CAPITOLO

9

Il piano cartesiano e la retta

Discesa pericolosa

Molte immagini quotidiane offrono indicazioni sulle proprietà geometriche degli oggetti e dell'ambiente che ci circonda. I cartelli stradali sono importanti per la circolazione e hanno il compito di avvertirci di ciò che troveremo sul nostro cammino…

…che cosa indica questo segnale stradale?

La risposta a pag. 653

1. Le coordinate di un punto su un piano

Il riferimento cartesiano ortogonale

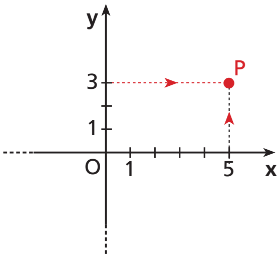
I punti di un piano possono essere messi in corrispondenza biunivoca con **coppie** di numeri reali.

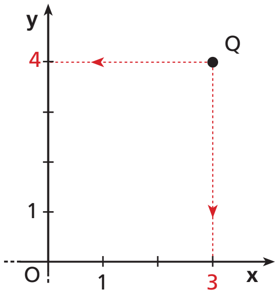
Per farlo consideriamo due rette orientate e tra loro perpendicolari. Per comodità, scegliamo la prima orizzontale e la seconda verticale. Chiamiamo tali rette **assi** del riferimento e il loro punto di intersezione O **origine** del riferimento. In questo modo abbiamo fissato nel piano un **sistema di assi cartesiani ortogonali**.

L'asse orizzontale è detto **asse delle ascisse**, o anche **asse *x***; l'asse verticale è detto **asse delle ordinate**, o anche **asse *y***.

Fissata un'unità di misura su entrambi gli assi (spesso si usa la stessa), possiamo rappresentare un punto mediante una coppia *ordinata* di numeri reali. Per esempio, consideriamo la coppia (5; 3) e determiniamo il punto P a cui essa è associata.

I numeri della coppia vengono detti **coordinate** del punto; la prima coordinata viene detta **ascissa**, la seconda viene detta **ordinata**. Per esempio, P ha ascissa 5 e ordinata 3.





Se, invece, in un piano fissiamo un punto, possiamo fargli corrispondere una coppia di numeri reali mandando dal punto le rette parallele agli assi e considerando le loro intersezioni con gli assi stessi (figura a lato).

A ogni punto del piano corrisponde una e una sola coppia di numeri; viceversa, a ogni coppia di numeri corrisponde uno e un solo punto del piano. La corrispondenza è quindi biunivoca.

In generale, per indicare che al punto P corrisponde la coppia di numeri reali $(x; y)$ (e viceversa), si usa la scrittura

$P(x; y)$,

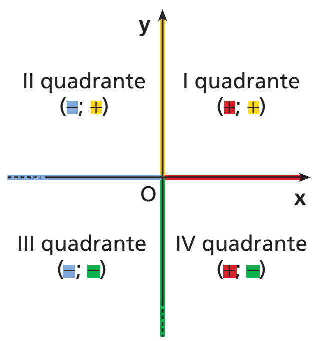
che si legge: «Il punto P di coordinate x e y».

Per esempio, $A(-1; 4)$ indica il punto A di coordinate -1 e 4.

Gli assi dividono il piano in quattro angoli retti, detti **quadranti** (figura 1):

Le coordinate dei punti del piano sono positive o negative a seconda del quadrante in cui i punti si trovano.

▶ Figura 1

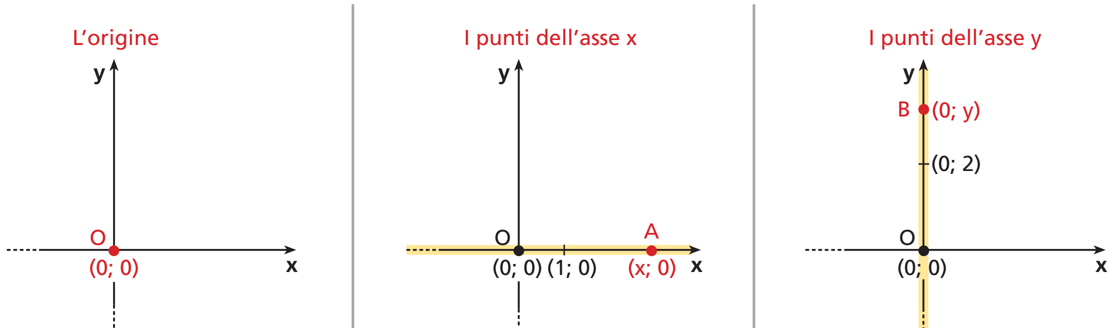


L'ascissa x e l'ordinata y sono concordi per i punti del primo e del terzo quadrante: entrambe positive nel primo quadrante ed entrambe negative nel terzo.
Le coordinate sono invece discordi per i punti del secondo e del quarto quadrante: x negativa e y positiva nel secondo quadrante, x positiva e y negativa nel quarto.

La rappresentazione di punti particolari

L'origine ha uguali a 0 sia l'ascissa sia l'ordinata. I punti dell'asse x hanno ordinata 0, quelli dell'asse y hanno ascissa 0.

▼ Figura 2



a. L'origine O è il punto di intersezione degli assi x e y: ha coordinate (0; 0).

b. Tutti i punti dell'asse x hanno come ordinata 0. Un generico punto dell'asse x è quindi del tipo $A(x; 0)$.

c. Tutti i punti dell'asse y hanno come ascissa 0. Un generico punto dell'asse y è quindi del tipo $B(0; y)$.

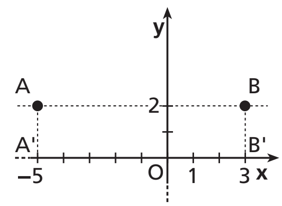
2. I segmenti nel piano cartesiano

La distanza fra due punti

I punti hanno la stessa ordinata

Consideriamo i punti $A(-5; 2)$ e $B(3; 2)$.
Essi hanno la stessa ordinata e stanno quindi su una retta parallela all'asse x.
Le parallele all'asse y passanti per A e per B incontrano l'asse x rispettivamente nei punti A' e B' (figura a lato). Poiché $A'B'BA$ è un rettangolo, risulta $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, e inoltre $x_{A'} = x_A = -5$ e $x_{B'} = x_B = 3$.
Quindi, nel nostro caso:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = |x_{B'} - x_{A'}| = |x_B - x_A| = |3 - (-5)| = 8.$$



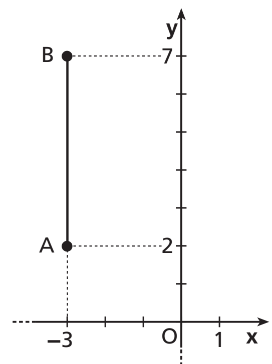
In generale, la distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ che hanno la stessa ordinata $y_A = y_B$ è:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = |x_B - x_A|}.$$

I punti hanno la stessa ascissa

Se i punti di cui dobbiamo calcolare la distanza hanno la stessa ascissa, valgono considerazioni analoghe a quelle del caso precedente, ma riferite all'asse y: infatti, i punti in questione si trovano su una retta parallela a questo asse.
Quindi, con riferimento alla figura a lato:

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |7 - 2| = 5.$$



In generale, la distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ che hanno la stessa ascissa $x_A = x_B$ è:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = |y_B - y_A|}.$$

Il caso generale

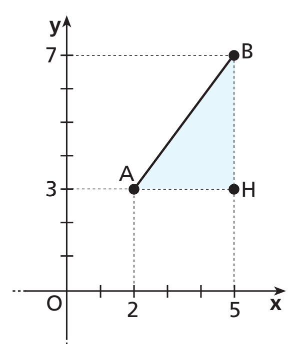
Studiamo ora il caso generale e determiniamo la distanza fra due punti che non abbiano necessariamente la stessa ascissa o la stessa ordinata.

Consideriamo i punti:

$$A(2; 3) \qquad \text{e} \qquad B(5; 7).$$

Per calcolare la distanza fra A e B applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH (figura a lato):

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2}.$$



Poiché $\overline{AH} = |5 - 2| = 3$ e $\overline{BH} = |7 - 3| = 4$, otteniamo:

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5, \qquad \text{ossia} \qquad \overline{AB} = 5.$$

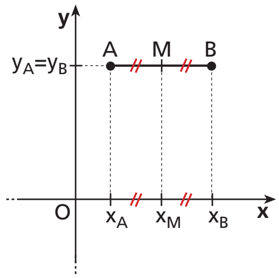
In generale, la distanza fra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ è data da:

$$\boldsymbol{\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}.$$

Questa formula comprende anche i due casi particolari precedenti.

Il punto medio di un segmento

Il punto medio M di un segmento AB è tale che $\overline{AM} = \overline{MB}$, cioè è quel punto che ha la stessa distanza dagli estremi A e B del segmento.



I punti hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata

Dati due punti A e B con la stessa ordinata, il segmento di cui sono estremi è parallelo all'asse x, quindi l'ordinata del punto medio M è la stessa di A e di B.

Per ricavare l'ascissa di M, notiamo che:

$$|x_M - x_A| = |x_B - x_M|.$$

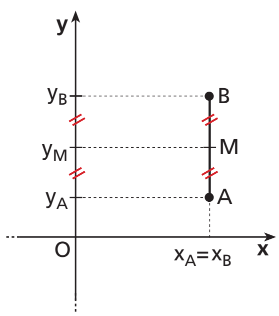
Considerando, come nella figura, $x_B > x_A$, possiamo scrivere le differenze senza valore assoluto:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \rightarrow x_M + x_M = x_A + x_B \rightarrow 2x_M = x_A + x_B.$$

▶ Considerazioni analoghe si possono fare se $x_A > x_B$.

L'ascissa del punto medio di AB è pertanto:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}.$$



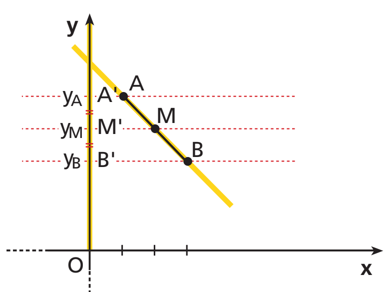
Analogamente, si ricava che per due punti A e B con la stessa ascissa, l'ascissa del punto medio di AB è la stessa di A e di B, mentre l'ordinata è:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

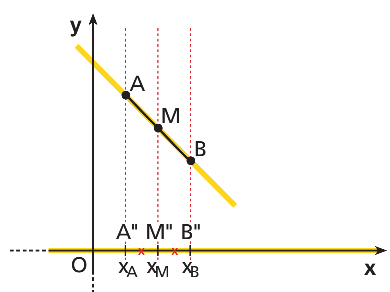
Il caso generale

Consideriamo i punti $A\,(x_A; y_A)$ e $B\,(x_B; y_B)$, con $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$.
Vogliamo calcolare le coordinate del punto medio del segmento AB.

▶ **Figura 3**



a. Dai tre punti A, B, M tracciamo le parallele all'asse x. Otteniamo così tre rette parallele tagliate da due trasversali: l'asse y e la retta passante per A e per B.



b. Dai tre punti A, B, M tracciamo le parallele all'asse y. Otteniamo tre rette parallele tagliate da due trasversali: l'asse x e la retta passante per A e per B.

▶ Il teorema del fascio di rette parallele afferma che, dato un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.

Dopo aver tracciato le parallele agli assi passanti per i punti A, B e M, applichiamo il teorema del fascio di rette parallele.
Se $AM \cong MB$, allora $A'M' \cong M'B'$ e $A''M'' \cong M''B''$.

Applichiamo la formula del punto medio determinata nel caso precedente al segmento $A''B''$:

$$x_{M''} = \frac{x_A + x_B}{2}; \qquad x_M = x_{M''}.$$

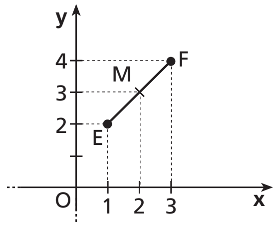
Analogamente, per il segmento $A'B'$:

$$y_{M'} = \frac{y_A + y_B}{2}; \qquad y_M = y_{M'}.$$

Dati $A\,(x_A; y_A)$ e $B\,(x_B; y_B)$, il punto medio di AB ha quindi coordinate:

$$x_M = \underbrace{\frac{x_A + x_B}{2}}_{\text{semisomma delle ascisse}} \qquad y_M = \underbrace{\frac{y_A + y_B}{2}}_{\text{semisomma delle ordinate}}$$

▶ $E(1; 2)$, $F(3; 4)$.



$x_M = \frac{1+3}{2} = 2;$

$y_M = \frac{2+4}{2} = 3.$

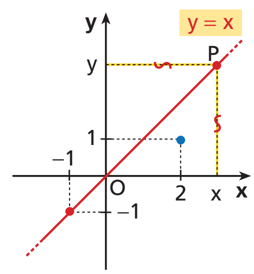
3. L'equazione di una retta passante per l'origine

Le equazioni delle bisettrici dei quadranti del piano cartesiano

Consideriamo la **bisettrice del primo e del terzo quadrante**. Ogni punto della bisettrice gode della proprietà di essere equidistante dai lati dell'angolo, cioè dagli assi cartesiani.

Preso un punto generico $P\,(x; y)$ sulla bisettrice, l'ascissa e l'ordinata, prese in valore assoluto, rappresentano le distanze di P dagli assi. Quindi $|y| = |x|$. Nel primo e terzo quadrante, d'altra parte, l'ascissa e l'ordinata di un punto hanno lo stesso segno, quindi:

$$y = x.$$



▲ **Figura 4** Il punto $(-1; -1)$ appartiene alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. Il punto $(2; 1)$ non appartiene alla bisettrice.

Questa uguaglianza è un'equazione nelle variabili x e y e caratterizza di fatto i punti della bisettrice del primo e terzo quadrante. Le sue infinite soluzioni $(x; y)$ corrispondono a tutti e soli gli infiniti punti di tale bisettrice; se le coordinate di un punto non soddisfano l'equazione, il punto non appartiene alla bisettrice.

Con considerazioni analoghe, si ricava che alla **bisettrice del secondo e quarto quadrante** è associata l'equazione:

$$y = -x.$$

▶ Il punto $(-1; 1)$ appartiene alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Tutti i punti di questa bisettrice, e soltanto essi, hanno le coordinate che sono numeri opposti.

Vedremo nei prossimi paragrafi che, data una qualsiasi retta del piano, le coordinate dei suoi punti, e soltanto esse, soddisfano un'equazione che chiamiamo **equazione della retta**.

L'equazione di una generica retta passante per l'origine

Consideriamo i punti $A(1; 2)$ e $B(3; 6)$ e la retta passante per A e B.

I due punti hanno l'ordinata uguale al doppio dell'ascissa; quindi la relazione che lega le coordinate $(x; y)$ di ciascuno di essi è:

$$y = 2x.$$

Si può dimostrare che ogni altra coppia di numeri che soddisfi l'equazione $y = 2x$ corrisponde a un punto della retta AB e, viceversa, che ogni punto della retta ha coordinate che soddisfano tale equazione.

Pertanto l'equazione della retta AB è:

$$y = 2x.$$

Fra i punti della retta è compresa anche l'origine O, in quanto la coppia $(0; 0)$ soddisfa l'equazione.

Più in generale, se l'ordinata è m volte l'ascissa, l'equazione è $y = mx$.

Osserviamo che ognuna di queste rette passa per l'origine.

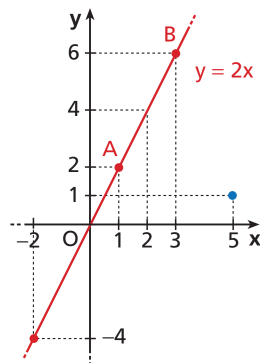
In generale, si può dimostrare che l'equazione di una retta passante per l'origine, purché diversa dall'asse y, è del tipo:

$$y = mx$$

per un opportuno valore di m.

Viceversa, un'equazione del tipo $y = mx$ rappresenta sempre una retta passante per l'origine, diversa dall'asse y.

▼ Figura 5 I punti $(-2; -4)$, $(2; 4)$, ... appartengono alla retta AB; il punto $(5; 1)$ non appartiene alla retta.



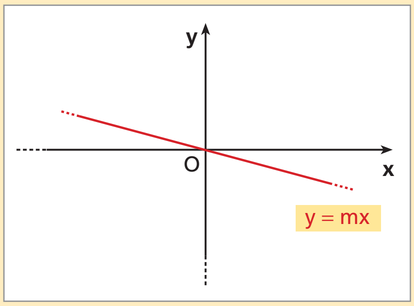
◗ L'equazione $y = mx$ non può rappresentare l'asse y, per nessun valore di m. Infatti, scelto un punto dell'asse y, per esempio $(0; 3)$, dovrebbe valere la relazione $3 = m \cdot 0$, ma non esiste un numero m che moltiplicato per 0 dia 3.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V27a

PROPRIETÀ

Equazione di una retta passante per l'origine

Una retta passante per l'origine e diversa dall'asse y ha equazione del tipo $\boldsymbol{y = mx}$.



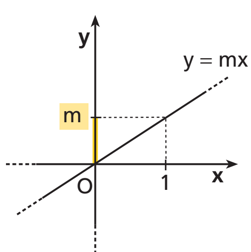
Il coefficiente angolare

Nell'equazione $y = mx$ il coefficiente m è chiamato **coefficiente angolare**. Esso esprime, per una retta passante per l'origine, il rapporto fra ordinata e ascissa di ogni punto della retta stessa, a eccezione dell'origine.

$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B} = \frac{y_C}{x_C} = \frac{y_D}{x_D} = \ldots = m$$

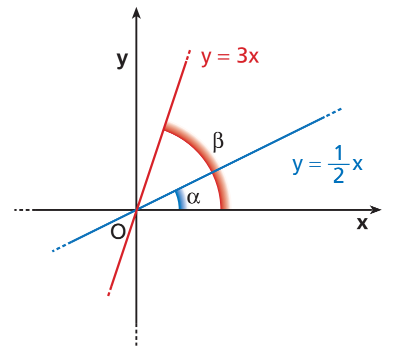
o, in generale, $\boldsymbol{\frac{y}{x} = m}$, con $x, y \neq 0$.

◗ Per $x = 1$, si ha $y = m$, dunque m è l'ordinata del punto di ascissa 1.



Se m è positivo, anche $\frac{y}{x}$ è positivo: i punti della retta hanno coordinate entrambe positive o entrambe negative. Ciò significa che la retta appartiene al primo e terzo quadrante (figura 6).

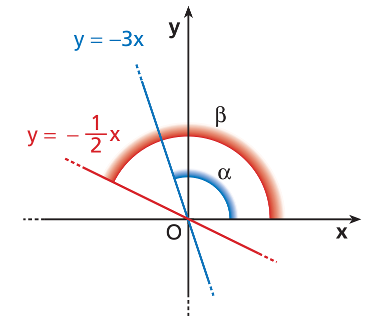
Inoltre, nel semipiano di ordinate positive la retta forma con la semiretta positiva dell'asse x un angolo acuto.



◀ **Figura 6** $\frac{1}{2}$ e 3 sono coefficienti angolari positivi, gli angoli α e β sono acuti. Al coefficiente maggiore, ossia 3, corrisponde l'angolo maggiore, cioè β.

Se m è negativo, anche $\frac{y}{x}$ è negativo: i punti della retta hanno coordinate discordi. Ciò significa che la retta appartiene al secondo e quarto quadrante (figura 7).

Inoltre, nel semipiano di ordinate positive la retta forma con la semiretta positiva dell'asse x un angolo ottuso.



◀ **Figura 7** $-\frac{1}{2}$ e -3 sono coefficienti angolari negativi, gli angoli α e β sono ottusi. A coefficiente maggiore, ossia $-\frac{1}{2}$, corrisponde angolo maggiore, cioè β.

Le equazioni degli assi cartesiani

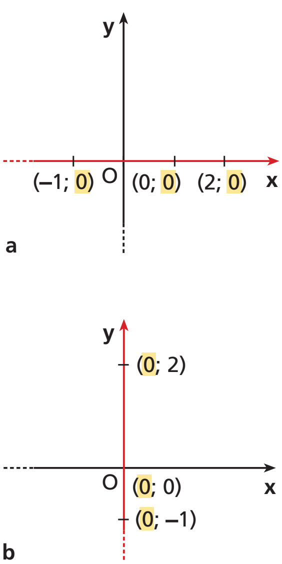
Consideriamo i punti $(-1; 0)$, $(0; 0)$, $(2; 0)$, ... (figura 8*a*).

Essi, come tutti gli altri punti dell'asse x, godono della stessa proprietà: la loro ordinata è 0.

Assumiamo allora come equazione dell'asse x l'uguaglianza $y = 0$.

In modo analogo si ragiona per l'asse y, i cui punti hanno tutti ascissa 0 (figura 8*b*).

