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$
$e = \frac{\sqrt{17}}{4} \simeq 1{,}03$.

b. Grafico di $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.
$a = 4$, $b = 3$, quindi:
$c = \sqrt{16+9} = 5$
$e = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

c. Grafico di $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$.
$a = 4$, $b = 5$, quindi:
$c = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$
$e = \frac{\sqrt{41}}{4} \simeq 1{,}6$.

L'iperbole con i fuochi sull'asse y

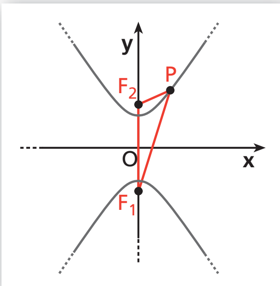
Esaminiamo ora il caso in cui la retta passante per i fuochi, F_1 e F_2, è l'asse y. Indichiamo le coordinate dei fuochi con $F_1(0; -c)$ e $F_2(0; c)$.

In questo caso, diversamente dal precedente, indichiamo con $2b$ la differenza costante fra le distanze di ciascun punto dell'iperbole da ognuno dei due fuochi.

Se P è un generico punto dell'iperbole, dalla definizione data segue l'uguaglianza:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2b.$$

▼ **Figura 6** Nel triangolo F_1F_2P, $2b$ è la misura della differenza delle lunghezze di due lati ed è quindi minore della misura del terzo lato, $2c$. Quindi $b < c$.



Per determinare l'equazione dell'iperbole possiamo ripetere gli stessi ragionamenti fatti per l'iperbole con i fuochi sull'asse x.

In questo caso, dopo aver posto $c^2 - b^2 = a^2$, si ottiene l'equazione:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.}$$

● L'equazione

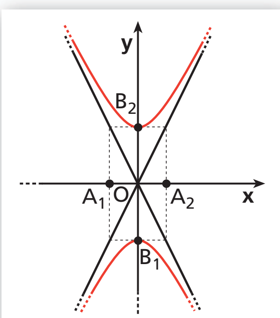
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

si può anche scrivere:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Questa è l'**equazione canonica dell'iperbole con i fuochi sull'asse y**.
Procedendo in modo analogo a quanto visto per l'iperbole con i fuochi sull'asse x, si può verificare che per l'iperbole con i fuochi sull'asse y valgono le seguenti proprietà:

- l'iperbole è simmetrica rispetto agli assi cartesiani e all'origine;
- **l'asse y è l'asse trasverso** e i **vertici reali** sono i punti $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$;
- **l'asse x è l'asse non trasverso** e i punti $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ sono detti **vertici non reali**;
- le rette di equazione $y = -\frac{b}{a}x$ e $y = \frac{b}{a}x$ sono gli **asintoti** dell'iperbole;
- i **fuochi** dell'iperbole hanno coordinate $F_1(0; -\sqrt{b^2 + a^2})$ e $F_2(0; \sqrt{b^2 + a^2})$;
- l'**eccentricità** vale $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b}$.



▲ **Figura 7** Grafico dell'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

ESEMPIO

Nell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$, essendo $a = 2$ e $b = 4$,
i vertici reali sono $B_1(0; -4)$, $B_2(0; 4)$;
i vertici non reali sono

$$A_1(-2; 0), A_2(2; 0);$$

gli asintoti hanno equazioni

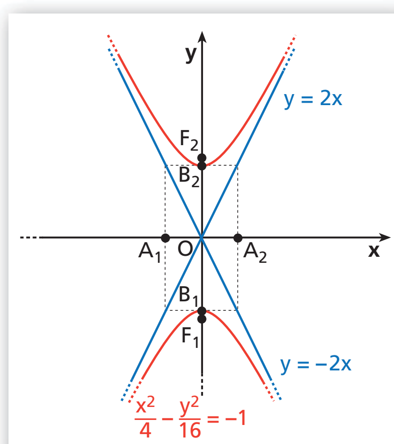
$$y = -2x \text{ e } y = 2x;$$

la semidistanza focale è

$$c = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5};$$

i fuochi sono $F_1(0; -2\sqrt{5})$ e $F_2(0; 2\sqrt{5})$;

l'eccentricità è $e = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.



► **Figura 8** Grafico dell'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1.$$

ESPLORAZIONE

Proietti, satelliti, comete

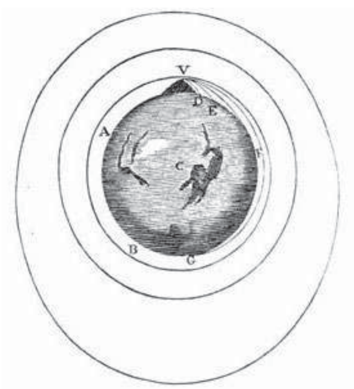
Dalla Terra all'Universo in tre momenti

1. Galileo Galilei (1564-1642) affermò che le traiettorie dei corpi lanciati o, come si diceva allora, dei *proietti*, sono parabole. Trattò matematicamente il loro studio nel suo *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e i movimenti locali*.

2. Giovanni Keplero (1571-1630), studiando il moto di Marte, enunciò le tre leggi relative al moto dei pianeti note con il suo nome. In particolare, nella prima, Keplero affermò che le orbite dei pianeti non sono circolari ma ellittiche, con il Sole in uno dei due fuochi.

3. A partire dalle leggi di Keplero, Isaac Newton (1643-1727) formulò la legge di gravitazione universale: l'attrazione fra due masse avviene rispettando la stessa legge in tutto l'Universo. Il moto di un grave sulla Terra o fuori da essa risponde alle stesse leggi.

► Nel trattato *Il sistema del mondo*, Newton immagina una pietra scagliata da una montagna: se è lanciata con forza sempre più grande, si spinge sempre più lontano, fino a non cadere a terra e continuare a «percorrere i cieli a somiglianza dei pianeti».

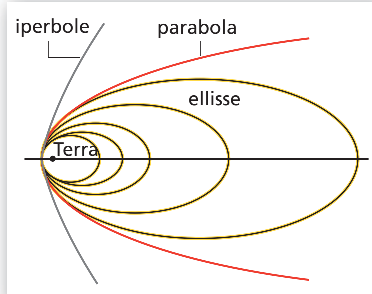


► Nel 1705 Edmund Halley, utilizzando le leggi di Newton, affermò che la cometa osservata nel 1531, nel 1607 e nel 1682 sarebbe ritornata nel 1758, come effettivamente avvenne. L'orbita ellittica della cometa di Halley, a differenza di quella delle orbite dei pianeti, ha una forte eccentricità: 0,967.

Le coniche in orbita

Mediante la legge di gravitazione universale, si può dimostrare che l'orbita descritta da un satellite intorno alla Terra ha sempre la forma di una conica.

► A seconda della velocità di lancio un satellite può assumere una traiettoria ellittica, parabolica o iperbolica. Ciò avviene in un modello semplificato che tenga conto della sola attrazione terrestre.



Si può calcolare che la velocità minima a cui deve essere lanciata la pietra del disegno di Newton (come ogni altro corpo) affinché diventi un satellite della Terra è uguale a 7,9 km/s (*prima velocità cosmica*). Se la velocità ha questo valore ed è in direzione parallela alla superficie terrestre, il moto è *circolare* con raggio uguale a quello della Terra.
L'orbita diventa ellittica se la velocità di lancio aumenta, rimanendo però al di sotto di 11,2 km/s (*seconda velocità cosmica*). Per questo valore la traiettoria diventa una *parabola*. La seconda velocità cosmica è detta anche *velocità di fuga*, perché, superato il suo valore, il satellite riesce a sfuggire alla gravità terrestre lungo una traiettoria *iperbolica*.

Attività

I satelliti geostazionari

C'è una distanza alla quale il periodo dell'orbita di un satellite e quello di rotazione della Terra attorno al proprio asse coincidono. Tale orbita è chiamata *geostazionaria*.

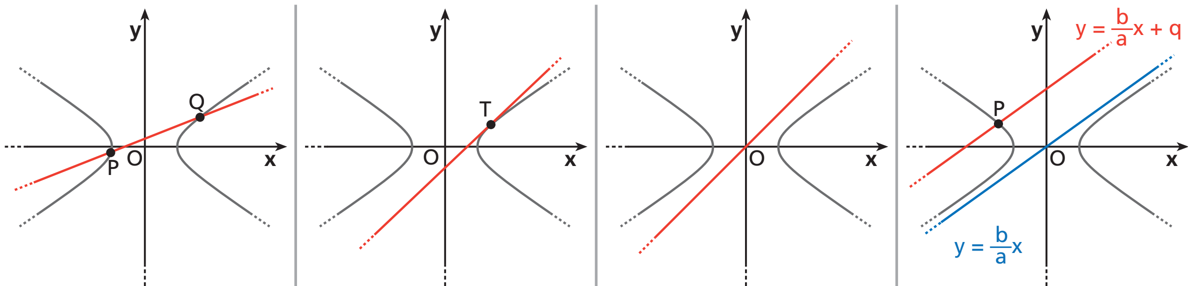
- Cerca informazioni sui satelliti geostazionari.

@ **Cerca nel Web:**
satelliti geostazionari, geostationary orbit

2. LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UN'IPERBOLE

Un'iperbole e una retta possono essere secanti in due punti, essere tangenti in un punto, non intersecarsi in alcun punto oppure, se la retta è parallela a un asintoto, intersecarsi in un punto.

▼ **Figura 9**



a. La retta è secante l'iperbole. I punti di intersezione sono due.

b. La retta, non parallela agli asintoti, è tangente all'iperbole. Il punto di intersezione è unico e si chiama *punto di tangenza*.

c. La retta è esterna all'iperbole. Non vi sono punti di intersezione.

d. La retta è parallela a un asintoto: la retta è secante e il punto di intersezione è unico.

Se vogliamo stabilire la posizione di una retta di equazione $a'x + b'y + c' = 0$, rispetto a un'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, consideriamo il sistema formato dalle due equazioni e studiamo l'equazione risolvente.

- Se l'equazione risolvente è di secondo grado, studiamo il segno del discriminante Δ:
  - se $\mathbf{\Delta > 0}$, il sistema ha due soluzioni reali; la retta è secante l'iperbole in due punti;
  - se $\mathbf{\Delta = 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e coincidenti; la retta è tangente all'iperbole in un punto;
  - se $\mathbf{\Delta < 0}$, il sistema non ha soluzioni reali; la retta è esterna all'iperbole.
- Se l'equazione risolvente è di primo grado, la retta è secante l'iperbole in un solo punto.

ESEMPIO

Studiamo che posizione ha la retta di equazione $2x + 3y - 4 = 0$ rispetto all'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ 2x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo x dall'equazione di primo grado e sostituiamo in quella di secondo grado:

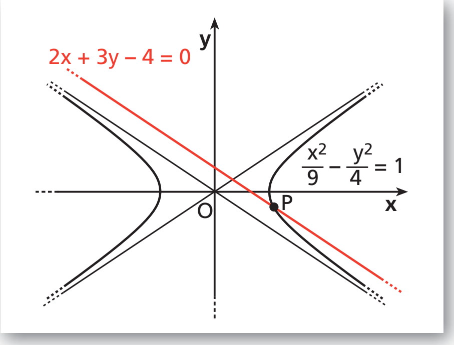
$$\begin{cases} \frac{1}{9}\left(\frac{-3y + 4}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = \frac{-3y + 4}{2} \end{cases}$$

L'equazione risolvente è:

$$9y^2 + 16 - 24y - 9y^2 = 36 \rightarrow -24y - 20 = 0 \rightarrow 6y + 5 = 0.$$

Poiché è un'equazione di primo grado, la retta è secante l'iperbole in un solo punto:

$$P\left(\frac{13}{4}; -\frac{5}{6}\right).$$



▶ **Figura 10** La retta $2x + 3y - 4 = 0$ è secante l'iperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ nel punto $P\left(\frac{13}{4}; -\frac{5}{6}\right)$.

Che la retta sia secante in un solo punto si ricava anche osservando che il suo coefficiente angolare è $-\frac{2}{3}$, e quindi la retta è parallela all'asintoto di equazione $y = -\frac{2}{3}x$.

Le rette tangenti a un'iperbole

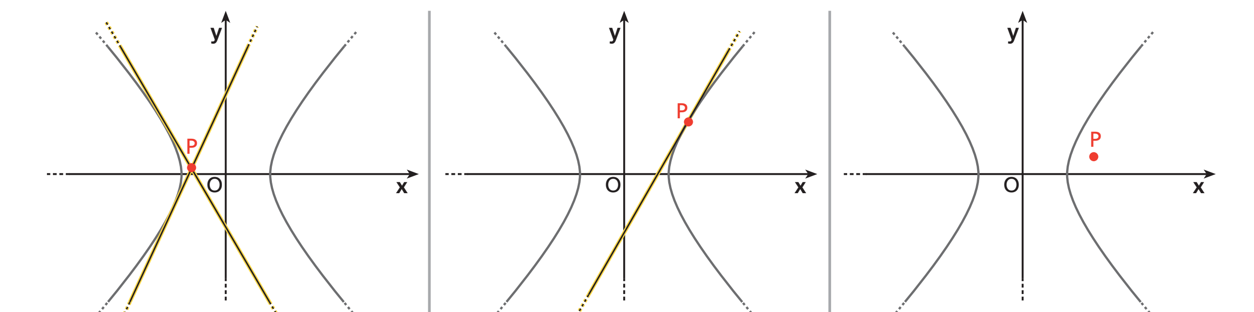
Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti condotte da un punto $P(x_0; y_0)$ alla generica iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, si procede in modo analogo a quanto fatto per la determinazione delle tangenti a una parabola e a un'ellisse.

- Si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per P, $y - y_0 = m(x - x_0)$.
- Si scrive il sistema formato dalle equazioni del fascio e dell'iperbole:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

- Si giunge all'equazione risolvente di secondo grado nella variabile x oppure nella variabile y.
- Si pone la condizione di tangenza, ossia $\boldsymbol{\Delta = 0}$.
- Si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m:
  - se $\boldsymbol{m_1 \neq m_2}$, le rette tangenti sono due e il punto è esterno all'iperbole (figura 11*a*);
  - se $\boldsymbol{m_1 = m_2}$, la retta tangente è una sola e il punto appartiene all'iperbole (figura 11*b*);
  - se $\boldsymbol{m_1, m_2} \notin \mathbb{R}$, non esistono rette tangenti e il punto è interno all'iperbole (figura 11*c*).

▼ **Figura 11**



a. Esistono due rette tangenti per *P*.

b. *P* appartiene all'iperbole: esiste una sola retta tangente per *P*.

c. Non esistono rette tangenti per *P*.

Se il punto P appartiene a un asintoto, allora fra le equazioni delle tangenti si trova anche l'equazione dell'asintoto stesso. Gli asintoti, infatti, sono considerati tangenti all'iperbole in un punto all'infinito.

La formula di sdoppiamento

Per determinare l'equazione della retta *tangente all'iperbole in un suo punto* $P(x_0; y_0)$, si può utilizzare la **formula di sdoppiamento**:

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1} \qquad \text{per l'iperbole } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = -1} \qquad \text{per l'iperbole } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Le formule si ottengono dall'equazione canonica dell'iperbole sostituendo il termine x^2 con xx_0 e il termine y^2 con yy_0.

3. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UN'IPERBOLE

Poiché nell'equazione dell'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(\text{oppure } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1\right)$$

sono presenti due coefficienti a e b, per determinarla occorrono due condizioni sull'iperbole. Esse permettono di impostare un sistema di due equazioni nelle incognite a e b.

Alcune condizioni possibili sono le seguenti:

- sono note le coordinate di un fuoco e di un vertice;
- l'iperbole passa per un punto noto e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice);
- l'iperbole passa per un punto noto e si conosce l'eccentricità;
- l'iperbole passa per due punti noti;
- è nota l'eccentricità e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice);
- è nota l'equazione di un asintoto e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice, o di un punto per il quale passa l'iperbole);
- è nota l'equazione di una retta tangente all'iperbole e sono note le coordinate di un punto della curva (o di un vertice, o di un fuoco).

Le coordinate di un fuoco o di un vertice corrispondono a una sola condizione.

La conoscenza di un vertice fornisce direttamente il valore di a o b, mentre gli altri tipi di condizioni forniscono delle equazioni nelle incognite a e b.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione dell'iperbole avente fuoco $F(\sqrt{5}; 0)$ e passante per $P\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; 1\right)$.

Dalle coordinate del fuoco ricaviamo l'equazione:

$$a^2 + b^2 = 5.$$

Sostituendo le coordinate del punto P nell'equazione canonica dell'iperbole otteniamo:

$$\frac{5}{4a^2} - \frac{1}{b^2} = 1.$$

Risolviamo il sistema costituito dalle due relazioni ottenute:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ \dfrac{5}{4a^2} - \dfrac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = 5 - b^2 \\ 5b^2 - 4a^2 = 4a^2b^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 = 5 - b^2 \\ 5b^2 - 20 + 4b^2 = 20b^2 - 4b^4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = 5 - b^2 \\ 4b^4 - 11b^2 - 20 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo:

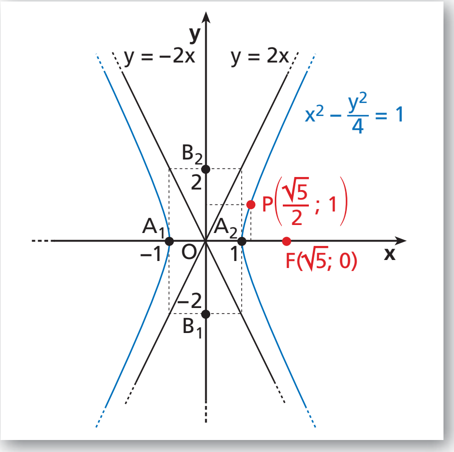
$$b^2 = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 320}}{8} = \frac{11 \pm 21}{8} = \begin{cases} 4 \\ -\dfrac{5}{4} \text{ (non accettabile)} \end{cases}$$

Poiché b^2 è sempre positivo, l'unica soluzione accettabile è $b^2 = 4$ e:

$$a^2 = 5 - b^2 = 5 - 4 = 1.$$

L'equazione richiesta si ottiene sostituendo i valori dei parametri nell'equazione canonica dell'iperbole:

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1.$$



▶ **Figura 12** Grafico dell'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

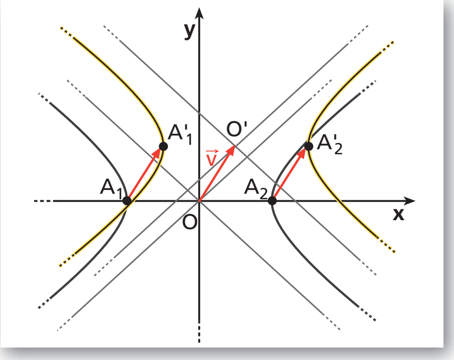
4. L'IPERBOLE TRASLATA

IN PRATICA ▶ Videolezione 23

Analogamente a quanto visto per l'ellisse, se trasformiamo un'iperbole con una traslazione di vettore $\vec{v}$, la curva ottenuta è ancora un'iperbole; infatti, indicando con P' il corrispondente di un punto P dell'iperbole e con F'_1 e F'_2 i corrispondenti dei fuochi F_1 e F_2 dell'iperbole, vale ancora:

$$\left| \overline{P'F'_1} - \overline{P'F'_2} \right| = 2a.$$

L'iperbole traslata ha il centro, i vertici, gli assi di simmetria e gli asintoti che sono i corrispondenti di quelli dell'iperbole data.



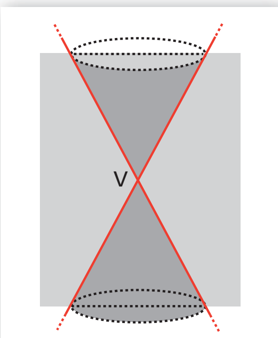
◀ **Figura 13**

● L'equazione dell'iperbole corrispondente all'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

nella stessa traslazione è

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1.$$



▲ **Figura 14** Se consideriamo l'intersezione fra una superficie conica e un piano che contiene l'asse del cono, otteniamo un'iperbole degenere costituita da due rette che passano per il vertice del cono.

Procedendo in modo analogo a quanto fatto per l'ellisse, si dimostra che l'equazione dell'iperbole corrispondente all'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(p; q)$ è:

$$\boldsymbol{\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1}.$$

Svolgendo i calcoli e con opportune sostituzioni, si ottiene l'equazione

$$\boldsymbol{a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0}$$

di secondo grado nelle incognite x e y come l'equazione dell'ellisse traslata. Rispetto a questa, però, nell'equazione dell'iperbole, **a' e b' hanno segno opposto**.
Anche per l'iperbole si dimostra che le coordinate del centro di simmetria O' sono:

$$\boldsymbol{x_{O'} = p = -\frac{c'}{2a'},\ y_{O'} = q = -\frac{d'}{2b'}}.$$

Viceversa, data un'equazione

$$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0,$$

si può dimostrare che, se a' e b' hanno segno opposto, allora, o rappresenta un'iperbole con il centro di coordinate

$$O'\left(-\frac{c'}{2a'}; -\frac{d'}{2b'}\right),$$

e con assi di simmetria di equazione

$$x = -\frac{c'}{2a'}, \qquad y = -\frac{d'}{2b'},$$

oppure rappresenta una coppia di rette passanti per il centro di simmetria, che chiamiamo **iperbole degenere** (figura 14).

5. L'IPERBOLE EQUILATERA

L'iperbole equilatera riferita agli assi di simmetria

Se nell'equazione canonica, cioè riferita al centro e agli assi di simmetria, si ha $a = b$, l'iperbole si dice **equilatera**.

Per esempio, consideriamo il caso in cui i fuochi siano sull'asse x.

L'equazione dell'iperbole è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

che può anche essere scritta nella forma:

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = a^2}.$$

Se i fuochi sono sull'asse y, l'equazione dell'iperbole equilatera è:

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = -a^2}.$$

Essendo $2a = 2b$, il rettangolo che ha lati paralleli all'asse trasverso e a quello non trasverso diventa un quadrato. Le equazioni degli **asintoti** sono

$$\boldsymbol{y = x} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y = -x}:$$

gli asintoti coincidono con le bisettrici dei quadranti e sono quindi perpendicolari tra di loro.

● In generale, un'iperbole si dice *equilatera* se i suoi asintoti sono perpendicolari.

La semidistanza focale nell'iperbole equilatera diventa:

$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2},$$

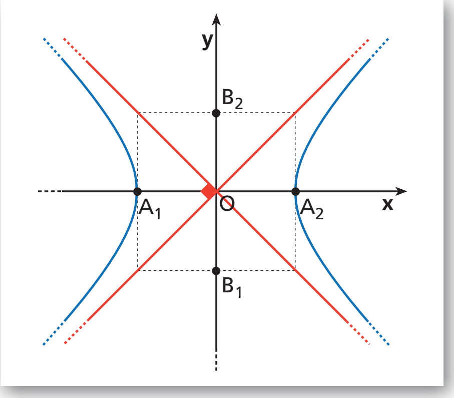
e l'**eccentricità** vale $e = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{e = \sqrt{2}}.$

ESEMPIO

L'iperbole di equazione

$$x^2 - y^2 = 9$$

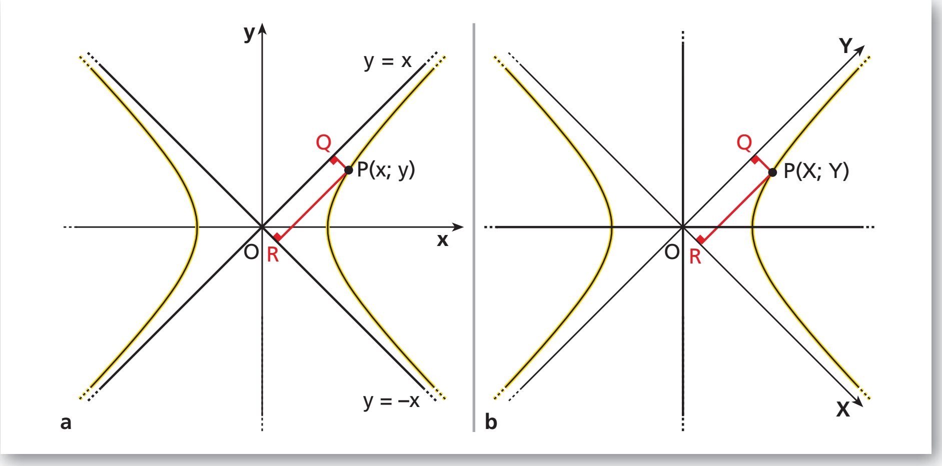
ha per vertici $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;-3)$ e $B_2(0;3)$. I fuochi sono $F_1(-3\sqrt{2};0)$ e $F_2(3\sqrt{2};0)$.



▶ **Figura 15** Grafico dell'iperbole $x^2 - y^2 = 9$ riferita ai suoi assi di simmetria.

L'iperbole equilatera riferita agli asintoti

In un'iperbole equilatera, gli asintoti coincidono con le bisettrici dei quadranti, ovvero sono perpendicolari fra loro. Consideriamo quindi gli asintoti come assi, X e Y, di un nuovo sistema di riferimento per l'iperbole.
Consideriamo l'iperbole nei due sistemi di riferimento xOy e XOY. Sia P un punto dell'iperbole, esso ha coordinate $(x; y)$ nel primo sistema e $(X; Y)$ nel secondo.



◀ **Figura 16** L'iperbole equilatera:
a) riferita agli assi;
b) riferita agli asintoti.