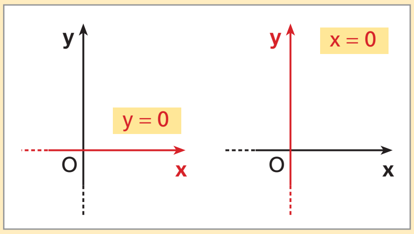
▼ **Figura 8**



PROPRIETÀ

Le equazioni degli assi

L'equazione dell'asse x è $\boldsymbol{y = 0}$;
l'equazione dell'asse y è $\boldsymbol{x = 0}$.

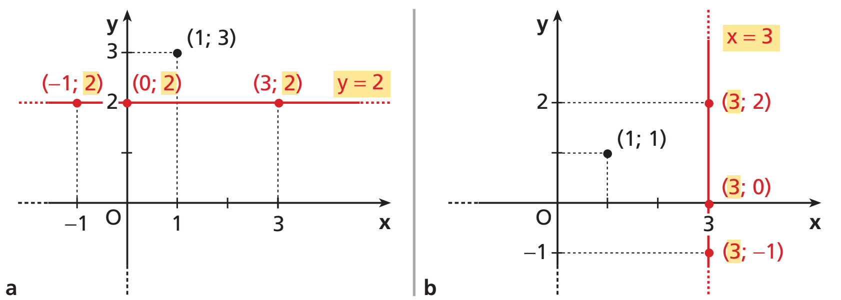


L'equazione dell'asse x può essere vista come caso particolare dell'equazione $y = mx$, quando $m = 0$, mentre quella dell'asse y, come abbiamo già notato, non è del tipo $y = mx$.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V27b

4. L'equazione generale della retta

L'equazione di una retta parallela a un asse



▶ Figura 9

I punti $(-1; 2)$, $(0; 2)$, $(3; 2)$, ... (figura 9*a*) appartengono a una retta parallela all'asse x e, come tutti gli altri punti di questa retta, godono della stessa proprietà: hanno l'ordinata uguale a 2. Per questo l'equazione della retta è $y = 2$.

Analogamente, i punti $(3; -1)$, $(3; 0)$, $(3; 2)$, ... (figura 9*b*) appartengono a una retta parallela all'asse y. Essi hanno l'ascissa uguale a 3, come tutti i punti della retta a cui appartengono. Questo ci fa capire che l'equazione della retta è $x = 3$.

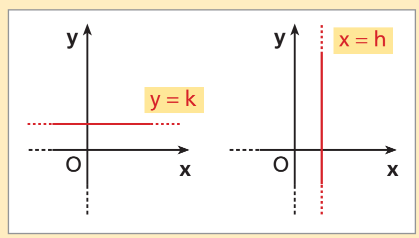
In generale vale la seguente proprietà.

Le lettere h e k indicano un qualunque valore reale. Al variare di k otteniamo tutte le rette parallele all'asse x, compreso l'asse x stesso per $k = 0$. Al variare di h, otteniamo tutte le rette parallele all'asse y. Per $h = 0$ l'equazione è quella dell'asse y.

PROPRIETÀ

Equazione di una retta parallela a un asse

L'equazione di una retta parallela all'asse x è $\boldsymbol{y = k}$.
L'equazione di una retta parallela all'asse y è $\boldsymbol{x = h}$.



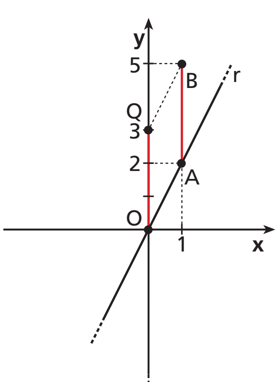
La forma esplicita $y = mx + q$

Consideriamo la retta r passante per l'origine e di equazione

$$y = 2x.$$

Scegliamo su tale retta i due punti $O(0; 0)$ e $A(1; 2)$.

Aumentando di 3 l'ordinata dei due punti, otteniamo i punti $Q(0; 3)$ e $B(1; 5)$.



Il quadrilatero $OABQ$ è un parallelogramma, perché ha i lati opposti OQ e AB congruenti e paralleli; quindi, la retta s passante per B e Q risulta parallela alla retta r.

Le coordinate dei punti Q e B soddisfano l'equazione

$$y = 2x + 3.$$

Se aumentiamo sempre di 3 l'ordinata di un qualsiasi altro punto di r, per esempio $(-2; -4)$, otteniamo il punto $(-2; -1)$ che appartiene alla retta s, perché le sue coordinate soddisfano l'equazione $y = 2x + 3$.

In generale, data una retta passante per l'origine di equazione

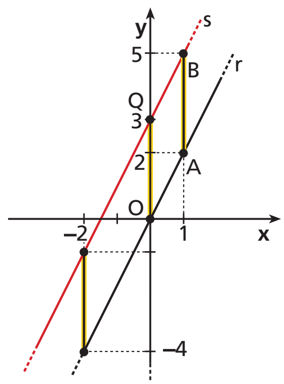
$$y = mx,$$

una retta a essa parallela passante per il punto $(0; q)$ ha equazione

$$y = mx + q.$$

Viceversa, una retta qualsiasi del piano, che intersechi l'asse y nel punto di ordinata q, può essere associata a un'equazione del tipo $y = mx + q$.

Tale equazione viene chiamata **equazione esplicita** della retta.



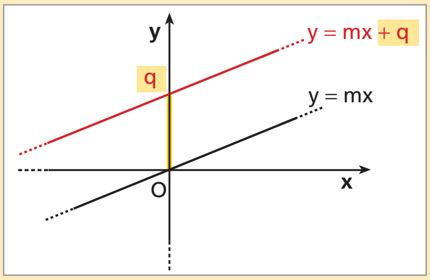
◀ **Figura 10**

L'aggettivo «esplicita» sottintende «rispetto alla variabile y» e significa che nell'equazione è messa in evidenza y in funzione di x.

PROPRIETÀ

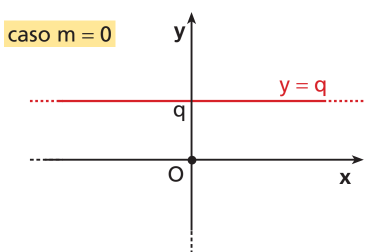
Forma esplicita $y = mx + q$

Ogni retta del piano, purché non parallela all'asse y, è rappresentata da un'equazione del tipo $y = mx + q$.

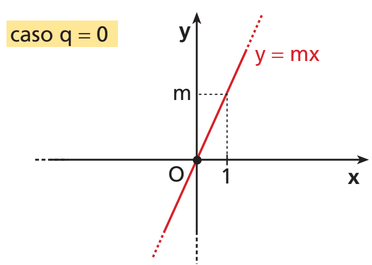


Il coefficiente q si chiama **termine noto** oppure **ordinata all'origine**, perché rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y. Il coefficiente m è detto, anche in questo caso, coefficiente angolare.

Due casi particolari



a. Se nell'equazione $y = mx + q$ poniamo $m = 0$, otteniamo $y = q$, ossia l'equazione di una retta parallela all'asse x.



b. Se nell'equazione $y = mx + q$ poniamo $q = 0$, otteniamo $y = mx$, ossia l'equazione di una retta passante per l'origine.

L'equazione della retta in forma implicita

L'equazione esplicita $y = mx + q$ può rappresentare tutte le rette del piano, tranne l'asse y e le rette parallele a esso.
Infatti non esistono valori di m e di q che, sostituiti nell'equazione, ci forniscano equazioni del tipo $x = 0$ oppure $x = k$.

Un'equazione che rappresenti tutte le possibili rette del piano è della forma

$$ax + by + c = 0,$$

dove a, b, c sono numeri reali (a e b non entrambi nulli).

In questo caso, si dice che l'equazione della retta è in **forma implicita**, nel senso che nessuna tra le variabili x e y è scritta esplicitamente in funzione dell'altra.

PROPRIETÀ

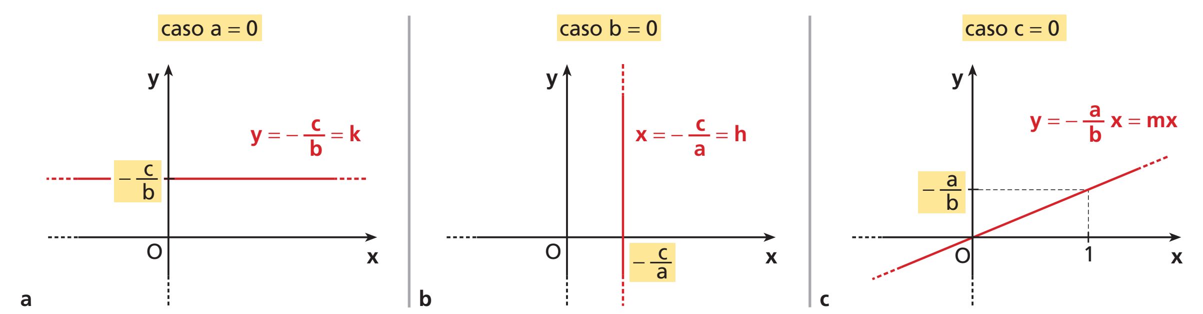
Equazione generale della retta

Ogni retta del piano è rappresentata da un'equazione lineare del tipo

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0},$$

dove a, b, c sono numeri reali (a e b non entrambi nulli).

La forma implicita comprende tutti i casi già esaminati.



▲ **Figura 11** Casi particolari della forma implicita. Ottieni le equazioni scritte in rosso ponendo rispettivamente $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ nell'equazione $ax + by + c = 0$.

Dalla forma implicita alla forma esplicita

È possibile trasformare un'equazione scritta in forma implicita nella sua equivalente scritta in forma esplicita ricavando y (purché sia $b \neq 0$):

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Osserviamo che il coefficiente angolare è $-\frac{a}{b}$ e il termine noto è $-\frac{c}{b}$.

ESEMPIO

Scriviamo in forma esplicita l'equazione $6x - 2y + 1 = 0$.

Ricaviamo y:

$$-2y = -6x - 1 \quad \rightarrow \quad 2y = 6x + 1 \quad \rightarrow \quad y = 3x + \frac{1}{2}.$$

Il coefficiente angolare è 3, il termine noto $\frac{1}{2}$.

ESPLORAZIONE: LA NASCITA DELLA GEOMETRIA ANALITICA

◄ **L'arcobaleno. La scala con la quale Buddha scende dal cielo? La dea Iride vestita di rugiada? Fin dall'antichità questo affascinante fenomeno naturale è legato alle divinità. Già Aristotele aveva tentato di spiegare scientificamente la formazione dell'arcobaleno, ma è solo con Cartesio che si ha il primo trattato matematico corretto su questo fenomeno.**

CARTESIO

René Descartes, in italiano Cartesio (1596-1650), nel suo *Discorso sul metodo* (1637), critica sia la geometria dei Greci, sia l'algebra dei suoi tempi.
Come si può cogliere dal brano seguente, il suo proposito è affrontare la matematica in modo unitario, unificando algebra e geometria in quella che oggi chiamiamo «geometria analitica». Di questo si occupò ne *La geometria*, saggio pubblicato come appendice del *Discorso sul metodo*.

> «Non volevo, con questo, mettermi a imparare tutte quelle scienze particolari che son dette comunemente matematiche; [...] pensai che, per meglio studiarle in particolare, dovevo raffigurarle in forma di linee, giacché non trovai niente di più semplice o che potessi più distintamente rappresentare alla mia immaginazione e ai miei sensi; e per ricordarle e per comprenderne molte insieme, dovevo invece esprimerle con qualche cifra tra le più brevi possibili. In questo modo avrei colto tutto il meglio dell'analisi geometrica e dell'algebra e corretto i difetti dell'una con l'altra.»

FERMAT

Anche Pierre de Fermat (1601-1665) utilizzò il metodo della geometria analitica. Tuttavia, i punti di vista di Cartesio e Fermat, contemporanei, erano molto distanti.
Mentre Cartesio criticò la tradizione greca e si propose di spezzarla in nome di un metodo universalmente applicabile, Fermat credette nella continuità con il pensiero greco.
A Fermat si può ricondurre il principio fondamentale secondo cui «un'equazione in due incognite individua un luogo (retta o curva)».
Poiché l'opera di Fermat relativa ai luoghi geometrici (*Varia opera matematica*) fu pubblicata postuma, la geometria analitica apparve come una personale invenzione di Cartesio. È ora invece chiaro che Fermat utilizzò lo stesso metodo nel 1636, prima della comparsa de *La geometria*, e che i contributi dei due studiosi sono del tutto autonomi.

▼ **Nel francobollo commemorativo di Fermat è enunciato il teorema per cui è diventato famoso e che è stato dimostrato solo di recente (1995).**

IN DIECI RIGHE

Scrivi un breve articolo con il computer sulla vita di Cartesio e di Fermat, soffermandoti sul fatto che entrambi non erano matematici «di professione».
Dai un titolo al tuo elaborato e costruisci poi una linea del tempo in cui, oltre ai momenti significativi della loro vita, siano presenti i principali personaggi della loro epoca in campo scientifico, letterario, artistico e politico.

Cerca nel web: Cartesio, Descartes, Fermat, geometria analitica, analytic geometry.

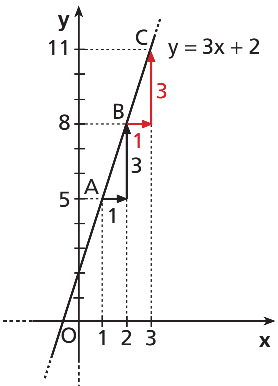
5. Il coefficiente angolare

Consideriamo la retta di equazione $y = 3x + 2$ e tre suoi punti $A(1; 5)$, $B(2; 8)$ e $C(3; 11)$. Calcoliamo il rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse dei punti A e B:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-5}{2-1} = 3.$$

Eseguiamo poi lo stesso calcolo per B e C:

$$\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{11-8}{3-2} = 3.$$



▲ **Figura 12** **Quando l'ascissa aumenta di 1, l'ordinata aumenta di *m*.**

Osserviamo che in ambedue i casi il rapporto calcolato è uguale al coefficiente angolare della retta, che è 3.

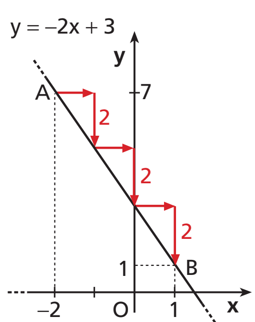
Avremmo ottenuto lo stesso risultato scegliendo una qualsiasi altra coppia di punti appartenenti alla retta. Interpretiamo questo risultato dicendo che il coefficiente angolare dà informazioni sulla «pendenza» della retta. Osserviamo a questo proposito la figura 12.

Per andare dal punto $A(1; 5)$ a $B(2; 8)$ e da B a $C(3; 11)$ possiamo spostarci prima verso destra di 1 unità, poi verso l'alto di 3 unità. È come se salissimo una scala con gradini profondi 1 e alti 3, cioè alti quanto il coefficiente angolare.

ESEMPIO

Consideriamo la retta di equazione $y = -2x + 3$ (figura 13) e i suoi due punti $A(-2; 7)$ e $B(1; 1)$. Osserviamo che anche in questo caso il coefficiente angolare è dato dal rapporto $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-7}{1-(-2)} = \frac{-6}{3} = -2.$$



▲ **Figura 13** **Quando l'ascissa aumenta di 1, l'ordinata aumenta di $m = -2$. Un aumento di -2 equivale a una diminuzione di 2.**

In generale, dati due punti distinti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ appartenenti alla retta di equazione $y = mx + q$, ricaviamo la formula che esprime il coefficiente angolare m in funzione delle coordinate dei due punti.

Poiché A è un punto della retta, le sue coordinate soddisfano l'equazione, cioè: $y_A = mx_A + q$.

Poiché B è un punto della retta, anche le sue coordinate soddisfano l'equazione, cioè: $y_B = mx_B + q$.

Se sono vere le due uguaglianze precedenti, otteniamo una nuova uguaglianza vera se sottraiamo membro a membro, cioè uguagliamo la differenza fra il primo membro della prima e il primo membro della seconda alla differenza fra il secondo membro della prima e il secondo membro della seconda:

$$y_A - y_B = (mx_A + q) - (mx_B + q)$$
$$y_A - y_B = mx_A - mx_B$$
$$y_A - y_B = m(x_A - x_B).$$

Ricaviamo m:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B},$$

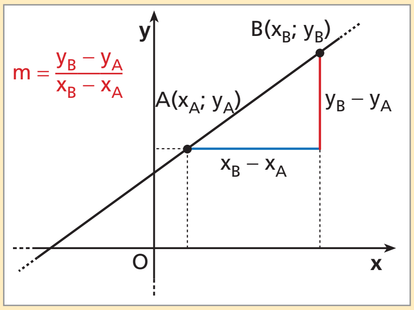
ovvero, cambiando segno al numeratore e al denominatore:

$$\boldsymbol{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}.$$

PROPRIETÀ

Coefficiente angolare e coordinate di due punti

Il coefficiente angolare di una retta di equazione $y = mx + q$ è il rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti qualunque distinti della retta.



Casi particolari

1. Se due punti A e B hanno la stessa ordinata, si ha $y_B - y_A = 0$ e

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 0,$$

quindi, **il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse x è $m = 0$**.

2. Se i punti A e B hanno la stessa ascissa, si ha $x_B - x_A = 0$, e la frazione $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ perde di significato, quindi **il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse y non esiste**.

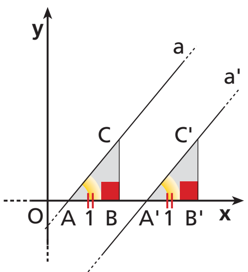
6. Le rette parallele e le rette perpendicolari

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V27d

Le rette parallele

Abbiamo visto che il coefficiente angolare indica la «pendenza» di una retta rispetto all'asse x. Ci aspettiamo pertanto che due rette parallele, avendo, rispetto all'asse x, la stessa pendenza, abbiano anche lo stesso coefficiente angolare. Consideriamo due rette parallele, a e a'. Dimostriamo che, se il coefficiente angolare di a è m, allora è m anche quello di a'.

Ipotesi $a \parallel a'$. **Tesi** a e a' hanno lo stesso coefficiente angolare.



DIMOSTRAZIONE

Consideriamo il punto di intersezione A della retta a con l'asse x (figura a lato); prendiamo sullo stesso asse il punto B distante 1 da A. Consideriamo poi sulla retta il punto C con la stessa ascissa di B.

In modo analogo, consideriamo A' intersezione di a' con l'asse x, B' distante 1 da A' e C' su a' e con la stessa ascissa di B'.

I triangoli ABC e $A'B'C'$ hanno:

- $AB \cong A'B'$ per costruzione,
- $\hat{A} \cong \hat{A}'$ perché angoli corrispondenti formati dalle parallele a e a' tagliate dall'asse x, trasversale,
- $\hat{B} \cong \hat{B}'$ perché angoli retti,

quindi sono congruenti per il secondo criterio di congruenza fra triangoli. In particolare, $BC \cong B'C'$.

La misura di BC dà l'aumento dell'ordinata corrispondente all'aumento di una unità dell'ascissa, *quindi* il suo valore è m.

Essendo $BC \cong B'C'$, è anche $\overline{B'C'} = m$.

La misura di $B'C'$ dà l'aumento dell'ordinata corrispondente all'aumento di una unità dell'ascissa, ossia il coefficiente angolare della retta a', *quindi* anche il coefficiente angolare di a' è m.

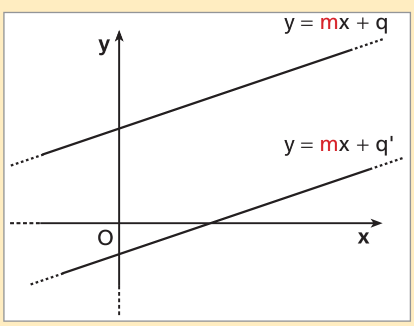
È possibile dimostrare che, viceversa, se due rette hanno lo stesso coefficiente angolare, allora sono parallele. Vale pertanto il seguente teorema.

▶ Il teorema non si applica alle rette parallele all'asse y, perché il loro coefficiente angolare non è definito.

TEOREMA

Rette parallele

Due rette (non parallele all'asse y) sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.

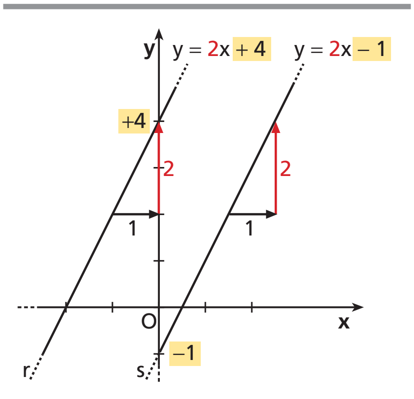


ESEMPIO

Sono parallele le rette di equazione:

$r: y = 2x + 4$

$s: y = 2x - 1.$



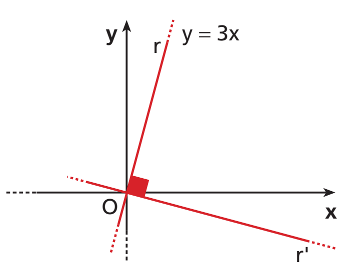
▶ **Figura 14** Le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare 2 e differiscono solo per il valore di *q*. La retta *r* interseca l'asse *y* in (0; 4), la retta *s* lo interseca in (0; − 1).

Le rette perpendicolari

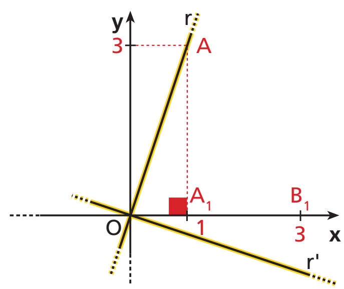
Consideriamo la retta r di equazione $y = 3x$ e cerchiamo l'equazione della retta r' passante per l'origine e perpendicolare a r.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V27e

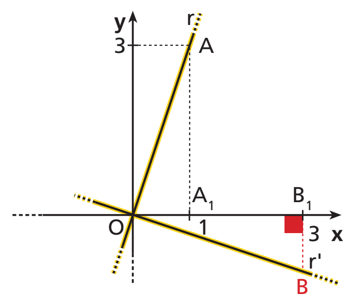
▼ **Figura 15** Costruzione.



a. Tracciamo la retta *r*: *y* = 3*x* e la sua perpendicolare *r*' passante per l'origine.



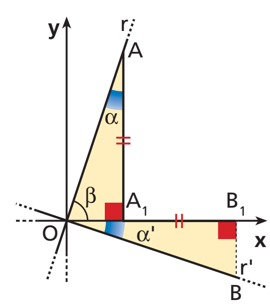
b. Scegliamo su *r* il punto *A*(1; 3) e chiamiamo A_1(1; 0) la sua proiezione sull'asse *x*. Consideriamo, ancora sull'asse *x*, il punto B_1(3; 0).



c. Mandiamo da B_1 la perpendicolare all'asse *x*. Chiamiamo *B* il punto di intersezione di questa retta con *r*'. Dimostriamo che il punto *B* ha ordinata – 1.

I triangoli OAA_1 e OBB_1 (figura a lato) sono rettangoli e inoltre hanno:

- $AA_1 \cong OB_1$ per costruzione;
- $\alpha \cong \alpha'$ perché complementari dello stesso angolo β.



Pertanto, sono congruenti per il secondo criterio. In particolare, $OA_1 \cong BB_1$. Poiché la misura di OA_1 è 1, anche la misura di BB_1 è 1, *quindi* l'ordinata di B è -1.

Poiché il punto $B(3; -1)$ appartiene alla retta r', passante per l'origine, il coefficiente angolare di tale retta è:

$$m' = \frac{y_B}{x_B} = -\frac{1}{3}.$$

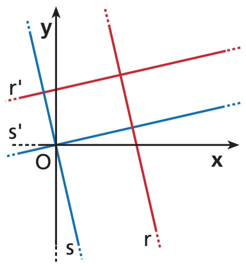
I due coefficienti angolari m e m' sono 3 e $-\dfrac{1}{3}$, ossia sono l'uno l'opposto del reciproco dell'altro, ovvero l'uno l'*antireciproco* dell'altro.

Per dimostrarlo, basta applicare lo stesso procedimento dell'esempio precedente alla retta generica di equazione $y = mx$.

La proprietà di essere l'uno l'antireciproco dell'altro lega i coefficienti angolari di tutte le coppie di rette passanti per l'origine e perpendicolari fra loro. Se m è il coefficiente angolare della retta r, m' quello della retta r' e le rette r e r' sono perpendicolari, allora vale la relazione:

$$m = -\frac{1}{m'} \quad \text{oppure} \quad m \cdot m' = -1.$$

Si può anche dimostrare che, viceversa, se due rette hanno coefficienti angolari legati dalla relazione $m \cdot m' = -1$, allora sono perpendicolari.



Questa relazione vale anche se le rette r e r' non passano per l'origine. In tal caso, infatti, ci possiamo ricollegare al caso di rette per l'origine come segue: consideriamo le rette s e s' per l'origine e parallele rispettivamente a r e r'. È chiaro che r e r' sono perpendicolari se e solo se s e s' lo sono.

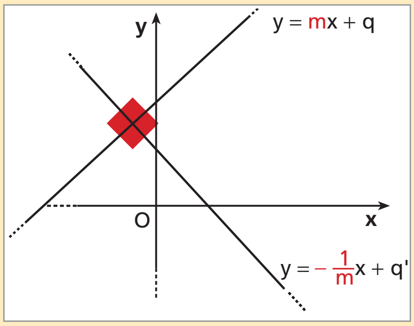
Se r ha equazione $y = mx + q$ e r' ha equazione $y = -\frac{1}{m}x + q'$, allora s ha equazione $y = mx$ e s' ha equazione $y = -\frac{1}{m}x$. Poiché s è perpendicolare a s', anche r è perpendicolare a r'.

Il teorema non si applica alle rette parallele agli assi, poiché per le rette parallele all'asse y il coefficiente angolare non è definito.

TEOREMA

Rette perpendicolari

Due rette (non parallele agli assi) sono perpendicolari se e solo se il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1.



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Lo dimostro io!

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Due rette perpendicolari hanno i coefficienti angolari che sono uno l'antireciproco dell'altro.

GIULIO: «Ho pensato una dimostrazione tutta mia!».

CARLA: «Guarda che in geometria analitica si calcola e non si dimostra!».

GIULIO: «Non è vero: partiamo dal fatto che l'asse di un segmento è perpendicolare al segmento. E che ogni suo punto è equidistante dagli estremi del segmento».

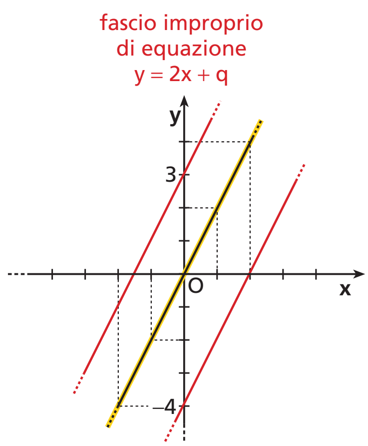
▶ Considera un segmento di generici estremi $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ e un punto $P(x; y)$ sull'asse di AB. Applica la formula della distanza fra due punti un paio di volte…

7. I fasci di rette

Il fascio improprio

Consideriamo una retta r del piano: l'insieme formato da r e da tutte le rette a essa parallele si chiama **fascio improprio** di rette parallele a r.

ESEMPIO



◀ **Figura 16** Ogni retta del fascio è parallela alla retta base, passante per l'origine, $y = 2x$. A seconda del valore di q cambia l'intersezione della retta con l'asse y.

L'equazione

$$y = 2x + q$$

rappresenta, al variare di q, tutte le rette del piano che hanno coefficiente angolare 2, cioè è l'**equazione di un fascio improprio** di rette.

Se $q = 0$, abbiamo la retta del fascio passante per l'origine:

$$y = 2x.$$

Per disegnare altre rette del fascio basta attribuire dei valori a q e sostituirli, di volta in volta, nell'equazione del fascio: per $q = 3$ abbiamo la retta $y = 2x + 3$, per $q = -4$ la retta $y = 2x - 4$ ecc.

Il fascio proprio

L'insieme di tutte le rette del piano che passano per uno stesso punto P si chiama **fascio proprio** di rette per P.

Il punto P comune a tutte le rette del fascio si chiama **centro del fascio**.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione del fascio di rette di centro $P(4; 3)$.
Se una retta generica $y = mx + q$ deve passare per P, occorre che le coordinate di P soddisfino l'equazione, ossia:

$$3 = m \cdot 4 + q.$$

Ricaviamo q:

$$q = 3 - m \cdot 4.$$

Sostituendo tale espressione a q nell'equazione generica, otteniamo:

$$y = mx + 3 - 4m.$$

Così facendo, abbiamo ottenuto l'equazione in forma esplicita di una generica retta del fascio.
Tuttavia la riscriviamo come segue:

$$y - 3 = m(x - 4),$$

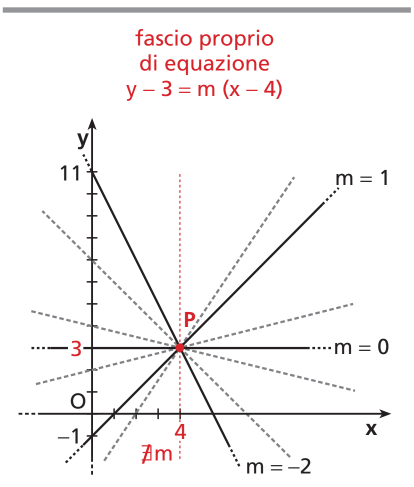
per mettere in evidenza, nell'equazione, le coordinate (4; 3) del centro.
Abbiamo trovato l'equazione del fascio di rette di centro $P(4; 3)$.
Per ogni valore reale che attribuiamo al coefficiente angolare m otteniamo una retta del fascio:

- per $m = 1$ abbiamo la retta $y - 3 = x - 4$, cioè $y = x - 1$;
- per $m = -2$ la retta $y - 3 = -2x + 8$, cioè $y = -2x + 11$;
- per $m = 0$ la parallela all'asse x, $y = 3$ e così via.

L'equazione della parallela all'asse y è $x = 4$, ma non esiste alcun valore di m che, sostituito nell'equazione del fascio, fornisca tale equazione.
Pertanto, per avere tutte le rette del fascio proprio per P, dobbiamo aggiungere all'equazione del fascio l'equazione della parallela all'asse y per P:

$y - 3 = m(x - 4)$ (rette non parallele all'asse y);

$x = 4$ (retta parallela all'asse y).



▶ **Figura 17** Nel fascio di rette $y - 3 = m(x - 4)$, al variare di m otteniamo tutte le rette che passano per $P(4; 3)$, tranne quella parallela all'asse y, perché per essa non c'è un corrispondente valore di m.

In generale, dato un punto P di coordinate $(x_1; y_1)$, il **fascio di rette di centro *P* ha equazione**:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Al variare di m si ottengono tutte le rette del fascio passanti per P, tranne la parallela all'asse y, che ha equazione $x = x_1$.

Pertanto, il **fascio completo** è descritto dalle equazioni:

$$y - y_1 = m(x - x_1), \quad \text{con } m \in \mathbb{R};$$

$$x = x_1.$$

L'equazione del fascio completo può essere scritta anche in forma implicita come:
$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$,
con a e b numeri reali, non entrambi nulli.

8. La retta passante per due punti

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ► V28a

Per due punti distinti passa una e una sola retta. In geometria analitica, questo si traduce così: date le coordinate di due punti distinti del piano, è possibile determinare l'equazione dell'unica retta passante per quei punti.
Consideriamo due punti generici, $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$, e determiniamo l'equazione della retta passante per essi.

1. Poiché la retta che cerchiamo passa per il punto P, essa deve appartenere al fascio proprio di rette per P, cioè deve avere un'equazione del tipo
$$y - y_1 = m(x - x_1),$$
in cui m assume un certo valore che ora determineremo.
2. Per calcolare m, utilizziamo la formula che dà il coefficiente angolare, note le coordinate di due punti della retta:
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$
3. Nell'equazione del fascio di rette di centro P, sostituiamo a m l'espressione ottenuta:
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$
4. Infine, se $y_1 \neq y_2$, dividendo entrambi i membri per $y_2 - y_1$, riscriviamo tale formula nella seguente forma:
$$\boldsymbol{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}.$$
Questa è l'**equazione della retta passante per i punti dati**.

▶ Assumiamo per ipotesi che sia $x_1 \neq x_2$.
Se $x_1 = x_2$, la retta cercata è parallela all'asse y e ha equazione $x = x_1$.

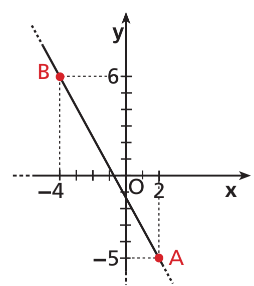
▶ Nel caso $y_1 = y_2$, la retta cercata è parallela all'asse x e ha equazione $y = y_1$.

ESEMPIO

Applichiamo la formula appena ricavata per determinare l'equazione della retta passante per $A(2; -5)$ e $B(-4; 6)$:

$$\frac{y+5}{6+5} = \frac{x-2}{-4-2} \quad \rightarrow \quad \frac{y+5}{11} = \frac{x-2}{-6} \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad -6y - 30 = 11x - 22 \quad \rightarrow \quad 6y = -11x - 8.$$

L'equazione cercata è quindi: $y = -\dfrac{11}{6}x - \dfrac{4}{3}$.



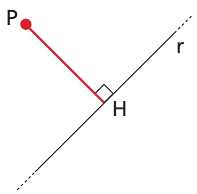
Osservazione. Come si è già evidenziato, la formula $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ non si applica per determinare l'equazione della retta passante per due punti che hanno la stessa ascissa o la stessa ordinata.

- Se i punti P e Q hanno la stessa ascissa, cioè $x_1 = x_2$, l'equazione della retta passante per P e Q è $x = x_1$.
- Se i punti P e Q hanno la stessa ordinata, cioè $y_1 = y_2$, l'equazione della retta passante per P e Q è $y = y_1$.

▶ Per esempio, dati i punti $A(1; 3)$, $B(1; -5)$, l'equazione della retta passante per i punti dati è $x = 1$.
Se $A(3; -2)$ e $B(-7; -2)$, l'equazione è $y = -2$.

9. La distanza di un punto da una retta

Mandiamo da un punto P la perpendicolare a una retta r. Chiamiamo H il punto di intersezione fra la retta stessa e la perpendicolare. La misura del segmento di perpendicolare PH è la **distanza del punto *P* dalla retta *r*** (figura 18).

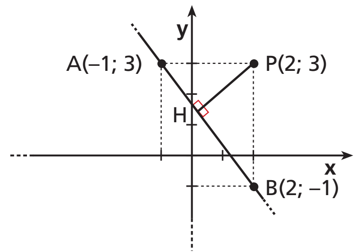


▲ Figura 18

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V28b

ESEMPIO

Dato il punto $P(2; 3)$, calcoliamo la sua distanza PH dalla retta di equazione $4x + 3y - 5 = 0$ (figura 19).
Tracciamo da P le parallele agli assi fino a incontrare la retta data nei punti A e B. Individuiamo così il triangolo rettangolo APB, di cui PH è l'altezza relativa all'ipotenusa.
Il punto A ha la stessa ordinata di P. Sostituendola nell'equazione della retta, possiamo determinare la sua ascissa:



▲ Figura 19

$$4x + 3(3) - 5 = 0, \text{ da cui } x = -1.$$

In modo analogo, poiché l'ascissa di B è uguale a quella di P, si può ricavare l'ordinata di B, che è -1. Otteniamo quindi: $A(-1; 3)$, $B(2; -1)$.
Il doppio dell'area di APB si può ottenere moltiplicando le misure dei due cateti AP e PB. Se dividiamo poi per la misura dell'ipotenusa AB, otteniamo l'altezza PH relativa all'ipotenusa, ossia la misura cercata:

$$\overline{PH} = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

◗ La misura di AB si calcola con la formula della distanza fra due punti:
$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

In generale, si può dimostrare (con calcoli che omettiamo perché troppo laboriosi) che la **distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta di equazione $ax + by + c = 0$** è data dalla formula:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

ESEMPIO

La distanza del punto $P(2; 3)$ dalla retta di equazione

$$4x + 3y - 5 = 0$$

risulta:

$$d = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 + 9 - 5|}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}.$$

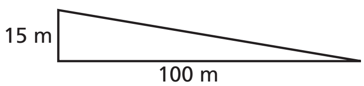
◗ Calcoliamo la distanza già determinata nell'esempio precedente usando la formula appena enunciata.

Discesa pericolosa

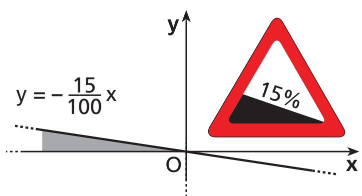
...che cosa indica questo segnale stradale?

→ Il quesito completo a pag. 633

In un qualunque manuale di scuola guida troviamo questo cartello: si tratta di un segnale che indica *discesa pericolosa*, e il codice della strada consiglia di rallentare l'andatura. Possiamo chiederci: di quanto scenderà la strada?
Il valore indicato nel cartello rappresenta la misura della pendenza della carreggiata rispetto a un piano orizzontale. Tale pendenza è calcolata come rapporto percentuale tra il dislivello e l'avanzamento orizzontale corrispondente.
In particolare, il valore 15% indica che la strada si abbassa di 15 m mentre si procede orizzontalmente per 100 m.



Dal punto di vista geometrico la pendenza è il rapporto tra i cateti del triangolo rettangolo che ha come ipotenusa la strada. Si utilizza la stessa definizione di pendenza quando si ha a che fare con una carreggiata in salita, per la quale esiste il cartello corrispondente, *salita ripida*. In una rampa del 10%, ogni 100 m che si percorrono in orizzontale, si sale di 10 m.
Si può interpretare il concetto di pendenza secondo la geometria analitica del piano cartesiano. Se facciamo coincidere l'asse delle ascisse con un piano orizzontale, la direzione della strada può essere rappresentata da una retta. Il valore assoluto del coefficiente angolare di tale retta costituisce così la pendenza della carreggiata.
In particolare, la discesa del 15% del cartello stradale è raffigurata dalla retta di equazione
$y = -\frac{15}{100}x$. Il valore assoluto del coefficiente angolare, cioè $\frac{15}{100}$, dà la misura della pendenza della discesa.



Viceversa, una salita del 10% è rappresentata dalla retta
$y = \frac{10}{100}x$.

Notiamo che una salita del 100% non è quindi una parete verticale, come si potrebbe pensare, ma è inclinata rispetto all'asse delle ascisse come una retta di coefficiente angolare $\frac{100}{100}$, cioè 1. Una retta di questo tipo è $y = x$, ovvero la bisettrice del primo e del terzo quadrante: la salita del 100% è quindi inclinata di 45° rispetto all'orizzonte.
Dal punto di vista pratico, nella collocazione di un segnale di *salita ripida* o di *discesa pericolosa*, gli uffici competenti alla manutenzione delle strade eseguono il calcolo della pendenza misurando il dislivello (cateto verticale) tramite un altimetro. La misura dell'avanzamento orizzontale (cateto orizzontale) è compiuta indirettamente su carta topografica o spesso viene sostituita con la misura della lunghezza della strada stessa (ipotenusa). L'errore che si compie è trascurabile, tenendo conto che generalmente le pendenze stradali sono inferiori al 20%. Per tale pendenza, infatti, se il cateto orizzontale è 100 m, l'ipotenusa vale circa 102 m (teorema di Pitagora).

LA TORRE DI PISA

Nel 1173 iniziò la costruzione della torre di Pisa. Nell'arco dei secoli questo edificio ha subìto una progressiva inclinazione, inizialmente verso nord e successivamente verso sud. È possibile compiere una misura approssimata dell'inclinazione della torre sapendo che la sua settima cornice sporge di circa 3,8 m rispetto alla prima e che il dislivello di tali cornici, misurato con un altimetro, è di 41,5 m.
La pendenza rispetto al piano orizzontale è quindi:

$$p = \frac{41,5}{3,8} \simeq 10,92 = 1092\%.$$

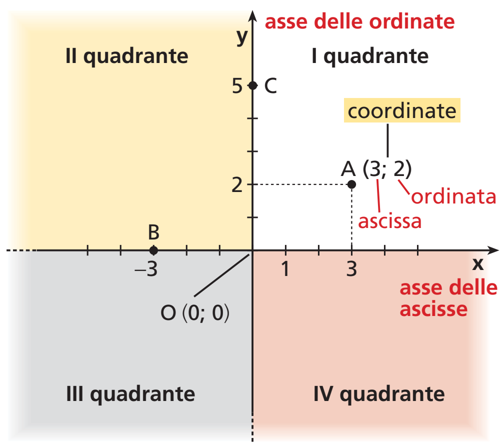
Questo valore non è molto significativo. Nel caso di una torre è preferibile calcolare la pendenza rispetto all'asse verticale. Per la torre di Pisa si ha:

$$p_v = \frac{3,8}{41,5} \simeq 0,092 = 9,2\%.$$

LA TEORIA IN SINTESI
Il piano cartesiano e la retta

1. Le coordinate di un punto su un piano

Il piano cartesiano è suddiviso dai due assi in quattro angoli retti chiamati **quadranti**. Ogni punto del piano è individuato da una coppia di numeri reali, detti **coordinate**. La prima coordinata si chiama **ascissa** e la seconda **ordinata**.
L'origine O degli assi ha coordinate (0; 0).



Il punto $B(-3; 0)$ sta sull'asse x, il punto $C(0; 5)$ sta sull'asse y.