Nel riferimento xOy	Nel riferimento XOY
$\overline{PQ} = \frac{\lvert x-y \rvert}{\sqrt{2}}$	$\overline{PQ} = \lvert X \rvert$
$\overline{PR} = \frac{\lvert x+y \rvert}{\sqrt{2}}$	$\overline{PR} = \lvert Y \rvert$
$\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = \frac{\lvert x-y \rvert}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\lvert x+y \rvert}{\sqrt{2}} = \frac{\lvert x^2-y^2 \rvert}{2} = \frac{a^2}{2}$	$\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = \lvert X \rvert \cdot \lvert Y \rvert = \lvert X \cdot Y \rvert$

● Distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta di equazione $ax + by + c = 0$:

$$d = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Confrontando i risultati ottenuti, abbiamo:

$$\lvert XY \rvert = \frac{a^2}{2},$$

$$XY = \pm \frac{a^2}{2}.$$

Considerando il riferimento XOY, se i rami dell'iperbole si trovano nel primo o terzo quadrante, è $XY = \frac{a^2}{2}$, mentre, se si trovano nel secondo o quarto quadrante, è $XY = -\frac{a^2}{2}$.

● Per semplicità, anche nel caso di iperbole equilatera riferita ai propri asintoti, indichiamo gli assi con x e y (anziché con X e Y).

Ponendo uguale a k l'espressione costante del secondo membro, otteniamo che l'equazione di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti è:

$$\boldsymbol{xy = k},$$

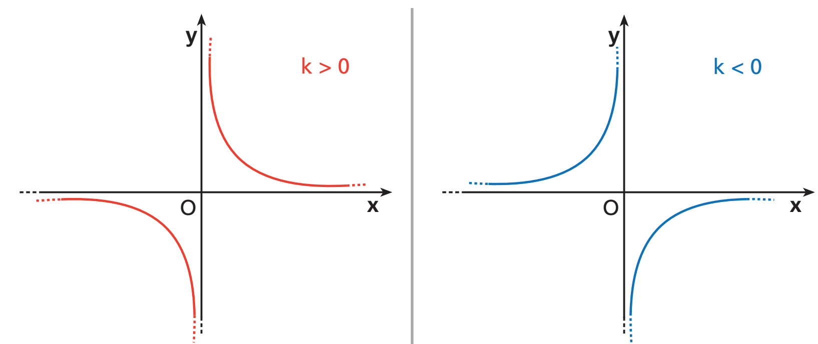
con k costante positiva o negativa.

● L'equazione $xy = k$, ovvero $y = \frac{k}{x}$, indica che fra le variabili x e y c'è **proporzionalità inversa**. k è la costante di proporzionalità.

La relazione fra le costanti a e k relative alle due equazioni $x^2 - y^2 = a^2$ e $xy = k$ è quindi:

$$k = \frac{a^2}{2} \text{ o } k = -\frac{a^2}{2}.$$

Nella figura 17 esaminiamo i due possibili casi.



a. Se $k > 0$, i rami dell'iperbole sono nel primo e terzo quadrante.

b. Se $k < 0$, i rami dell'iperbole sono nel secondo e quarto quadrante.

▶ **Figura 17** Grafico dell'iperbole equilatera di equazione $xy = k$. Gli assi sono gli asintoti dell'iperbole.

● Se $k = 0$, è $xy = 0$, da cui $x = 0 \vee y = 0$, e si ha un'iperbole equilatera degenere, ossia l'unione dei due assi coordinati.

Gli assi di simmetria dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti sono le bisettrici dei quadranti, e quindi i fuochi e i vertici appartengono a tali rette.
Le coordinate dei vertici reali sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} xy = k \\ y = x \end{cases} \text{ per } k > 0, \qquad \begin{cases} xy = k \\ y = -x \end{cases} \text{ per } k < 0.$$

I vertici reali hanno coordinate:

per $k > 0$: $A_1(-\sqrt{k}; -\sqrt{k})$ e $A_2(\sqrt{k}; \sqrt{k})$;

per $k < 0$: $A_1(-\sqrt{-k}; \sqrt{-k})$ e $A_2(\sqrt{-k}; -\sqrt{-k})$.

La lunghezza del semiasse trasverso in entrambi i casi è:

$$a = \overline{OA_2} = \sqrt{|k| + |k|} = \sqrt{2|k|}.$$

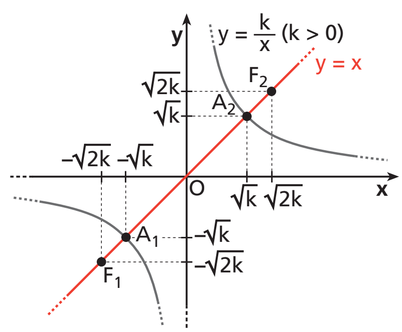
La semidistanza focale è:

$$c = a\sqrt{2} = \sqrt{2|k|} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{|k|}.$$

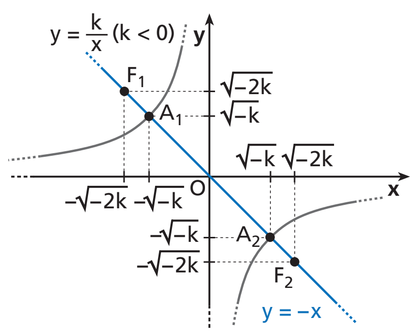
Le coordinate dei fuochi sono:

per $k > 0$: $F_1(-\sqrt{2k}; -\sqrt{2k})$ e $F_2(\sqrt{2k}; \sqrt{2k})$;

per $k < 0$: $F_1(-\sqrt{-2k}; \sqrt{-2k})$ e $F_2(\sqrt{-2k}; -\sqrt{-2k})$.



a. Se $k > 0$, i vertici e i fuochi appartengono alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



b. Se $k < 0$, i vertici e i fuochi appartengono alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

◀ **Figura 18**

ESEMPIO

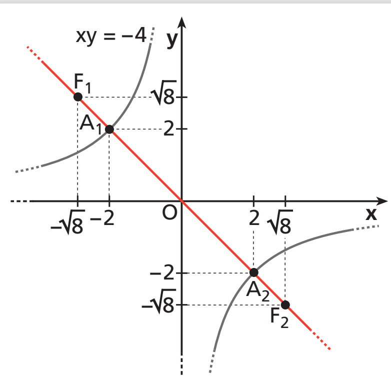
L'iperbole equilatera di equazione

$$xy = -4$$

ha per asse trasverso la bisettrice del secondo e quarto quadrante. I vertici sono i punti

$$A_1(-2; 2) \text{ e } A_2(2; -2).$$

I fuochi sono i punti $F_1(-\sqrt{8}; \sqrt{8})$ e $F_2(\sqrt{8}; -\sqrt{8})$.



▶ **Figura 19** Grafico dell'iperbole $xy = -4$ riferita ai suoi asintoti.

L'equazione dell'iperbole dell'esempio riferita ai propri assi si ottiene ricavando a^2:

$$-\frac{a^2}{2} = k,$$

da cui

$$a^2 = 8.$$

L'equazione cercata, considerando i fuochi sull'asse x, è

$$x^2 - y^2 = 8.$$

IN PRATICA
▶ Videolezione 24

La funzione omografica

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione dell'iperbole ottenuta applicando all'iperbole equilatera riferita agli asintoti di equazione $xy = 1$ la traslazione di vettore $\vec{v}(1; 3)$. Scriviamo le equazioni della traslazione e ricaviamo la x e la y:

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$

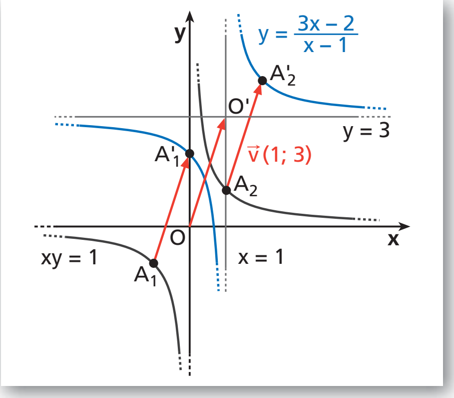
Sostituiamo nell'equazione data le espressioni di x e y e togliamo gli apici. L'equazione diventa:

$$(x - 1)(y - 3) = 1.$$

Ricaviamo la y:

$$y - 3 = \frac{1}{x - 1} \rightarrow y = 3 + \frac{1}{x - 1} \rightarrow y = \frac{3x - 3 + 1}{x - 1} \rightarrow y = \frac{3x - 2}{x - 1}.$$

L'equazione ottenuta rappresenta un'iperbole che ha centro in $O'(1; 3)$ e asintoti paralleli agli assi cartesiani di equazione $x = 1$ e $y = 3$.



▶ **Figura 20** In blu il grafico dell'iperbole di equazione $y = \frac{3x - 2}{x - 1}$ che ha centro in $O'(1; 3)$ e asintoti di equazione $x = 1$ e $y = 3$.

In generale, si può dimostrare che, se si considera un'iperbole equilatera che ha gli asintoti paralleli agli assi cartesiani, allora tale curva ha un'equazione del tipo:

$$\boldsymbol{y = \frac{ax + b}{cx + d}}, \quad \text{con } c \neq 0 \text{ e } ad - bc \neq 0.$$

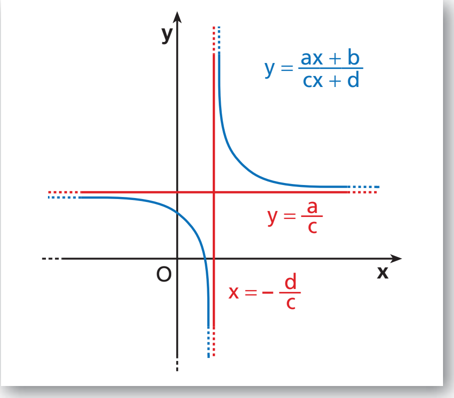
Possiamo leggere quest'ultima relazione come funzione $y = f(x)$ della variabile x: la **funzione omografica**.

Le equazioni degli asintoti sono:

$$x = -\frac{d}{c} \quad \text{e} \quad y = \frac{a}{c}.$$

Le coordinate del centro di simmetria sono:

$$\boldsymbol{C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)}.$$



▶ **Figura 21** Iperbole equilatera riferita ad assi paralleli agli asintoti.

Viceversa, si può dimostrare che ogni equazione del tipo precedente rappresenta un'iperbole equilatera.

ESEMPIO

L'equazione

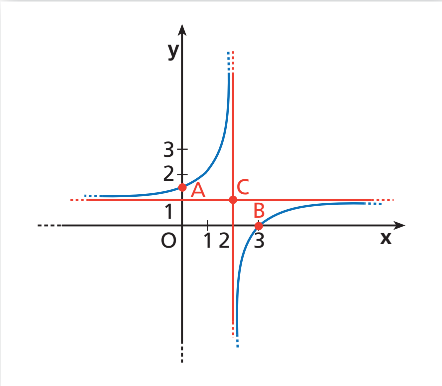
$$y = \frac{x-3}{x-2}$$

rappresenta un'iperbole che ha centro $C(2; 1)$. Per disegnare il suo grafico possiamo considerare alcuni suoi punti. Per esempio, determiniamo quelli di intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x-3}{x-2} \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \to A\left(0; \frac{3}{2}\right)$$

e

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x-3}{x-2} \end{cases} \to \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \to B(3; 0).$$



◀ **Figura 22** Grafico della funzione omografica $y = \frac{x-3}{x-2}$.

● Affinché l'equazione $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ rappresenti un'iperbole occorre che sia $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$.

Se una di queste due condizioni non è soddisfatta, l'equazione rappresenta invece una retta.

Se $c = 0$, l'equazione diventa:

$$y = \frac{ax+b}{d} \to y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d},$$

che rappresenta una retta.

Se $ad - bc = 0$, allora possiamo scrivere:

$$ad = bc \to \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Indicando con m il rapporto $\frac{a}{c}$, abbiamo:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = m \to a = mc \text{ e } b = md.$$

Sostituendo a e b nell'equazione data, otteniamo:

$$y = \frac{mcx + md}{cx+d} \to y = \frac{m(cx+d)}{cx+d} \to y = m, \text{ con } x \neq -\frac{d}{c},$$

che è l'equazione di una retta parallela all'asse x, privata del suo punto di ascissa $-\frac{d}{c}$.

● Per esempio, l'equazione

$$y = \frac{2x+6}{x+3}$$

non rappresenta un'iperbole equilatera perché si può scrivere:

$$y = \frac{2(x+3)}{x+3} \to$$
$$\to y = 2, \text{ con } x \neq -3.$$

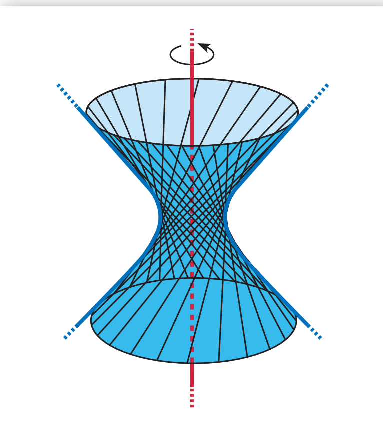
Si tratta quindi di una retta parallela all'asse x privata del punto $(-3; 2)$.

LE TORRI DI RAFFREDDAMENTO

Perché le torri di raffreddamento hanno forma iperbolica?

▶ Il quesito completo a pag. 435

Le torri di raffreddamento, in particolare quelle delle centrali nucleari, hanno una forma «a iperbole».
Più precisamente, la loro superficie è parte di un iperboloide a una falda che si ottiene facendo ruotare un'iperbole intorno al suo asse non trasverso.
In figura puoi osservarne un modello,



o meglio una sua parte, poiché l'iperboloide ha estensione infinita.
Per ogni punto dell'iperboloide a una falda passano due rette che appartengono completamente alla superficie.
Per questo si dice anche che essa è una superficie doppiamente rigata.

Robustezza e risparmio
La scelta di utilizzare questa forma nelle torri di raffreddamento è dovuta a due ragioni principali:

- è una forma molto stabile da un punto di vista strutturale;
- è facile da costruire utilizzando travi metalliche (disposte come alcune delle rette del reticolo).

Inoltre, una torre con questa forma ha la caratteristica di offrire il minimo profilo al vento e quindi corre meno rischi di essere abbattuta da venti di eccezionale intensità.

L'iperboloide, infine, richiede la minore quantità possibile di materiale per essere costruito.
Per dare un'idea di quanto poco materiale serva, basta pensare che una torre alta 150 metri può avere uno spessore di 12 centimetri, cioè quello di un solo mattone, senza perdere in robustezza.

La scelta di utilizzare la forma a iperboloide, quindi, non dipende da proprietà termiche o di raffreddamento delle acque di scarico dei processi industriali. Viene adottata solo per ragioni di economia (il poco materiale necessario) e di robustezza (si possono usare travi metalliche che formano il reticolo sul quale costruire l'iperboloide).
Per queste ragioni tale struttura è usata anche in ambiti architettonici non industriali.

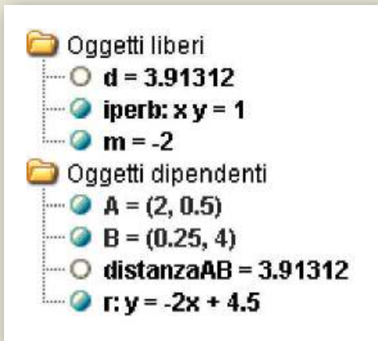
Iperboloidi e architettura

La struttura dell'iperboloide è stata utilizzata in molte opere architettoniche, per esempio da Oscar Niemeyer, nella Cattedrale di Brasilia (foto in basso), da Le Corbusier e da Vladimir G. Shukhov.
Nelle foto a fianco trovi la torre di Shukhov a Mosca e la torre della città di Kōbe in Giappone.

LABORATORIO DI MATEMATICA
L'IPERBOLE

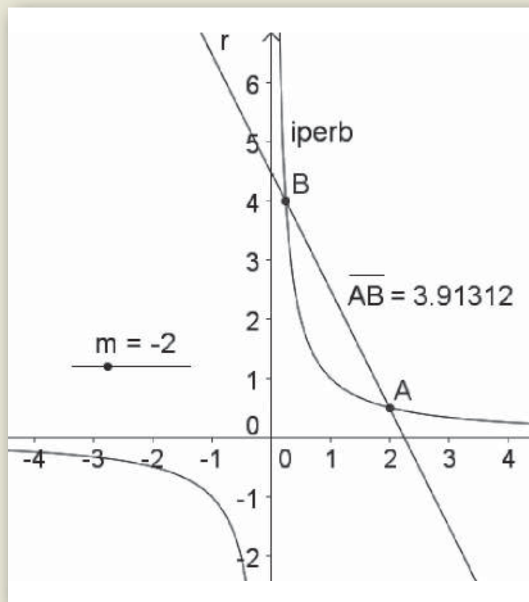
ESERCITAZIONE GUIDATA

Determiniamo, con l'aiuto di GeoGebra, il coefficiente angolare m della retta di equazione $y = mx + \frac{9}{2}$, in modo che tale retta, intersecando l'iperbole di equazione $xy = 1$, formi una corda lunga $d = \frac{7\sqrt{5}}{4}$.



▲ **Figura 1**

- Entriamo in ambiente GeoGebra e per mezzo della riga di inserimento immettiamo nella finestra algebrica (figura 1) la lunghezza d della corda e poi l'equazione dell'iperbole, il cui grafico appare automaticamente nella zona del disegno (figura 2).
- Con *Slider* attiviamo una *slider* alla quale diamo il nome m.
- Inseriamo la retta r con il coefficiente angolare m dipendente dalla *slider* (figura 2).
- Con *Intersezione fra due figure* ricaviamo i due punti A e B.
- Con *Segmento per due punti* applicato ad A e a B evidenziamo il segmento, facendo apparire la sua lunghezza sia nel disegno sia nella finestra algebrica.
- Con il mouse spostiamo il cursore della *slider* e di conseguenza variano l'inclinazione della retta r, la posizione dei punti A e B e la lunghezza della corda AB.
- Quando la lunghezza della corda coincide con d, ci fermiamo e leggiamo il coefficiente angolare della retta r: $m = -2$, il risultato richiesto (figura 2).



▲ **Figura 2**

Nel sito: ▶ **1 esercitazione guidata** ▶ **9 esercitazioni in più**

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer risolvi i seguenti problemi.

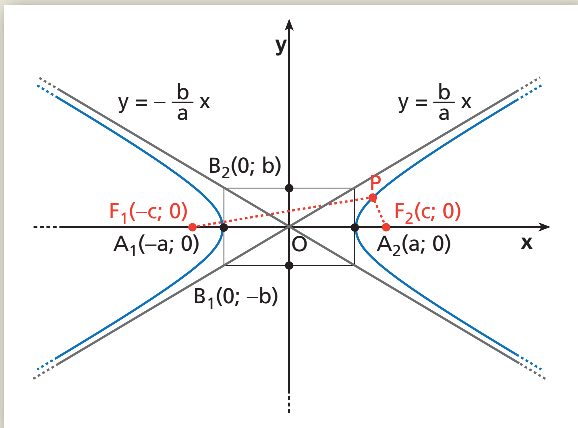
1 Determina il coefficiente k dell'iperbole di equazione $xy = k$, sapendo che intersecando la retta di equazione $y = -x + 3$ forma una corda lunga $d = 5\sqrt{2}$. [$k = -4$]

2 Dette A, B, C e D le intersezioni dell'iperbole di equazione $xy = k$ con la circonferenza di equazione $4x^2 + 4y^2 = 17$, determina il coefficiente k in modo che il rettangolo $ABCD$ abbia area $S = \frac{15}{2}$. [$k = -1 \vee k = 1$]

LA TEORIA IN SINTESI

L'IPERBOLE

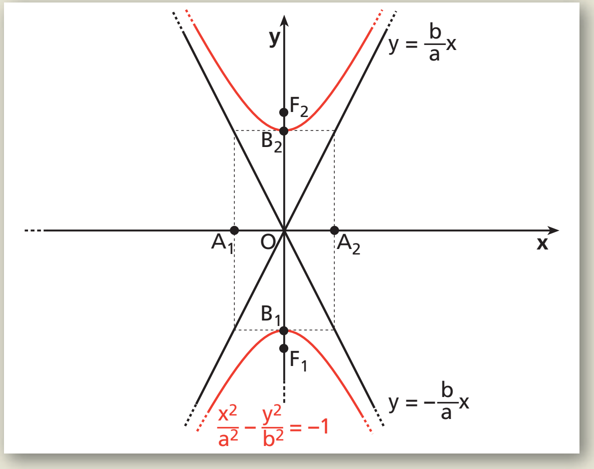
1. L'IPERBOLE E LA SUA EQUAZIONE



- **Iperbole**: luogo geometrico dei punti P che hanno costante la differenza delle distanze da due punti F_1 e F_2, detti **fuochi**.
- **L'iperbole con i fuochi sull'asse *x***
  - **Equazione canonica** dell'iperbole quando i fuochi sono sull'asse x e l'asse y passa per il punto medio del segmento che li congiunge:
    $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
  - **Fuochi**: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, con $a < c$ e $c^2 - a^2 = b^2$.

    ESEMPIO: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ è l'equazione dell'iperbole con fuochi $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$.
  - **Vertici reali**: $A_1(-a; 0)$ e $A_2(a; 0)$, intersezioni dell'iperbole con l'asse x.
    $B_1(0; -b)$ e $B_2(0; b)$ *non* sono intersezioni con l'asse y e sono detti **vertici non reali**.
  - **Asse trasverso A_1A_2**: asse passante per i vertici reali. B_1B_2 è invece detto **asse non trasverso**.
  - L'iperbole non è una curva chiusa ed è costituita da due **rami** distinti. Man mano che ci si allontana dall'origine, entrambi i rami si avvicinano sempre più a due rette, dette **asintoti**, di equazioni:
    $$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

    ESEMPIO: Nell'iperbole dell'esempio precedente si hanno $A_1(-4; 0)$ e $A_2(4; 0)$, $B_1(0; -3)$ e $B_2(0; 3)$.
    Gli asintoti hanno equazioni:
    $$y = \pm\frac{3}{4}x.$$
  - **Eccentricità *e***: rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse trasverso; indica la forma più o meno schiacciata dell'iperbole.
    $$e = \frac{\text{distanza focale}}{\text{lunghezza dell'asse trasverso}}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}, e > 1.$$



- **L'iperbole con i fuochi sull'asse *y***
  - Se i fuochi dell'iperbole sono sull'asse y, **l'equazione canonica** dell'iperbole è:
    $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$
  - L'asse y è l'asse trasverso e i **vertici reali** sono i punti $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$; l'asse x è l'asse non trasverso e i punti $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ sono detti **vertici non reali**. I **fuochi** sono $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$, con $c^2 = a^2 + b^2$, e quindi $c = \sqrt{a^2+b^2}$.
  - **Eccentricità**: $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$, $e > 1$.

Bergamini, Trifone, Barozzi MANUALE BLU 2.0 DI MATEMATICA - Vol.3 © Zanichelli 2012 *Moduli S+L*

2. LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UN'IPERBOLE

- Considerato il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

formato dalle equazioni di un'iperbole e di una retta, si studia il segno del discriminante dell'equazione risolvente. Se:

- $\boldsymbol{\Delta > 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e distinte; **la retta è secante l'iperbole in due punti**;
- $\boldsymbol{\Delta = 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e coincidenti; **la retta è tangente all'iperbole in un punto**;
- $\boldsymbol{\Delta < 0}$, il sistema non ha soluzioni reali; **la retta è esterna all'iperbole**.

Se l'equazione risolvente è di primo grado, la retta è secante l'iperbole in un solo punto.

- Per determinare le equazioni delle **rette tangenti condotte da un punto** $P(x_0; y_0)$ all'iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$:
  - si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per P, $y - y_0 = m(x - x_0)$;
  - si scrive il sistema formato dalle equazioni del fascio e dell'iperbole:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

  - si arriva all'**equazione risolvente di secondo grado** nella variabile x oppure nella variabile y;
  - si pone la condizione di tangenza, $\boldsymbol{\Delta = 0}$;
  - si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m:
    – se $\boldsymbol{m_1 \neq m_2}$, le rette tangenti sono due e il punto è esterno all'iperbole;
    – se $\boldsymbol{m_1 = m_2}$, la retta tangente è una sola e il punto appartiene all'iperbole;
    – se $\boldsymbol{m_1, m_2 \notin \mathbb{R}}$, non esistono rette tangenti e il punto è interno all'iperbole.

Se il punto P appartiene a un asintoto, fra le equazioni delle tangenti si trova anche l'equazione dell'asintoto stesso. Gli asintoti, infatti, sono considerati tangenti all'iperbole in un punto all'infinito.

- **Formula di sdoppiamento**: $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$ o $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = -1$.

Fornisce l'equazione della tangente a un'iperbole in un suo punto $(x_0; y_0)$.

3. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UN'IPERBOLE

- L'equazione dell'iperbole contiene due coefficienti a e b, sono quindi necessarie due condizioni per determinarli. Alcune condizioni possibili sono le seguenti:
  - sono note le coordinate di un fuoco e di un vertice;
  - l'iperbole passa per un punto noto e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice);
  - l'iperbole passa per un punto noto e si conosce l'eccentricità;
  - l'iperbole passa per due punti noti;
  - è nota l'eccentricità e si conoscono le coordinate di un fuoco (o di un vertice);
  - sono note l'equazione di un asintoto e le coordinate di un fuoco (o di un vertice, o di un punto dell'iperbole);
  - è nota l'equazione di una retta tangente all'iperbole e sono note le coordinate di un punto della curva (o di un vertice, o di un fuoco).