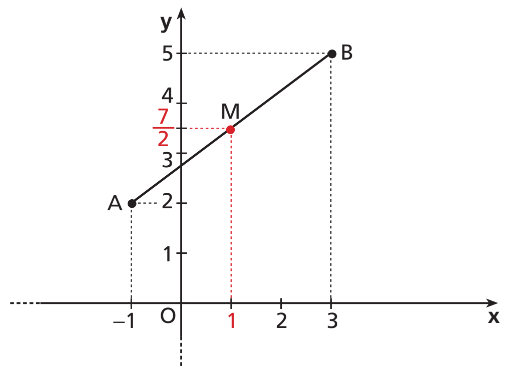
2. I segmenti nel piano cartesiano

La **distanza fra due punti** $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ è data da:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Il **punto medio** del segmento AB è $M(x_M; y_M)$ con:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$



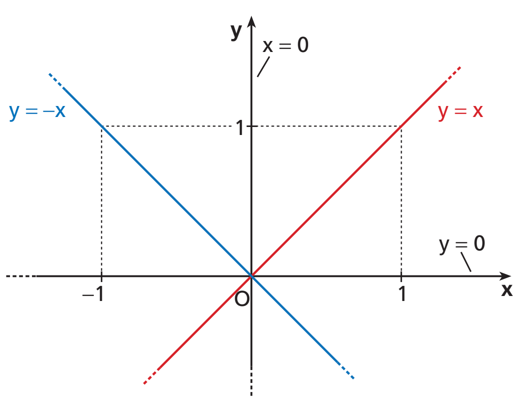
$\overline{AB} = \sqrt{[3-(-1)]^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$M\left(1; \frac{7}{2}\right)$ perché $x_M = \frac{3-1}{2} = 1$ e $y_M = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$

3. L'equazione di una retta passante per l'origine

Una **retta passante per l'origine**, purché diversa dall'asse y, ha equazione $y = mx$, mentre l'asse y ha equazione $x = 0$.
Il numero m dell'equazione $y = mx$ è chiamato **coefficiente angolare**. In particolare:

- se $m = 0$, otteniamo $y = 0$ (equazione dell'asse x);
- se $m = 1$, otteniamo $y = x$ (equazione della bisettrice del I e III quadrante);
- se $m = -1$, otteniamo $y = -x$ (equazione della bisettrice del II e IV quadrante).



4. L'equazione generale della retta

L'**equazione generale di una retta** è del tipo:

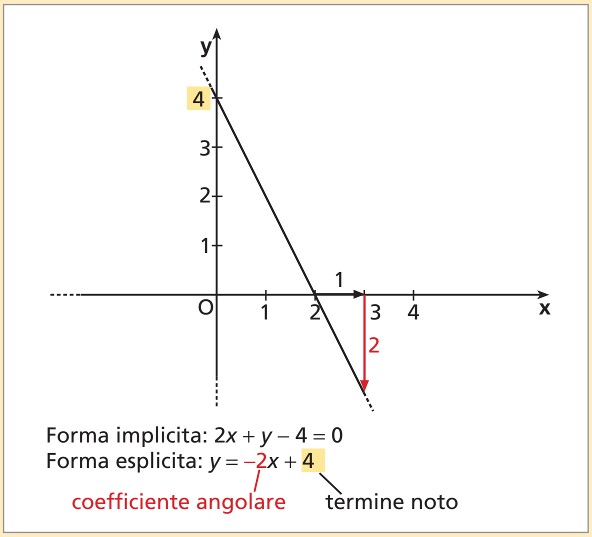
$ax + by + c = 0$ (forma implicita).

Se un punto appartiene a una retta, le sue coordinate soddisfano l'equazione della retta.

Se una retta non è parallela all'asse y, l'equazione può essere scritta nella forma

$y = mx + q$ (forma esplicita),

in cui m è il coefficiente angolare e q è il termine noto.



Se una retta è parallela all'asse y, ha equazione del tipo

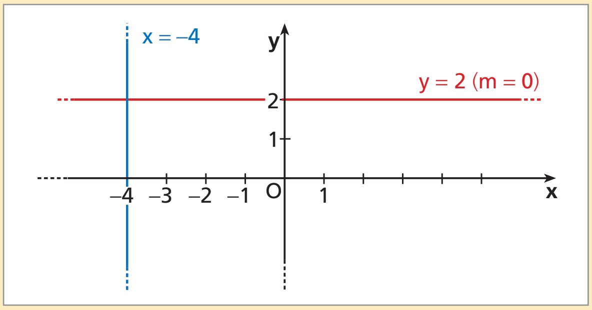
$x = k$.

Casi particolari della forma $y = mx + q$:

$q = 0 \rightarrow y = mx$ (la retta passa per l'origine);

$m = 0 \rightarrow y = q$ (la retta è parallela all'asse x);

$q = 0$ e $m = 0 \rightarrow y = 0$ (la retta è l'asse x).



5. Il coefficiente angolare

Il **coefficiente angolare** è dato dal rapporto fra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti distinti $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$ di una retta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

A seconda che il valore di m sia positivo o negativo, la retta forma con il semiasse positivo delle x un angolo acuto oppure ottuso; se $m = 0$, la retta è parallela all'asse x.

Il coefficiente angolare m non esiste se la retta forma un angolo retto con l'asse x; in tal caso la retta è parallela all'asse y.

ESEMPIO $P(1; 4)$, $Q(2; 6)$.

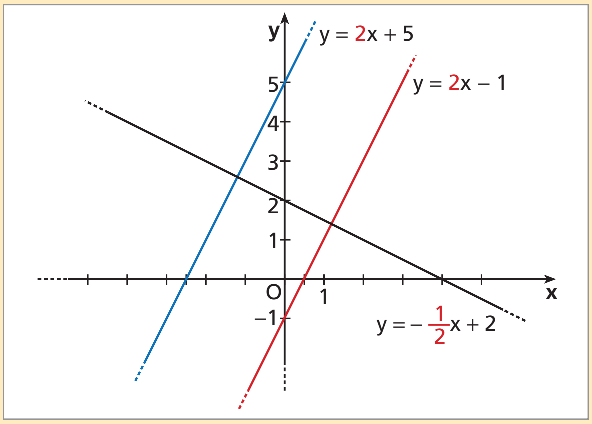
$$m = \frac{6-4}{2-1} = 2, \quad m > 0,$$

la retta passante per P e Q forma un angolo acuto con il semiasse positivo delle x.

6. Le rette parallele e le rette perpendicolari

Due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono fra loro:

- **parallele** quando hanno lo stesso coefficiente angolare, cioè $m = m'$;
- **perpendicolari** quando il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1, cioè $m \cdot m' = -1$.



7. I fasci di rette

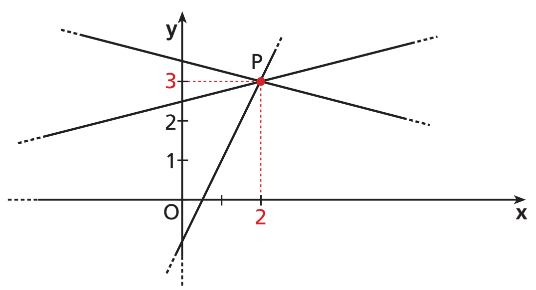
Data la retta r di equazione $y = 2x - 1$, l'insieme formato da r e da tutte le rette a essa parallele si chiama **fascio improprio** di rette parallele a r e ha equazione:

$$y = 2x + q.$$

L'insieme di tutte le rette che passano per uno stesso punto $P(x_1; y_1)$ si chiama **fascio proprio** di rette e ha equazione:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \cup x = x_1.$$

Il punto P è il centro del fascio.



fascio proprio di centro $P(2; 3)$
$y - 3 = m(x - 2) \cup x = 2$

8. La retta passante per due punti

L'**equazione della retta passante per due punti** $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$ è:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Se $y_1 = y_2$, allora l'equazione è $y = y_1$;

se $x_1 = x_2$, allora l'equazione è $x = x_1$.

9. La distanza di un punto da una retta

La **distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta** r di equazione $ax + by + c = 0$ è data dalla misura del segmento che ha per estremi il punto P e il piede della perpendicolare a r passante per P.
Tale misura d si calcola come segue:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

1. Le coordinate di un punto su un piano

Teoria a pag. 633

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 VERO O FALSO?

a) L'asse y è l'asse delle ascisse. V F
b) Il punto $P(3; -5)$ ha ascissa -5. V F
c) La distanza del punto $Q(1; 2)$ dall'asse x si definisce ordinata del punto Q. V F
d) I punti del secondo quadrante hanno ordinata negativa. V F
e) Il punto $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ appartiene al primo quadrante. V F
f) Nel primo e nel terzo quadrante i punti hanno le coordinate di segno concorde. V F
g) Il punto $P(-1; 1)$ appartiene al secondo quadrante. V F
h) Tutti i punti dell'asse y hanno ordinata diversa da 0. V F

2 TEST Se il punto $P(-3x; -y)$ appartiene al quarto quadrante, quale dei seguenti punti appartiene al primo quadrante?

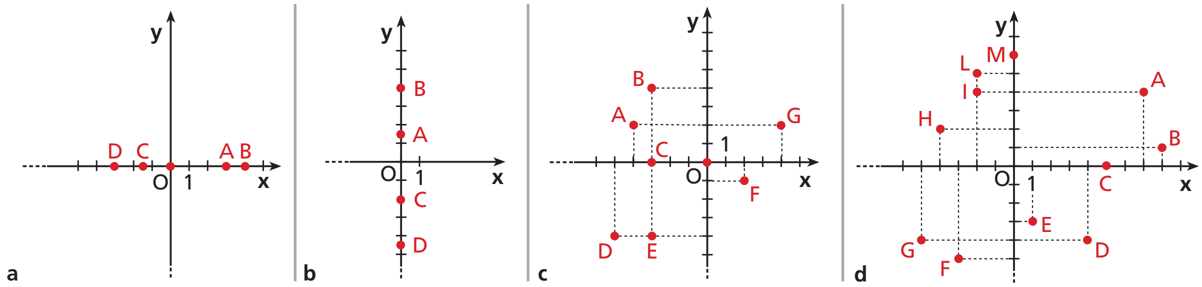
A $P'(-x; -2y)$.
B $P'(2x; -y)$.
C $P'(y; 3x)$.
D $P'(-5x; 2y)$.
E $P'(3x; y)$.

3 TEST Se il punto $P(x; y)$ appartiene al secondo quadrante, quale dei seguenti punti appartiene al terzo quadrante?

A $P'(y; x)$.
B $P'(-x; -y)$.
C $P'(-x; y)$.
D $P'(x; -y)$.
E $P'(-y; -x)$.

ESERCIZI

4 Scrivi le coordinate dei punti indicati in ogni figura.



5 Disegna la poligonale aperta che si ottiene unendo, nell'ordine, i seguenti punti:

$A(-5; -3)$, $B(-3; 3)$, $C(-2; -2)$, $D(1; 1)$, $E\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $F(4; 5)$.

Rispondi alle seguenti domande:

a) Quale punto ha l'ordinata maggiore?
b) Quale punto ha l'ascissa minore?
c) Quali punti hanno ascissa negativa?
d) Quali sono i punti appartenenti al IV quadrante?

6 Indica in quale quadrante può trovarsi un punto se:
a) l'ascissa è negativa e l'ordinata positiva;
b) le sue coordinate sono entrambe positive;
c) le sue coordinate sono tali che $xy > 0$;
d) le sue coordinate sono tali che $xy < 0$;
e) le sue coordinate sono entrambe nulle;
f) l'ascissa è uguale all'ordinata;
g) il prodotto delle coordinate è nullo.

7 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il punto $P(2k+1; 0)$ coincide con l'origine degli assi? $\left[k = -\frac{1}{2}\right]$

8 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il punto $Q(3; k-6)$ è interno al IV quadrante? $[k < 6]$

2. I segmenti nel piano cartesiano

Teoria a pag. 635

RIFLETTI SULLA TEORIA

9 VERO O FALSO?

a) La distanza fra due punti che hanno la stessa ascissa è uguale alla differenza delle ordinate. V F
b) La distanza di un punto del piano dall'origine degli assi cartesiani è uguale alla somma delle coordinate del punto. V F
c) La distanza dall'origine del punto $P(a; 3a)$, con $a \in \mathbb{R}$, è sempre un numero positivo. V F

10 VERO O FALSO?

a) L'origine degli assi è il punto medio del segmento AB soltanto se $x_A = y_A = -x_B = -y_B$. V F
b) Se un segmento è parallelo all'asse x, i suoi estremi e il suo punto medio hanno la stessa ordinata. V F
c) L'ascissa del punto medio di un segmento AB si può ottenere dividendo a metà le ascisse dei punti A e B e poi sommandole. V F

11 TEST Il punto $M\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ è il punto medio del segmento di estremi $A(2;1)$ e B. Quali sono le coordinate di B?

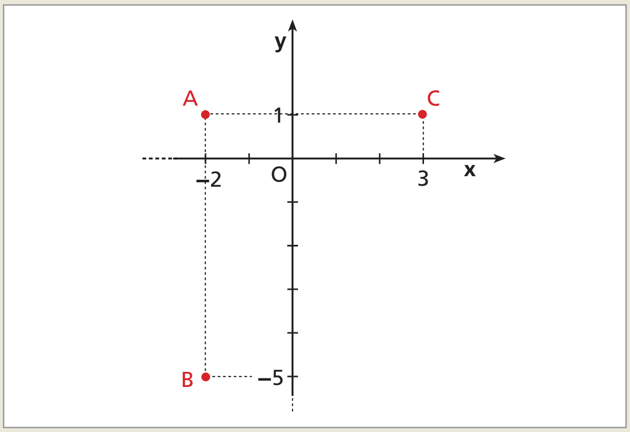
A $(-1; -3)$ B $\left(-\frac{3}{2}; -3\right)$ C $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$ D $(3; -3)$ E $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$

ESERCIZI

La distanza fra due punti

ESERCIZIO GUIDA

12 Calcoliamo le distanze $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ fra i punti disegnati in figura.



Le coordinate dei punti disegnati sono:

$A(-2; 1)$, $B(-2; -5)$, $C(3; 1)$.

Calcoliamo $\overline{AB}$

$A(-2; 1)$ e $B(-2; -5)$ si trovano su una stessa retta verticale, infatti hanno la stessa ascissa. La loro distanza è data quindi dal valore assoluto della differenza delle ordinate:

$$\overline{AB} = |y_A - y_B| = |1 - (-5)| = |6| = 6.$$

Osserviamo che avremmo trovato lo stesso risultato sottraendo le ordinate in ordine inverso:

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |(-5) - 1| = |-6| = 6.$$

Calcoliamo $\overline{AC}$

$A(-2; 1)$ e $C(3; 1)$ si trovano su una stessa retta orizzontale, infatti hanno la stessa ordinata. La loro distanza è data quindi dal valore assoluto della differenza fra le ascisse:

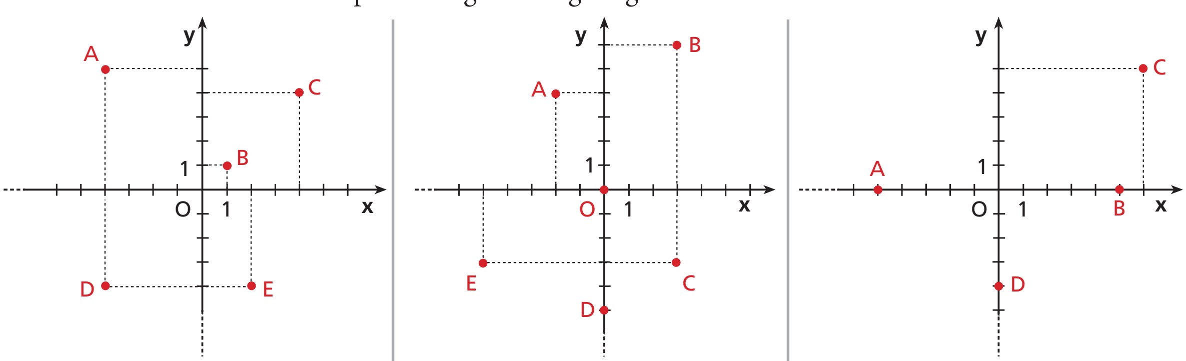
$$\overline{AC} = |x_A - x_C| = |-2 - 3| = |-5| = 5.$$

Calcoliamo $\overline{BC}$

I punti $B(-2; -5)$ e $C(3; 1)$ non sono allineati né lungo una retta orizzontale, né lungo una retta verticale. Applichiamo allora la formula generale della distanza fra due punti:

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} =$$
$$= \sqrt{(-2-3)^2 + (-5-1)^2} =$$
$$= \sqrt{(-5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61} \simeq 7{,}8.$$

13 Calcola le distanze indicate fra i punti disegnati in ogni figura.



a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{AD}$, $\overline{CE}$

b $\overline{AC}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$

c $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$, $\overline{DC}$

Calcola la distanza fra i punti indicati.

14 $A(2;4)$, $B(2;7)$.

15 $A(-1;3)$, $B(4;3)$.

16 $A\left(-4;\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-4;\frac{5}{2}\right)$.

17 $A(-3;-4)$, $B\left(\frac{1}{3};-4\right)$.

18 $A(-4;0)$, $B(6;0)$.

19 $A(2;5)$, $B(3;7)$.

20 Determina il perimetro del triangolo i cui vertici sono $A(-3;2)$, $B(0;2)$, $C(0;-2)$. [12]

21 Determina il perimetro del quadrilatero i cui vertici sono $A(-6;-10)$, $B(-6;11)$, $C(-3;15)$, $D(9;10)$. [64]

22 Verifica che il triangolo di vertici $A(2;2)$, $B\left(6;\frac{3}{2}\right)$, $C(4;5)$ è isoscele.

23 Verifica che il triangolo ABC di vertici $A(-2;3)$, $B(4;5)$, $C(3;-2)$ è isoscele.

24 Verifica che il triangolo ABC di vertici $A(1;-2)$, $B(-1;2)$, $C(-1;-3)$ è un triangolo rettangolo (è sufficiente verificare che le misure dei lati soddisfano il teorema di Pitagora).

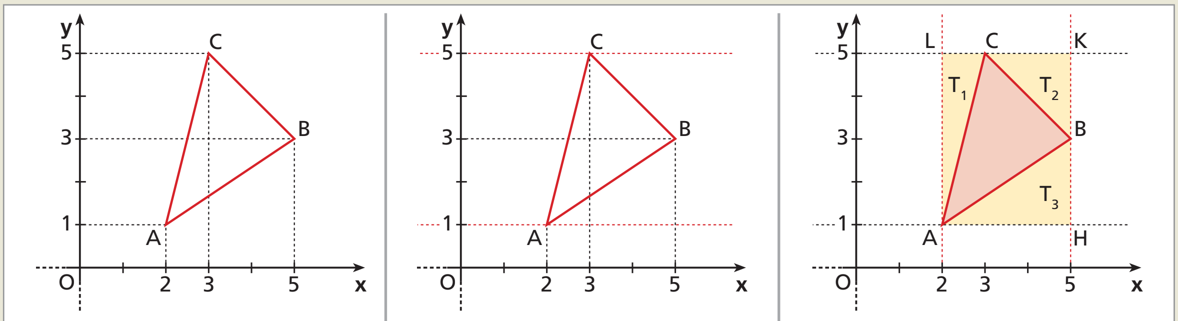
25 Determina il punto P sull'asse x equidistante da $A(-1;2)$ e da $B(4;5)$. $\left[P\left(\frac{18}{5};0\right)\right]$

26 Determina il punto P che ha ordinata uguale all'ascissa ed è equidistante da $A(-3;1)$ e $B(4;3)$. $\left[P\left(\frac{5}{6};\frac{5}{6}\right)\right]$

L'area di triangoli e poligoni

ESERCIZIO GUIDA

27 Determiniamo l'area del triangolo di vertici $A(2;1)$, $B(5;3)$, $C(3;5)$.



a. Disegniamo il triangolo ABC nel piano cartesiano.

b. Tracciamo le parallele all'asse x passanti per A e per C.

c. Tracciamo le parallele all'asse y passanti per A e per B. Le quattro parallele, incontrandosi, determinano un rettangolo $AHKL$. Il rettangolo è formato dal triangolo ABC e dai triangoli rettangoli T_1, T_2, T_3. Quindi possiamo determinare l'area del triangolo ABC sottraendo all'area del rettangolo l'area dei tre triangoli T_1, T_2, T_3.

Calcoliamo l'area $A(AHKL)$ del rettangolo $AHKL$ (figura c):

$A(AHKL) = \overline{AH} \cdot \overline{HK}$;

$\overline{AH} = |5-2| = 3, \quad \overline{HK} = |5-1| = 4$;

$A = 3 \cdot 4 = 12$.

Calcoliamo l'area di T_1:

$$A_{T_1} = \frac{\overline{LC} \cdot \overline{LA}}{2};$$

$\overline{LC} = |3-2| = 1, \quad \overline{LA} = |5-1| = 4$;

$$A_{T_1} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2.$$

Calcoliamo l'area di T_2:

$$A_{T_2} = \frac{\overline{CK} \cdot \overline{KB}}{2};$$

$\overline{CK} = |5-3| = 2, \quad \overline{KB} = |5-3| = 2$;

$$A_{T_2} = \frac{\cancel{2} \cdot 2}{\cancel{2}} = 2.$$

Calcoliamo l'area di T_3:

$$A_{T_3} = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{BH}}{2};$$

$\overline{AH} = |2-5| = |-3| = 3, \quad \overline{BH} = |3-1| = 2$;

$$A_{T_3} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 3.$$

Calcoliamo l'area del triangolo ABC:

$A(ABC) = A(AHKL) - (A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3})$, ossia

$A(ABC) = 12 - (2 + 2 + 3) = 12 - 7 = 5$.

Calcola l'area dei triangoli che hanno i vertici indicati.

28 $A(10; 0)$, $\quad B(2; 3)$, $\quad O(0; 0)$.

29 $A\left(-4; \frac{3}{2}\right)$, $\quad B\left(6; \frac{3}{2}\right)$, $\quad C(0; -5)$.

30 $A(-11; -3)$, $\quad B\left(-11; \frac{5}{3}\right)$, $\quad C(7; -9)$.

31 $A\left(5; -\frac{1}{2}\right)$, $\quad B\left(5; \frac{9}{2}\right)$, $\quad C(-8; -5)$.

Calcola l'area dei poligoni che hanno i vertici indicati.

32 $A(1; 1)$, $\quad B(5; 0)$, $\quad C(4; 4)$, $\quad D(2; 5)$.

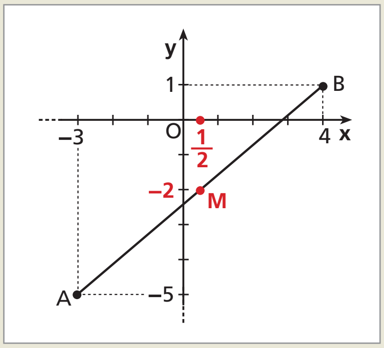
33 $A(3; -3)$, $\quad B(6; -2)$, $\quad C(4; 4)$, $\quad D(1; 3)$.

Il punto medio di un segmento

ESERCIZIO GUIDA

34 Calcoliamo le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A(-3; -5)$ e $B(4; 1)$.

Disegniamo il segmento.



Calcoliamo l'ascissa del punto medio M, utilizzando la formula:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad \text{ossia} \quad x_M = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo l'ordinata del punto medio, utilizzando la formula:

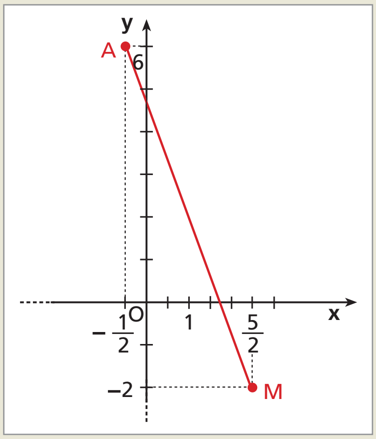
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad \text{ossia} \quad y_M = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Il punto medio del segmento AB è $M\left(\frac{1}{2}; -2\right)$.

ESERCIZIO GUIDA

35 Conoscendo le coordinate del punto $A\left(-\frac{1}{2}; 6\right)$ e quelle del punto medio del segmento AB, $M\left(\frac{5}{2}; -2\right)$, calcoliamo le coordinate di B.

Disegniamo il segmento AM. Applichiamo le formule del punto medio:



$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

Sostituiamo le coordinate di M e di A:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{2} = \dfrac{-\frac{1}{2} + x_B}{2} \\ -2 = \dfrac{6 + y_B}{2} \end{cases}$$

Ricaviamo x_B e y_B nelle due equazioni:

$$\begin{cases} 5 = -\dfrac{1}{2} + x_B \\ -4 = +6 + y_B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B = 5 + \dfrac{1}{2} \\ y_B = -10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B = \dfrac{11}{2} \\ y_B = -10 \end{cases}$$

Il punto cercato è $B\left(\frac{11}{2}; -10\right)$.

Determina le coordinate del punto medio M o dell'estremo incognito del segmento AB.

36 $A(4; -7)$, $B(8; -7)$.

37 $A(-3; 2)$, $B(-3; -8)$.

38 $A(2; 4)$, $M(5; 7)$.

39 $A(-1; 3)$, $B(3; 7)$.

40 $A\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$, $M\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

41 $A\left(\frac{1}{2}; -5\right)$, $B(3; 2)$.

42 $B(-2; -5)$, $M(1; 3)$.

43 $A(2; 7)$, $B(6; -3)$.

44 $B\left(\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right)$, $M(0; 0)$.

45 $A\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

RIEPILOGO LA DISTANZA FRA DUE PUNTI E IL PUNTO MEDIO

46 COMPLETA le seguenti tabelle.

a)

A	B	$\overline{AB}$
$(a; 0)$	$(-a; 0)$	…
$(3; -2b)$	$(3; -5b)$	…
$\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{4}; 1\right)$	…

b)

P	Q	Punto medio del segmento PQ
$(2; 3)$	…	$\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$
…	$(1; -3)$	$(0; 1)$
$(-5; 0)$	$(-1; 2)$	…

TEST

47 Che cosa puoi affermare sul triangolo di vertici $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(5; \frac{1}{2}\right)$, $C\left(1; \frac{9}{2}\right)$?

A Il suo perimetro vale 64.
B La sua area vale 32.
C È rettangolo e isoscele.
D È equilatero.
E È scaleno.

48 Quanto vale la distanza fra i punti $A(2k; k-3)$ e $B(2k; 2k+1)$?

A $-k+4$
B $k-4$
C $|-k+4|$
D $|k+4|$
E $k-2$

49 Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A(3a; a-1)$ e $B(a; 2a-3)$ sono opposte fra loro?

A $\frac{4}{7}$
B -4
C -2
D 2
E $\frac{7}{4}$

50 La distanza fra $A(3a-1; -1)$ e $B(2-2a; -1)$ è uguale a 2 se:

A $a=-1$.
B $a=-\frac{1}{5}$.
C $a=1 \vee a=\frac{1}{5}$.
D $a=-1 \vee a=-\frac{1}{5}$.
E $a=1 \vee a=5$.

51 Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'ascissa del punto medio del segmento di estremi $A(k; 2)$ e $B(3k; 2)$ vale -1? $\left[k=-\frac{1}{2}\right]$

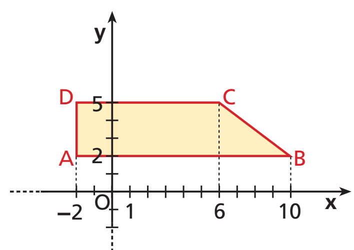
52 Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le distanze dei punti $P(2a-3; 4)$ e $Q(2a+1; 4)$ dall'origine sono uguali? $\left[a=\frac{1}{2}\right]$

53 Quali condizioni della geometria euclidea sono sufficienti per dimostrare che un quadrilatero è un parallelogramma? Applica tali condizioni al quadrilatero di vertici $A(4;6)$, $B(-1;1)$, $C(2;-5)$, $D(7;0)$ per verificare che esso è un parallelogramma. $[AB \cong DC, AD \cong BC]$

54 In che modo puoi utilizzare il calcolo della distanza fra due punti per verificare che tre punti sono allineati? Applica tale metodo per verificare che i punti $A(0;-3)$, $B(1;-2)$ e $C(3;0)$ sono allineati. $[\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}]$

55 Nel triangolo ABC, di vertici $A(-2;4)$, $B(0;2)$, $C(4;6)$, determina i punti medi dei lati e la misura delle mediane. $[(-1;3), (2;4), (1;5); \sqrt{34}, 4, \sqrt{10}]$

56 Calcola la misura del perimetro e dell'area del poligono in figura.



[28; 30]

57 Determina sull'asse y il punto equidistante dai due punti $A(-3;2)$ e $B(-1;3)$. $\left[\left(0; -\frac{3}{2}\right)\right]$

58 Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-3;-4)$, $B(10;-4)$, $C(15;8)$, $D(2;8)$ è un rombo. Determina la misura dell'area. [156]

59 Verifica che il triangolo di vertici $A(-2; -3)$, $B\left(3; -\frac{1}{2}\right)$, $C(-8; 9)$ è rettangolo e poi verifica che la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa.

60 Verifica che il quadrilatero di vertici consecutivi $I(-2; 3)$, $L(1; -2)$, $M(6; 1)$, $N(3; 6)$ è un rettangolo.

61 Considerati i punti $A(-2a; -1)$ e $B(a-5; -1)$, con $a > 0$, determina a in modo che la distanza $\overline{AB}$ sia uguale a 7. Determina poi il punto C, di ascissa 5, tale che l'area del triangolo ABC misuri 35. [$a = 4$; $C_1(5; 9)$, $C_2(5; -11)$]

62 Il quadrilatero di vertici $A(2; 1)$, $B(6; 5)$, $C(4; 7)$, $D(0; 3)$ è un rettangolo. Trova i punti medi di ciascun lato, congiungili e stabilisci di che quadrilatero si tratta. Calcolane poi perimetro e area. [$4\sqrt{10}$; 8]

63 Dato il triangolo ABC con $A(1; 1)$, $B(7; 3)$ e $C(3; 5)$, stabilisci che esso è isoscele sulla base AB. Dopo aver determinato i punti medi M_1 e M_2 dei lati obliqui, verifica che il segmento M_1M_2 è uguale alla metà di AB.

64 Dato il rombo di coordinate $A(-2; -2)$, $B(11; -2)$, $C(16; 10)$, $D(3; 10)$, trova il perimetro. Determina poi i punti medi di AB e BC e calcola la lunghezza del segmento che li congiunge. [52; $3\sqrt{13}$]

65 Il quadrilatero di vertici $A(-1; -3)$, $B(3; -7)$, $C(7; -3)$ e D è un quadrato. Determina le coordinate del punto D sapendo che il punto medio del segmento DC è $M(5; -1)$. Calcola poi perimetro e area del quadrato. [$D(3; 1)$; $16\sqrt{2}$; 32]

66 Del parallelogramma $ABCD$ sono noti i vertici $A(4; 8)$, $B(5; 4)$, $C(-1; -4)$. Determina le coordinate del vertice D. [$(-2; 0)$]

67 Se $M(1; 1)$ è il punto di incontro delle diagonali di un quadrato $ABCD$ di lato $l = \sqrt{2}$, determina le coordinate dei vertici del quadrato, sapendo che le diagonali sono perpendicolari agli assi coordinati.
[$A(1; 0)$, $B(2; 1)$, $C(1; 2)$, $D(0; 1)$]

68 Considera i punti $A(a+3; 1)$ e $B(3; b)$, con a e b numeri reali. Determina a e b in modo che la distanza $\overline{AB}$ sia uguale a 1 e che il punto medio M del segmento AB sia situato sulla retta $y = \frac{1}{2}$.
[$a = b = 0$; $A(3; 1)$, $B(3; 0)$]

69 Del rombo $ABCD$ sono noti i vertici $A(1; 0)$, $B(5; 3)$ e il punto di incontro delle diagonali $M(1; 3)$. Determina le coordinate degli altri vertici C e D e calcola il perimetro del rombo. [$C(1; 6)$, $D(-3; 3)$; $2p = 20$]

70 Dati i punti $A(3h+2; -3-2h)$ e $B(6+h; -7-3h)$, determina per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il punto medio M di AB ha l'ascissa doppia dell'ordinata. [$h = -2$]

71 Nel piano cartesiano xOy sono assegnati tre punti $P(-1; 2)$, $Q(2; 1)$ e $R(m+1; 1-m)$, con $m \in \mathbb{R}$:
a) stabilisci per quale valore di m il punto R è punto medio di PQ;
b) calcola quale valore deve assumere m affinché il triangolo PQR risulti isoscele sulla base PQ.
$\left[\text{a) } m = -\frac{1}{2}\text{; b) impossibile}\right]$

72 Sia $ABCD$ un rombo con $A(-2; 0)$, $C(2; 0)$ e D appartenente all'asse y di ordinata 4. Siano inoltre noti i punti medi dei lati AB e BC, rispettivamente $M_1(-1; -2)$ e $M_2(1; -2)$.
Determina le coordinate del punto B e calcola l'area del rombo. Trova poi le coordinate dei punti medi M_3 e M_4 dei lati DC e AD e determina il perimetro del quadrilatero $M_1M_2M_3M_4$. Di che tipo di quadrilatero si tratta? Verifica inoltre che il perimetro del quadrilatero costruito è uguale alla somma delle diagonali del rombo. [$B(0; -4)$; 16; $M_3(1; 2)$, $M_4(-1; 2)$; 12]

3. L'equazione di una retta passante per l'origine

Teoria a pag. 637

RIFLETTI SULLA TEORIA

L'equazione di una retta passante per l'origine

73 VERO O FALSO?

a) L'equazione $y = 0$ rappresenta l'asse delle ordinate. V F
b) L'equazione di una generica retta passante per l'origine è $y = mx$. V F
c) Tutti i punti della bisettrice del primo e del terzo quadrante hanno l'ascissa uguale all'ordinata. V F
d) Le bisettrici dei quadranti del piano cartesiano sono tra loro simmetriche rispetto all'asse x e all'asse y. V F
e) L'equazione $y = mx$ rappresenta tutte le rette passanti per l'origine. V F
f) I punti del tipo $(t; -t)$, $t \in \mathbb{R}$, appartengono alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. V F
g) I punti del tipo $(t; |t|)$, $t \in \mathbb{R}$, appartengono alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. V F

74 TEST Il punto $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ appartiene a una fra le seguenti rette. Quale?

A $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}x$
B $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$
C $y = -\frac{1}{2}x$
D $y = \sqrt{3}\,x$
E $y = -\sqrt{3}\,x$

75 TEST Uno fra i seguenti punti *non* appartiene alla retta di equazione $y = -\frac{5}{2}x$. Quale?

A $\left(-\sqrt{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$
B $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
C $\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{8}\right)$
D $\left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$
E $\left(-\frac{1}{5}; -1\right)$

Il coefficiente angolare

76 VERO O FALSO?

a) Il coefficiente angolare dell'asse x è nullo. V F
b) Se il coefficiente angolare di una retta r passante per l'origine è negativo, allora r appartiene al secondo e al quarto quadrante. V F
c) Il coefficiente angolare di una retta passante per l'origine esprime il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata di un qualunque punto della retta. V F

77 TEST Il coefficiente angolare della retta di equazione $3x - 2y = 0$ è:

A -2.
B $\frac{2}{3}$.
C $\frac{3}{2}$.
D $-\frac{3}{2}$.
E 3.

78 **TEST** Quale, fra le seguenti, è l'equazione della retta rappresentata nella figura?

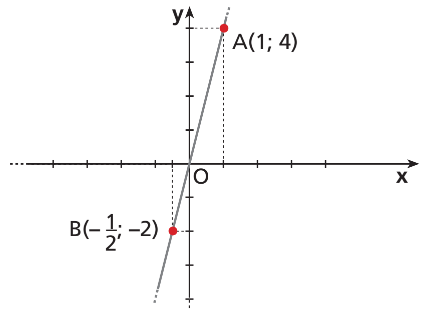
A $y = -4x$

B $y = \frac{1}{4}x$

C $y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{2}x$

E $y = 4x$



79 Possiamo scrivere il coefficiente angolare dell'asse y? Perché?

ESERCIZI

L'equazione di una retta passante per l'origine

ESERCIZIO GUIDA

80 Determiniamo l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto $A\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right)$; verifichiamo se i punti $B\left(\frac{5}{4}; 1\right)$ e $C(2; 5)$ appartengono a tale retta.

Poiché una retta passante per l'origine ha equazione del tipo $y = mx$, ci basta determinare il coefficiente angolare m.

Ricordiamo che la relazione $m = \frac{y}{x}$ lega le coordinate di tutti i punti della retta (esclusa l'origine). Sostituiamo in tale relazione le coordinate del punto $A\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right)$ e ricaviamo m:

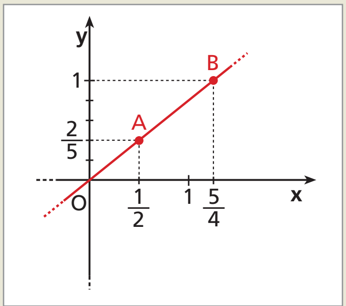
$$m = \frac{y_A}{x_A} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}.$$

L'equazione della retta è dunque:

$$y = \frac{4}{5}x.$$

Verifichiamo se B appartiene alla retta (e quindi se le sue coordinate ne soddisfano l'equazione). Sostituendo x_B e y_B nell'equazione $y = \frac{4}{5}x$ si ha:

$$1 = \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}.$$



Poiché i due membri dell'equazione sono uguali, B appartiene alla retta.

Verifichiamo se C appartiene alla retta:

$$5 \neq \frac{4}{5} \cdot 2.$$

I due membri dell'equazione non sono uguali e quindi C non appartiene alla retta.

Scrivi l'equazione della retta, passante per l'origine e per il punto A. Verifica se il punto B appartiene alla retta trovata.

81 $A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $B(-1; -2)$. $[y = 2x; \text{sì}]$

82 $A(1; -1)$, $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. $[y = -x; \text{sì}]$

83 $A(-2; 0)$, $B(-2; 10)$. $[y = 0; \text{no}]$

84 $A(3; 2)$, $B(6; 4)$. $\left[y = \frac{2}{3}x; \text{sì}\right]$

I punti dei seguenti gruppi appartengono tutti a una stessa retta passante per l'origine, tranne uno. Scrivi l'equazione della retta e individua il punto che non le appartiene.

85 $A(-1; -5)$, $B(2; 10)$, $C(5; 10)$, $D(3; 15)$. $[y = 5x; C]$

86 $A(-3; 9)$, $B(-2; 6)$, $C(2; -6)$, $D(1; 3)$. $[y = -3x; D]$

87 $A(1; 4)$, $B(2; 8)$, $C(-3; 12)$, $D(-3; -12)$. $[y = 4x; C]$

88 $A\left(\frac{1}{3}; 3\right)$, $B\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$, $C(3; 1)$, $D(6; 2)$. $\left[y = \frac{1}{3}x; A\right]$

Scrivi l'equazione della retta passante per l'origine avente il coefficiente angolare indicato e disegna la retta.

89 $m = 2$; $m = -2$.

90 $m = 3$; $m = -3$.

91 $m = \frac{1}{3}$; $m = -\frac{1}{3}$.

Dall'equazione al grafico e viceversa

ESERCIZIO GUIDA

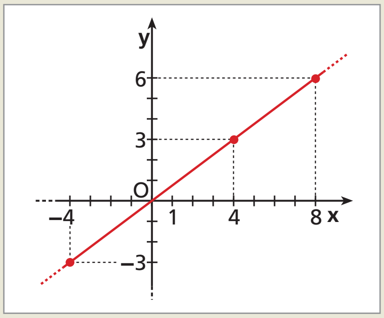
92 Disegniamo il grafico della retta d'equazione $y = \frac{3}{4}x$.

Per disegnare una retta bastano due punti. Poiché la retta passa per l'origine, è sufficiente determinare un secondo punto. Tuttavia, disegniamone alcuni in più.

Per $x = 4$, $y = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$.

La retta passa per il punto $(4; 3)$. Osserviamo che conviene assegnare a x valori multipli di 4, per evitare di fare calcoli con le frazioni. Per esempio:

per $x = 8$, $y = 6$; per $x = -4$, $y = -3$.



Disegna le rette rappresentate dalle seguenti equazioni.

93 $y = \frac{1}{2}x$; $y = -\frac{2}{3}x$.

94 $y = \frac{3}{5}x$; $y = -\frac{5}{4}x$.

95 $y = \frac{6}{7}x$; $y = \frac{8}{3}x$.

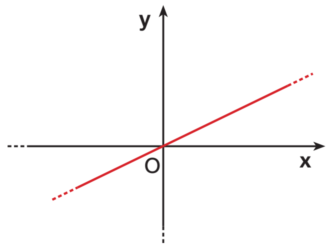
96 $y = \frac{3}{8}x$; $y = -\frac{3}{8}x$.

97 $y = -\frac{1}{3}x$; $y = 3x$.

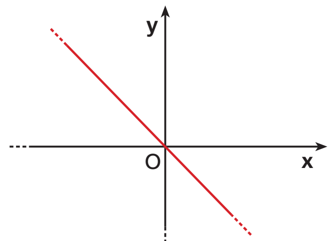
98 $y = \frac{11}{8}x$; $y = 11x$.

Scrivi per ogni grafico una delle seguenti condizioni, riferite al coefficiente angolare della retta disegnata: $m > 0$, $m = 0$, $m < 0$, m non definito.
Indica per ogni retta l'angolo che forma con la semiretta positiva dell'asse x nel semipiano delle ordinate positive.

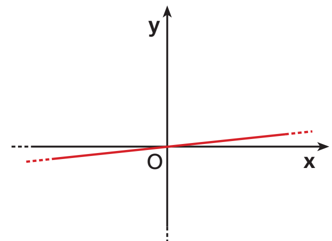
99



100



101



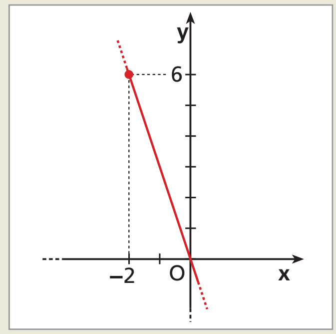
ESERCIZIO GUIDA

102 Dalle indicazioni date in figura ricaviamo l'equazione della retta disegnata.

Il rapporto fra le coordinate del punto indicato è il seguente:

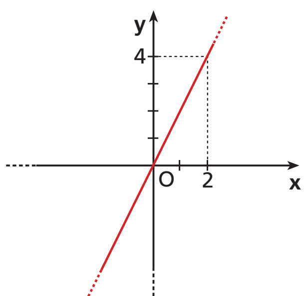
$$\frac{y}{x} = \frac{6}{-2} = -3.$$

Poiché la retta passa per l'origine, l'equazione richiesta è: $y = -3x$.