4. L'IPERBOLE TRASLATA

- **Traslazione di un'iperbole mediante vettore** $\vec{v}(p; q)$. La curva ottenuta è ancora un'iperbole di equazione

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = \pm 1,$$

riconducibile alla forma:

$$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0, \text{ dove } a' \text{ e } b' \text{ hanno segno opposto.}$$

Le coordinate del centro di simmetria O' sono: $x_{O'} = p = -\frac{c'}{2a'}$, $y_{O'} = q = -\frac{d'}{2b'}$.

Viceversa, data un'equazione

$$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0,$$

se a' e b' hanno segno opposto, essa rappresenta un'iperbole con **centro** di coordinate $O'\left(-\frac{c'}{2a'}; -\frac{d'}{2b'}\right)$ e con **assi di simmetria** di equazioni $x = -\frac{c'}{2a'}$, $y = -\frac{d'}{2b'}$, oppure rappresenta una coppia di rette passanti per il centro di simmetria. Tale coppia è detta **iperbole degenere**.

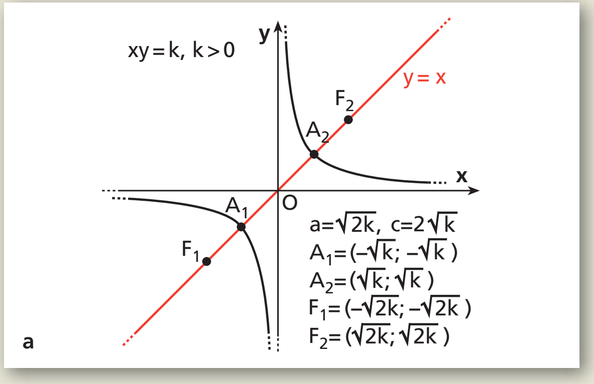
5. L'IPERBOLE EQUILATERA

- **Iperbole equilatera**: si ha $a = b$ e l'equazione diventa:
  - $x^2 - y^2 = a^2$ se i fuochi sono sull'asse x,
  - $x^2 - y^2 = -a^2$ se i fuochi sono sull'asse y.

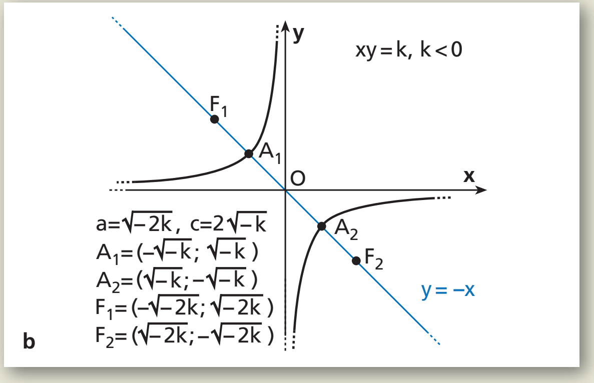
- Gli **asintoti** coincidono con le **bisettrici dei quadranti**. L'equazione dell'iperbole equilatera **riferita agli asintoti** è:

  $xy = k$, con k costante positiva o negativa.

  - Se $k > 0$, i rami dell'iperbole sono nel I e III quadrante (figura *a*).
  - Se $k < 0$, sono nel II e IV quadrante (figura *b*).



a



b

- Un'iperbole equilatera che ha gli asintoti paralleli agli assi cartesiani ha un'equazione del tipo

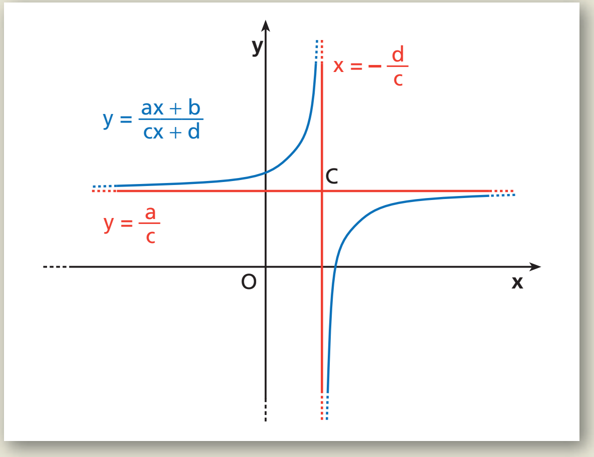
  $$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ con } c \neq 0 \text{ e } ad - bc \neq 0.$$

  L'equazione esprime una funzione detta **funzione omografica**.
  Gli **asintoti** hanno equazioni:

  $$x = -\frac{d}{c} \text{ e } y = \frac{a}{c}.$$

  Il **centro di simmetria** è $C\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$.

  ESEMPIO: $y = \frac{3x - 5}{x + 2}$ è l'equazione di un'iperbole equilatera di asintoti $x = -2$ e $y = 3$.



1. L'IPERBOLE E LA SUA EQUAZIONE

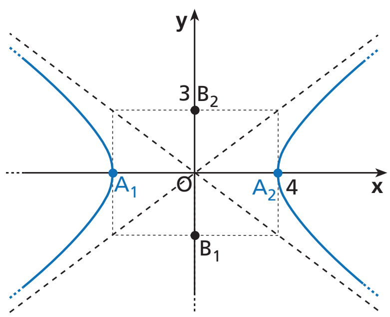
▶ Teoria a pag. 436

1 Determina l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano la cui differenza delle distanze dai punti $(-4; 0)$ e $(4; 0)$ è $2\sqrt{10}$. $[6x^2 - 10y^2 = 60]$

2 Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano la cui differenza delle distanze dai punti $(-1; 0)$ e $(1; 0)$ è $\frac{3}{2}$. $\left[\frac{16}{9}x^2 - \frac{16}{7}y^2 = 1\right]$

3 Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano la cui differenza delle distanze dai punti $A(0; -\sqrt{7})$ e $B(0; \sqrt{7})$ è 2. $\left[\frac{x^2}{6} - y^2 = -1\right]$

4 **COMPLETA** utilizzando i dati della figura.



Vertici reali di coordinate ....

Fuochi di coordinate ....

Vertici non reali di coordinate ....

Asse non trasverso lungo ....

Asse trasverso lungo ....

Distanza focale uguale a ....

Eccentricità $e =$ ....

Asintoti di equazioni ....

5 **ESERCIZIO GUIDA**

Data l'equazione dell'iperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$, determiniamo la misura del semiasse trasverso, le coordinate dei vertici e dei fuochi, l'eccentricità e l'equazione degli asintoti; poi rappresentiamo la curva graficamente.

Dividiamo entrambi i membri dell'equazione data per il termine noto, per ridurla in forma canonica,

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

da cui deduciamo che si tratta di un'iperbole con i fuochi sull'asse x con $a = 4$ e $b = 3$. Le coordinate dei vertici reali sono

$$A_1(-4; 0), \quad A_2(4; 0),$$

e quelle dei vertici non reali sono:

$$B_1(0; -3), \quad B_2(0; 3).$$

Il semiasse trasverso misura 4.
Determiniamo il valore di c^2,

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25,$$

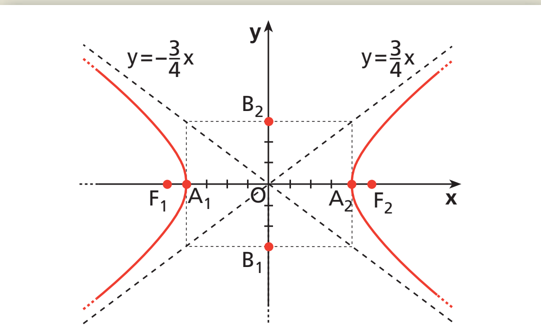
le coordinate dei fuochi $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$,

il valore dell'eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$,

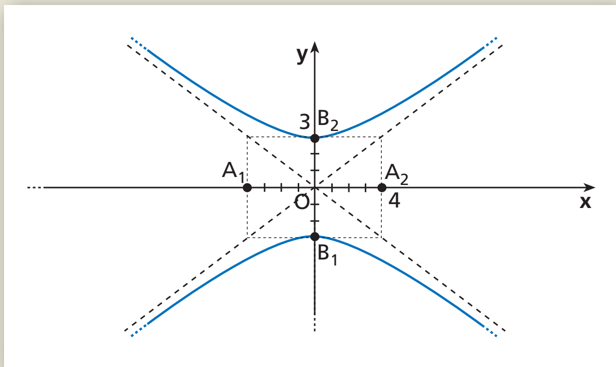
e infine le equazioni degli asintoti

$$y = \pm\frac{b}{a}x \quad \rightarrow \quad y = \pm\frac{3}{4}x.$$

Rappresentiamo l'iperbole graficamente, dopo aver disegnato i quattro vertici e gli asintoti, che sono le diagonali del rettangolo individuato dai vertici.



Osservazione. Se l'equazione fosse $9x^2 - 16y^2 = -144$, si tratterebbe di un'iperbole con i fuochi sull'asse y con coordinate $(0; -5)$ e $(0; 5)$, con gli stessi vertici e asintoti, ma di eccentricità $e = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$.



Riconosci quali delle seguenti equazioni rappresentano iperboli e, in caso affermativo, determina la misura del semiasse trasverso, le coordinate dei vertici e dei fuochi, l'equazione degli asintoti, l'eccentricità e rappresenta la curva graficamente.

6 a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 2$; b) $6x^2 - y^2 - 1 = 0$; c) $1 - x^2 + 9y^2 = 0$; d) $9x^2 - y^2 = 1$.

7 a) $y^2 = 3 - x^2$; b) $7x^2 = y^2 + 2$; c) $4x^2 = y^2 - 4$; d) $-4x^2y^2 + 1 = 0$.

8 a) $4 - x^2 + 16y^2 = 0$; b) $y^2 = -1 + 4x^2$; c) $16x^2 - y^2 - 25 = 0$; d) $9x^2 - y^2 = -4$.

9 a) $y^2 = 36 + 9x^2$; b) $x^2 = \frac{-9 + y^2}{9}$; c) $y^2 = \frac{4 + x^2}{2}$; d) $3x^2 + 3y^2 - 16 = 0$.

10 **TEST** Which of the following is an equation of a hyperbola with horizontal transverse axis and asymptotes $y = \pm\frac{4}{3}x$?

A $x^2 - y^2 = 12$

B $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

C $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

D $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

E $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2000)

11 Put $x^2 + 4x - 3y^2 + 12y = 35$ in standard form by completing squares. Identify the conic.

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, 2002)

$\left[\text{hyperbola: } \frac{(x+2)^2}{27} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1\right]$

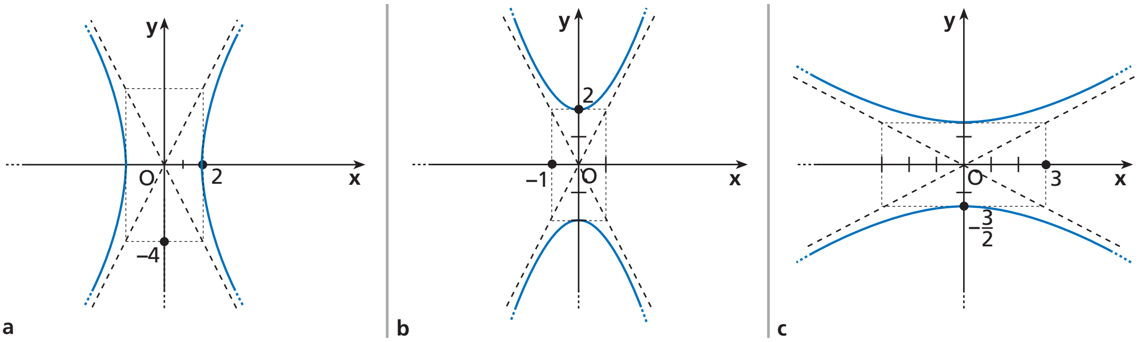
12 Find the asymptotes of

$$\frac{(x+1)^2}{36} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, 2002)

$\left[y = \pm\frac{1}{2}(x+1) + 3\right]$

13 Scrivi le equazioni delle iperboli rappresentate nei seguenti grafici, utilizzando i dati delle figure, e trova le coordinate dei vertici, quelle dei fuochi, l'eccentricità e le equazioni degli asintoti.



$\left[\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1;\ \frac{y^2}{4}-x^2=1;\ \frac{4}{9}y^2-\frac{x^2}{9}=1\right]$

14 Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x con le caratteristiche indicate e calcola l'eccentricità e (ricordando che a, b, c sono rispettivamente le misure dei semiassi e della semidistanza focale).

a) $a=2,\quad b=4.$ $\left[4x^2-y^2=16;\ \sqrt{5}\right]$

b) $a=1,\quad c=2.$ $\left[3x^2-y^2=3;\ 2\right]$

c) $b=4,\quad c=6.$ $\left[\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1;\ \frac{3}{5}\sqrt{5}\right]$

d) $2a=8,\quad c=6.$ $\left[\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1;\ \frac{3}{2}\right]$

e) $b=3,\quad 2c=\sqrt{40}.$ $\left[9x^2-y^2=9;\ \sqrt{10}\right]$

f) $c=3,\quad b^2=\frac{11}{4}.$ $\left[\frac{4}{25}x^2-\frac{4}{11}y^2=1;\ \frac{6}{5}\right]$

15 Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y con le caratteristiche indicate e calcola l'eccentricità e (a, b, c sono rispettivamente le misure dei semiassi e della semidistanza focale).

a) $a=1,\quad b=3.$ $\left[9x^2-y^2=-9;\ \frac{\sqrt{10}}{3}\right]$

b) $b=2,\quad c=5.$ $\left[\frac{x^2}{21}-\frac{y^2}{4}=-1;\ \frac{5}{2}\right]$

c) $a=3,\quad c=8.$ $\left[\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{55}=-1;\ \frac{8}{\sqrt{55}}\right]$

d) $a=2,\quad b^2=12.$ $\left[y^2-3x^2=12;\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$

e) $2b=6,\quad c=\frac{9}{2}.$ $\left[4x^2-5y^2=-45;\ \frac{3}{2}\right]$

16 **VERO O FALSO?**

a) L'eccentricità dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=-1$ è $\frac{\sqrt{13}}{3}$. V F

b) L'iperbole di equazione $4x^2-36y^2=-1$ ha un vertice reale nel punto $\left(0;\ \frac{1}{6}\right)$. V F

c) Se l'asse trasverso di un'iperbole è uguale all'asse non trasverso, l'eccentricità è 1. V F

d) L'iperbole di equazione $2x^2-9y^2-9=0$ ha i fuochi sull'asse y. V F

e) Gli asintoti dell'iperbole di equazione $4x^2-9y^2+36=0$ hanno equazione $y=\pm\frac{3}{2}x$. V F

17 **TEST** Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, il luogo dei punti le cui coordinate $(x;\,y)$ soddisfano l'equazione

$$\left|x^2-y^2\right|=1$$

è costituito da:

A un'iperbole.
B una coppia di iperboli.
C una coppia di circonferenze.
D una circonferenza.
E una coppia di rette.

(*CISIA*, *Facoltà di Ingegneria*, *Test di ingresso*, 2001)

Trova per quali valori di k le seguenti equazioni rappresentano:
a) un'iperbole con i fuochi sull'asse x; b) un'iperbole con i fuochi sull'asse y.

18 $\frac{x^2}{2k+6} + \frac{y^2}{2k} = 1$ [a) $-3 < k < 0$; b) impossibile]

19 $(k+1)x^2 + y^2 = 2k$ [a) $k < -1$; b) impossibile]

20 Per quali valori di k l'espressione $\frac{4k-6}{3k}$ può rappresentare l'eccentricità di un'iperbole? [$k < 0 \vee k > 6$]

21 Determina i valori di k affinché l'equazione $\frac{x^2}{2k-1} + \frac{y^2}{k^2-4} = 1$ rappresenti:
a) un'iperbole;
b) un'iperbole con i fuochi sull'asse x;
c) un'iperbole che passa per il punto di coordinate $(0; -\sqrt{5})$;
d) un'iperbole con un fuoco di coordinate $(2; 0)$.
[a) $k < -2 \vee \frac{1}{2} < k < 2$; b) $\frac{1}{2} < k < 2$; c) $k = -3$; d) $k = 1$]

22 Trova per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{4k^2-1} - \frac{y^2}{k-3} = 1$ rappresenta:
a) un'ellisse;
b) una circonferenza;
c) un'iperbole;
d) un'iperbole con i fuochi sull'asse y;
e) un'iperbole con i fuochi sull'asse y che ha distanza focale uguale a 4.
[a) $k < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < k < 3$; b) $k = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{8}$; c) $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2} \vee k > 3$; d) $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$; e) $k = 0 \vee k = -\frac{1}{4}$]

23 Determina i valori di k affinché l'equazione $\frac{x^2}{3-k} + \frac{y^2}{4k+3} = 1$ rappresenti:
a) un'iperbole;
b) un'iperbole con i fuochi sull'asse y;
c) un'iperbole con un fuoco di coordinate $(0; -2\sqrt{5})$;
d) un'iperbole che passa per il punto $\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{4}\right)$.
[a) $k < -\frac{3}{4} \vee k > 3$; b) $k > 3$; c) $k = 4$; d) $k = -1 \vee k = -\frac{183}{64}$]

24 Trova per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{k-2} + \frac{y^2}{6k} = 1$ rappresenta:
a) un'iperbole;
b) un'iperbole con i fuochi sull'asse x;
c) un'iperbole con i fuochi sull'asse y;
d) un'iperbole con gli asintoti di equazione $y = \pm\sqrt{6}\,x$.
[a) $0 < k < 2$; b) impossibile; c) $0 < k < 2$; d) $k = 1$]

25 Trova per quali valori di k l'equazione $(2k-1)x^2 + (k-3)y^2 = k$ rappresenta:
a) un'iperbole;
b) un'iperbole con i fuochi sull'asse x;
c) un'iperbole con i fuochi sull'asse y;
d) un'iperbole con distanza focale $4\sqrt{\frac{2}{3}}$.
[a) $\frac{1}{2} < k < 3$; b) $\frac{1}{2} < k < 3$; c) impossibile; d) $k = \frac{12}{19} \vee k = 2$]

26 Determina i valori di k per cui l'equazione $(k+2)x^2 - (1-k^2)y^2 + 1 = 0$ rappresenta un'iperbole:
a) con i fuochi sull'asse x;
b) passante per il punto $(3; 1)$;
c) con un vertice di coordinate $(1; 0)$.
[a) $k < -2$; b) $k = -6 \vee k = -3$; c) $k = -3$]

27 TEST How many points do the graphs of $4x^2 - 9y^2 = 36$ and $x^2 - 2x + y^2 = 15$ have in common?

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2000)

2. LE POSIZIONI DI UNA RETTA RISPETTO A UN'IPERBOLE

▶ Teoria a pag. 444

Stabilisci la posizione reciproca delle seguenti coppie di iperboli e rette e, nei casi in cui la retta non sia esterna, determina le coordinate dei punti di intersezione.

28 $3x^2 - 4y^2 = 12;\qquad x + y - 1 = 0.$ [tangente: $(4; -3)$]

29 $4x^2 - 9y^2 = 36;\qquad 4x - 3y - 12 = 0.$ $\left[\text{secante: } (3; 0), \left(5; \frac{8}{3}\right)\right]$

30 $x^2 - 4y^2 = 20;\qquad 3x + 2y = 0.$ [esterna]

31 Trova per quale valore di a l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = a^2$ stacca sulla retta di equazione $x - 4y = 0$ una corda lunga $16\sqrt{\frac{17}{15}}$. $[a = \pm 8]$

32 Verificare che le rette parallele a un asintoto dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ incontrano l'iperbole in un solo punto, fuorché l'asintoto stesso, che non ha intersezioni con l'iperbole.

(*Università della Calabria, Dipartimento di Matematica*, 2008)

33 Calcola la lunghezza della corda staccata dall'iperbole di equazione $7x^2 - 4y^2 = 3$ sulla retta di equazione $5x + 4y = 0$. $[\sqrt{41}]$

34 Calcola la lunghezza della corda staccata dall'iperbole di equazione $3x^2 - 8y^2 = -5$ sulla retta di equazione $x - 4y + 5 = 0$. $[\sqrt{17}]$

35 Dopo aver determinato l'equazione dell'iperbole avente un vertice reale di coordinate $(2; 0)$ e un vertice non reale nel punto $(0; -4)$, calcola la lunghezza della corda individuata sulla bisettrice del primo e terzo quadrante. $\left[\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1; \frac{8\sqrt{6}}{3}\right]$

36 Dopo aver determinato le coordinate dei punti A e B di intersezione dell'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{8} = -1$ con la retta di equazione $y = 4x$, indicati con F_1 e F_2 i fuochi dell'iperbole, verifica che il quadrilatero AF_1BF_2 è un parallelogramma e determinane l'area. $[A(-1; -4), B(1; 4); 6]$

37 Determina l'area del triangolo ABF, dove A e B sono i punti di intersezione della retta di equazione $x = 4$, con l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$, e F è un fuoco dell'iperbole. [12]

38 Nel fascio di rette di equazione $y = k$ determina quelle sulle quali l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ stacca una corda di lunghezza $2\sqrt{30}$. $[y = \pm 6]$

39 Nel fascio di rette di centro $O(0;\,0)$ determina quella sulla quale l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{36}=1$ stacca una corda di lunghezza 4.
$\left[y=\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}x\right]$

40 Trova per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ la retta di equazione $y-2x-k=0$ interseca l'iperbole di equazione $3x^2-y^2=1$. Posto $k=1$, determina la lunghezza della corda intercettata dall'iperbole sulla retta.
$\left[k\le-\frac{\sqrt{3}}{3}\vee k\ge\frac{\sqrt{3}}{3};\,2\sqrt{10}\right]$

Le rette tangenti a un'iperbole

41 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le equazioni delle tangenti all'iperbole di equazione $x^2-4y^2=9$, condotte dal punto $P\left(\frac{9}{5};\,0\right)$.

L'equazione di una retta generica per P è:

$$y-0=m\left(x-\frac{9}{5}\right)\ \rightarrow\ y=mx-\frac{9}{5}m.$$

Consideriamo il sistema costituito dall'equazione della retta e dall'equazione dell'iperbole:

$$\begin{cases} y=mx-\frac{9}{5}m \\ x^2-4y^2=9 \end{cases}$$

Troviamo l'equazione risolvente e riduciamola a forma normale:

$$x^2-4\left(mx-\frac{9}{5}m\right)^2=9\ \rightarrow\ x^2-4m^2x^2-\frac{324}{25}m^2+\frac{72}{5}m^2x=9$$

$$25x^2-100m^2x^2-324m^2+360m^2x=225\ \rightarrow\ 25(1-4m^2)x^2+360m^2x-9(36m^2+25)=0.$$

Imponiamo che Δ $\left(\text{in questo caso } \frac{\Delta}{4}\right)$ sia nullo:

$$(180m^2)^2-25\cdot(1-4m^2)\cdot(-9)(36m^2+25)=0$$

$$32\,400m^4+225(1-4m^2)\cdot(36m^2+25)=0.$$

Dividiamo i due membri per 225:

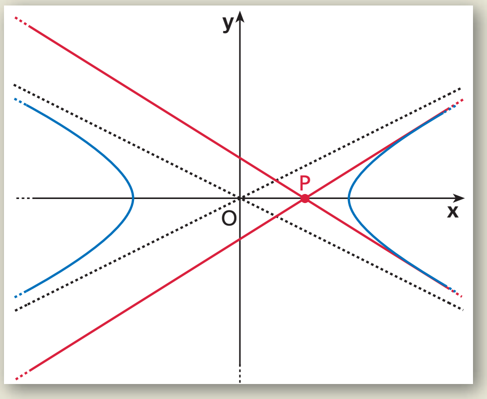
$$\cancel{144m^4}+36m^2-\cancel{144m^4}+25-100m^2=0.$$

Riduciamo a forma normale e risolviamo l'equazione ottenuta:

$$64m^2-25=0\ \rightarrow\ m^2=\frac{25}{64}\ \rightarrow\ m=\pm\frac{5}{8}.$$

Sostituendo i valori ottenuti nell'equazione della retta per P, otteniamo le equazioni delle tangenti richieste:

$$y=-\frac{5}{8}x+\frac{9}{8},\quad y=\frac{5}{8}x-\frac{9}{8}.$$



42 Data l'iperbole di equazione $x^2-y^2=16$, determina le equazioni delle tangenti condotte dal punto $P\left(\frac{16}{5};\,0\right)$.
$[5x+3y-16=0;\,5x-3y-16=0]$

43 Conduci la tangente all'iperbole di equazione $x^2 - 4y^2 = 20$ dal suo punto di ordinata 2 del II quadrante. $[3x + 4y + 10 = 0]$

44 Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole di equazione $4x^2 - 9y^2 = 36$ condotte dal punto $P\left(0; -\frac{3}{2}\right)$ e, detti A e B i punti di contatto, calcola l'area del triangolo PAB.
$\left[5x - 6y - 9 = 0; 5x + 6y + 9 = 0; \frac{125}{6}\right]$

45 Trova le equazioni delle rette tangenti all'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 9$ nei suoi punti di intersezione con la retta $x - 5 = 0$. Delle due rette trovate indica con t quella che è tangente nel I quadrante. Trova i punti P e Q di intersezione di t con gli asintoti e calcola l'area del triangolo POQ.
$[5x + 4y - 9 = 0; 5x - 4y - 9 = 0; 9]$

46 Determina l'area del triangolo che la tangente nel punto $C(4; 1)$ all'iperbole di equazione $x^2 - 12y^2 = 4$ forma con gli assi di simmetria dell'iperbole. $\left[\frac{1}{6}\right]$

47 Dati l'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ e il fascio di rette parallele alla retta di equazione $y = 2x$, determina i valori dell'ordinata all'origine delle rette che:
a) intersecano l'iperbole in due punti distinti;
b) sono tangenti all'iperbole;
c) sono esterne all'iperbole. $[\text{a) } q < -1 \vee q > 1; \text{b) } q = \pm 1; \text{c) } -1 < q < 1]$

48 Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = -1$, determina i coefficienti angolari delle rette del fascio di centro $C(1; 0)$ che:
a) intersecano l'iperbole in due punti distinti;
b) sono tangenti all'iperbole;
c) sono esterne all'iperbole. $\left[\text{a) } m < -\frac{\sqrt{5}}{2} \vee m > \frac{\sqrt{5}}{2}; \text{b) } m = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}; \text{c) } -\frac{\sqrt{5}}{2} < m < \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

49 Determina il valore di k affinché l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1+k} = 1$ sia tangente alla retta di equazione $4x - 9y - 6 = 0$. $\left[k = \frac{1}{3}\right]$

50 Stabilisci, al variare del valore di $k \in \mathbb{R}$, la posizione reciproca della retta di equazione $x - ky + 2 = 0$ e dell'iperbole di equazione $5x^2 - 9y^2 = 45$. Disegna l'iperbole e le rette tangenti trovate e calcola l'area del triangolo formato dai punti di tangenza e dal punto di intersezione delle tangenti.
$\left[k < -1 \vee k > 1 \text{ secante}; k = \pm 1 \text{ tangente}; -1 < k < 1 \text{ esterna; area} = \frac{25}{4}\right]$

La formula di sdoppiamento

51 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $16x^2 - 3y^2 = 1$ nel suo punto A, del II quadrante, di ascissa $-\frac{1}{2}$.