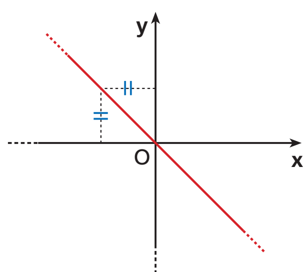


Dalle indicazioni date in ogni figura ricava l'equazione della retta disegnata.

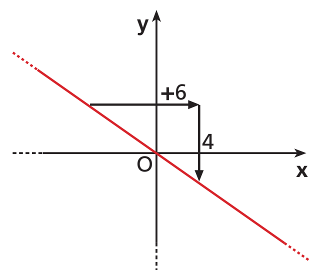
103



104



105



4. L'equazione generale della retta

Teoria a pag. 640

RIFLETTI SULLA TEORIA

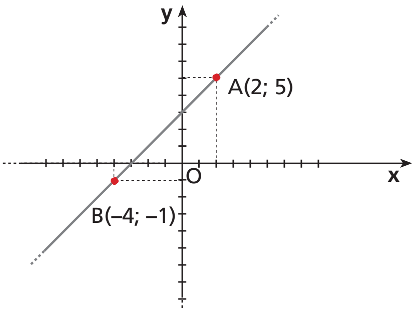
La forma esplicita

106 Partendo dall'equazione $y = mx + q$, per quali valori di m e di q ottieni l'equazione dell'asse x? Esistono opportuni valori di m e di q per ottenere l'equazione dell'asse delle y? Perché?

107 Puoi scrivere l'equazione in forma esplicita di una qualsiasi retta del piano? Giustifica la risposta.

108 Due rette distinte possono intersecare l'asse delle ordinate nello stesso punto? Perché?

109 TEST Quale, fra le seguenti equazioni, è quella della retta rappresentata nella figura a lato?



A $y = -x - 3$

B $y = -x + 3$

C $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

D $y = x + 3$

E $y = x - 3$

La forma implicita

110 VERO O FALSO?

a) Se $k = 0$, la retta di equazione $kx + y + 1 = 0$ è parallela all'asse x. V F

b) La forma implicita della seguente equazione $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{5}$ è $5x - 15y - 12 = 0$. V F

c) L'equazione $ax + c = 0$, con a e c numeri reali e $a \neq 0$, rappresenta una retta parallela all'asse y. V F

d) Se nell'equazione generale della retta $ax + by + c = 0$ si pongono $a = c = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione non ha rappresentazione grafica. V F

111 TEST Soltanto una delle seguenti equazioni *non* è quella di una retta parallela agli assi cartesiani. Quale?

A $3x = 9$

B $2x - 5y = 5(1 - y)$

C $y - 3 = 0$

D $y - 2x + 3 = 2(1 - x)$

E $y - x + 1 = 0$

112 TEST Quale, fra le seguenti equazioni, rappresenta una retta parallela all'asse x?

A $3x + y + 1 = 0$

B $x = -2$

C $y + 1 = 0$

D $3x - y = 0$

E $y = -x$

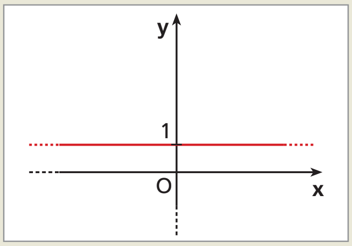
ESERCIZI

L'equazione di una retta parallela a un asse

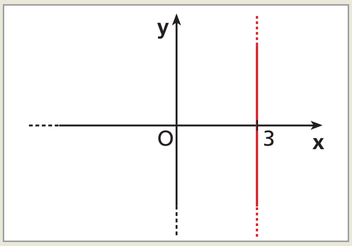
ESERCIZIO GUIDA

113 Scriviamo le equazioni delle rette disegnate nei due grafici:

a)



b)



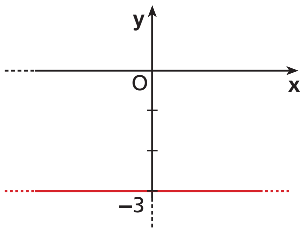
Bergamini, Trifone, Barozzi MATEMATICA.BLU - Vol. 2 © Zanichelli 2012 Algebra, Geometria, Probabilità

a) Poiché la retta è parallela all'asse x, tutti i suoi punti hanno ascissa variabile e la medesima ordinata, uguale a 1. L'equazione della retta è:
$y = 1$.

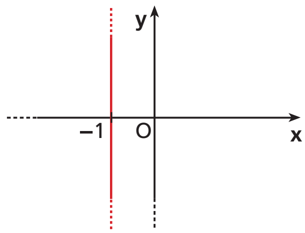
b) Poiché la retta è parallela all'asse y, tutti i suoi punti hanno la medesima ascissa, uguale a 3, e ordinata variabile. L'equazione della retta è:
$x = 3$.

Per ogni grafico scrivi l'equazione della retta corrispondente.

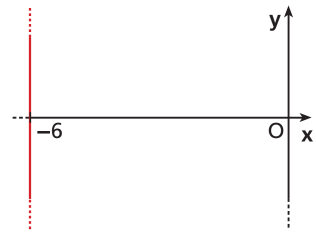
114



115



116



Disegna le rette che hanno le seguenti equazioni.

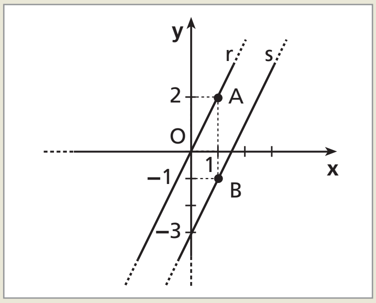
117 $x = -2$; $\quad y = -2$; $\quad x = 3$; $\quad y = \dfrac{3}{2}$; $\quad x = 1$.

118 $2x - 6 = 0$; $\quad -3y = 0$; $\quad 3 - y = 0$; $\quad 5 - 10x = 0$; $\quad 2x = -8$.

La forma esplicita $y = mx + q$

ESERCIZIO GUIDA

119 Dalle informazioni fornite dal grafico ricaviamo l'equazione della retta r passante per l'origine e l'equazione della retta s parallela a r.



Ricaviamo l'equazione di r
Poiché la retta passa per l'origine, la sua equazione è del tipo $y = mx$.

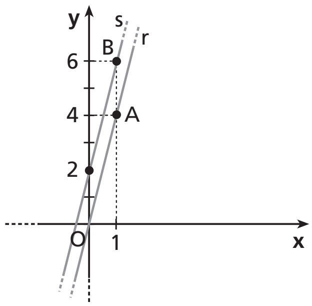
Per determinare m consideriamo il punto $A(1; 2)$ e calcoliamo $\dfrac{y_A}{x_A}$, ossia $m = \dfrac{2}{1}$.

L'equazione di r è: $y = 2x$.

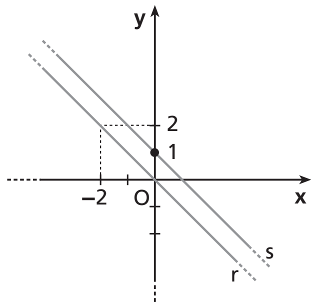
Ricaviamo l'equazione di s
Il punto $B(1; -1)$ di s ha la stessa ascissa di A e ordinata diminuita di 3 unità: $2 - 3 = -1$.
L'equazione di s si ottiene da quella di r aggiungendo al membro di destra il termine -3, che nel grafico è l'ordinata del punto di intersezione di s con l'asse y.
L'equazione di s è: $y = 2x - 3$.

Dalle informazioni fornite da ogni grafico ricava l'equazione della retta *r* e l'equazione della retta *s*.

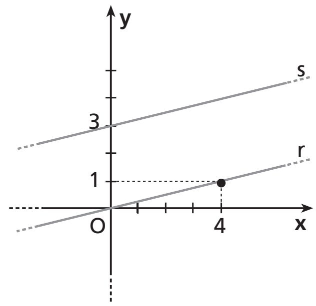
120



121



122



Dall'equazione al grafico

Nel sito: ▶ 15 esercizi in più su Insiemi di punti

ESERCIZIO GUIDA

123 Rappresentiamo in un grafico cartesiano le seguenti rette:

a) $y = -\frac{1}{5}x + 2$; b) $y = 5$.

a) Il termine noto 2 indica che la retta passa per il punto di coordinate (0; 2). Infatti, se $x = 0$, sostituendo:

$$y = -\frac{1}{5} \cdot 0 + 2 = 2.$$

Determiniamo ora un secondo punto assegnando a x un valore a piacere, per esempio 10.

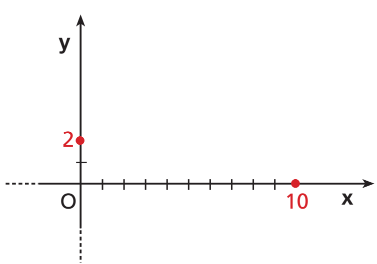
Per $x = 10$, $y = -\frac{1}{5} \cdot 10 + 2 = 0$.

La retta passa per i due punti (0; 2) e (10; 0).

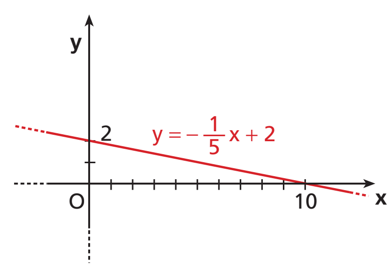
Riportiamo le coordinate dei due punti in una tabella e tracciamo il grafico cartesiano.

x	y
0	2
10	0

a. Riportiamo in una tabella le coordinate dei due punti (0; 2) e (10; 0).



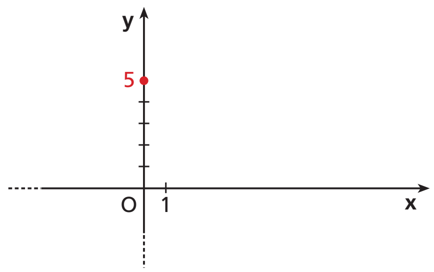
b. Disegniamo il sistema di riferimento cartesiano e i due punti (0; 2) e (10; 0).



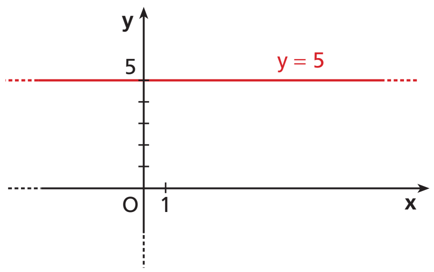
c. Tracciamo la retta passante per i due punti (0; 2) e (10; 0).

b) $y = 5$. La retta ha equazione del tipo $y = k$, quindi è parallela all'asse x e passa per il punto dell'asse y di ordinata 5.

Disegniamo il grafico.



a. Disegniamo sul sistema di riferimento cartesiano il punto (0; 5).



b. Tracciamo la retta passante per il punto (0; 5) e parallela all'asse *x*.

Disegna i grafici delle rette rappresentate dalle seguenti equazioni.

124 $y = 4x - 3$

125 $y = -3$

126 $x = -3$

127 $y = 2x + 1$

128 $y = -x + 3$

129 $y = -1$

130 $y = -3x$

131 $y = -3x - 2$

132 $y = -5x + 7$

133 $y = \frac{1}{2}x + 1$

134 $y = 2x + 6$

135 $x = -5$

136 $y = -\frac{4}{5}x - 2$

137 $x = \frac{5}{3}$

138 $y = x + \frac{1}{4}$

139 $y = 2$

140 $y = -4x + 2$

141 $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Dalla forma esplicita alla forma implicita e viceversa

ESERCIZIO GUIDA

142 a) Data l'equazione della retta $y = \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}$, scriviamola in forma implicita.

b) Data la retta di equazione $3x - 4y - 1 = 0$, scriviamola in forma esplicita, specificando quali sono il coefficiente angolare e il termine noto.

a) La forma implicita dell'equazione di una retta è del tipo $ax + by + c = 0$, dove a, b, c sono coefficienti reali. Pertanto, l'equazione considerata è già in forma implicita se la scriviamo così:

$$\frac{3}{4}x - y - \frac{2}{3} = 0.$$

Tuttavia è preferibile avere coefficienti non frazionari. A questo proposito, «eliminiamo i denominatori», cioè moltiplichiamo l'equazione per il loro m.c.m., 12, e otteniamo:

$$9x - 12y - 8 = 0.$$

b) La forma esplicita dell'equazione di una retta è del tipo $y = mx + q$, quindi dobbiamo ricavare y dall'equazione

$3x - 4y - 1 = 0$:

$$-4y = -3x + 1 \quad \to \quad 4y = 3x - 1 \quad \to \quad y = \frac{3x-1}{4} \quad \to \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

Il coefficiente angolare è $\frac{3}{4}$ e il termine noto è $-\frac{1}{4}$.

Scrivi in forma implicita le seguenti equazioni.

143 $y = 4x + 8$; $\quad y = 1 - 2x$; $\quad y = -3x - 2$.

144 $y = x - \frac{1}{2}$; $\quad y = -\frac{4}{5}x + 3$; $\quad y = \frac{1}{4} - 2x$.

Scrivi in forma esplicita le seguenti equazioni, specificando quali sono il coefficiente angolare e il termine noto.

145 $3x - y + 3 = 0$; $\quad 4x + 2y = 0$; $\quad 5x + 2y = 0$.

146 $-2x + 5y - 1 = 0$; $\quad -y + 2 = 0$; $\quad -x + 3y = 0$.

Disegna i grafici delle rette rappresentate dalle seguenti equazioni, indicando per ciascuna il coefficiente angolare e il termine noto.

147 $x - 2y = 0$; $\quad 6x = 0$; $\quad 2y - 2 = 0$; $\quad y = 2x$.

148 $x = -3y$; $\quad \frac{5}{3}y = 0$; $\quad 2y = -4x + 3$; $\quad 4x - y + 1 = 0$.

149 $x + y - 3 = 0$; $\quad 2x + 1 = 0$; $\quad y = -4$; $\quad x = -\frac{1}{2}y + 1$.

150 $4 + 3y = 0$; $\quad x + 2y = 0$; $\quad 2x + 5y - 3 = 0$; $\quad 4x - 6 = 0$.

151 **ASSOCIA** a ogni retta il suo coefficiente angolare.

1. $2y - 3x + 1 = 0$
2. $6x + 4y - 5 = 0$
3. $y = -\frac{2}{3}x + 1$
4. $2x - 3y + 3 = 0$
5. $2y - 3 = 0$

A. $-\frac{3}{2}$

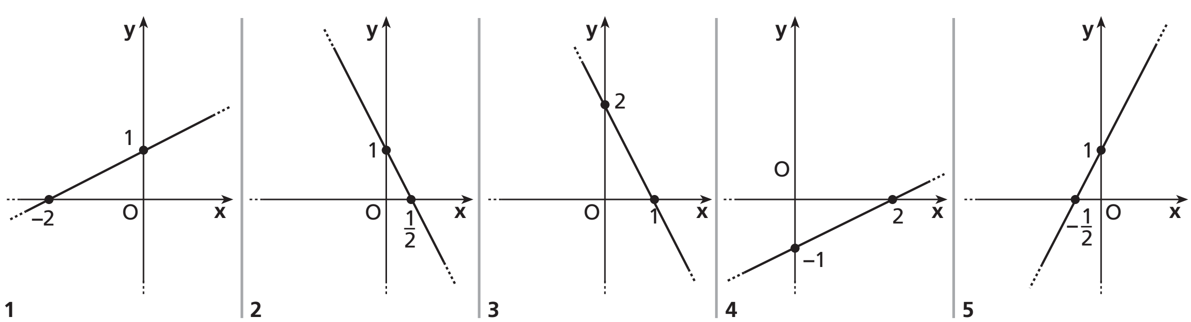
B. 0

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

E. $-\frac{2}{3}$

152 **ASSOCIA** a ogni retta la sua equazione.



A. $y = 2x + 1$ $\quad$ B. $y = -2x + 2$ $\quad$ C. $y = \frac{1}{2}x - 1$ $\quad$ D. $y = -2x + 1$ $\quad$ E. $y = \frac{1}{2}x + 1$

153 **COMPLETA** la seguente tabella, dove m indica il coefficiente angolare e q il termine noto della retta di equazione assegnata.

RETTA	m	q
$y = -5x + 2$		
$2x + y = 1$		
$x + 2y - 3 = 0$		
$3y = 4x + 1$		
$x = 6$		
$y - 4 = 0$		
$x = -6y$		

154 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $x = 0$ rappresenta l'asse delle ascisse. V F

b) La bisettrice del secondo e quarto quadrante ha equazione $y + x = 0$. V F

c) Il coefficiente angolare dell'asse y è nullo. V F

d) Se nell'equazione $y = mx + q$ è $m = 0$, allora si ottiene una retta parallela all'asse x. V F

L'appartenenza di un punto a una retta

ESERCIZIO GUIDA

155 È data la retta di equazione $3x - 6y + 2 = 0$.

a) Stabiliamo se i punti $A\left(-2; -\frac{2}{3}\right)$ e $B\left(1; \frac{1}{3}\right)$ vi appartengono.

b) Determiniamo le coordinate del punto C appartenente alla retta, sapendo che la sua ascissa è 3.

c) Determiniamo le coordinate del punto D appartenente alla retta, sapendo che la sua ordinata è -1.

a) Un punto appartiene a una retta se e solo se le sue coordinate $(x; y)$ soddisfano l'equazione della retta.
Sostituiamo le coordinate di A alle variabili x e y che compaiono nell'equazione:

$$3x - 6y + 2 = 0$$
$$3(-2) - 6\left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = 0$$
$$-6 + 4 + 2 = 0$$
$$0 = 0 \qquad \text{vero.}$$

Il punto A appartiene alla retta.
Sostituiamo ora le coordinate di B, ossia $\left(1; \frac{1}{3}\right)$:

$$3x - 6y + 2 = 0$$
$$3(1) - 6\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = 0$$
$$3 - 2 + 2 = 0$$
$$3 = 0 \qquad \text{falso.}$$

Il punto B non appartiene alla retta.

b) Sostituiamo a x il valore 3 nell'equazione della retta:

$$3x - 6y + 2 = 0$$
$$3 \cdot 3 - 6y + 2 = 0$$
$$9 - 6y + 2 = 0$$
$$11 - 6y = 0$$
$$6y = 11$$
$$y = \frac{11}{6}.$$

Il punto C ha coordinate: $\left(3; \frac{11}{6}\right)$.

c) Sostituiamo a y il valore -1 nell'equazione della retta:

$$3x - 6y + 2 = 0$$
$$3x - 6 \cdot (-1) + 2 = 0$$
$$3x + 6 + 2 = 0$$
$$3x + 8 = 0$$
$$x = -\frac{8}{3}.$$

Il punto D ha coordinate: $\left(-\frac{8}{3}; -1\right)$.

Per ogni retta assegnata stabilisci se i punti A e B le appartengono.

156 $y = 2x - 1$, $A\left(\frac{1}{2}; -3\right)$, $B(1; -1)$. [no]

157 $y = \frac{1}{5}x + 2$, $A(-5; 3)$, $B(10; 4)$. [A no; B sì]

158 $2x - 6y + 3 = 0$, $A\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$, $B\left(-1; \frac{1}{6}\right)$. [sì]

159 $8x + 4y - 5 = 0$, $A(1; -3)$, $B\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right)$. [no]

160 Nella retta $y = 1 - x$ determina il punto A di ascissa -1 e il punto B di ordinata 7. [$A(-1; 2)$, $B(-6; 7)$]

161 Determina nella retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$ il punto A di ascissa -2 e il punto B di ordinata $\frac{2}{3}$. $\left[A\left(-2; \frac{5}{3}\right), B\left(0; \frac{2}{3}\right)\right]$

162 Determina per ciascuna delle rette di equazioni $x - 4y + 7 = 0$, $2x + 6y - 7 = 0$ e $2y - x - 4 = 0$ il relativo punto di ordinata $\frac{3}{2}$. $\left[\left(-1; \frac{3}{2}\right) \text{ per ciascuna delle rette}\right]$

163 Trova la distanza tra i punti A e B della retta di equazione $x - 2y + 3 = 0$, sapendo che $x_A = 7$ e $y_B = 1$. [$4\sqrt{5}$]

164 Il punto P della retta di equazione $y = 3x - 1$ ha ordinata 5. Calcola la sua distanza dall'origine 0. [$\sqrt{29}$]

165 Trova per quale valore di k la retta di equazione $y = 4x + k$ passa per il punto $P(2; 5)$. [-3]

166 Determina k in modo che la retta di equazione $2kx + y - k + 1 = 0$ passi per il punto $A(-2; -3)$. $\left[-\frac{2}{5}\right]$

5. Il coefficiente angolare

Teoria a pag. 644

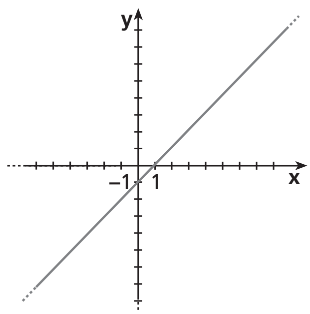
RIFLETTI SULLA TEORIA

167 **VERO O FALSO?**

a) Il coefficiente angolare di una retta parallela all'asse x è zero. V F
b) Il coefficiente angolare dipende dai punti della retta scelti per calcolarlo. V F
c) Il coefficiente angolare di una retta r del piano dipende dall'orientamento di r. V F
d) È possibile calcolare il coefficiente angolare di una qualsiasi retta del piano. V F
e) Due rette qualsiasi hanno sempre coefficiente angolare diverso. V F

168 **TEST** Quale affermazione sul coefficiente angolare della retta rappresentata in figura è vera?

A È positivo.
B È nullo.
C È negativo.
D Non esiste.
E Non si può determinare.



169 **TEST** Il coefficiente angolare della retta passante per $A(1;1)$ e $B(2;2)$ è:

A 0.
B 1.
C -1.
D 2.
E -2.

170 Considera l'equazione esplicita della retta

$y = mx + q$.

Qual è il significato geometrico del coefficiente m? Qual è il significato geometrico del termine noto q?

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

171 Determiniamo, quando è possibile, il coefficiente angolare delle rette AB, CD, EF, conoscendo le coordinate dei punti $A(-1; 3)$, $B(2; 4)$, $C(2; 3)$, $D(5; 3)$, $E(-2; 4)$, $F(-2; -1)$.

Calcoliamo $m_{(AB)}$, applicando la formula $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$:

$$m_{(AB)} = \frac{4-3}{2-(-1)} = \frac{1}{3}.$$

Calcoliamo $m_{(CD)}$, sempre mediante la stessa formula:

$$m_{(CD)} = \frac{3-3}{5-2} = \frac{0}{3} = 0;$$

la retta è parallela all'asse x e la sua equazione è $y = 3$.

Calcoliamo $m_{(EF)}$ allo stesso modo:

$$m_{(EF)} = \frac{-1-4}{-2-(-2)} = \frac{-5}{0}$$, ovvero il coefficiente angolare non esiste;

la retta è parallela all'asse y e la sua equazione è $x = -2$.

Determina, quando è possibile, il coefficiente angolare della retta passante per ogni coppia di punti indicata.

172 $A(1; 2)$, $B(4; 5)$.

173 $A(2; 4)$, $B(-4; 4)$.

174 $C(5; -3)$, $D(7; -2)$.

175 $A\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$.

176 $E(0; 2)$, $F(0; -2)$.

177 $A(4; 0)$, $B(-2; 4)$.

Nei seguenti esercizi sono dati: il coefficiente angolare di una retta, le coordinate di un suo punto, A, e l'ascissa, oppure l'ordinata, di un altro suo punto, B. Determina la coordinata mancante di B.

178 $m = 5$, $A(1; 2)$, $B(2; ?)$. $[y_B = 7]$

179 $m = 3$, $A(7; 2)$, $B(?; 8)$. $[x_B = 9]$

180 $m = 2$, $A(4; 1)$, $B(7; ?)$. $[y_B = 7]$

181 $m = -4$, $A(5; 9)$, $B(6; ?)$. $[y_B = 5]$

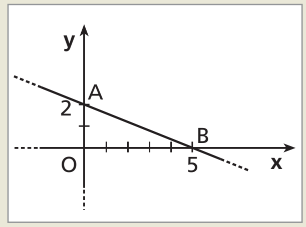
182 $m = -1$, $A(8; 4)$, $B(11; ?)$. $[y_B = 1]$

183 $m = 4$, $A(-7; -2)$, $B(?; 6)$. $[x_B = -5]$

Dal grafico all'equazione

ESERCIZIO GUIDA

184 Ricaviamo l'equazione della retta utilizzando le informazioni fornite dal grafico.



La retta non è parallela all'asse y, quindi la sua equazione è del tipo $y = mx + q$.

Calcoliamo *q*
La retta interseca l'asse y nel punto $A\,(0; 2)$, quindi $q = 2$.

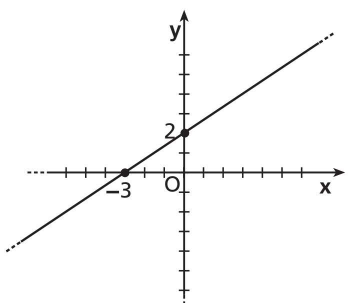
Calcoliamo *m*
Applichiamo la formula $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Abbiamo quindi $m = \dfrac{0-2}{5-0} = -\dfrac{2}{5}$.

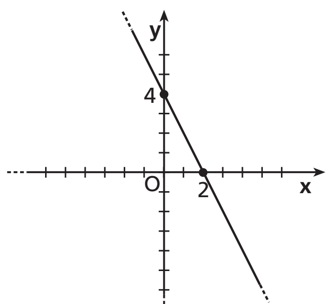
L'equazione della retta è $y = -\dfrac{2}{5}x + 2$.

In ogni esercizio scrivi l'equazione della retta utilizzando le informazioni fornite dal grafico.

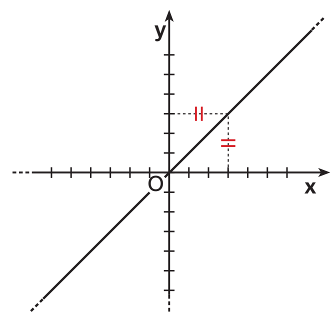
185



a

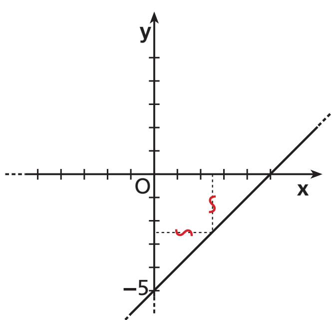


b

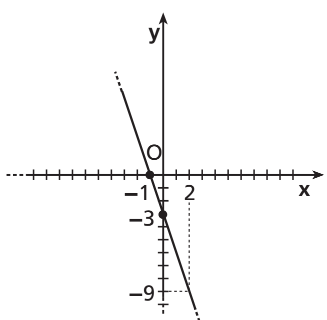


c

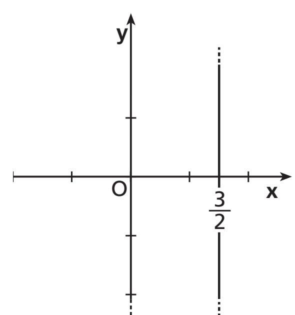
186



a

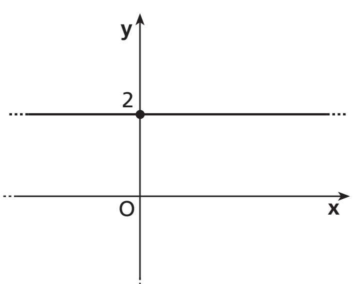


b

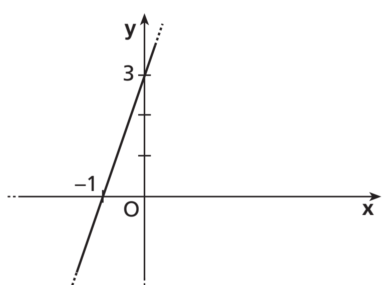


c

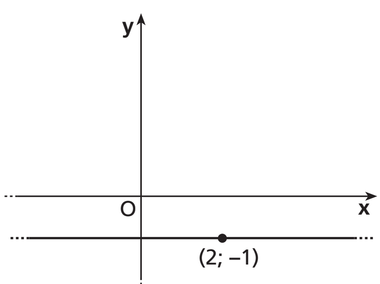
187



a

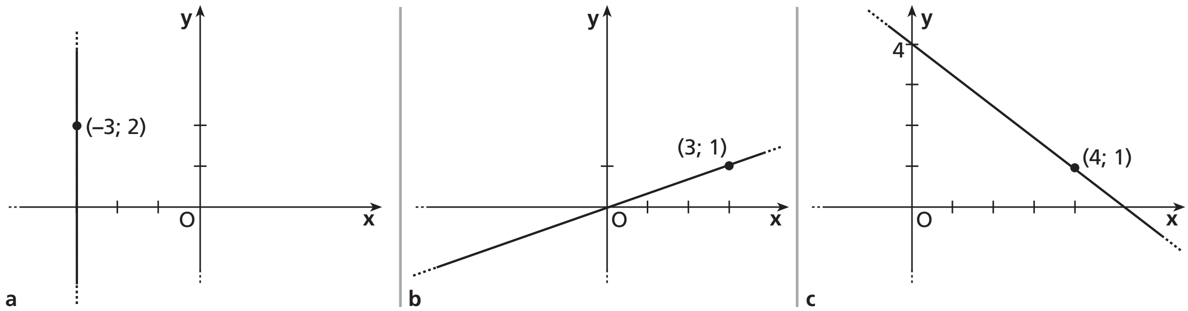


b



c

188



6. Le rette parallele e le rette perpendicolari

Teoria a pag. 646

RIFLETTI SULLA TEORIA

189 **VERO O FALSO?**

a) Le rette di equazione $x = 3$ e $y = -2$ sono fra loro perpendicolari. V F

b) Le rette di equazione $2x - y + 2 = 0$ e $-x + 2y - 2 = 0$ sono parallele. V F

c) I coefficienti angolari di due rette perpendicolari sono uno il reciproco dell'altro. V F

d) Il coefficiente angolare di tutte le rette perpendicolari alla retta $3x - 6y + 1 = 0$ è 2. V F

e) Due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare. V F

f) L'asse del segmento di estremi $A(-7; 3)$ e $B(1; 3)$ è una retta parallela all'asse y. V F

g) Le rette di equazione $y = -\frac{1}{3}x + 2$ e $y = (2k - 1)x - 1 = 0$ sono parallele per $k = 0$. V F

190 **TEST** Considera la retta r di equazione $3x - 2y + 5 = 0$. Quale fra le seguenti rette è parallela a r?

A $y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$

B $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x$

C $2x - 3y + 4 = 0$

D $3x + 2y + 1 = 0$

E $-3x + 2y + 6 = 0$

191 **TEST** Le seguenti rette sono tutte perpendicolari alla retta di equazione $2x - 4y + 1 = 0$, *tranne* una. Quale?

A $-\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y = 0$

B $4x + 2y - 5 = 0$

C $4x + 8y - 1 = 0$

D $-6x - 3y + 4 = 0$

E $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - 3 = 0$

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 12 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

192 Date le rette di equazione $y = 3x - 2$, $-x + y - 4 = 0$, $y = \frac{2}{3}x$, $x - y - 5 = 0$, $2x + 6y - 1 = 0$, stabiliamo quali sono parallele e quali perpendicolari.

Poiché due rette sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare e perpendicolari quando $m \cdot m' = -1 \left(\text{ovvero } m = -\frac{1}{m'}\right)$, occorre calcolare i coefficienti angolari delle rette date.

r: $y = 3x - 2$. Il coefficiente angolare è $m = 3$.

s: $-x + y - 4 = 0$. Il coefficiente angolare è $m = -\frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$.

t: $y = \frac{2}{3}x$. Il coefficiente angolare è $m = \frac{2}{3}$.

u: $x - y - 5 = 0$. Il coefficiente angolare è $m = 1$.

v: $2x + 6y - 1 = 0$. Il coefficiente angolare è $m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.

Conclusione:

- le rette r e v sono perpendicolari;
- le rette s e u sono parallele;
- la retta t non è perpendicolare o parallela a nessuna delle rette date.

Considera le rette di ciascuno dei seguenti gruppi, determina il loro coefficiente angolare e infine stabilisci quali sono parallele e quali perpendicolari.

193 $y = 2x - 3$, $y = -3x + 2$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = 2x + 6$.

194 $y = x + \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}x$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

195 $3x - 2y + 1 = 0$, $-6x + 4y + 7 = 0$, $6x - 4y - 3 = 0$.

196 $5x + 8y - 3 = 0$, $8x - 5y + 1 = 0$, $20x + 32y + 15 = 0$.

197 $y = -3x + 1$, $6x + 2y - 5 = 0$, $9y - 3x = 0$, $y = -3$.

198 $2x - y - 6 = 0$, $2y = 4x + 1$, $y = -\frac{1}{2}x - 6$, $2x - 6 = 0$.

199 Scrivi le equazioni di tre rette parallele all'asse x e di tre rette parallele all'asse y.

200 Scrivi le equazioni di due rette parallele alla retta di equazione $2y + 5 = 0$ e di due parallele alla retta di equazione $4x - 3 = 0$.

201 Scrivi le equazioni di due rette perpendicolari alla retta di equazione $y + 2 = 0$ e di due perpendicolari alla retta di equazione $x - 1 = 0$.

202 Scrivi le equazioni di due rette parallele alle seguenti rette:

a) $y = \frac{1}{3}x + 2$; b) $2x - y = 0$.

203 Scrivi le equazioni di due rette perpendicolari alle seguenti rette:

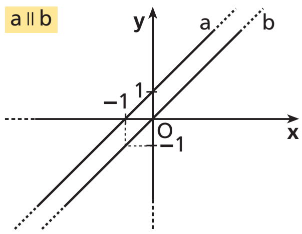
a) $y = \frac{3}{2}x - 5$; b) $4x + 3y - 1 = 0$.

204 Per ogni retta scrivi l'equazione di una retta a essa parallela e l'equazione di una retta a essa perpendicolare:

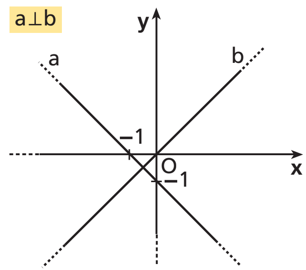
a) $y = x$; b) $y = \frac{1}{3}x - 3$; c) $y = -2x + 1$; d) $4x - 2y + 1 = 0$.

Scrivi le equazioni delle rette rappresentate in figura.

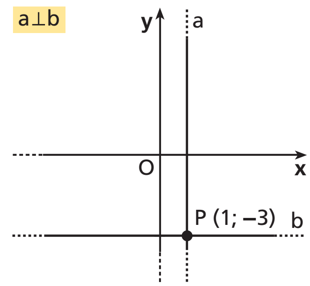
205



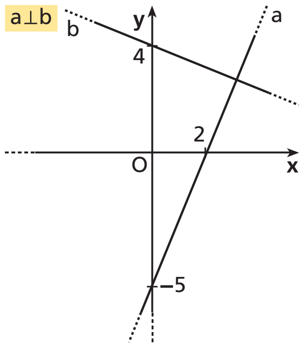
207



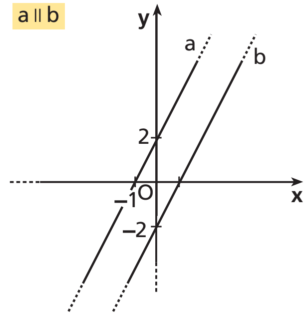
209



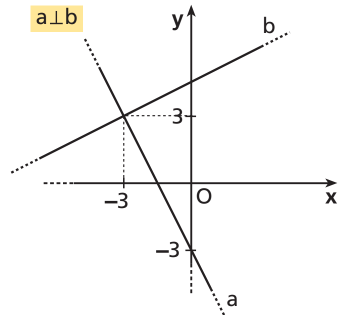
206



208



210



ESERCIZIO GUIDA

211 **1.** Determiniamo per quale valore di a le due rette di equazioni $2x - 3y + 1 = 0$ e $(a - 1)x + y = 2$ risultano parallele.

2. Determiniamo per quali valori di k la retta di equazione $(k - 2)x + 2ky + 3 = 0$ risulta rispettivamente:

a) parallela alla bisettrice del I e III quadrante;
b) parallela all'asse x;
c) perpendicolare alla retta di equazione $y = -\frac{1}{4}x + 2$;
d) parallela alla retta di equazione $x = -5$.

---

1. Scriviamo in forma esplicita entrambe le equazioni:

$$2x - 3y + 1 = 0 \qquad (a-1)x + y = 2$$
$$3y = 2x + 1 \qquad y = -(a-1)x + 2.$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Poiché due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare, dobbiamo imporre:

$$\frac{2}{3} = -(a-1).$$

Ricaviamo il valore di a:

$$\frac{2}{3} = -a + 1 \quad \rightarrow \quad a = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. Scriviamo in forma esplicita l'equazione della retta:

$$y = -\frac{k-2}{2k}x - \frac{3}{2k} \qquad \text{con } k \neq 0.$$

a) La bisettrice del I e III quadrante, di equazione $y = x$, ha $m = 1$. Imponiamo l'uguaglianza dei coefficienti angolari:

$$-\frac{(k-2)}{2k} = 1.$$

Ricaviamo il valore di k:

$$-k + 2 = 2k, \qquad \text{con } k \neq 0$$
$$-3k = -2 \quad \rightarrow \quad k = \frac{2}{3}.$$

b) Il coefficiente angolare deve essere nullo:

$$-\frac{(k-2)}{2k} = 0, \qquad \text{con } k \neq 0 \quad \rightarrow \quad k = 2.$$

c) Affinché le due rette siano perpendicolari dobbiamo imporre:

$$-\frac{(k-2)}{2k} = 4, \qquad \text{con } k \neq 0.$$

Ricaviamo il valore di k:

$$-k+2=8k, \qquad \text{con } k \neq 0$$

$$-9k=-2 \rightarrow k=\frac{2}{9}.$$

d) Poiché si richiede una retta parallela all'asse y, che ha equazione in cui manca il termine con y, imponiamo:

$$2k=0 \rightarrow k=0.$$

212 Determina per quale valore di a le due rette di equazioni

$$2y+4x-3=0 \quad \text{e} \quad (3+a)x+ay+1=0$$

risultano perpendicolari. [$a=-2$]

213 Stabilisci se la retta che passa per i punti $A(2;-7)$ e $B(-1;5)$ è parallela alla retta di equazione $y=-4x$. [sì]

214 Determina per quali valori di k la retta di equazione $kx+(k+1)y+2=0$ risulta rispettivamente:

a) parallela all'asse x;
b) parallela all'asse y;
c) parallela alla retta di equazione $x-2y=0$;
d) perpendicolare alla retta di equazione $4x-2y+1=0$.

[a) $k=0$; b) $k=-1$; c) $k=-\frac{1}{3}$; d) $k=1$]

215 Determina per quali valori di a la retta di equazione $(a+1)x+(2a-3)y+2a=0$ risulta rispettivamente:

a) parallela alla retta $3x-1=0$;
b) parallela alla retta $2y+5=0$;
c) perpendicolare alla retta $9x-3y+1=0$;
d) parallela alla retta $y=-x+2$;
e) parallela alla retta $y=2$;
f) perpendicolare alla retta $y=-1$;
g) perpendicolare alla retta $y=-\frac{1}{5}x+2$.

[a) $a=\frac{3}{2}$; b) $a=-1$; c) $a=-6$; d) $a=4$; e) $a=-1$; f) $a=\frac{3}{2}$; g) $a=\frac{14}{11}$]

216 Dati i punti $A(2;3k)$, $B(6;1)$, $C(8;2)$, determina per quale valore di k il segmento AB è perpendicolare al segmento BC. Per tale valore di k, trova l'area del triangolo ABC. [3; 10]

RIEPILOGO LE RETTE NEL PIANO CARTESIANO

TEST

217 La retta che passa per l'origine $O(0;0)$ e per i punti $P(2;3)$ e $Q(-4;-6)$ ha equazione:

A $y=-\frac{3}{2}x$.
B $y=\frac{3}{2}x$.
C $y=\frac{2}{3}x$.
D $y=-\frac{2}{3}x$.
E $y=2x$.

218 Per quali valori di k la retta passante per i punti $A(0;1)$ e $B(2;k-1)$ è parallela all'asse x?

A Per nessun valore di k.
B Per $k\neq 2$.
C Per $k=-\frac{1}{2}$.
D Per $k=2$.
E Per $k=-2$.

219 Il coefficiente angolare di una retta vale $-\frac{1}{3}$. Fra le seguenti coppie di punti, quale appartiene a tale retta?

A $A(10;-1)$ e $B(-1;-2)$
B $P(5;4)$ e $Q(2;5)$
C $R(4;5)$ e $S(5;2)$
D $M(0;1)$ e $N(2;7)$
E $C(5;4)$ e $D(-2;-5)$

220 La retta di equazione $3kx-2ky+k-1=0$ è perpendicolare alla retta di equazione

$$2x-3y+1=0$$

per:

A $k=1$.
B $k=\frac{3}{2}$.
C $k=0$.
D $\forall k\in\mathbb{R}^+$.
E nessun valore di k.