Secondo la formula di sdoppiamento, l'equazione della retta tangente all'iperbole in un suo punto $A(x_0; y_0)$ è: $\frac{xx_0}{a_2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Determiniamo l'ordinata del punto appartenente all'iperbole nel II quadrante, di ascissa $-\frac{1}{2}$:

$$16\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3y^2 = 1 \;\rightarrow\; 16 \cdot \frac{1}{4} - 3y^2 = 1 \;\rightarrow\; 3y^2 = 3 \;\rightarrow\; y^2 = 1 \;\rightarrow\; y = \pm 1.$$

Poiché il punto A appartiene al II quadrante, l'ordinata richiesta è $y = 1$.

Applichiamo ora la formula di sdoppiamento in $A\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$:

$$16x\left(-\frac{1}{2}\right) - 3y(1) = 1 \;\rightarrow\; -8x - 3y - 1 = 0.$$

L'equazione della tangente richiesta è $8x + 3y + 1 = 0$.

Risolvi gli esercizi applicando la formula di sdoppiamento.

52 Scrivi l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $8x^2 - 9y^2 = 36$ nel suo punto $(-3; -2)$. $[4x - 3y + 6 = 0]$

53 Determina l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $9x^2 - y^2 = -8$ nel suo punto di ascissa $\frac{1}{3}$ che si trova nel IV quadrante. $[3x + 3y + 8 = 0]$

54 Trova l'equazione della retta tangente all'iperbole di equazione $12x^2 - 32y^2 + 5 = 0$ nel suo punto di ordinata $-\frac{1}{2}$ che si trova nel III quadrante. $[6x - 16y - 5 = 0]$

55 Scrivi l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $5x^2 - y^2 = 3$ nel suo punto di intersezione con la retta di equazione $y + \sqrt{2}\,x = 0$ che ha ascissa negativa. $[5x + \sqrt{2}\,y + 3 = 0]$

56 **TEST** The point (3; 1) is on the hyperbola

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

What is the slope of the line passing through (3; 1) and tangent to the hyperbola?

A 1 B -1 C $\frac{1}{3}$ D 3 E None of these.

(USA *Marywood University Mathematics Contest*, 2006)

3. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UN'IPERBOLE

▶ Teoria a pag. 446

57 **TEST** L'iperbole della figura ha equazione:

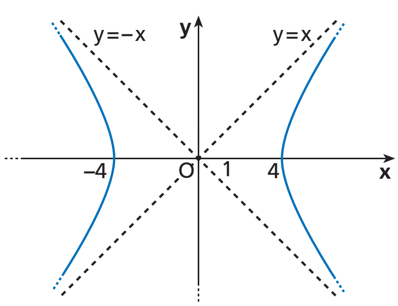
A $x^2 - y^2 = 4.$

B $y^2 = x^2 + 16.$

C $x^2 - y^2 = 16.$

D $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$

E $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1.$



58 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione dell'iperbole avente un fuoco nel punto $F\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$ e un asintoto di equazione $y = \frac{4}{3}x$.

L'equazione dell'iperbole è del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e gli asintoti hanno equazione $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Dalle coordinate di F deduciamo che $c = \frac{5}{2}$, quindi: $a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25}{4}$.

Dall'equazione dell'asintoto ricaviamo: $\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{16}{9} \rightarrow b^2 = \frac{16}{9}a^2$.

Risolviamo il sistema costituito dalle due relazioni ottenute:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{25}{4} \\ b^2 = \frac{16}{9}a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + \frac{16}{9}a^2 = \frac{25}{4} \\ b^2 = \frac{16}{9}a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{25}{9}a^2 = \frac{25}{4} \\ b^2 = \frac{16}{9}a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{9}{4} \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

da cui, sostituendo i valori ottenuti nell'equazione canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow \frac{4x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

59 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un fuoco in $(-5; 0)$ e un asintoto di equazione $y=\sqrt{\frac{2}{3}}\,x$. $[2x^2 - 3y^2 = 30]$

60 Trova l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x avente distanza focale uguale a $\frac{10}{3}$ e un asintoto di equazione $y = -\frac{3}{4}x$. $\left[\frac{9}{16}x^2 - y^2 = 1\right]$

61 Determina l'equazione dell'iperbole avente un fuoco in $(0; -\sqrt{5})$ e passante per $(1; 2\sqrt{2})$. $\left[x^2 - \frac{y^2}{4} = -1\right]$

62 Determina l'equazione dell'iperbole che interseca l'asse x, individuando un segmento di lunghezza 8, e ha un fuoco nel punto $(-5; 0)$. $\left[\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1\right]$

63 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un vertice e un fuoco, rispettivamente, in $(5; 0)$ e $(-6; 0)$. $\left[\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1\right]$

64 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un vertice reale in $(-6; 0)$ e un asintoto di equazione $2x + 3y = 0$. $[4x^2 - 9y^2 = 144]$

65 Trova l'equazione dell'iperbole che ha i fuochi sull'asse x, eccentricità $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ e asse non trasverso lungo 6. $\left[\frac{x^2}{27} - \frac{y^2}{9} = 1\right]$

66 Determina l'equazione dell'iperbole che ha i fuochi sull'asse y, asse trasverso lungo 8 e distanza focale uguale a 10. $\left[\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1\right]$

67 Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x, asse non trasverso lungo 4 e distanza focale uguale a 12. $\left[\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{4} = 1\right]$

68 Trova l'equazione dell'iperbole con un vertice reale in $(\sqrt{5}; 0)$ e passante per $\left(-\frac{5}{2}; -1\right)$. $\left[\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1\right]$

69 Scrivi l'equazione dell'iperbole di eccentricità 2, passante per $(-\sqrt{7}; 3)$ e con i fuochi sull'asse x. $[3x^2 - y^2 = 12]$

70 Determina l'equazione dell'iperbole di eccentricità $e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ che ha un vertice non reale nel punto $(-2; 0)$. $\left[\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = -1\right]$

71 Determina l'equazione dell'iperbole avente un fuoco in $(0; -5)$ e passante per $\left(\frac{9}{4}; 5\right)$. $\left[\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1\right]$

72 Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y passante per i punti $\left(1; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ e $(4; \sqrt{5})$. $\left[\frac{x^2}{4} - y^2 = -1\right]$

73 Considerata l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, determinare a e b sapendo che è tangente alla retta di equazione $4x + y - 7 = 0$ e che passa per il punto $(2\sqrt{2}; 3)$.

(*Università di Firenze, Corso di laurea in Scienze vivaistiche*, 2008)

$\left[a_1 = \sqrt{7}; b_1 = 3\sqrt{7}; a_2 = \frac{\sqrt{14}}{2}; b_2 = \sqrt{7}\right]$

74 Un'iperbole con i fuochi sull'asse y passa per il punto $(1; -4\sqrt{5})$ e ha per asintoto la retta di equazione $2x - y = 0$. Determina l'equazione dell'iperbole e, dopo averne individuato le caratteristiche, disegnala. $\left[\frac{x^2}{19} - \frac{y^2}{76} = -1\right]$

75 Un'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ha eccentricità $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$ e passa per $(-6; 2\sqrt{15})$. Calcola i valori di a e di b. $[a = 3; b = 2\sqrt{3}]$

76 Determina l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x avente il semiasse trasverso di lunghezza $2\sqrt{3}$ e passante per $(2\sqrt{6}; 2)$. $[x^2 - 3y^2 = 12]$

77 Determina l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x avente un asintoto di equazione $3x + 4y = 0$ e passante per $(-4\sqrt{5}; 3)$. $\left[\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1\right]$

78 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un fuoco nel punto $(-\sqrt{7}; 0)$ e passante per $(2\sqrt{2}; -\sqrt{3})$. $[3x^2 - 4y^2 = 12]$

79 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente vertice reale di coordinate $(2; 0)$ e tangente alla retta di equazione $2x - 3y - 2 = 0$. $[x^2 - 3y^2 = 4]$

80 Determina l'equazione dell'iperbole avente i fuochi sull'asse y, lunghezza dell'asse trasverso 6 e tangente alla retta di equazione $y = \frac{9}{8}x + \frac{3}{2}$. $[27x^2 - 16y^2 = -144]$

81 L'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ è tangente alla retta $6x - \sqrt{3}\,y - 3 = 0$. Trova il valore di b. $[3]$

82 Stabilisci per quali valori di b il punto $A(2; 1)$ appartiene all'iperbole di equazione $\frac{x^2}{b^2+1} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, determina la corrispondente equazione dell'iperbole e trova l'equazione della tangente nel punto A. $[\pm 1; x^2 - 2y^2 = 2; y = x - 1]$

83 Data l'iperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, determina b in modo tale che il suo grafico risulti tangente alla retta passante per $A(-2; -1)$ e parallela a $y = x + 2$. Calcola, poi, l'eccentricità. $\left[b = \sqrt{3}; e = \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$

84 Scrivi l'equazione dell'iperbole, con i fuochi sull'asse x, passante per i punti $A(2; 1)$ e $B(-1; 0)$ e poi quella della circonferenza di centro O, passante per i fuochi dell'iperbole. Individua le intersezioni delle due curve e calcola l'area del rettangolo che esse formano.

$\left[x^2 - 3y^2 = 1; 3x^2 + 3y^2 = 4; \left(\frac{\sqrt{5}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{6}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{6}\right); \text{area} = \frac{\sqrt{15}}{3}\right]$

85 Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y che nel suo punto di coordinate $\left(2; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ ha per tangente la retta di equazione $x - 4\sqrt{5}\,y + 8 = 0$.

$\left[\frac{x^2}{16} - y^2 = -1\right]$

4. L'IPERBOLE TRASLATA

▶ Teoria a pag. 447

IN PRATICA
▶ Videolezione 23

86 **ESERCIZIO GUIDA**

Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$, determiniamo l'equazione dell'iperbole corrispondente nella traslazione di vettore $\vec{v}(6; 2)$ e rappresentiamo le due iperboli.

L'iperbole data ha i fuochi sull'asse y e inoltre $a = 2$ e $b = 4$. I vertici reali sono perciò $B_1(0; -4)$ e $B_2(0; 4)$, mentre quelli non reali sono $A_1(-2; 0)$ e $A_2(2; 0)$. Gli asintoti dell'iperbole hanno equazione:

$$y = \pm 2x.$$

Scriviamo le equazioni della traslazione di vettore $\vec{v}(6; 2)$ e ricaviamo la x e la y:

$$\begin{cases} x' = x + 6 \\ y' = y + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - 6 \\ y = y' - 2 \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione dell'iperbole alla x e alla y le espressioni trovate:

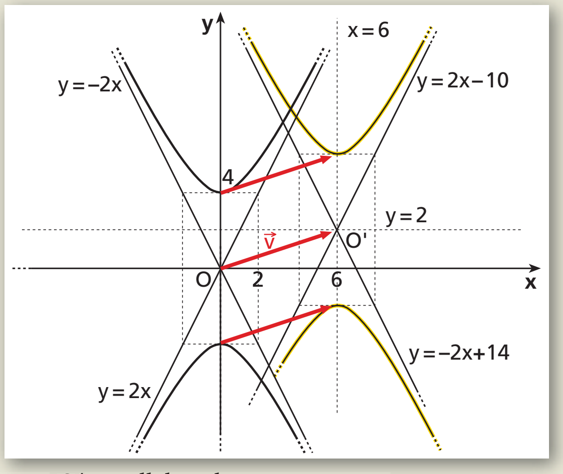
$$\frac{(x' - 6)^2}{4} - \frac{(y' - 2)^2}{16} = -1.$$

L'equazione dell'iperbole traslata è:

$$\frac{(x - 6)^2}{4} - \frac{(y - 2)^2}{16} = -1.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo l'equazione:

$$4x^2 - y^2 - 48x + 4y + 156 = 0.$$



Ricaviamo le coordinate del centro di simmetria e dei vertici dell'iperbole traslata, sostituendo nelle equazioni della traslazione alla x e alla y le coordinate dei punti corrispondenti:

$$O'(6; 2),\ A'_1(4; 2),\ A'_2(8; 2),\ B'_1(6; -2),\ B'_2(6; 6).$$

Gli assi di simmetria dell'iperbole traslata sono le rette per O' parallele agli assi cartesiani:

$$x = 6 \text{ e } y = 2.$$

Gli asintoti dell'iperbole traslata sono le rette per O' parallele agli asintoti dell'iperbole data. La loro equazione è:

$$y - 2 = \pm 2(x - 6) \rightarrow y = -2x + 14 \vee y = 2x - 10.$$

87 Determina l'equazione e disegna l'iperbole ottenuta dall'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(1; -1)$.

$[9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y + 41 = 0]$

88 Scrivi l'equazione e disegna l'iperbole ottenuta dall'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(-2; 1)$. Scrivi le coordinate dei vertici e dei fuochi dell'iperbole traslata.
$[x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0;\ A'_1(-4; 1),\ A'_2(0; 1),\ B'_1(-2; 0),\ B'_2(-2; 2),\ F'_1(-\sqrt{5} - 2; 1),\ F'_2(\sqrt{5} - 2; 1)]$

89 Scrivi l'equazione dell'iperbole ottenuta dall'iperbole di equazione $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = -1$ nella traslazione che fa corrispondere l'origine degli assi al punto $O'(3; 1)$.
$[2x^2 - y^2 - 12x + 2y + 21 = 0]$

90 Una traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$ fa corrispondere l'origine del sistema di riferimento al vertice reale di ascissa maggiore dell'iperbole di equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$. Determina le componenti del vettore e l'equazione dell'iperbole traslata.
$[a = 3,\ b = 0;\ 25x^2 - 9y^2 - 150x = 0]$

91 Trova l'iperbole corrispondente all'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ nella traslazione che fa corrispondere al fuoco di ascissa positiva il punto $(-1; -1)$.
$[5x^2 - 4y^2 + 40x - 8y + 56 = 0]$

Il metodo del completamento del quadrato

92 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo e tracciamo il grafico delle curve di equazioni:
a) $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y + 29 = 0$; b) $4x^2 - y^2 + 8x + 4y = 0$.

a) Poiché i coefficienti di x^2 e y^2 sono opposti, si tratta di un'iperbole. Cerchiamo di scrivere l'equazione data nella forma:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1.$$

Riscriviamo l'equazione data raggruppando i termini con x e quelli con y:

$$9x^2 - 18x - 4y^2 + 16y + 29 = 0 \ \rightarrow\ 9(x^2 - 2x) - 4(y^2 - 4y) + 29 = 0.$$

Perché i termini all'interno delle parentesi diventino il quadrato di un binomio, occorre aggiungere il termine noto. Aggiungiamo i termini mancanti a entrambi i membri dell'equazione:

$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) + 29 = 9 - 16 \ \rightarrow\ 9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 + 29 = -7 \ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ 9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = -36.$$

Dividendo entrambi i membri per 36, otteniamo: $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = -1$.

Il centro di simmetria dell'iperbole è $O'(1; 2)$.
Le coordinate di O' potevano essere determinate anche ricordando che nell'equazione

$$a'x^2 + b'y^2 + c'x + d'y + e' = 0$$

si ha $x_{O'} = -\frac{c'}{2a'}$ e $y_{O'} = -\frac{d'}{2b'}$.

Quindi

$$x_{O'} = -\frac{-18}{2 \cdot 9} = 1, \quad y_{O'} = -\frac{16}{2 \cdot (-4)} = 2.$$

Gli assi di simmetria sono le rette per O' parallele agli assi:

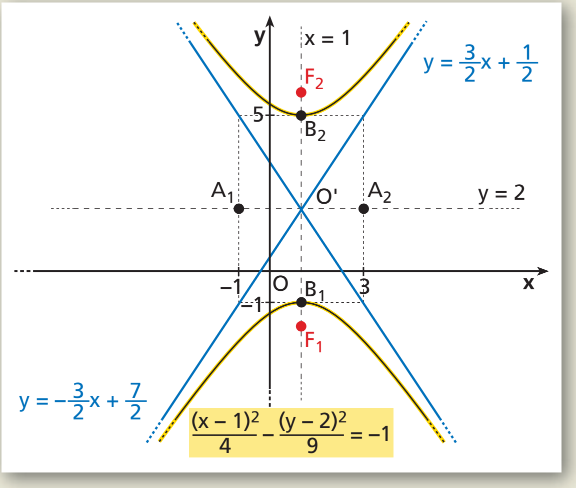
$$x = 1, \qquad y = 2.$$

La lunghezza dei semiassi dell'iperbole è $a = 2$ e $b = 3$.

La semidistanza focale è $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.
Poiché l'iperbole ha l'asse focale parallelo all'asse y, i vertici reali sono $B_1(1; -1)$ e $B_2(1; 5)$, i vertici non reali sono $A_1(-1; 2)$ e $A_2(3; 2)$, e i fuochi sono $F_1(1; 2 - \sqrt{13})$ e $F_2(1; 2 + \sqrt{13})$.
Gli asintoti sono le rette per O' con coefficiente angolare $m = \pm \frac{b}{a}$:

$$y - 2 = \pm \frac{3}{2}(x - 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \vee y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$



b) Applichiamo il metodo del completamento del quadrato riscrivendo l'equazione data:

$$4(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) = 0 \rightarrow$$

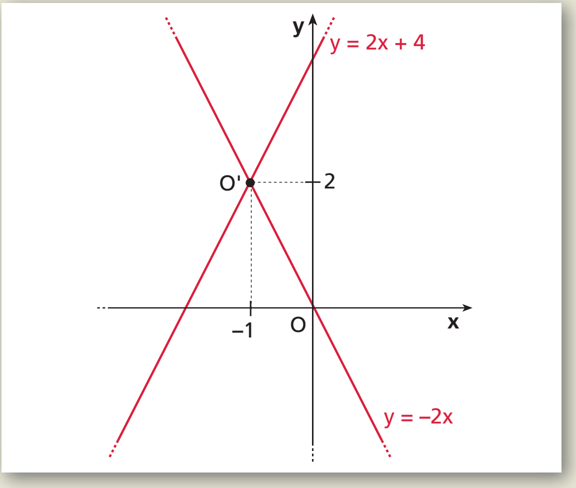
$$\rightarrow 4(x^2+2x+1)-4-(y^2-4y+4)+4=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x+1)^2 = (y-2)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(x+1) = \pm(y-2).$$

Questo risultato significa che l'equazione data rappresenta un'*iperbole degenere* costituita dalle due rette $y = 2x + 4$ e $y = -2x$ passanti per $O'(-1; 2)$.



Rappresenta graficamente le seguenti iperboli.

93 $x^2 - \frac{(y+1)^2}{4} = 4$; $\quad \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(2y+1)^2}{4} = -1.$

94 $y^2 - (x-1)^2 = 4$; $\quad (4x+1)^2 - \frac{y^2}{9} = -1.$

Dopo averne determinato le caratteristiche, rappresenta le iperboli aventi le seguenti equazioni. (In alcuni casi le iperboli sono degeneri.)

95 $25x^2 - 9y^2 - 50x + 18y - 209 = 0$

96 $x^2 - 4y^2 + 2x - 24y - 31 = 0$

97 $2x^2 - y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$

98 $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$

99 $-9x^2 + y^2 - 54x - 2y - 71 = 0$

100 $25x^2 - 4y^2 + 50x - 75 = 0$

101 $x^2 - 9y^2 = 0$

102 $x^2 - 4y^2 - 6x = 0$

103 $x^2 - 9y^2 - 4x + 5 = 0$

104 $9x^2 - y^2 + 6x + 2y = 0$

105 $4x^2 - y^2 + 2y - 9 = 0$

106 $x^2 - y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$

107 $4x^2 - 9y^2 + 8x - 72y - 464 = 0$

108 $16x^2 - 4y^2 - 96x - 8y + 204 = 0$

ESERCIZI VARI L'iperbole traslata

109 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente centro di simmetria $O'(2; -2)$, gli assi paralleli agli assi cartesiani, un vertice reale in $A(1; -2)$ e un vertice non reale in $B(2; 0)$. $[4x^2 - y^2 - 16x - 4y + 8 = 0]$

110 Determina l'equazione dell'iperbole di eccentricità $e = 2$, avente centro di simmetria $O'(1; -3)$ e i fuochi su una retta parallela all'asse x, distanti fra loro 4. $[3x^2 - y^2 - 6x - 6y - 9 = 0]$

111 Determina e rappresenta il luogo geometrico dei punti del piano per i quali la differenza delle distanze dai punti $F_1(-2; 2)$, $F_2(4; 2)$ è uguale a 4. $[5x^2 - 4y^2 - 10x + 16y - 31 = 0]$

112 Trova e rappresenta l'equazione dell'iperbole con assi paralleli agli assi cartesiani, con i fuochi $F_1(-4; -4)$, $F_2(-4; 6)$ e semiasse trasverso di lunghezza 4. $[16x^2 - 9y^2 + 128x + 18y + 391 = 0]$

113 Determina e rappresenta l'equazione dell'iperbole con assi paralleli agli assi cartesiani con fuochi $F_1(-2; -5)$, $F_2(-2; 3)$ e semiasse non trasverso di lunghezza 3. $[7x^2 - 9y^2 + 28x - 18y + 82 = 0]$

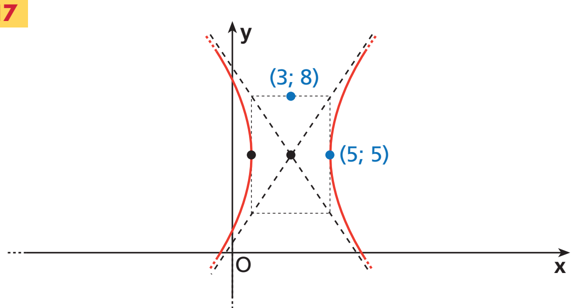
114 Riconosci e rappresenta la curva di equazione $x^2 - 2x - 4y^2 - 3 = 0$. Detto A il punto di ascissa positiva in cui la curva interseca l'asse delle x, determina l'equazione della retta tangente in A alla curva stessa.
[iperbole di centro $(1; 0)$; $A(3; 0)$; $x = 3$]

115 Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha il centro di simmetria di coordinate $(-2; 1)$, un vertice reale in $(0; 1)$ e asse focale lungo $2\sqrt{5}$. $[x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0]$

116 Determina per quali valori di k l'equazione $x^2 + 2ky^2 - kx + (k+3)y - 2 = 0$ rappresenta un'iperbole. Trova poi per quali valori di k:
a) l'iperbole ha centro sulla retta di equazione $y = -2x$.
b) l'iperbole ha come asse di simmetria la retta di equazione $y = 2$.
$\left[k < 0;\ \text{a) } k = -\frac{3}{4};\ \text{b) } k = -\frac{1}{3}\right]$

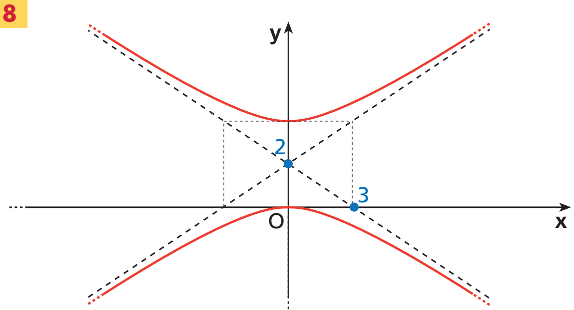
Trova le equazioni delle iperboli dei seguenti grafici, utilizzando i dati delle figure.

117



$[9x^2 - 4y^2 - 54x + 40y - 55 = 0]$

118



$[4x^2 - 9y^2 + 36y = 0]$

Riconosci se le seguenti equazioni rappresentano circonferenze, ellissi o iperboli e rappresentale.

119 a) $9x^2 + y^2 - 18x + 4y + 12 = 0$; b) $9x^2 - y^2 - 18x - 4y + 12 = 0$.

120 a) $x^2 - y^2 - 4x - 2y = 0$; b) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$.

121 a) $-9x^2 - 4y^2 - 18x + 8y + 23 = 0$; b) $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$.

122 a) $x^2 - 4y^2 + 2x - 3 = 0$; b) $x^2 + 4y^2 + 2x - 3 = 0$.

La rappresentazione grafica di particolari funzioni

123 **ESERCIZIO GUIDA**

Dopo averne determinato il dominio, rappresentiamo graficamente la funzione:

$$y = 2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7} + 1.$$

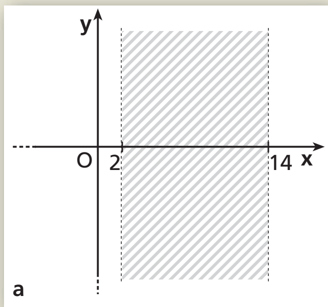
Per determinare il dominio poniamo il radicando maggiore o uguale a 0, ossia:

$$\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7 \geq 0 \to x \leq 2 \vee x \geq 14.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \vee x \geq 14\}.$$

Tracciamo nel piano cartesiano le rette $x = 2$ e $x = 14$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ascissa maggiore di 2 e minore di 14 (figura *a*).



Per rappresentare la funzione isoliamo la radice:

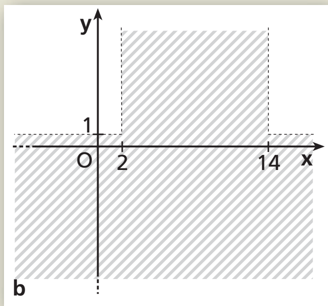
$$y - 1 = 2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7} \to \frac{y-1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4x + 7}.$$

Questa equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{y-1}{2} \geq 0 \\ \dfrac{(y-1)^2}{4} = \dfrac{1}{4}x^2 - 4x + 7 \end{cases} \to \begin{cases} y \geq 1 \\ \dfrac{(y-1)^2}{4} - \dfrac{x^2 - 16x + 64 - 64}{4} = 7 \end{cases} \to$$

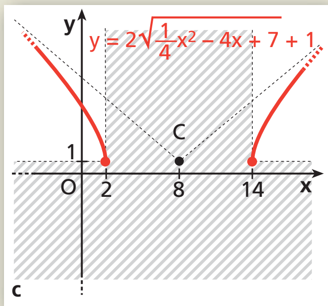
$$\to \begin{cases} y \geq 1 \\ \dfrac{(y-1)^2}{4} - \dfrac{x^2 - 16x + 64}{4} = -9 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y \geq 1 \\ \dfrac{(x-8)^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1 \end{cases}$$



Tracciamo nel piano cartesiano la retta $y = 1$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ordinata minore di 1 (figura *b*).

L'equazione $\dfrac{(x-8)^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1$ rappresenta un'iperbole traslata di centro $C(8; 1)$, assi di simmetria $x = 8$ e $y = 1$, asintoti $y = x - 7$ e $y = -x + 9$. Tracciamo ora i rami di iperbole contenuti nella parte di piano che non abbiamo eliminato (figura *c*), ottenendo così il grafico cercato.



Dopo averne determinato il dominio, rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

124 $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x-3)^2 - 9}$

125 $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4x} + \dfrac{1}{2}$

126 $y = -\sqrt{x^2 + 1}$

127 $y = 2\sqrt{(x-2)^2 - 4}$

128 $y = -\sqrt{x^2 - 16}$

129 $y = 3 - 4\sqrt{x^2 - 4}$

130 $y = 2 + \sqrt{9x^2 + 9}$

131 $y = 1 - \sqrt{4x^2 + 16x}$

132 $y = \sqrt{8x + 4x^2}$

133 $y = \frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25} + 5$

134 $y = 2 - \frac{4}{5}\sqrt{x^2 + 9}$

135 $y = \sqrt{|x| + 4x^2}$

136 $y = \sqrt{4x|x| - 2|x|}$

137 $y = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{6|x| + x^2}$

Traccia il grafico delle curve aventi le seguenti equazioni.

138 $x = -1 - \sqrt{y^2 + 1}$

139 $x = 2 + \sqrt{4y^2 - 16y}$

140 $x^2 - y|y| = 1$

141 $x = -2 - \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 2y - 15}$

142 $x = 3 + \sqrt{y^2 - 4}$

143 $x = 2 - \frac{1}{3}\sqrt{y^2 - 9}$

144 $x^2 + y|y| - 4x - 4y + 4 = 0$

145 $x^2 + y|y| = 4$

146 $x|x| - y^2 + 1 = 0$

147 $x|x| - y^2 - 2y + 1 = 0$

148 $x|x| + 4y^2 + 2x - 3 = 0$

149 $x^2 + y|y| - 9 = 0$

150 $x^2 - y|y| + 2x - 2|y| + 1 = 0$

151 $x^2 - y^2 + 2|x + y| - 9 = 0$

152 $\frac{x|x|}{9} + \frac{y|y|}{4} = 1$

153 $|y| = \sqrt{x^2 - 4}$

154 $x|x| + y|y| - 1 = 0$

155 Data l'iperbole $x^2 - 4y^2 = 1$,

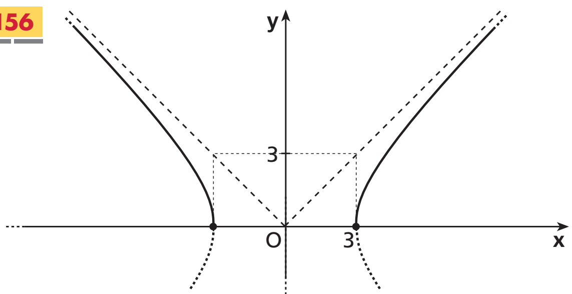
a) disegnarla su un diagramma cartesiano;
b) scrivere le equazioni degli asintoti;
c) trovare le rette tangenti passanti per $P(0; 1)$;
d) esprimere la porzione con $y \leq 0$ come grafico di funzione, specificando il campo di esistenza.

(*Università di Padova, Corso di laurea in Chimica e Tecnologie farmaceutiche*, 2008)

$\left[\text{b) } y = \pm\frac{1}{2}x;\ \text{c) } y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x + 1;\ \text{d) } f(x) = -\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2},\ x \leq -1 \vee x \geq 1\right]$

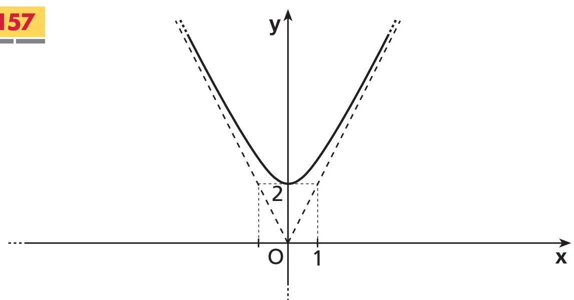
Trova le equazioni dei seguenti grafici utilizzando i dati delle figure.

156



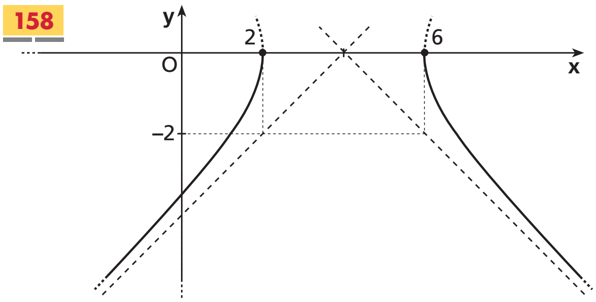
$\left[y = \sqrt{x^2 - 9}\right]$

157



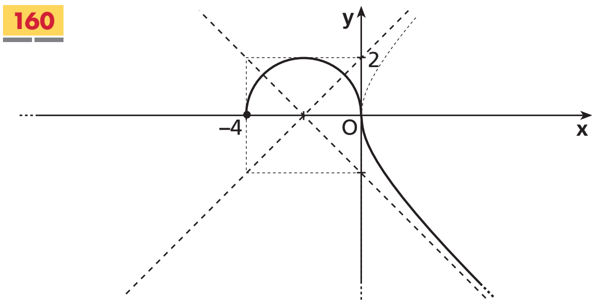
$\left[y = 2\sqrt{1 + x^2}\right]$

158



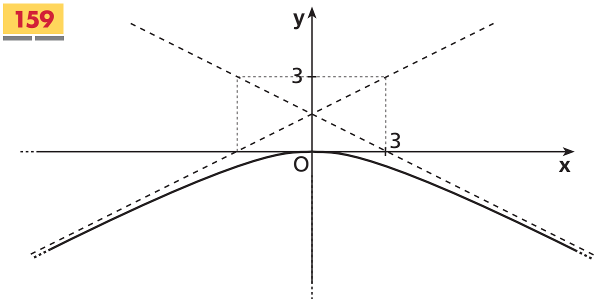
$\left[y = -\sqrt{x^2 - 8x + 12}\right]$

160



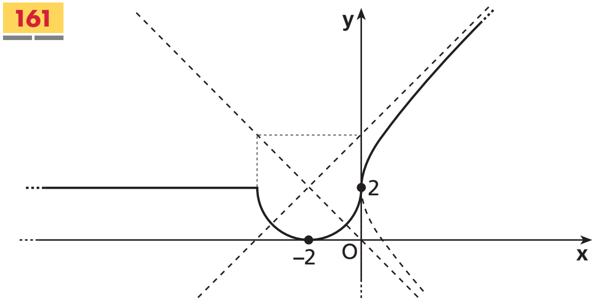
$\left[y = \begin{cases} \sqrt{-x^2 - 4x} & \text{se } -4 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{x^2 + 4x} & \text{se } x > 0 \end{cases}\right]$

159



$\left[y = -\frac{1}{2}\sqrt{9 + x^2} + \frac{3}{2}\right]$

161



$\left[y = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq -4 \\ -\sqrt{-x^2 - 4x} + 2 & \text{se } -4 < x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 + 4x} + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}\right]$

La risoluzione grafica di equazioni e disequazioni irrazionali

162 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo graficamente la seguente disequazione irrazionale:

$$4\sqrt{x^2 - 6x + 5} \leq x + 4.$$

Isoliamo la radice a sinistra del segno di disuguaglianza:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 5} \leq \frac{1}{4}x + 1.$$

Dai due membri della disequazione ricaviamo le equazioni di due funzioni:

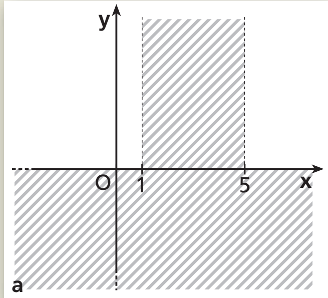
$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 5} \text{ e } y = \frac{1}{4}x + 1.$$

Per disegnare il grafico della prima funzione, $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$, determiniamo il suo dominio ponendo il radicando maggiore o uguale a 0:

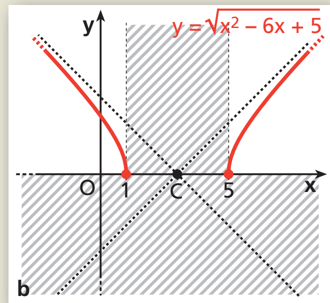
$$x^2 - 6x + 5 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq 1 \vee x \geq 5.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme:

$$D = \{x \in \mathbb{R} |\, x \leq 1 \vee x \geq 5\}.$$



L'equazione della prima funzione, $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$, è equivalente al seguente sistema:

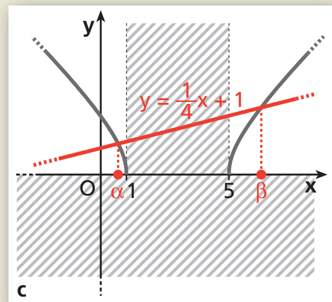


$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = x^2 - 6x + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 - (x^2 - 6x + 9 - 9) = 5 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 - (x-3)^2 = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ \dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Eliminiamo tutti i punti che non hanno $x \leq 1 \vee x \geq 5$ o $y \geq 0$ (figura *a*, nella pagina precedente).

L'equazione $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ è l'equazione di un'iperbole traslata di centro $C(3;0)$, asse trasverso $y = 0$, con $a = 2$, asse non trasverso $x = 3$, con $b = 2$, asintoti $y = \pm(x - 3)$.

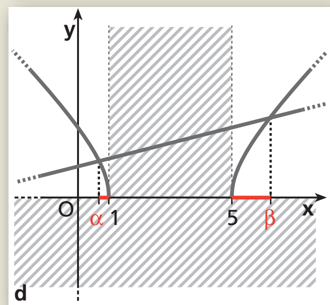


Tracciamo i rami di iperbole contenuti nella parte di piano che non abbiamo eliminato (figura *b*), ottenendo il grafico cercato.

Rappresentiamo la seconda funzione, corrispondente alla retta di equazione $y = \dfrac{1}{4}x + 1$ (figura *c*).

Dal grafico leggiamo, in modo approssimato, le ascisse α e β dei punti di intersezione tra la retta e l'iperbole, nella parte di piano in cui la disequazione ha significato:

$$\alpha \simeq 0{,}7, \quad \beta \simeq 6{,}3.$$



Osserviamo nel grafico tracciato che la disequazione $\sqrt{x^2 - 6x + 5} \leq \dfrac{1}{4}x + 1$ mette a confronto l'ordinata di un punto dell'iperbole (membro a sinistra) con l'ordinata di un punto della retta (membro a destra) con la stessa ascissa.

Evidenziamo sull'asse x gli intervalli in cui i punti dell'iperbole hanno ordinate minori o uguali alle ordinate dei punti corrispondenti della retta (figura *d*).

Le ascisse di questi punti sono le soluzioni della disequazione data:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \alpha \leq x \leq 1 \vee 5 \leq x \leq \beta, \alpha \simeq 0{,}7, \beta \simeq 6{,}3\}.$$

Osservazione. Se dobbiamo risolvere un'**equazione**, per esempio $\sqrt{x^2 - 6x + 5} = \dfrac{1}{4}x + 1$, procediamo allo stesso modo, ma terminiamo la risoluzione dopo la determinazione dell'ascissa (o delle ascisse) dei punti di intersezione.

Risolvi graficamente le seguenti equazioni e disequazioni irrazionali.

163 $\sqrt{4x^2 + 4} > x + 2$ $[x < 0 \vee x > \alpha; \alpha \simeq 1{,}3]$

164 $\sqrt{x^2 + 16} \geq 2x + 3$ $[x \leq \alpha; \alpha \simeq 0{,}5]$

165 $\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4} \leq \dfrac{x}{3}$ $[2 \leq x \leq \alpha; \alpha \simeq 2{,}7]$

166 $\sqrt{\dfrac{x^2}{4} + 1} + 4 > 5$ $[x \neq 0]$

167 $-\sqrt{x^2 + 9} \geq -2x$ $[x \geq \alpha; \alpha \simeq 1{,}7]$

168 $6\sqrt{x^2 - 1} - 2 = -x + 2$ $[x_1 \simeq -1{,}3; x_2 \simeq 1{,}1]$

169 $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}x$ $[x \simeq 0{,}6]$

170 $\sqrt{x + 1} \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4x}$ $[-1 \leq x \leq \alpha \vee x \geq \beta; \alpha \simeq -0{,}5, \beta \simeq 8{,}5]$

171 $\sqrt{1 - x^2} < \sqrt{x^2 - 2x}$ $[-1 \leq x < \alpha; \alpha \simeq -0{,}4]$

172 $3\sqrt{x^2-2x}+1<\frac{1}{3}x$ $[S=\emptyset]$

173 $-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4x}\leq -x+1$ $[x\leq 0]$

174 $\sqrt{4x+x^2+3}<\sqrt{2}(x+1)$ $[x>1]$

175 $\frac{3\sqrt{5}}{5}\sqrt{x^2-4x}-3x+1>0$ $[x\leq 0]$

176 $\sqrt{x^2-4}<3-|x|$
$[-\alpha<x\leq -2 \vee 2\leq x<\alpha;\ \alpha\simeq 2{,}2]$

5. L'IPERBOLE EQUILATERA

Teoria a pag. 448

L'iperbole equilatera riferita agli assi di simmetria

177 Fra le seguenti equazioni riconosci quelle dell'iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria e rappresentale graficamente.

$x^2-y^2=1;\qquad x^2+y^2=1;\qquad y^2-x^2=2;$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1;\qquad y^2-4x^2=1;\qquad y^2-x^2=4.$

178 Disegna le seguenti iperboli equilatere, scrivendo le equazioni degli asintoti e le coordinate dei vertici e dei fuochi. Calcola poi l'eccentricità.

$y^2-x^2=1;\quad y^2-x^2=9;\quad x^2-y^2=16;\quad x^2-y^2=25;\quad y^2-x^2=36.$

179 ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri assi avente un fuoco nel punto $F(\sqrt{18};0)$.

L'equazione dell'iperbole cercata è del tipo $x^2-y^2=a^2$. Dalla relazione fra a e c ricaviamo il valore di a^2 (ricordiamo che $a^2+b^2=c^2$ e $a=b$):

$$c^2=2a^2 \quad\rightarrow\quad 18=2a^2 \quad\rightarrow\quad 9=a^2.$$

Scriviamo poi l'equazione richiesta: $x^2-y^2=a^2 \quad\rightarrow\quad x^2-y^2=9$.

Scrivi le equazioni delle iperboli equilatere riferite ai propri assi di simmetria e con le seguenti caratteristiche. Rappresentale poi graficamente.

180 Avente un fuoco in $(2\sqrt{6};0)$. $[x^2-y^2=12]$

181 Passante per $(2\sqrt{5};-4)$. $[x^2-y^2=4]$

182 Passante per il punto di ascissa 4 della retta di equazione $2x-y-5=0$. $[x^2-y^2=7]$

183 Avente un vertice reale in $(-3;0)$. $[x^2-y^2=9]$

184 Data l'equazione $\frac{2x^2}{k-4}-\frac{3y^2}{k+1}=1$, determina per quale valore di k rappresenta un'iperbole equilatera. Preso poi P appartenente a tale iperbole nel primo quadrante, trova le sue coordinate, sapendo che, detti F_1 e F i fuochi, l'area del triangolo F_1PF vale 10. $[k=14;\ P(\sqrt{15};\sqrt{10})]$

185 Dato il fascio di curve di equazione $(k-3)x^2+2(k-4)y^2-5k+\frac{3}{2}=0$, determina per quali valori di k l'equazione rappresenta un'iperbole e un'iperbole equilatera. Disegna l'iperbole per $k=\frac{7}{2}$ determinandone fuochi, vertici, asintoti ed eccentricità.

$$\left[3<k<4;\ k=\frac{11}{3};\ F(\pm 4\sqrt{3};0);\ V(\pm 4\sqrt{2};0);\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x;\ e=\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$$

L'iperbole equilatera riferita agli asintoti

186 ESERCIZIO GUIDA

Data l'iperbole equilatera di equazione $xy = 16$, determiniamo le coordinate dei vertici e rappresentiamo la curva graficamente.

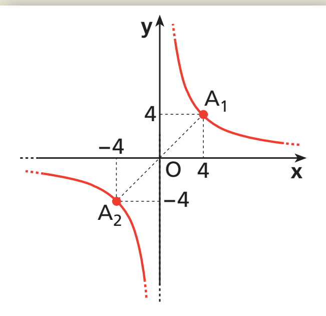
Poiché $k = 16 > 0$, il grafico della curva si trova nel primo e terzo quadrante e l'asse trasverso della curva è la bisettrice dei precedenti quadranti, ossia $y = x$.

Per determinare le coordinate dei vertici risolviamo il sistema costituito dalle equazioni dell'iperbole e della bisettrice. Otteniamo:

$$A_1(\sqrt{k}; \sqrt{k}),\ A_2(-\sqrt{k}; -\sqrt{k}) \rightarrow A_1(4; 4),\ A_2(-4; -4).$$

Per disegnare l'iperbole troviamo qualche punto della curva assegnando valori a x, purché diversi da 0, e calcolando i corrispondenti valori di y. Per esempio, per $x = 2$ abbiamo $y = 8$.

Infine, congiungendo i punti ottenuti, rappresentiamo la curva richiesta, ricordando che gli assi cartesiani sono gli asintoti.



Data l'equazione dell'iperbole, in ciascuno dei seguenti casi determina le coordinate dei vertici e dei fuochi e rappresenta graficamente la curva.

187 a) $xy = 36$; b) $xy + 12 = 0$; c) $xy = 8$; d) $xy = -18$.

188 a) $y = \frac{2}{x}$; b) $y = -\frac{1}{x}$; c) $y = -\frac{2}{3x}$; d) $y - \frac{1}{2x} = 0$.

189 Stabilisci quali delle seguenti equazioni rappresenta un'iperbole equilatera, specificando se è riferita agli assi o agli asintoti, e determina i vertici e i fuochi.

a) $x^2 - 4y^2 + 4 = 0$; c) $xy + 6 = 0$; e) $x = \frac{y}{2}$; g) $x^2 = y^2 + 4$;

b) $y^2 - x^2 = 9$; d) $9x^2 - 9y^2 = 1$; f) $x^2 = 1 - y^2$; h) $y - x^2 = 0$.

190 COMPLETA

a) Un'iperbole equilatera con i fuochi sull'asse x ha equazione ....

b) L'equazione $xy + 1 = 0$ rappresenta un'iperbole equilatera con i fuochi sulla retta ....

c) Un'iperbole equilatera riferita agli assi ha per asintoti le rette ....

d) L'eccentricità dell'iperbole di equazione $xy = 4$ è ....

191 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, passante per $(-2; -8)$ e, dopo aver calcolato le coordinate dei suoi vertici, rappresentala graficamente. $[xy = 16; (-4; -4), (4; 4)]$

Determina le equazioni delle iperboli equilatere riferite ai propri asintoti e con le seguenti caratteristiche. Rappresentale poi graficamente.

192 Avente un vertice nel punto $A(6; -6)$. $[xy = -36]$

193 Situata nel secondo e quarto quadrante, sapendo che $\overline{A_1A_2} = 6\sqrt{2}$. $[xy = -9]$

194 Avente un fuoco nel punto $F(-4; 4)$. $[xy = -8]$

195 Tangente alla retta di equazione $y = 5x - 10$. $[xy = -5]$

196 Data l'iperbole equilatera riferita agli asintoti di equazione $xy = k$, con $k > 0$:
a) stabilisci per quale valore del parametro l'iperbole ha il semiasse trasverso che misura 4;
b) rappresenta l'iperbole;
c) trova le coordinate dei fuochi e dei vertici;
d) scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole nei vertici.
$\left[\text{a) } k = 8; \text{ c) } V(\pm 2\sqrt{2}; \pm 2\sqrt{2}), F(\pm 4; \pm 4); \text{ d) } y = -x + 4\sqrt{2}, y = -x - 4\sqrt{2}\right]$

197 Scrivi le equazioni delle iperboli equilatere, riferite agli asintoti, che sono tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ e trova l'area del quadrilatero che si ottiene congiungendo i punti di tangenza. $[xy = -2; xy = 2; \text{area} = 8]$

198 Determina l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, che stacca sulla retta di equazione $y = -2x + 1$ una corda che misura $\frac{7}{2}\sqrt{5}$. $[xy = -6]$

199 Dopo aver determinato l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, che passa per il punto $A(-2; -8)$, trova le equazioni delle rette tangenti nei vertici. $[xy = 16; y = -x \pm 8]$

200 Dopo aver determinato l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, avente un fuoco nel punto $F(-2\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$, calcola l'area del quadrilatero i cui vertici sono le intersezioni delle rette di equazioni $y = -3x + 9$ e $y = -3x - 9$ con l'iperbole. $[xy = 6; \text{area} = 18]$

201 Considera l'iperbole di equazione $xy = 12$ e rappresentala graficamente. Calcola poi le aree dei triangoli formati dagli assi cartesiani e dalle tangenti all'iperbole nei suoi punti di ascissa 4 e -6 e verifica che sono uguali. [24]

La funzione omografica

IN PRATICA
▶ Videolezione 24

202 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico dell'iperbole equilatera di equazione $y = \dfrac{6x+1}{2x-4}$.

L'equazione $y = \dfrac{6x+1}{2x-4}$ è quella della funzione omografica $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, che rappresenta un'iperbole equilatera avente gli asintoti $x = -\dfrac{d}{c}$ e $y = \dfrac{a}{c}$ e le coordinate del centro di simmetria $C\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$.

In questo caso abbiamo: $a = 6$, $b = 1$, $c = 2$, $d = -4$.

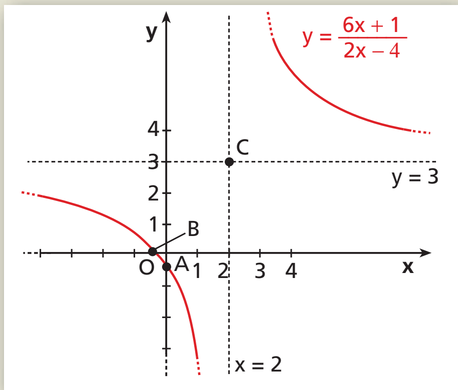
Il centro è $C\left(-\dfrac{-4}{2}; \dfrac{6}{2}\right)$, ossia $C(2; 3)$.

Le equazioni degli asintoti sono $x = 2$ e $y = 3$.

Per disegnare il grafico dell'iperbole determiniamo alcuni suoi punti, per esempio le intersezioni con gli assi:

$$\text{asse } y)\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{6x+1}{2x-4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow A\left(0; -\dfrac{1}{4}\right);$$

$$\text{asse } x)\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{6x+1}{2x-4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -\dfrac{1}{6} \end{cases} \rightarrow B\left(-\dfrac{1}{6}; 0\right).$$



Tracciamo il grafico dell'iperbole assegnata.

Disegna il grafico delle seguenti iperboli equilatere.

203 $y = \dfrac{6x+4}{3x-9}$

204 $y = \dfrac{2x-1}{4x+8}$

205 $y = \dfrac{5x+1}{2-10x}$

206 $y = \dfrac{1-2x}{3+6x}$

207 $y = \dfrac{x}{x-3}$

208 $y = \dfrac{3+5x}{1-x}$

209 $2xy + x - y + 3 = 0$

210 $xy - x + y + 3 = 0$

211 $xy - 3x + 2y + 6 = 0$

Stabilisci quali delle seguenti equazioni rappresentano delle funzioni omografiche e, in caso affermativo, traccia il loro grafico.

212 $xy + 3x + y + 3 = 0$

213 $y = \dfrac{2x+3}{10x+15}$

214 $xy = y - 2$

215 $y = \dfrac{2x}{x^2+x}$

Traccia il grafico delle seguenti funzioni.

216 $y = \dfrac{2|x|+6}{x-4}$

217 $y = \dfrac{|3x+6|}{x-1}$

218 $y = \left|\dfrac{3x-9}{x+2}\right|$

219 $|x| + xy - 4y = 0$

220 $|x|y - 4 = 0$

221 $y = \dfrac{|x|-1}{x}$

222 $y = \dfrac{2-|x|}{|2-x|}$

223 $y = \left|\dfrac{2|x|+1}{x}\right|$

224 $y = \dfrac{|x-3|}{x} + 2$

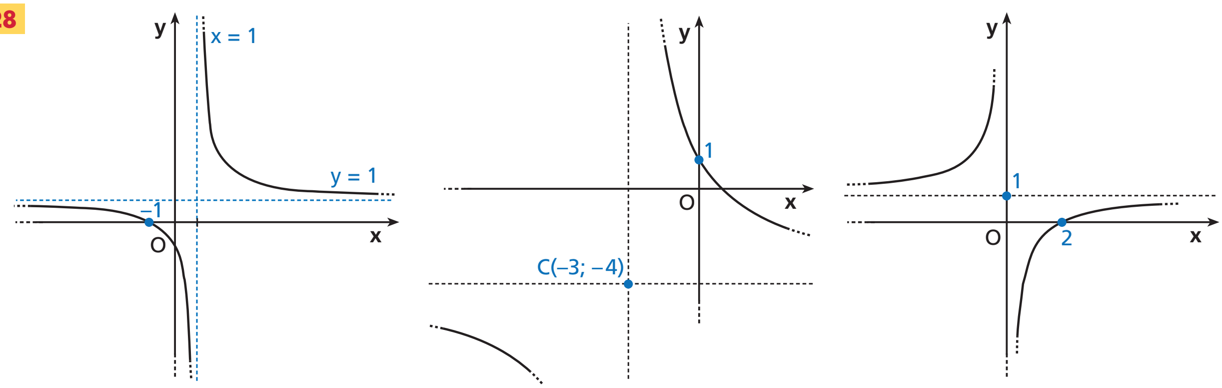
225 $y = \dfrac{x}{|x+2|+|x|}$

226 $y = \dfrac{x+1}{|x^2-1|}$

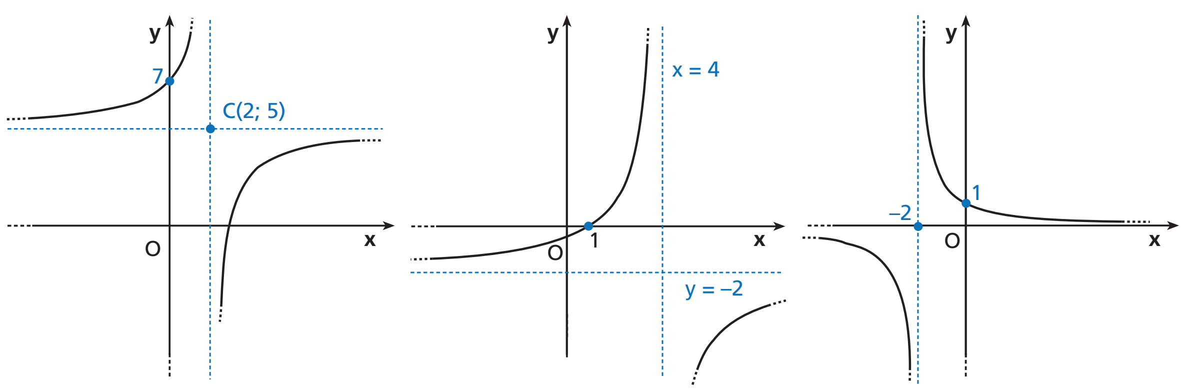
227 $|x|y - xy + y = 2$

Utilizzando i dati delle figure, trova le equazioni delle funzioni rappresentate nei seguenti grafici.

228



229



Rappresenta le curve corrispondenti alle seguenti equazioni.

230 $|xy| + x - y = 0$ **231** $x|y| = 4$ **232** $|y| = \dfrac{x+2}{x}$ **233** $2xy + |y| - 2 = 0$

234 Data l'equazione $y = \dfrac{3ax+b}{x-c}$, determina a, b, $c \in \mathbb{R}$ in modo che il grafico della funzione passi per il punto $A\,(3; 14)$ e gli asintoti siano $x = 2$ e $y = 6$. Disegna la curva così ottenuta. $\left[y = \dfrac{6x-4}{x-2}\right]$

235 Per quale valore di k la funzione omografica $y = \dfrac{2x+k}{2x+6}$ passa per il punto $P\left(1; -\dfrac{3}{8}\right)$? Quali sono le equazioni dei suoi asintoti? Determina l'equazione della tangente nel punto di intersezione dell'iperbole con l'asse y. Calcola poi l'area del triangolo formato dalla tangente e dagli asintoti.
$[k = -5;\ x = -3;\ y = 1;\ 11x - 18y - 15 = 0;\ \text{area} = 11]$

236 Determina i parametri a, b e d nell'equazione $y = \dfrac{ax+b}{4x+d}$, affinché essa rappresenti un'iperbole equilatera avente un asintoto di equazione $2x + 1 = 0$ e passante per i punti $A(1; 1)$ e $B(-1; -2)$.
Determina le coordinate del centro di simmetria dell'iperbole, l'equazione del secondo asintoto e degli assi di simmetria dell'iperbole. Rappresenta infine l'iperbole.
$\left[a = 1, b = 5, d = 2;\ O'\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right);\ y = \dfrac{1}{4};\ y = x + \dfrac{3}{4};\ y = -x - \dfrac{1}{4}\right]$

237 Studia la curva di equazione $y = \dfrac{-3x+4}{x-2}$ ed esegui una traslazione in modo tale che i suoi asintoti coincidano con gli assi cartesiani. Trova poi quali punti della curva trasformata hanno per tangente una retta di coefficiente angolare 2. $[xy = -2;\ (-1; 2), (1; -2)]$

238 Determina le eventuali intersezioni dell'iperbole equilatera di equazione $xy = \dfrac{1}{2}$ e della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$, dopo aver studiato la loro posizione reciproca nel piano cartesiano. Esegui poi una traslazione che porti il centro comune delle curve in $C\,(4; 2)$ e trova le nuove equazioni.
$\left[\text{curve tangenti; } \left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);\ y = \dfrac{4x-15}{2(x-4)};\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0\right]$

I fasci di funzione omografiche

239 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo il fascio di funzioni omografiche di equazione $y = \dfrac{(k-1)x+2}{kx-4}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e troviamo il luogo dei centri di simmetria.

L'equazione $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ rappresenta una funzione omografica se $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$.

- $c = 0$ per $k = 0$. L'equazione diventa:
$$y = \frac{-x+2}{-4} \ \rightarrow\ y = \frac{x}{4} - \frac{1}{2},$$ che è l'equazione di una retta.
- $ad - bc = 0$ se $-4(k-1) = 2k \ \rightarrow\ k = \dfrac{2}{3}$.

  L'equazione diventa:
$$y = \frac{-\frac{1}{3}x + 2}{\frac{2}{3}x - 4} = \frac{-\frac{1}{3}x + 2}{-2\left(-\frac{1}{3}x + 2\right)} = -\frac{1}{2} \ (\text{con } x \neq 6),$$
  ossia l'equazione della retta $y = -\dfrac{1}{2}$ privata del punto $\left(6; -\dfrac{1}{2}\right)$.

- Per $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{2}{3}$, abbiamo un fascio di funzioni omografiche.

  Cerchiamo i **punti base** del fascio, scrivendo la sua equazione nella forma implicita ed evidenziando k:

  $(kx-4)y=(k-1)x+2 \rightarrow ykx-4y-kx+x-2=0 \rightarrow k(yx-x)-4y+x-2=0.$

  Per ottenere le coordinate dei punti base, risolviamo il sistema:

  $$\begin{cases} yx-x=0 \\ -4y+x-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(y-1)=0 \\ -4y+x-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \vee y=1 \\ -4y+x-2=0 \end{cases}$$

  Sostituendo nella seconda equazione:

  per $x=0, -4y-2=0 \rightarrow y=-\frac{1}{2}$, $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ è un punto base;

  per $y=1, -4+x-2=0 \rightarrow x=6$, $B(6;1)$ è un punto base.

- Il **centro di simmetria** delle funzioni omografiche è $C\left(\frac{4}{k}; \frac{k-1}{k}\right)$ con $k \neq 0$ e $k \neq \frac{2}{3}$.

- Cerchiamo il **luogo dei centri di simmetria**, determinando k in funzione dell'ascissa e sostituendo nell'ordinata:

  $$x=\frac{4}{k} \rightarrow k=\frac{4}{x};\ y=\frac{k-1}{k} \rightarrow y=\frac{\frac{4}{x}-1}{\frac{4}{x}}=\frac{\frac{4-x}{\cancel{x}}}{\frac{4}{\cancel{x}}}=1-\frac{x}{4} \text{ (con } x \neq 0).$$

  Il luogo cercato è la retta di equazione $y=1-\frac{x}{4}$, privata del punto $(0; 1)$ e privata inoltre del punto $\left(6; -\frac{1}{2}\right)$ relativo a $k=\frac{2}{3}$, valore per cui non si ha un'iperbole ma una retta.

240 Trova per quale valore di a l'equazione $y=\dfrac{2ax+1}{(a-6)x-4}$ rappresenta un'iperbole equilatera.

$\left[\forall a \in \mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}, 6\right\}\right]$

241 Studia il fascio di funzioni omografiche $y=\dfrac{ax+1}{(a-2)x+3}$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

$\left[\text{per } a=2,\ y=\frac{2x+1}{3}; \text{ per } a=-1,\ y=\frac{1}{3} \text{ con } x \neq 1; \text{ per } a \neq -1; 2, \text{ iperboli di centro } \left(-\frac{3}{a-2}; \frac{a}{a-2}\right)\right]$

242 Dopo aver studiato il fascio di curve di equazione $y=\dfrac{mx-m}{x+2m}$ al variare di $m \in \mathbb{R}$, trova il luogo dei centri di simmetria.

$\left[\text{per } m=0,\ y=0 \text{ con } x \neq 0; \text{ per } m=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2} \text{ con } x \neq 1;\right.$
$\left.\text{per } m \neq -\frac{1}{2}; 0, \text{ iperboli di centro } (-2m; m);\ x+2y=0 \text{ esclusi i punti } \left(1; -\frac{1}{2}\right), (0; 0)\right]$

243 Studia il fascio di curve di equazione $y=\dfrac{(k+2)x+k-1}{2kx+1}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e determina il luogo dei centri di simmetria. Scrivi poi l'equazione dell'iperbole del fascio che ha come asintoto la retta $x=\frac{1}{2}$ e quella dell'iperbole che ha per tangente la retta $y=2x$.

$\left[\text{per } k=0,\ y=2x-1; \text{ per } k=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{3}{2} \text{ con } x \neq 1; \text{ per } k=2,\ y=1 \text{ con } x \neq -\frac{1}{4}; \text{ per } k \neq -\frac{1}{2}; 0; 2,\right.$
$\left.\text{iperboli di centro } \left(-\frac{1}{2k}; \frac{k+2}{2k}\right);\ y=\frac{1-4x}{2} \text{ esclusi i punti } \left(0; \frac{1}{2}\right), \left(1; -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{4}; 1\right);\ y=\frac{x-2}{1-2x},\ y=\frac{50x-1}{32x+17}\right]$

244 Data l'equazione $y = \dfrac{a-3}{(a+1)x-2}$, studia il fascio di curve da essa rappresentato al variare di $a \in \mathbb{R}$ e trova gli eventuali punti comuni a tutte le curve del fascio.

$\left[\text{per } a = -1,\ y = 2;\ \text{per } a = 3,\ y = 0 \text{ con } x \neq \frac{1}{2};\ \text{per } a \neq -1; 3, \text{ iperboli di centro } \left(\frac{2}{a+1}; 0\right); \left(\frac{1}{2}; 2\right)\right]$

245 Trova per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $y = \dfrac{x-k}{kx-4}$ rappresenta un'iperbole equilatera, determina gli eventuali punti comuni a tutte le iperboli e scrivi l'equazione dell'iperbole del fascio che ha come asintoto la retta $x = \frac{1}{4}$.

$\left[\forall k \in \mathbb{R} - \{\pm 2, 0\}; \left(2; -\frac{1}{2}\right), \left(-2; \frac{1}{2}\right); y = \frac{x-16}{16x-4}\right]$

ESERCIZI VARI L'iperbole

246 **ASSOCIA** a ciascuna iperbole i propri asintoti.

1) $5x^2 - 2y^2 = 10$
2) $x^2 - y^2 = 16$
3) $-25x^2 + 4y^2 = 100$
4) $xy - 2 = 0$
5) $y = \dfrac{x+1}{x}$

a) $5x \pm 2y = 0$
b) $x = 0 \vee y = 0$
c) $x = 0 \vee y = 1$
d) $\sqrt{10}\,x \pm 2y = 0$
e) $2x \pm 2y = 0$

247 **COMPLETA**

Data l'equazione $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{2a-3} = 1$, allora:

a) per $a >$ …… l'equazione rappresenta un'iperbole con i vertici reali sull'asse x;
b) per $a =$ …… l'equazione rappresenta una circonferenza;
c) per $a < -3$ l'equazione rappresenta una ……… con i fuochi sull'asse delle ……… .

$\left[\text{a) } \frac{3}{2}; \text{ b) } -3; \text{ c) ellisse, ordinate}\right]$

248 **TEST** Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$(k^2 - 4k)x^2 + (6-k)y^2 = 1$$

rappresenta un'iperbole equilatera con i fuochi sull'asse delle ascisse?

A $k = 2 \vee k = 3$
B $k < 6$
C $k = 0$
D $\forall k \in \mathbb{R}$
E $\nexists k \in \mathbb{R}$

249 **TEST** Un'iperbole con i fuochi sull'asse y ha un vertice nel punto $(0; -\sqrt{3})$ e passa per il punto $P(1; 2)$. Quale fra le seguenti affermazioni è *falsa*?

A È simmetrica rispetto ai suoi asintoti.
B È simmetrica rispetto al suo asse trasverso.
C È simmetrica rispetto al suo asse non trasverso.
D Ha eccentricità maggiore di 1.
E Non ha il centro nell'origine O.

250 **VERO O FALSO?**

a) In ogni iperbole si ha $e > 1$. V F
b) All'aumentare di e, aumenta lo «schiacciamento» dell'iperbole. V F
c) L'iperbole equilatera ha eccentricità uguale a 1. V F
d) Tutte le funzioni omografiche hanno eccentricità $e = \sqrt{2}$. V F
e) L'eccentricità e cambia al cambiare del sistema di riferimento. V F

251 Scrivi l'equazione del luogo dei centri delle iperboli di equazione $3\left(x-\frac{k}{k-1}\right)^2-4(y-k+2)^2=12$. Dopo aver verificato che il luogo è un'iperbole, rappresentala e trova l'equazione della retta a essa tangente nel suo punto di ascissa 3.

$\left[y=\frac{-x+2}{x-1};\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right]$

252 Determina l'equazione dell'iperbole equilatera avente fuochi $F_1(2;0)$, $F_2(2;4)$. $[x^2-y^2-4x+4y+2=0]$

253 a) Rappresenta l'iperbole γ di equazione $x^2-y^2+6x-3y-\frac{37}{4}=0$, dopo aver determinato il centro C, i vertici reali, le equazioni degli asintoti, l'eccentricità.

b) Studia il fascio di curve di equazione $y=\frac{(a-2)x+1}{2ax+3}$ al variare di $a\in\mathbb{R}$.

c) Trova il luogo dei centri di simmetria.

d) Individua nel fascio l'iperbole con il centro di simmetria coincidente con quello di γ e disegnala.

$\left[\text{a) } C\left(-3;-\frac{3}{2}\right), A_1\left(-7;-\frac{3}{2}\right), A_2\left(1;-\frac{3}{2}\right), 2x+2y+9=0, 2x-2y+3=0, e=\sqrt{2};\right.$
b) per $a=0$, $y=\frac{-2x+1}{3}$; per $a=6$, $y=\frac{1}{3}$ con $x\neq-\frac{1}{4}$; per $a\neq0,6$ iperboli di centro $\left(\frac{-3}{2a};\frac{a-2}{2a}\right)$;
$\left.\text{c) } y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}, \text{ esclusi i punti } \left(0;\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right); \text{ d) } y=\frac{-3x+2}{2x+6}\right]$

254 Data la famiglia di parabole $y=\frac{a^3x^2}{3}+\frac{a^2x}{2}-2a$, con $a\neq0$, il luogo dei vertici è un'iperbole. Determina l'equazione di tale iperbole.

(USA *Texas A&M University High School Mathematics Contest*, 2006)

$\left[xy=\frac{105}{64}\right]$

255 **TEST** Supponi che ABC sia un triangolo equilatero con $A=(-1;0)$ e con entrambi i punti B e C appartenenti al ramo destro dell'iperbole definita dall'equazione $x^2-y^2=1$. Qual è l'area di ABC?

A $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **B** 3 **C** $3\sqrt{3}$ **D** 6 **E** $4\sqrt{3}$

(USA *University of South Carolina, High School Math Contest*, 2005)

256 **TEST** Quali sono le equazioni degli asintoti della seguente iperbole?

$4x^2-3y^2+8x+16=0$.

A $y=x$ e $y=-x$.

B $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ e $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

C $y=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)$ e $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)$.

D $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$ e $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$.

E $y=\frac{1}{2}(x+1)$ e $y=-\frac{1}{2}(x+1)$.

(USA *Elon University, High School Math Contest*, 2002)

257 a) Scrivi l'equazione dell'iperbole riferita agli assi, con i fuochi sull'asse x, di eccentricità $\frac{\sqrt{5}}{2}$ e passante per $(4\sqrt{3};2)$.

b) Determina l'equazione della retta tangente nel suo punto P di ascissa $2\sqrt{10}$ e di ordinata negativa.

c) Dimostra che tale tangente è la bisettrice dell'angolo $F'\widehat{P}F$, essendo F e F' i fuochi dell'iperbole.

$\left[\text{a) } \frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1;\ \text{b) } \sqrt{10}\,x+2\sqrt{2}\,y-16=0\right]$

258 a) Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, tangente alla retta di equazione $y = -2x - 8$.

b) Per un punto A dell'iperbole, nel primo quadrante, traccia la retta tangente, che interseca l'asse x in B, e la retta parallela all'asse x che interseca l'asse y in C. Verifica che l'area del trapezio $OBAC$ è costante al variare di A.

c) Trova per quale posizione di A il triangolo OAB è equilatero. $\left[\text{a) } xy = 8; \text{ b) } 12; \text{ c) } x_A = 2\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\right]$

259 Determina l'equazione dell'iperbole equilatera che individua sulla retta $y = 3$ un segmento di lunghezza 8. Trova poi l'equazione della tangente all'iperbole nel suo punto A del primo quadrante di ascissa 3 e quella nel punto B del terzo quadrante di ascissa -3. Calcola infine l'area del quadrilatero definito dalle due tangenti e dalle rette parallele all'asse y e passanti per A e per B.
$[x^2 - y^2 = 7; 3x - \sqrt{2}\,y - 7 = 0; 3x - \sqrt{2}\,y + 7 = 0; \text{area} = 42\sqrt{2}]$

260 Scrivi l'equazione della funzione omografica passante per l'origine degli assi e avente centro nel punto $C(1; 1)$. Determina poi le equazioni delle due tangenti t e t' nei vertici dell'iperbole e, considerata la retta di equazione generica $y = k$, trova per quale valore di k si forma, con l'asse x e le due tangenti t e t', un rombo.
$\left[y = \frac{x}{x-1}; y = -x; y = -x + 4; k = \pm 2\sqrt{2}\right]$

261 Trova l'equazione dell'iperbole equilatera avente centro di simmetria $O'(-1; 4)$, asse trasverso parallelo all'asse y e un vertice in $A(-3; 4)$. $[x^2 - y^2 + 2x + 8y - 11 = 0]$

262 Dopo aver determinato l'equazione dell'iperbole avente centro nell'origine O del sistema di riferimento, un fuoco di coordinate $F(0; \sqrt{39})$ e passante per il punto $A(2; 6)$, calcola l'equazione degli asintoti, determina l'eccentricità e rappresenta la curva. Considera poi la retta di equazione generica $y = k$, che interseca l'iperbole in B e in C, e trova per quale valore di k il triangolo BCO ha area uguale a 12.
$\left[\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{27} = -1; y = \pm\frac{3}{2}x; e = \frac{\sqrt{13}}{3}; k = \pm 6\right]$

263 Determina l'equazione dell'iperbole avente centro nell'origine del sistema di riferimento, asse trasverso l'asse x, eccentricità $e = 2$ e passante per il punto $A(3; \sqrt{15})$. Trova poi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo che ha per vertici il punto A e i vertici reali dell'iperbole.
$\left[\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1; 3x^2 + 3y^2 - 4\sqrt{15}\,y - 12 = 0\right]$

264 Data la curva di equazione $y = \frac{2x - a}{bx + c}$, trova a, b, c, sapendo che ha per asintoto la retta $y = 1$ e per tangente in $A(0; -4)$ la retta t: $y = 5x - 4$. Considera poi la retta passante per il centro di simmetria C e parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, determinando la sua intersezione B con la retta t. Calcola l'area del triangolo ABC.
$\left[a = 8, b = 2, c = 2; B\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right); \text{area} = \frac{10}{3}\right]$

265 Determina per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{3k+1} - \frac{y^2}{9-k^2} = 1$ rappresenta:

a) un'iperbole;
b) un'iperbole equilatera;
c) un'iperbole con fuochi sull'asse x;
d) un'ellisse;
e) una circonferenza.
f) Posto $k = 1$, rappresenta la curva che si ottiene, individuando le sue principali caratteristiche. Trova quali rette parallele all'asse y, intersecando la curva, determinano una corda lunga 16.

$\left[\text{a) } k < -3 \vee -\frac{1}{3} < k < 3; \text{ b) } k = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}; \text{ c) } -\frac{1}{3} < k < 3; \text{ d) } k > 3; \text{ e) } k = 5; \text{ f) } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1, x = \pm 6\right]$

266 Data l'iperbole equilatera riferita agli asintoti di equazione $xy = k$, con $k < 0$:

a) stabilisci per quale valore del parametro l'iperbole stacca sulla retta di equazione $2x - y - 6 = 0$ una corda che misura $\sqrt{5}$;

b) rappresenta l'iperbole;

c) trova le coordinate dei fuochi e dei vertici;

d) scrivi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole nei vertici.

[a) $k = -4$; c) $F(\pm 2\sqrt{2}; \mp 2\sqrt{2})$, $V(\pm 2; \mp 2)$; d) $y = x \pm 4$]

267 Per quali valori dei coefficienti a, b, c, d la funzione omografica $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ha centro $C(2; -1)$ e passa per $B(0; 1)$? Considerata l'intersezione con l'asse x, determina l'equazione della tangente t in tale punto. Detti D ed E i punti di intersezione fra t e gli asintoti, calcola l'area del triangolo ECD e l'equazione della circonferenza a esso circoscritta. [$a = -1, b = -2, c = 1, d = -2$; $x - 4y + 2 = 0$; area $= 8$; $x^2 + y^2 + 4x - 13 = 0$]

268 a) Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera avente i vertici sull'asse y e passante per il punto A di coordinate $(3; -5)$.

b) Sia B il simmetrico di A rispetto all'asse delle ascisse. Determina l'equazione della tangente t all'iperbole nel punto B.

c) Calcola l'area della parte di piano individuata dalla retta t, dall'asse delle ascisse e dall'asintoto dell'iperbole avente coefficiente angolare positivo.

$\left[\text{a) } x^2 - y^2 + 16 = 0;\ \text{b) } B(3; 5),\ 3x - 5y + 16 = 0;\ \text{c) } \frac{64}{3}\right]$

269 a) Scrivi l'equazione dell'iperbole avente vertici reali $(\pm 3; 0)$ e passante per il punto $\left(-5; -\frac{8}{3}\right)$, individuandone gli asintoti.

b) Trova le equazioni delle tangenti all'iperbole mandate dal punto P dell'asse y di ordinata $-\frac{3}{2}$. Siano A e B i punti di tangenza.

c) Calcola l'area del quadrilatero $AOBP$, dove O è l'origine del sistema di riferimento.

$\left[\text{a) } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1,\ y = \pm\frac{2}{3}x;\ \text{b) } 5x - 6y - 9 = 0,\ 5x + 6y + 9 = 0,\ A\left(5; \frac{8}{3}\right), B\left(-5; \frac{8}{3}\right);\ \text{c) } \frac{15}{2}\right]$

270 a) Considera l'iperbole di equazione $9x^2 - y^2 + 9 = 0$. Individua i suoi vertici e rappresentala graficamente.

b) Trova le equazioni delle tangenti all'iperbole mandate dal punto A di coordinate $\left(-1; \frac{3}{5}\right)$. Siano B e C i punti di tangenza ($x_B > x_C$).

c) Calcola l'area del triangolo ABC.

d) Determina un punto P sull'iperbole, con ordinata positiva e ascissa minore dell'ascissa di C, tale che $\overline{PH} = \frac{12}{\sqrt{226}}$, essendo H la proiezione di P sulla retta BC.

$\left[\text{a) } V(0; \pm 3);\ \text{b) } 12x + 5y + 9 = 0,\ 9x - 5y + 12 = 0,\ B\left(\frac{4}{3}; -5\right), C\left(\frac{3}{4}; \frac{15}{4}\right);\ \text{c) } \frac{343}{40};\ \text{d) } (0; 3)\right]$

271 a) Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, passante per il punto di coordinate $(-2; -3)$.

b) Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro nell'origine del sistema di riferimento e raggio 2. Siano A e B le sue intersezioni con i semiassi positivi delle x e delle y.

c) Determina le equazioni delle tangenti all'iperbole mandate da A e B.

d) Calcola l'area del quadrilatero formato da dette tangenti e dagli asintoti dell'iperbole.

$\left[\text{a) } xy = 6;\ \text{b) } x^2 + y^2 = 4,\ A(2; 0), B(0; 2);\ \text{c) } 6x + y - 12 = 0,\ x + 6y - 12 = 0;\ \text{d) } \frac{24}{7}\right]$

272 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera riferita a un sistema di assi cartesiani, paralleli ai suoi asintoti, avente un asintoto di equazione $y - 2 = 0$ e passante per i punti $A(1; -3)$ e $B(5; 7)$. Trova le coordinate del centro di simmetria dell'iperbole, l'equazione del secondo asintoto e degli assi di simmetria dell'iperbole. Determina infine l'equazione dell'ellisse con centro nell'origine, avente due vertici nei punti di intersezione dell'iperbole con gli assi.
$\left[y = \frac{2x+4}{x-3}; (3; 2); x = 3; y = -x + 5; y = x - 1; \frac{x^2}{4} + \frac{9}{16}y^2 = 1\right]$

273 Scrivi l'equazione dell'iperbole, simmetrica rispetto agli assi cartesiani, che passa per i punti $P(-2; 0)$ e $Q(3; -2\sqrt{5})$, e considera la tangente t nel suo punto R di ascissa $\frac{5}{2}$ e ordinata positiva. Determina quindi l'equazione della retta s tangente all'iperbole nel punto R', simmetrico di R rispetto all'origine, e, dopo aver osservato che le due rette t e s sono parallele, calcola la loro distanza. Scrivi l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x, due vertici coincidenti con quelli dell'iperbole ed eccentricità $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\left[\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1; R\left(\frac{5}{2}; 3\right); t\colon 10x - 3y - 16 = 0; R'\left(-\frac{5}{2}; -3\right); s\colon -10x + 3y - 16 = 0; \frac{32}{\sqrt{109}}; \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\right]$

274 Scrivi l'equazione dell'iperbole, con i fuochi sull'asse x, con gli assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani, passante per il punto $P(-7; 1)$ e di eccentricità $e = \sqrt{2}$. Trova poi le equazioni delle rette tangenti all'iperbole in P e in P', simmetrico di P rispetto all'asse y. Sia A il loro punto di intersezione. Determina, infine, l'equazione della circonferenza di centro A passante per i fuochi dell'iperbole.
$[x^2 - y^2 = 48; 7x + y + 48 = 0; 7x - y - 48 = 0; x^2 + y^2 + 96y - 96 = 0]$

275 a) Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi che ha un fuoco nel punto $F(2\sqrt{5}; 0)$ ed eccentricità $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
b) Nel fascio improprio di rette aventi coefficiente angolare 2 determina le rette p_1 e p_2 tangenti all'iperbole e calcola le coordinate dei punti P e Q di tangenza.
c) Indicati con R e S i punti in cui p_1 e p_2 intersecano l'asse delle ordinate, calcola l'area del quadrilatero $PSQR$.
$\left[\text{a) } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1; \text{ b) } y = 2x \pm 2\sqrt{15}; \left(\pm\frac{16}{\sqrt{15}}; \pm\frac{2}{\sqrt{15}}\right); \text{ c) } 64\right]$

276 L'iperbole α, con i fuochi sull'asse delle ascisse, ha il semiasse trasverso di lunghezza $\frac{5}{2}$ e gli asintoti di equazioni $2x\sqrt{3} \pm 3y = 0$, mentre la circonferenza β ha raggio 1 e centro nell'origine degli assi.
a) Determina le equazioni di α e β.
b) Trova le equazioni delle quattro tangenti comuni ad α e a β e calcola le coordinate dei quattro punti di tangenza con l'iperbole.
c) Trova l'area del quadrilatero individuato dalle quattro tangenti.
$\left[\text{a) } 4x^2 - 3y^2 = 25, x^2 + y^2 = 1; \text{ b) } 4x \pm 3y \pm 5 = 0; (\pm 5; \pm 5); \text{ c) } \frac{25}{6}\right]$

277 Le due iperboli α e β condividono gli stessi asintoti di equazioni $2x \pm 3y = 0$, hanno i fuochi l'una sull'asse delle ascisse e l'altra sull'asse delle ordinate, e sono entrambe tangenti all'ellisse γ di equazione $9x^2 + 16y^2 = 144$.
a) Determina le equazioni delle due iperboli.
b) Calcola l'area del quadrilatero formato dai quattro fuochi delle due iperboli.
$[\text{a) } 4x^2 - 9y^2 = 64, 4x^2 - 9y^2 = -81; \text{ b) } 52]$

278 Nel semipiano delle ordinate positive considera un punto generico P del ramo dell'iperbole γ di equazione $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$, la sua proiezione H sull'asse x e il fuoco F dell'iperbole. Indicata con t la retta tangente a γ nel punto P, sia T il punto in cui t incontra l'asse delle ascisse. Determina le coordinate di P affinché si abbia $4\overline{TF} = \sqrt{17}\,\overline{PH}$.
$[(3; 4\sqrt{2}); (-3; 4\sqrt{2})]$

REALTÀ E MODELLI

1
Il costo della caffettiera

Una piccola fabbrica produce un nuovo tipo di caffettiera in un dato periodo di tempo, sostenendo costi fissi pari a circa € 9000 e costi variabili quantificabili in € 9 per ogni unità prodotta.

- ▶ Esprimi in funzione del numero x di pezzi prodotti i costi totali sostenuti dall'azienda e il costo medio unitario per ogni pezzo prodotto. Rappresenta graficamente la funzione «costo totale» e la funzione «costo medio unitario» tenendo conto che nel periodo considerato l'azienda può produrre al massimo 3000 unità.
- ▶ Il costo unitario diminuisce all'aumentare del numero di pezzi prodotti. Per studiare meglio questo aspetto, calcola la variazione percentuale della diminuzione di costo unitario corrispondente all'aumento di 100 pezzi prodotti, nei due casi in cui inizialmente i pezzi prodotti siano 1000 oppure 2000.
- ▶ Dopo un'indagine di mercato si valuta che le caffettiere possano essere vendute a un prezzo massimo di € 16. Considerato che le spese di distribuzione sono di circa € 1800 fisse aumentate di € 0,50 per ogni pezzo, calcola qual è il minimo numero di pezzi da produrre per non andare in perdita.

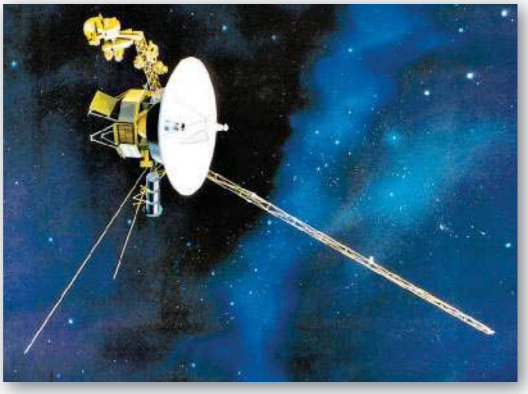
2
Torre di raffreddamento

Il profilo di molte torri di raffreddamento di centrali nucleari ha la forma di un'iperbole.

- ▶ Rappresenta nel piano cartesiano gli archi di iperbole di equazione $x^2 - \dfrac{(y-10)^2}{100} = 1$ delimitati dall'asse delle ascisse (nei punti A e B con $x_A < x_B$) e dalla retta $y = 12$ (nei punti C e D con $x_C < x_D$). Tali archi rappresentano il profilo di una torre di raffreddamento.
- ▶ In assenza di vento il vapore che fuoriesce dalla torre occupa, con buona approssimazione, la zona delimitata dalle due rette tangenti all'iperbole nei punti C e D. Scrivi l'equazione della porzione del fascio di rette (generato dalle tangenti) compresa tra le tangenti stesse.

3
Le sonde Voyager

La sonda spaziale Voyager 2 è stata una delle prime esploratrici del sistema solare esterno, ed è ancora in attività. Lanciata il 20 agosto 1977 dalla NASA, poco prima della gemella Voyager 1, fu immessa in un'orbita che la portò a sfiorare i due pianeti giganti, Giove e Saturno. Durante il viaggio i tecnici si resero conto che potevano sfruttare un allineamento planetario piuttosto raro per far proseguire la sonda verso Urano e Nettuno.
Dalla legge di gravitazione universale si deduce che se un corpo (per esempio la sonda) arriva nella sfera di influenza gravitazionale di un altro corpo (per esempio Saturno) con una velocità sufficientemente elevata, non precipita né si mette in rotazione attorno al secondo corpo, ma si allontana seguendo una traiettoria iperbolica di cui il pianeta è un fuoco.



La traiettoria di Voyager 2 vicino a Saturno può essere descritta dalla seguente equazione (i valori sono espressi in kilometri):

$$\frac{x^2}{1{,}109 \cdot 10^{11}} - \frac{y^2}{1{,}320 \cdot 10^{11}} = 1,$$

mentre per Voyager 1 l'equazione analoga è:

$$\frac{x^2}{2{,}761 \cdot 10^{10}} - \frac{y^2}{9{,}502 \cdot 10^{10}} = 1.$$

- ▶ Quale delle due sonde si è avvicinata di più a Saturno?
- ▶ Quale delle due traiettorie ha eccentricità maggiore?

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Quali equazioni, tra

$$x = -\frac{4}{y}, \quad x^2 = y^2 + 1, \quad y = \frac{1-x}{2x+1},$$

rappresentano un'iperbole equilatera?

A Solo la prima.
B Solo la prima e la terza.
C Nessuna delle tre.
D Solo la seconda.
E Tutte e tre.

2 La retta $3x + 2y = 0$ e il punto $F(0; -\sqrt{13})$ sono rispettivamente un asintoto e un fuoco di un'iperbole.
La sua equazione è:

A $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$
B $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{13} = 1.$
C $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{13} = -1.$
D $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0.$
E $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$

3 L'eccentricità dell'iperbole di equazione

$$x^2 - y^2 = -4$$

è:

A $\frac{1}{\sqrt{2}}.$
B 2.
C $\sqrt{2}.$
D $\frac{1}{2}.$
E $\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

4 È data l'iperbole di equazione:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Le rette del fascio $y = mx$ che intersecano l'iperbole sono *soltanto* quelle per cui:

A $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$
B $-\frac{\sqrt{3}}{2} < m < \frac{\sqrt{3}}{2}.$
C $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$
D $0 \leq m \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$
E $0 \leq m < \frac{\sqrt{3}}{2}.$

5 Quale delle seguenti proposizioni relative alla funzione omografica di equazione $y = \frac{x}{x-2}$ è *vera*?

A Passa per l'origine degli assi e per il punto $P(1; 1)$.
B Ha come asintoti le rette di equazioni $x = 2$ e $y = -1$.
C Ha il centro nel punto $C(2; 1)$.
D Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse x.
E La curva che la rappresenta è situata interamente nel primo quadrante.

6 Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $(k+1)x^2 + (2k-1)y^2 = 2k$ rappresenta un'iperbole con i fuochi sull'asse y?

A $k < -1 \vee k > 0.$
B $0 < k < \frac{1}{2}.$
C $-1 \leq k < 0.$
D $-1 < k < 0.$
E $k < 0 \vee k > \frac{1}{2}.$

7 Considera l'iperbole di equazione:

$$y = \frac{1-x}{x+2}.$$

Quale delle seguenti proposizioni è *falsa*?

A Gli asintoti sono $x = -2$ e $y = -1$.
B Il centro di simmetria è $(-2; -1)$.
C L'iperbole interseca l'asse x in $x = 1$.
D Traslando l'iperbole in modo che abbia centro di simmetria nell'origine, essa ha equazione $xy = 3$.
E L'iperbole interseca l'asse y in $(0; -1)$.

8 Un'iperbole ha equazione:

$$xy - 2x - 4y - 1 = 0.$$

Possiamo affermare che:

A gli assi sono le rette di equazioni $x = 4$, $y = 2$.
B gli asintoti sono le rette di equazioni $x - y - 2 = 0$, $x + y - 6 = 0$.
C i semiassi sono entrambi uguali a 6.
D la distanza tra i fuochi è 12.
E l'eccentricità è 2.

9 Il grafico della figura ha equazione:

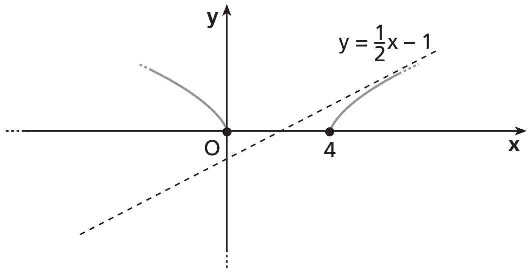
A $y = 2\sqrt{x^2 - 4x}$.

B $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

C $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4x}$.

D $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4x}$.

E $y = 2 + \sqrt{x^2 - 4x}$.



QUESITI

10 Dimostra che la tangente a un'iperbole equilatera del tipo $xy = k$ in un suo punto $P(x_0; y_0)$ ha equazione:

$$\frac{xy_0 + x_0 y}{2} = k.$$

11 Dimostra che in una qualunque iperbole del tipo $xy = k$ la tangente in un suo punto forma con gli assi cartesiani un triangolo di area costante $2 \cdot |k|$.

12 Verifica che la tangente a un'iperbole in un suo punto P è bisettrice dell'angolo formato dalle rette PF_1 e PF_2, essendo F_1 e F_2 i due fuochi, utilizzando l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ e il suo punto P di ascissa 4 nel primo quadrante.

13 Riferito il piano a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2004, *quesito* 6)

14 In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano la seguente equazione:

$$2xy - (k - 1)x + 4y - 2k + 1 = 0,$$

dove k è un parametro reale. Determinare per quali valori di k il luogo assegnato è:
- un'iperbole;
- una coppia di rette.

(*Esame di Stato di indirizzo scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria*, 2001, *quesito* 4)

15 Considera l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = a^2$. Indicati con F_1 e F_2 i suoi fuochi e con O l'origine degli assi, verifica che per un generico punto P dell'iperbole vale la proporzione

$$\overline{PF_1} : \overline{PO} = \overline{PO} : \overline{PF_2},$$

ossia la misura del segmento che congiunge un punto P dell'iperbole con il centro di simmetria è medio proporzionale tra le distanze del punto dai due fuochi.

16 Una retta secante un'iperbole stacca sull'iperbole e sugli asintoti segmenti aventi lo stesso punto medio. Verifica che l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ e la retta di equazione $15x - 4y - 84 = 0$ soddisfano la proprietà.

PROBLEMI

17 Considera l'insieme delle curve di equazione $y = \frac{3kx - 1}{kx + 1}$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

a) Verifica che tutte le curve hanno in comune un punto P e determina le sue coordinate.
b) Disegna i grafici delle curve γ_1 e γ_2 corrispondenti a $k = -1$, $k = 1$ e verifica che sono uno il simmetrico dell'altro rispetto all'asse delle ordinate.
c) Calcola l'area del poligono formato dalle tangenti ai vertici delle curve γ_1 e γ_2.
d) Generalizza il risultato del punto b) dimostrando che curve con k opposti sono reciprocamente simmetriche rispetto all'asse y.

[a) $P(0; -1)$; c) quadrato di area 32]

18 a) Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera avente centro nel punto $E(2; 0)$ e un vertice nell'origine del sistema di riferimento.
b) Trova l'equazione della circonferenza avente il centro nel punto $(0; -3)$ e passante per l'altro vertice dell'iperbole.
c) Determina le coordinate dei punti di intersezione A, B, C, D tra la circonferenza e gli asintoti dell'iperbole $(x_A > x_B > x_C > x_D)$.
d) Dimostra che i triangoli AEB e CED sono simili e calcolane il rapporto di similitudine.

$\left[\text{a) } x^2 - y^2 - 4x = 0\text{; b) } x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0\text{; c) } A(5; -3), B(3; 1), C(0; 2), D(-4; -6)\text{; d) } \frac{1}{2}\right]$

19 a) Scrivi l'equazione della funzione omografica avente il centro di simmetria in $C(-4; 3)$ e passante per il punto $P(-6; 9)$.
b) Sia O l'intersezione dell'iperbole trovata con l'asse delle ascisse e A il suo simmetrico rispetto a C. Scrivi l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento OA.
c) Determina gli ulteriori punti di intersezione D ed E dell'iperbole con la circonferenza.
d) Calcola l'area del quadrilatero $ADOE$.

$\left[\text{a) } y = \frac{3x}{x+4}\text{; b) } O(0; 0), A(-8; 6), x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0\text{; c) } D(-7; 7), E(-1; -1)\text{; d) } 14\right]$

20 a) Determina l'equazione dell'iperbole, con gli assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani, avente per asintoti le rette di equazioni $2x - y - 8 = 0$ e $2x + y - 4 = 0$ e un vertice nel punto $(2; -2)$.
b) Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti di intersezione dell'iperbole trovata con l'asse y e con la retta $x - 6 = 0$.
c) Trova l'area del rettangolo che ha per vertici i punti di intersezione tra l'iperbole e la circonferenza.

$\left[\text{a) } (x-3)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = 1\text{; b) } x^2 + y^2 - 6x + 4y - 28 = 0\text{; c) } 48\sqrt{2}\right]$

21 a) Studia e rappresenta graficamente l'iperbole di equazione $2x^2 - y^2 + 8x + 6y = 0$.
b) Sia A l'intersezione di ascissa negativa dell'iperbole con l'asse x e B quella di ordinata positiva con l'asse y. Determina le equazioni delle tangenti all'iperbole in A e in B.
c) Le tangenti, intersecando gli assi cartesiani, formano un trapezio di cui si chiede l'area.

$\left[\text{a) iperbole traslata di centro } C(-2; 3)\text{; b) } t_A\text{: } 4x - 3y + 16 = 0, t_B\text{: } 4x - 3y + 18 = 0\text{; c) } \frac{17}{6}\right]$

22 a) Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $(9; 9)$ e passante per il punto $(14; 4)$.
b) Determina l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, passante per il punto di intersezione della circonferenza con la bisettrice del primo e terzo quadrante avente ascissa minore.
c) Calcola l'area della figura piana i cui vertici sono i punti di intersezione della circonferenza con l'iperbole.

[a) $x^2 + y^2 - 18x - 18y + 112 = 0$; b) $xy = 16$; c) 6]

23 a) Determina l'equazione della funzione omografica avente per centro di simmetria il punto $C(-3; 2)$ e passante per il punto $A(-7; 1)$.

b) Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro in C e raggio $2\sqrt{2}$.

c) Trova le intersezioni tra l'iperbole e la circonferenza e individua le tangenti nei punti comuni.

d) Determina i fuochi F_1 e F_2 dell'iperbole e calcola l'area del triangolo AF_1F_2.

$\left[\text{a) } y = \frac{2x+10}{x+3}; \text{ b) } x^2 + y^2 + 6x - 4y + 5 = 0; \text{ c) } (-1; 4), (-5; 0), y = -x + 3, y = -x - 5; \text{ d) } F_1(-3-2\sqrt{2}; 2-2\sqrt{2}), F_2(-3+2\sqrt{2}; 2+2\sqrt{2}), \text{area} = 6\sqrt{2}\right]$

24 a) Studia il fascio di curve di equazione $kxy + (1-k)x + 6y - 3k + 3 = 0$ e indica per quali valori di k si ottiene una retta o l'insieme di due rette.

b) Studia la curva γ che si ottiene attribuendo a k il valore -1.

c) Traccia le tangenti alla curva γ condotte dal punto $(2; -2)$ e siano C e D i punti di tangenza.

d) Calcola il perimetro e l'area del triangolo ACD, essendo $A(-6; 0)$.

$\left[\text{a) } k = 0, x + 6y + 3 = 0; k = 1, x + 6 = 0, y = 0; k = 2, x + 3 = 0, 2y - 1 = 0; \text{ b) } y = \frac{2x+6}{x-6}; \text{ c) } C(0; -1); x + 2y + 2 = 0; D(3; -4); 2x + y - 2 = 0; \text{ d) } \sqrt{37} + 3\sqrt{2} + \sqrt{97}; \frac{15}{2}\right]$

25 Dato il fascio di curve di equazione $y = \frac{kx - 4k}{(k+1)x - 2}$, con $k \in \mathbb{R}$:

a) stabilisci per quali valori di k rappresenta un fascio di iperboli equilatere traslate;

b) determina il luogo dei centri di simmetria delle iperboli;

c) trova e rappresenta graficamente l'iperbole γ del fascio che ha come asintoto la retta $4y - 1 = 0$;

d) detto A il punto simmetrico dell'origine O degli assi cartesiani rispetto al centro di simmetria di γ e indicato con C il punto $(0; 1)$, trova il perimetro e l'area del triangolo OAC.

$\left[\text{a) } k \neq -1, -\frac{1}{2}, 0; \text{ b) } y = -\frac{x}{2} + 1, \text{ con } x \neq 0; \text{ c) } y = \frac{x-4}{4x-6}; \text{ d) } \sqrt{37} + 1; \frac{1}{4}\right]$

26 Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.

b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x + y = 4$.

c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate $(1; 1)$ e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.

e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico*, *Sessione ordinaria*, 2001, *problema* 1)

$\left[\text{a) } y = \frac{ax}{x-a}, x \neq 0; \text{ b) } 0 < a \leq 1; \text{ c) } x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0; \text{ d) } 3\pi + 2; \pi - 2; \text{ e) } \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$

PROBLEMI DI RIEPILOGO SU CIRCONFERENZA, PARABOLA, ELLISSE, IPERBOLE

27 a) Data l'ellisse $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y = 0$, disegna la curva e indica la traslazione da applicare per renderla simmetrica rispetto all'origine.

b) Studia il fascio di curve di equazione $y = \dfrac{(2k+1)x}{kx+2}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e trova il luogo dei centri di simmetria.

c) Individua nel fascio l'iperbole con il centro di simmetria coincidente con quello dell'ellisse e disegnala.

$\left[\text{a)} \begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y-1 \end{cases}\!;\ \text{b) per } k=0,\ y=\dfrac{x}{2};\ \text{per } k=-\dfrac{1}{2},\ y=0 \text{ con } x\neq 4;\ \text{per } k\neq 0, -\dfrac{1}{2} \text{ iperboli di centro } \left(-\dfrac{2}{k}; \dfrac{2k+1}{k}\right);\right.$

$\left.\text{luogo dei centri di simmetria: } y = -\dfrac{x}{2} + 2, \text{ esclusi i punti } (0; 2), (4; 0);\ \text{c) } y = \dfrac{x}{x-2}\right]$

28 Determina l'equazione dell'ellisse, riferita ai propri assi di simmetria, avente un fuoco in $F(2; 0)$ e $a = 3$. Trova poi l'equazione dell'iperbole che ha gli stessi fuochi e ha un vertice in $V(1; 0)$. Calcola l'area del quadrilatero individuato dai punti di intersezione tra ellisse e iperbole. Verifica, infine, che il rapporto tra l'area trovata e l'area del cerchio individuato dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$ è uguale a $\dfrac{3\sqrt{15}}{11\pi}$.

$\left[\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1;\ x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1;\ \text{area} = 3\sqrt{15}\right]$

29 a) Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-3; 0)$, $B(1; 2)$ e $C(4; -7)$.

b) Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y avente il vertice nel punto $D(1; -8)$ e passante per il punto $E(4; 1)$.

c) Trova i punti comuni alla circonferenza e alla parabola e individua la tangente t alle due curve nel punto in comune con l'ordinata minore.

d) Individua le tangenti alla circonferenza nei due punti di uguale ordinata che ha in comune con la parabola e calcola l'area del triangolo individuato da esse e dalla tangente t.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0;\ \text{b) } y = x^2 - 2x - 7;\ \text{c) } D(1; -8), E(4; 1), F(-2; 1), y = -8;\right.$

$\left.\text{d) } 3x + 4y - 16 = 0;\ 3x - 4y + 10 = 0;\ \text{area} = \dfrac{675}{4}\right]$

30 a) Determina l'equazione della parabola passante per i punti $(2; 5)$, $(-3; 0)$ e $(7; 0)$.

b) Scrivi l'equazione della circonferenza del fascio $x^2 + y^2 + (6+k)x - (10+k)y + 9 + 3k = 0$ passante per il punto di intersezione di ascissa positiva della parabola con l'asse delle x.

c) Trova l'equazione dell'ellisse avente come asse maggiore, parallelo all'asse x, il diametro della circonferenza e semiasse minore un segmento di lunghezza 3.

$\left[\text{a) } x^2 - 4x + 5y - 21 = 0;\ \text{b) } x^2 + y^2 - 4x - 21 = 0;\ \text{c) } \dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right]$

31 a) Determina l'equazione della parabola γ con asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse avente vertice nel punto $V(4; 2)$ e passante per il punto A di coordinate $(-5; -1)$.

b) Nel fascio proprio di rette di centro $C(9; 0)$ individua la retta r che forma nel primo quadrante con gli assi cartesiani un triangolo di area $\frac{81}{4}$.

c) Stabilisci la posizione reciproca di γ e r e individua gli eventuali punti in comune.

d) Scrivi l'equazione dell'ellisse, con gli assi paralleli agli assi cartesiani, avente centro nel punto $\left(6; \frac{3}{2}\right)$, passante per il centro C del fascio di rette e per il punto $\left(12; \frac{3}{2}\right)$.

$\left[\text{a) } x = -y^2 + 4y; \text{ b) } y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}; \text{ c) tangenti in } (3; 3); \text{ d) } x^2 + 12y^2 - 12x - 36y + 27 = 0\right]$

32 a) Scrivi l'equazione della parabola passante per i punti $A(0; 1)$, $B(4; 1)$ e avente il vertice sull'asse delle ascisse.

b) Determina l'equazione della tangente alla parabola in B e indica con C la sua intersezione con l'asse x.

c) Individua l'equazione della circonferenza passante per i punti A, C e F, dove F è il fuoco della parabola.

$\left[\text{a) } y = \frac{1}{4}x^2 - x + 1; \text{ b) } y = x - 3, C(3; 0); \text{ c) } x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0\right]$

33 a) Considera il fascio di curve di equazione $y = \frac{3x + 13 - k}{(k+1)x + (k+11)}$ e stabilisci per quali valori di k rappresenta delle iperboli.

b) Verifica che tutte le iperboli del fascio passano per due punti fissi A e B $(x_A < x_B)$.

c) Individua l'iperbole del fascio avente per asintoto la retta $y - 3 = 0$.

d) Indicato con C il punto dell'iperbole trovata di ordinata 1, determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, avente il vertice in C e passante per A.

$\left[\text{a) } k \neq -1, 4, 5; \text{ b) } A\left(-3; \frac{1}{2}\right), B\left(-\frac{8}{3}; \frac{3}{5}\right); \text{ c) } y = \frac{3x + 13}{x + 11}; \text{ d) } y = \frac{-x^2 - 2x + 7}{8}\right]$

34 a) Rappresenta graficamente la curva γ di equazione $y = \frac{-2x + 6}{x - 1}$.

b) Siano A e B $(x_A < x_B)$ i vertici della conica rappresentata. Scrivi l'equazione della circonferenza avente un diametro di estremi A e B.

c) Determina le equazioni delle tangenti alla curva γ nel suo punto C di ascissa 0 e nel punto D di ascissa 5.

d) Sia E il punto di intersezione delle tangenti trovate. Calcola l'area del triangolo CDE.

$\left[\text{b) } A(-1; -4), B(3; 0), x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0; \text{ c) } 4x + y + 6 = 0, x + 4y - 1 = 0; \text{ d) } \frac{125}{6}\right]$

35 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $xy + 3x - 5y - 19 = 0$.

b) Applica un'opportuna traslazione alla curva data che porti il suo centro di simmetria C nell'origine del sistema di riferimento. Rappresenta la curva ottenuta e indica con V il suo vertice di ascissa positiva.

c) Scrivi l'equazione della parabola avente il vertice in C e passante per V, con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate.

d) Calcola l'area del triangolo CVA, dove A è il punto di ascissa 7 della curva data al punto a).

$\left[\text{b) } xy = 4, V(2; 2); \text{ c) } y = \frac{5x^2 - 50x + 98}{9}; \text{ d) } 8\right]$

36 Rappresenta graficamente le curve di equazioni $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ e $xy + 2y - 6 = 0$. Determina l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto medio del segmento che congiunge i punti di intersezione A e B tra le due curve assegnate e trova quali punti della retta determinano con A e B un triangolo di area uguale a 14.

$\left[y = \frac{3}{5}x; \left(\frac{25}{2}; \frac{15}{2}\right), \left(-\frac{15}{2}; -\frac{9}{2}\right)\right]$

37 I punti A e B sono comuni a una parabola, a una retta e a una circonferenza.
Trova le loro equazioni sapendo che:

- il punto A ha coordinate $(-2; 4)$;
- la parabola ha il vertice nell'origine e asse di simmetria $x = 0$;
- la retta passa per il punto $C(2; 12)$;
- la circonferenza passa per il punto $D(4; 0)$.

Determina le altre due intersezioni fra la circonferenza e la parabola. Dette E e F tali intersezioni (E quella di ascissa positiva), verifica che le rette EA e FB sono perpendicolari.

$[y = x^2; y = 2x + 8; B(4; 16); x^2 + y^2 - 10x - 16y + 24 = 0; E(1; 1); F(-3; 9); y = -x + 2; y = x + 12]$

38
a) Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze passanti per i punti $O(0; 0)$ e $B(4; 0)$, individuando le equazioni dell'asse radicale e della retta dei centri.
b) Nel fascio individua la circonferenza che ha il centro nel primo quadrante e raggio $\sqrt{13}$.
c) Determina la parabola con asse parallelo all'asse x, vertice nel centro della circonferenza e passante per il punto $(-7; 0)$. Determina quindi fuoco e direttrice e dopo aver dato la definizione di parabola come luogo geometrico di punti, trova l'equazione della parabola utilizzando la definizione.
d) Determina il punto P della parabola di ordinata positiva tale che l'area del triangolo BPO sia 4.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - 4x + ky = 0, y = 0, x = 2; \text{ b) } x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0; \text{ c) } x = -y^2 + 6y - 7, \left(\frac{7}{4}; 3\right), x = \frac{9}{4}; \text{ d) } P(1; 2)\right]$

39
a) Scrivi l'equazione della circonferenza di raggio 5, con centro C sulla bisettrice del primo e terzo quadrante ($x_C > 0$) e che stacca sull'asse x una corda AB lunga 8 ($x_A < x_B$).
b) Dopo aver calcolato le coordinate dei punti A e B, cerca la tangente alla circonferenza parallela alla retta AC e il relativo punto di tangenza D di ordinata positiva.
c) Calcola l'area del quadrilatero $ACDE$, dove E è il punto di intersezione della retta tangente con l'asse x. Di quale quadrilatero si tratta?
d) Per quali valori di h il punto $P(h - 1; h)$ è interno alla circonferenza?

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0; \text{ b) } 4y - 3x - 28 = 0, D(0; 7); \text{ c) } \frac{125}{3}; \text{ d) } 0 < h < 7\right]$

40 Nel fascio di parabole di equazione

$$y = ax^2 - (2a + 1)x + a - 1,$$

individua la retta appartenente al fascio, gli eventuali punti base e le caratteristiche del fascio.
Nel fascio determina:
a) la parabola γ avente per tangente la retta $y = -3x$;
b) la parabola γ_1 di vertice il punto $\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{4}\right)$.
c) Dimostra che le due parabole γ e γ_1 sono congruenti.
d) Determina la retta $x = h$ ($h > 0$) che interseca le due parabole γ e γ_1 in due punti che con l'origine formano un triangolo di area 36.

[$y + x + 1 = 0$, punto base $(1; -2)$, fascio di parabole tangenti a una stessa retta;
a) γ: $y = x^2 - 3x$; b) γ_1: $y = -x^2 + x - 2$; d) $h = 4$]

41 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-4; 0)$, $B(2; 0)$ e avente il centro sulla retta $y = 4$; calcola quindi le coordinate dei punti H e K estremi del diametro parallelo all'asse x.
Determina l'equazione delle parabole con asse parallelo all'asse y aventi in comune il punto $C(0; 4)$ e tangenti all'asse x. Tra tali parabole trova quelle passanti per i punti H e K.
Calcola l'area della regione limitata dalle predette parabole e dall'asse x.
Determina l'iperbole equilatera nella forma $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ passante per i punti B e C e con asintoto orizzontale $y = -2$.

$\left[x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0; (-6; 4), (4; 4); y = \frac{b^2}{16}x^2 + bx + 4; y = \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x + 4, y = x^2 - 4x + 4; \frac{20}{3}; y = \frac{4-2x}{x+1}\right]$

42 Un punto $P(x; y)$ si muove nel piano in modo che la sua distanza dal punto $A(2; 3)$ rimane i $\frac{3}{5}$ della sua distanza dalla retta $y = \frac{25}{3}$.
Quale curva descrive P nel suo moto e quali sono le sue caratteristiche?
Disegna la curva e trova le due tangenti nei punti d'intersezione con l'asse x.
Trova le equazioni della dilatazione che trasformano la curva in una circonferenza che ha il diametro uguale alla distanza tra le due rette tangenti e scrivi l'equazione della circonferenza.

$\left[\text{ellisse: } \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1, x = -2 \text{ e } x = 6; \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{4}{5}y \end{cases}, x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0\right]$

43 Studia il fascio di parabole di equazione $ax^2 + (1 - 4a)x - y - 4 = 0$ e individua i suoi punti base. Trova poi le equazioni delle due parabole del fascio γ e γ' che formano, ciascuna, con la retta del fascio un segmento parabolico di area $\frac{16}{3}$. Dimostra, infine, che le due parabole trovate sono simmetriche rispetto a M, punto medio del segmento che congiunge i punti base.

$\left[\text{parabole secanti in } A(0; -4), B(4; 0); y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4, y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right]$

44 a) Nel fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 4y + k = 0$, individua quella tangente a entrambi gli assi cartesiani.
b) Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, avente il vertice nel centro della circonferenza e passante per l'origine degli assi.
c) Scrivi l'equazione della parabola simmetrica della parabola data rispetto al diametro della circonferenza passante per l'origine.
d) Scrivi infine, applicando la definizione, l'equazione dell'ellisse avente per fuochi i punti d'intersezione delle due parabole e per semiasse maggiore un segmento di lunghezza 4.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0; \text{ b) } y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x; \text{ c) } x = \frac{1}{2}y^2 - 2y; \text{ d) } 15x^2 + 2xy + 15y^2 + 28x - 28y - 196 = 0\right]$

45 a) Studia e rappresenta graficamente la curva di equazione $3x^2 - y^2 - 18x + 4y + 20 = 0$, individuandone le caratteristiche.
b) Trasforma la curva data in un'iperbole avente il centro di simmetria nel punto $(2; 4)$ e determinane l'equazione.
c) Scrivi l'equazione dell'ellisse avente i vertici coincidenti con i fuochi dell'iperbole trasformata ed i fuochi coincidenti con i vertici dell'iperbole trasformata.

[a) iperbole di centro $(3; 2)$, vertici $(2; 2)$, $(4; 2)$ e fuochi $(1; 2)$, $(5; 2)$;
b) $3x^2 - y^2 - 12x + 8y - 7 = 0$; c) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{3} = 1$]

46 a) Scrivi l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate e passante per i punti di coordinate $(-2; 4)$, $(0; 3)$ e $(4; -5)$.

b) Individua l'equazione della tangente t alla parabola nel suo punto di intersezione A con l'asse delle x, avente ascissa negativa.

c) Determina le coordinate del punto G simmetrico del fuoco F della parabola rispetto alla retta t.

d) Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo AGD, dove D è l'intersezione tra la retta t e la retta passante per F e per G.

$\left[\text{a) } y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3; \text{ b) } A(-6; 0); t\text{: } y = 2x + 12; \text{ c) } G(-6; 5); \text{ d) } x^2 + y^2 + 12x - 5y + 36 = 0\right]$

47 a) Studia il fascio di parabole di equazione $(k + 1)y + (k - 1)x^2 + 2x(1 - 2k) + 3 - 5k = 0$, indicando quali sono le parabole degeneri e per quali valori di k si ottengono.

b) Determina l'equazione della circonferenza avente un diametro con estremi i punti base del fascio di parabole.

c) Scrivi infine l'equazione dell'ellisse avente eccentricità $\frac{4}{5}$ e per asse minore il segmento che ha per estremi il punto base del fascio di ascissa negativa e il punto ad esso simmetrico rispetto alla retta $x - 2 = 0$.

$\left[\text{a) parabole secanti con due punti base } A(-1; 0), B(4; 5)\text{; parabole degeneri per } k = -1, (x + 1)(x - 4) = 0,\right.$
$\left.\text{per } k = 1, y = x + 1; \text{ b) } x^2 + y^2 - 3x - 5y - 4 = 0; \text{ c) } \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1\right]$

48 a) Verifica che il luogo dei centri delle circonferenze passanti per l'origine del sistema di riferimento e tangenti alla retta $x - 1 = 0$ è la parabola di equazione $x = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$.

b) Siano A e B le intersezioni della parabola con l'asse delle ordinate. Scrivi l'equazione della circonferenza avente il centro nel punto $(1; 0)$ e passante per A e B.

c) Calcola l'area della superficie di piano racchiusa dalla circonferenza e dalla parabola.

$\left[\text{b) } x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0; \text{ c) } \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right]$

49 a) Considera il fascio di parabole di equazione $y = ax^2 + 10ax + 3$ e trova i suoi punti base A e B.

b) Scrivi l'equazione della circonferenza avente un diametro di estremi A e B.

c) Determina l'equazione delle tangenti alla circonferenza nel suo punto d'intersezione con l'asse delle ascisse con ascissa minore e nel suo punto di ascissa -2 e ordinata negativa.

d) Calcola l'area della parte di piano individuata dalla circonferenza e dalle tangenti trovate.

$\left[\text{a) } A(-10; 3), B(0; 3); \text{ b) } x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0; \text{ c) } y = -\frac{4}{3}x - 12, y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}; \text{ d) } 25 - \frac{25}{4}\pi\right]$

50 a) Rappresenta graficamente la curva γ di equazione $y = \sqrt{5 - 8x - 4x^2}$.

b) Determina per quali valori di k il fascio di rette di equazione $y = kx + 3$ interseca la curva γ.

c) Sia A il punto di tangenza $(x_A < 0)$ di γ con una retta del fascio e B l'intersezione di γ con il semiasse positivo delle x: calcola le coordinate di A e B.

d) Determina l'equazione della parabola passante per A, B e per il centro del fascio di rette.

$\left[\text{b) } k \le -\frac{24}{5} \vee k \ge 0; \text{ c) } A(-1; 3), B\left(\frac{1}{2}; 0\right); \text{ d) } y = -4x^2 - 4x + 3\right]$

51 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $y = \frac{|x+1|}{x+3}$ indicando con A e B le intersezioni con l'asse delle ascisse e delle ordinate, rispettivamente.

b) Utilizzando il grafico, discuti la seguente equazione dipendente dal parametro k: $|x+1| - kx - 3k = 0$.

c) Trova le equazioni delle tangenti che la curva data ammette nel punto di ascissa -1.

d) Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo individuato dalle tangenti trovate e dall'asintoto verticale della curva data.

$\left[\text{a) } A(-1; 0), B\left(0; \frac{1}{3}\right); \text{ b) } k < -1 \vee k = 0 \vee k \geq 1\text{: 1 sol.}; -1 \leq k < 0\text{: nessuna sol.}; 0 < k < 1\text{: 2 sol. distinte; c) } x + 2y + 1 = 0, x - 2y + 1 = 0; \text{ d) } 2x^2 + 2y^2 + 9x + 7 = 0\right]$

52 a) Scrivi l'equazione della parabola tangente alla retta $2x + y - 3 = 0$ nel suo punto di ascissa 3 e passante per il punto $B(5; -3)$.

b) Indica con C e D le intersezioni della parabola con l'asse delle ascisse. Determina le equazioni delle rette tangenti r e s alla parabola mandate dal punto P appartenente all'asse di simmetria avente ordinata -5.

c) Scrivi le equazioni delle iperboli aventi per asintoti le rette r e s e asse trasverso di lunghezza pari a CD.

$\left[\text{a) } y = x^2 - 8x + 12; \text{ b) } C(2; 0), D(6; 0), 2x + y - 3 = 0, 2x - y - 13 = 0; \text{ c) } \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y+5)^2}{16} = 1, (x-4)^2 - \frac{(y+5)^2}{4} = -1\right]$

53 a) Siano $A(1; 2)$, $B(5; 2)$ e $C\left(4; \frac{7}{2}\right)$ tre vertici consecutivi di un trapezio isoscele avente base maggiore AB. Individua le coordinate del quarto vertice D.

b) Scrivi l'equazione della parabola passante per i vertici del trapezio.

c) Determina le equazioni delle tangenti alla parabola in D e C.

d) Calcola l'area della parte di piano delimitata dalla parabola e dalle tangenti a essa.

e) Scrivi infine l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo mistilineo del punto d).

$\left[\text{a) } D\left(2; \frac{7}{2}\right); \text{ b) } y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}; \text{ c) } t_C\text{: } 2x + 2y - 15 = 0; t_D\text{: } 2x - 2y + 3 = 0; \text{ d) } \frac{1}{3}; \text{ e) } 4x^2 + 4y^2 - 24x - 28y + 81 = 0\right]$

54 a) Rappresenta graficamente la curva avente equazione $y = \sqrt{2|x| + x^2}$.

b) Determina le coordinate dei punti A e B ($x_A < x_B$) della curva che hanno ordinata $2\sqrt{2}$ e scrivi l'equazione della parabola passante per B, per il punto di ordinata minore della curva data e tangente all'asse delle ordinate.

c) Calcola l'area del triangolo formato dalla direttrice della parabola e dagli asintoti della curva data.

$\left[\text{b) } x = \frac{1}{4}y^2; \text{ c) } 1\right]$

55 a) Determina il luogo γ dei punti del piano equidistanti dalla retta r: $x - 2 = 0$ e dal punto $F(4; 2)$.

b) Riconosci e rappresenta il luogo ottenuto e indica con A la sua intersezione con l'asse delle ascisse.

c) Calcola le coordinate del punto B simmetrico di A rispetto all'asse di simmetria di γ.

d) Scrivi l'equazione della circonferenza avente un diametro di estremi A e B.

e) Calcola infine l'area della parte di piano delimitata da γ e dalla semicirconferenza situata nel semipiano $x - 4 \leq 0$.

$\left[\text{a) } x = \frac{1}{4}y^2 - y + 4; \text{ b) } A(4; 0); \text{ c) } B(4; 4); \text{ d) } x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0; \text{ e) } 2\pi - \frac{8}{3}\right]$

56 a) Tra le parabole del fascio di equazione $(m-1)y^2+(1-m)y+(1-m)x+6-m=0$ determina quella tangente alla retta r di equazione $x-3y=0$.

b) Sia P il punto di tangenza. Trova l'equazione dell'ellisse che ha per asse minore la corda individuata dalla parabola sulla retta parallela all'asse y passante per P e per semiasse maggiore 3.

c) Scrivi l'equazione dell'iperbole avente asse trasverso parallelo all'asse x uguale a 2 e per asintoti la retta r e la sua simmetrica rispetto alla retta $x-6=0$.

[a) $x=y^2-y+4$; b) $P(6;2)$, $(x-6)^2+(2y-1)^2-9=0$; c) $(x-6)^2-9(y-2)^2=1$]

57 a) Nel fascio di parabole di equazione $(k+1)y^2-(1+k)y-(k+1)x+2+k=0$ individua la parabola p passante per il punto $(4;2)$.

b) Determina la tangente t nel punto A di intersezione di p con l'asse delle ascisse.

c) Scrivi l'equazione della retta s simmetrica di t rispetto alla retta $y=\frac{1}{2}$.

d) Verifica che s è tangente alla parabola p e chiama B il punto di tangenza.

e) Scrivi l'equazione dell'iperbole che ha per asintoti le rette t e s e ha un vertice coincidente col vertice di p.

$\left[\text{a) } x=y^2-y+2;\ \text{b) } t: x+y-2=0;\ \text{c) } s: x-y-1=0;\ \text{d) } B(2;1);\ \text{e) } \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}\right]$

58 a) Rappresenta graficamente l'iperbole di equazione $9x^2-16y^2+36x+128y-364=0$, indicando con V_1 e V_2 $(x_{V_1}<x_{V_2})$ i suoi vertici.

b) Determina i punti A e B $(x_A>x_B)$ di intersezione della curva con l'asse delle ascisse.

c) Scrivi l'equazione della retta t tangente all'iperbole in A.

d) Calcola l'area del triangolo individuato dagli asintoti e dalla retta t.

$\left[\text{a) } V_1(-6;4),\ V_2(2;4);\ \text{b) } A\left(\frac{14}{3};0\right),\ B\left(-\frac{26}{3};0\right);\ \text{c) } 15x+16y-70=0;\ \text{d) } 12\right]$

59 a) Scrivi l'equazione della circonferenza γ_1 passante per i punti $(-8;-8)$, $(-9;-7)$ e $(-1;-1)$. Indica con C il suo centro.

b) Trova i punti A e B $(x_A<x_B)$ di intersezione di γ_1 con l'asse delle ascisse e scrivi le equazioni delle tangenti t_A e t_B in A e B.

c) Sia D il punto in comune a t_A e t_B. Scrivi l'equazione della circonferenza γ_2 circoscritta al quadrilatero $ACBD$.

d) Scrivi l'equazione della parabola che ha il vertice nel punto di ordinata minima di γ_1 e passa per i punti comuni alle due circonferenze.

$\left[\text{a) } x^2+y^2+10x+8y+16=0;\ \text{b) } A(-8;0),\ B(-2;0),\ t_A: 3x-4y+24=0,\ t_B: 3x+4y+6=0;\right.$

$\left.\text{c) } D\left(-5;\frac{9}{4}\right),\ 4x^2+4y^2+40x+7y+64=0;\ \text{d) } y=x^2+10x+16\right]$

60 a) Rappresenta graficamente la curva di equazione $36x^2-9y^2-432x+54y+891=0$.

b) Siano A e B $(x_A<x_B)$ i vertici della curva data. Scrivi l'equazione della circonferenza avente un diametro coincidente con AB.

c) Determina le equazioni delle tangenti r e s alla curva data e alla circonferenza parallele all'asse y e calcola perimetro e area del quadrilatero formato da r, da s e dalle rette parallele aventi coefficienti angolari uguali a -1 e passanti per A e B.

[b) $A(3;3)$, $B(9;3)$, $x^2+y^2-12x-6y+36=0$; c) $r: x-3=0$, $s: x-9=0$,
perimetro $=12(1+\sqrt{2})$, area $=36$]

61 a) Considera la retta di equazione $x + 2y + 4 = 0$ e sia C il suo punto di intersezione con l'asse delle ascisse. Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro C e raggio $4\sqrt{2}$.

b) Traccia le tangenti r e s alla circonferenza nei punti A e B ($y_A < y_B$) di intersezione con l'asse delle ordinate. Sia D il punto comune a r e s.

c) Scrivi l'equazione della parabola passante per A, B e D.

d) Calcola l'area della parte di piano racchiusa dalla circonferenza e dalla parabola situata nel semipiano delle ascisse positive.

[a) $C(-4; 0)$, $x^2 + y^2 + 8x - 16 = 0$; b) r: $y = x - 4$, s: $y = -x + 4$, $D(4; 0)$; c) $x = -\frac{1}{4}y^2 + 4$; d) $8\left(\frac{14}{3} - \pi\right)$]

62 Sono dati il fascio di iperboli di equazione $xy = k$, con $k > 0$, e l'ellisse di equazione $9x^2 + 25y^2 = 225$.

a) Determina l'equazione dell'iperbole del fascio che è tangente all'ellisse.

b) Calcola la lunghezza della corda dell'ellisse individuata dai due punti di tangenza P e Q.

c) Trova le equazioni delle rette tangenti all'iperbole nei punti P e Q.

d) Qual è la distanza fra le due rette tangenti?

[a) $xy = \frac{15}{2}$; b) $2\sqrt{17}$; c) $3x + 5y \pm 15\sqrt{2} = 0$; d) $\frac{30}{\sqrt{17}}$]

63 Una parabola passante per A e B divide il triangolo ABC in due parti equivalenti. Supposto ABC equilatero di lato 3 cm e l'asse della parabola perpendicolare al segmento AB, in un conveniente sistema di riferimento si determinino:

a) le coordinate di A, B e C;

b) l'equazione della parabola;

c) l'equazione della circonferenza inscritta nel triangolo ABC.

(*Esame di Stato*, *Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2000, *quesito* 1)

64 Il triangolo ABC è isoscele sulla base BC e contiene il centro della circonferenza k circoscritta a esso. Condotta la retta t tangente a k in C, indicare con D la proiezione ortogonale di A su t e con E quella di A su BC.

a) Dimostrare che i triangoli ACD e ACE sono congruenti.

b) Ammesso che le misure del raggio della circonferenza k e del segmento AE, rispetto a un'assegnata unità di misura, siano $\frac{5}{4}$ e 2, riferire il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), in modo però che l'asse x sia parallelo alla retta BC.

Trovare:

1. le coordinate dei punti B, C, D;
2. l'equazione della circonferenza k;
3. l'equazione della parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti B, C, D.

c) Stabilire analiticamente se la circonferenza k e la parabola p hanno altri punti in comune oltre ai punti B e C.

(*Esame di Stato*, *Liceo scientifico*, *Scuole italiane all'estero* (*Americhe*, *Emisfero boreale*), *Sessione ordinaria*, 2005, *problema* 1)

[b) 1. posto A come origine del sistema di riferimento $B(-1; -2)$, $C(1; -2)$, $D\left(\frac{8}{5}; -\frac{6}{5}\right)$; 2. $x^2 + y^2 + \frac{5}{2}y = 0$; 3. $y = \frac{20}{39}x^2 - \frac{98}{39}$; c) no]