221 **VERO O FALSO?** La retta di equazione $2x - 4y + 1 = 0$:

a) passa per $A\left(2; -\frac{5}{4}\right)$. V F

b) è parallela alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x + 2$. V F

c) ha ordinata all'origine uguale a 1. V F

d) è perpendicolare alla retta di equazione $2x - y + 2 = 0$. V F

222 Trova per quale valore di a le due rette di equazioni $ax + 2y - 3 = 0$ e $(2a + 1)x + y - 1 = 0$ sono parallele. $\left[a = -\frac{2}{3}\right]$

223 Data la retta di equazione $x + y - k + 1 = 0$, trova per quale valore di k essa forma con gli assi cartesiani un triangolo rettangolo ABO con i cateti uguali a 5. $[k = 6 \vee k = -4]$

224 Determina per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $(3 - 2a)\,xy + 2x + (3a - 1)\,y + 1 = 0$ rappresenta una retta. $\left[a = \frac{3}{2}\right]$

225 Per quali valori di a e di b, con a e b numeri reali, il coefficiente angolare della retta passante per $A(a; 2a)$ e $B(b; 2b)$ è uguale a 2? $[a \neq b]$

226 Per quale valore di $k \neq -\frac{1}{2}$ la retta passante per $A(k; 0)$ e $B(3k + 1; 1)$ è inclinata di 135° rispetto alla semiretta positiva delle x? $[k = -1]$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E28

227 Trova per quale valore di k la retta r passante per $A(k - 3; 6)$ e $B(3; -2k + 2)$ è perpendicolare alla retta s passante per l'origine e per $C(-2; -1)$ e scrivi l'equazione della retta r.

228 Dopo aver scritto l'equazione della retta r passante per l'origine e per il punto $A(2; 4)$, stabilisci se il punto $B(-3; 6)$ appartiene a r. $[y = 2x;\ \text{no}]$

229 Determina il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A(3; 0)$ e $B(-2; 5)$ e stabilisci se tale retta risulta parallela alla retta di equazione $y = -x + 5$. $[m = -1;\ \text{sì}]$

230 Dopo aver determinato il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A(0; -2)$ e $B(2; 4)$, stabilisci se questa è perpendicolare alla retta di equazione $3x - y + 2 = 0$. $[m = 3;\ \text{no}]$

231 La retta r ha coefficiente angolare $m = -2$ e passa per il punto $A(4; 1)$. Calcola l'ordinata del punto appartenente a r avente ascissa $x = -3$. [15]

232 La retta r è parallela alla retta di equazione $y = 5x - 1$ e passa per il punto $A(-3; 0)$. Calcola l'ascissa del punto di r di ordinata 6. $\left[-\frac{9}{5}\right]$

233 Determina l'ordinata del punto di ascissa $x = -1$ appartenente alla retta passante per $A(2; 6)$ e perpendicolare alla retta di equazione $x + 3y + 2 = 0$. $[-3]$

234 Determina per quale valore di a la retta di equazione $(a+2)x+(3a+2)y+1=0$ risulta rispettivamente:

a) parallela alla retta di equazione $x=5$;

b) parallela alla retta di equazione $y=3$;

c) perpendicolare alla retta di equazione $y=x$;

d) perpendicolare alla retta di equazione $7x-y-1=0$;

e) parallela alla retta di equazione $3x+5y-2=0$. $\left[\text{a) } -\frac{2}{3}\text{; b) } -2\text{; c) } 0\text{; d) } -3\text{; e) } 1\right]$

235 Considera i seguenti enunciati aperti:

a) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = x+2 \wedge x \geq 0\}$

b) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = -2x-7 \wedge x > -5\}$

c) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = x-4 \wedge y > 1\}$

d) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = 5 \wedge x \leq 2\}$

e) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x = 1 \wedge y < 5\}$

f) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = -2x-3 \wedge y > 3\}$

Rappresenta nel piano cartesiano gli insiemi di verità degli enunciati e sottolinea la differenza fra quelli con la disuguaglianza forte e quelli con la disuguaglianza debole.

236 È dato il trapezio di vertici $A(1;-3)$, $B(1;1)$, $C(5;4)$, $D\left(\frac{31}{3};4\right)$. Dimostra per via geometrica e poi per via analitica che la congiungente i punti medi dei lati obliqui è parallela alle basi e congruente alla loro semisomma.

237 Rappresenta nel piano cartesiano la funzione $f\colon y = \begin{cases} -x+4 & \text{se } x > 2 \\ 2x-2 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

Determina l'equazione della retta perpendicolare al grafico di f, passante per il suo punto di ascissa -2.
$\left[y=-\frac{1}{2}x-7\right]$

238 Disegna i grafici delle funzioni $f\colon y=2x+1$ e $g\colon y=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$. Determina le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$ e verifica che i loro grafici sono paralleli tra loro e perpendicolari al grafico di f.
$\left[g \circ f\colon y=-\frac{1}{2}x-1, f \circ g\colon y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right]$

7. I fasci di rette

Teoria a pag. 649

RIFLETTI SULLA TEORIA

Il fascio improprio

239 In un fascio di rette improprio tutte le rette del fascio hanno la stessa pendenza?

240 COMPLETA La retta base del fascio improprio di equazione $y-2x-q=0$ ha equazione ......

241 COMPLETA Il fascio improprio individuato dalla retta di equazione $3x-y-5=0$ ha equazione ......

242 **TEST** Le seguenti equazioni rappresentano tutte un fascio improprio, *tranne* una. Quale?

A $x = t$
B $y = r$
C $x - 5y + k = 0$
D $y - mx - 3 - 2m = 0$
E $ax - ay - 1 = 0, a \neq 0$

243 Stabilisci se la retta di equazione $y = -\frac{2}{3}x + 1$ appartiene al fascio di rette improprio di equazione $2x + 3y + q = 0$.

Il fascio proprio

244 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $x = k$ rappresenta un fascio proprio di rette. V F
b) Le rette di un fascio proprio differiscono solo per l'ordinata all'origine. V F
c) Il fascio di equazione $(k + 2)x + y - 1 = 0$ non contiene alcuna retta parallela all'asse x. V F
d) Il fascio di rette di centro $P(x_0; y_0)$ ha equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$. V F

245 **TEST** Il centro del fascio proprio di rette $y - 0 = m(x - 3)$ è:

A $(0; 3)$.
B $(3; 0)$.
C $(-3; 0)$.
D $(0; -3)$.
E $(3; -2)$.

246 **TEST** L'equazione della retta r passante per il punto $A(-1; -2)$ e parallela alla retta di equazione $2y = 3x + 5$ è:

A $y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$.
B $y + 2 = 3(x + 1)$.
C $y + 2 = \frac{3}{2}(x + 1)$.
D $y + 2 = \frac{2}{3}(x + 1)$.
E $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$.

247 Per descrivere il fascio di tutte le rette passanti per l'origine, puoi usare l'equazione $ax + by = 0$, dove a e b sono numeri reali. Perché?

ESERCIZI

Il fascio improprio

Nel sito: ▶ 10 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

248 Scriviamo l'equazione del fascio improprio di rette contenente la retta di equazione $3x - y + 2 = 0$ e disegniamo tre rette qualsiasi del fascio.

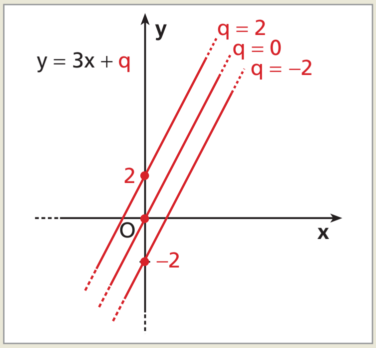
Scriviamo l'equazione della retta data in forma esplicita, per ricavare il suo coefficiente angolare m:

$$y = 3x + 2 \Rightarrow m = 3.$$

Il fascio di rette ha equazione $y = 3x + q$.

Disegniamo le rette corrispondenti a tre valori di q, per esempio $0, 2, -2$. Le rette corrispondenti hanno equazioni:

$$y = 3x;$$
$$y = 3x + 2;$$
$$y = 3x - 2.$$



249 Disegna cinque rette del fascio di equazione $y = 2x + 1 - k$.

250 Disegna cinque rette del fascio di equazione $y = -3x + k - 2$.

251 Scrivi l'equazione del fascio improprio contenente la retta di equazione $6x + 2y - 12 = 0$ e disegna tre rette del fascio. $[y = -3x + q]$

252 Ripeti l'esercizio precedente considerando la retta di equazione $8x - 4y + 10 = 0$. $[y = 2x + q]$

253 Scrivi l'equazione del fascio di rette parallele alla retta di equazione $y = -4x + 5$ e l'equazione del fascio di rette perpendicolari alle precedenti. Rappresenta alcune rette di ciascun fascio. $\left[y = -4x + q;\ y = \frac{1}{4}x + t\right]$

254 Ripeti l'esercizio precedente considerando la retta di equazione $2x + 4y + 1 = 0$. $\left[y = -\frac{1}{2}x + q;\ y = 2x + t\right]$

Il fascio proprio

Nel sito: ▶ 10 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

255 Scriviamo l'equazione del fascio proprio di rette passante per il punto $P\left(-5; \frac{1}{3}\right)$ e disegniamo le rette del fascio aventi rispettivamente coefficiente angolare $m = 0$, $m = 1$ e $m = -3$.

Per trovare l'equazione del fascio utilizziamo l'equazione $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Nel nostro caso $x_1 = -5$ e $y_1 = \frac{1}{3}$, perciò:

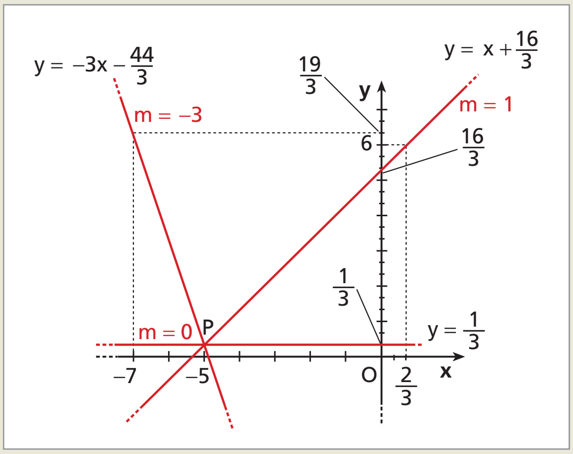
$$y - \frac{1}{3} = m(x - (-5))$$

$$y = m(x + 5) + \frac{1}{3},$$

a cui dobbiamo aggiungere la retta per P parallela all'asse y di equazione $x = -5$.

Per disegnare le rette del fascio aventi coefficiente angolare 0, 1 e -3, determiniamo prima le loro equazioni:

- se $m = 0$, $y = \frac{1}{3}$;
- se $m = 1$, $y = x + 5 + \frac{1}{3}$, ossia $y = x + \frac{16}{3}$;
- se $m = -3$, $y = -3(x + 5) + \frac{1}{3}$, ossia $y = -3x - 15 + \frac{1}{3}$, $y = -3x - \frac{44}{3}$.



Poiché le tre rette passano per P, per disegnarle basta determinare un solo altro punto su ciascuna.

Scrivi l'equazione del fascio di rette passante per ciascun punto indicato e disegna le rette aventi coefficiente angolare $m = 0$, $m = 5$, $m = -3$. (Per brevità, nelle soluzioni non indichiamo l'equazione della retta parallela all'asse y.)

256 $A(-1; 3)$ $[y = mx + m + 3]$

257 $O(0; 0)$ $[y = mx]$

258 $B(5; 8)$ $[y = mx - 5m + 8]$

259 $C(-2; -3)$ $[y = mx + 2m - 3]$

260 $D(6; -4)$ $[y = mx - 6m - 4]$

261 $E\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ $\left[y = mx - \frac{1}{2}m - 2\right]$

Il centro di un fascio

ESERCIZIO GUIDA

262 Dato il fascio proprio di rette di equazione $y - mx + 5m - 1 = 0$, determiniamo le coordinate del centro del fascio.

Dobbiamo trasformare l'equazione del fascio in un'equazione equivalente del tipo $y - y_1 = m(x - x_1)$.
Isoliamo nel secondo membro i termini contenenti m: $y - 1 = mx - 5m$.
Raccogliamo m: $y - 1 = m(x - 5)$.
Il centro del fascio ha coordinate $(5; 1)$.

Determina per ogni fascio proprio di rette il relativo centro.

263 $mx - y - m - 3 = 0$

264 $6mx - 6y - 10m + 3 = 0$

265 $2y - 3mx + 5m - 1 = 0$

266 $my + x - 1 = 0$

267 $y - 3mx - 1 = 0$

268 $4kx + 1 - 4y - k = 0$

Tra le seguenti equazioni indica quali rappresentano un fascio di rette proprio e quali un fascio improprio. Per ogni fascio proprio determina il relativo centro.

269 $y = 2mx + m$; $ky + 2kx - 1 = 0$.

270 $my + (m+1)x - 1 = 0$; $2my - mx - m = 1$.

271 $y - kx = 0$; $y + 2x - 2 = k$.

272 $y = -mx + m$; $2x + 3y - k = 0$.

273 $y = 2x + 4m$; $kx + 2y - k = 0$.

274 $y = -x + 2m$; $(k+1)y - 2x + k = 0$.

275 $y = -2mx + m + 1$; $2x - 5y + 2k = 0$.

276 VERO O FALSO?

a) L'equazione $y = k$ rappresenta un fascio improprio di rette. V F

b) L'equazione $mx + my - 1 = 0$ rappresenta un fascio proprio di rette. V F

c) Nel fascio di rette di equazione $y = (k+1)x + 3$ la retta parallela all'asse x si ottiene per $k = 1$. V F

d) L'equazione $y + 3 = m(x - 6)$ rappresenta tutte le rette passanti per il punto $P(6; -3)$. V F

Equazione della retta, passante per un punto, che soddisfa una condizione

Scrivi l'equazione della retta che passa per il punto indicato e ha coefficiente angolare *m* che soddisfa le condizioni date.

277 $A(-1; -3)$ e $m = -2$.

278 $B\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ e $m = -4$.

279 $C(1; 6)$ e $m = -\frac{1}{3}$.

280 $D(-2; 3)$ e con lo stesso coefficiente angolare della retta di equazione $4x - 2y - 3 = 0$.

281 $E\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ e con il coefficiente angolare della retta che passa per i punti $(0; 2)$ e $(3; 5)$.

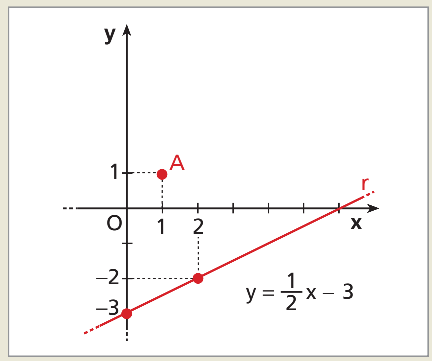
ESERCIZIO GUIDA

282 Determiniamo l'equazione della parallela e della perpendicolare alla retta r di equazione $2y - x + 6 = 0$, entrambe passanti per $A(1; 1)$.

Scriviamo in forma esplicita l'equazione di r e ricaviamo il coefficiente angolare m:

$$2y = x - 6 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - 3,$$

dunque $m = \frac{1}{2}$.



Scriviamo l'equazione del fascio di rette di centro A:

$$y - 1 = m(x - 1).$$

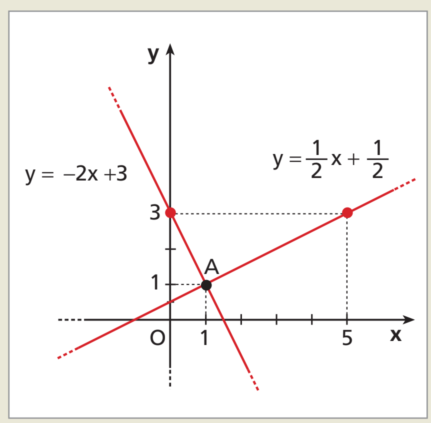
Fra tutte le rette del fascio, cerchiamo la **parallela** a r, cioè quella con il coefficiente angolare uguale a quello di r;

imponiamo, cioè, che sia $m = \frac{1}{2}$:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1).$$

Scriviamo l'equazione in forma esplicita:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$



Cerchiamo ora, fra le rette del fascio di centro A, la **perpendicolare** a r, cioè la retta che ha come coefficiente angolare l'antireciproco di quello della retta r; imponiamo cioè $m = -2$:

$$y - 1 = -2(x - 1).$$

Scriviamo l'equazione in forma esplicita:

$$y = -2x + 3.$$

Per ciascuna retta, scrivi l'equazione della parallela e della perpendicolare a essa, passanti per il punto A.

283 $y = \frac{1}{3}x$, $A(1; 1)$. $\left[y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}; y = -3x + 4\right]$

284 $y = \frac{7}{6}x$, $A(-3; -3)$. $\left[y = \frac{7}{6}x + \frac{1}{2}; 6x + 7y + 39 = 0\right]$

285 $y = -\frac{8}{9}x$, $A(-1; 5)$. $\left[y = -\frac{8}{9}x + \frac{37}{9}; 9x - 8y + 49 = 0\right]$

286 $y + 3x + 2 = 0$, $A(0; -2)$. $\left[y = -3x - 2; y = \frac{1}{3}x - 2\right]$

287 $6x - 3y - 2 = 0$, $A(-5; 2)$. $[y = 2x + 12; x + 2y + 1 = 0]$

288 $3x - y - 4 = 0$, $A(0; -4)$. $\left[y = 3x - 4; y = -\frac{1}{3}x - 4\right]$

289 $x + y = 0$, $A(1; -1)$. $[y = -x; y = x - 2]$

290 Scrivi l'equazione della retta che passa per l'origine degli assi ed è parallela alla retta di equazione:

$2x - 3y + 2 = 0$. $\left[y = \frac{2}{3}x\right]$

291 Determina il coefficiente angolare della retta r che passa per i punti $P(1; 4)$ e $Q(-2; 5)$. Scrivi poi l'equazione della retta passante per il punto $A(3; 2)$ e perpendicolare a r. $\left[-\frac{1}{3}; y = 3x - 7\right]$

292 Tra le rette parallele alla retta di equazione $2x - 8y + 1 = 0$, trova quella che passa per il punto $P(-4; 2)$. $\left[y = \frac{1}{4}x + 3\right]$

293 Dati i punti $A(-3; 2)$ e $B(6; -1)$, determina l'equazione dell'asse del segmento AB. (Suggerimento. L'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio.) $[y = 3x - 4]$

294 Scrivi l'equazione dell'asse del segmento di estremi $P(2; -5)$ e $Q(-8; 1)$. $\left[y = \frac{5}{3}x + 3\right]$

295 Tra le rette parallele a quella di equazione $2x - 6y + 5 = 0$, trova quella:

a) passante per l'origine;
b) passante per $P(2; -9)$;
c) che ha ordinata all'origine 6;
d) passante per il punto medio del segmento di estremi $A(1; -2)$ e $B(-3; 4)$.

$\left[\text{a) } y = \frac{1}{3}x; \text{ b) } y = \frac{1}{3}x - \frac{29}{3}; \text{ c) } y = \frac{1}{3}x + 6; \text{ d) } y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right]$

296 Tra le rette del fascio di centro $P(-2; 4)$, trova la retta:

a) passante per $A(1; -3)$;
b) passante per l'origine;
c) parallela all'asse x;
d) perpendicolare alla retta che passa per $B(0; 2)$ e $C(4; 0)$.

$\left[\text{a) } y = -\frac{7}{3}x - \frac{2}{3}; \text{ b) } y = -2x; \text{ c) } y = 4; \text{ d) } y = 2x + 8\right]$

297 Tra le rette del fascio di centro $P(1; 2)$, determina quella che:

a) passa per l'origine;
b) è parallela alla bisettrice del II e IV quadrante;
c) è perpendicolare alla bisettrice del I e III quadrante;
d) ha coefficiente angolare $\frac{2}{3}$;
e) è parallela all'asse x.

$\left[\text{a) } y = 2x; \text{ b) } y = -x + 3; \text{ c) } y = -x + 3; \text{ d) } y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}; \text{ e) } y = 2\right]$

298 Tra le rette del fascio di equazione $kx + (k+1)y + 2 = 0$, determina quella che:

a) è perpendicolare alla bisettrice del II e IV quadrante;
b) è parallela alla retta $4y - 3 = 0$;
c) è perpendicolare alla retta $3x - 6y + 1 = 0$;
d) è parallela all'asse y.

[a) $x - y - 4 = 0$; b) $y = -2$; c) $y = -2x + 2$; d) $x = 2$]

8. La retta passante per due punti

Teoria a pag. 651

RIFLETTI SULLA TEORIA

299 VERO O FALSO?

a) Se i punti A e B hanno la stessa ordinata y_0, la retta AB ha equazione $y = y_0$. V F
b) La retta di equazione $x = 2$ passa per $A(2; 0)$ e per $B(5; 2)$. V F
c) Per i punti $A(2; 3)$ e $B(-1; 2)$ passa una sola retta. V F
d) La formula $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ si può applicare solo se $x_2 \neq x_1$. V F
e) La retta passante per $A(1; 4)$ e $B(6; 4)$ è parallela all'asse delle ascisse. V F

300 TEST L'equazione della retta passante per i punti $A(1; 1)$ e $B(-1; -5)$ è:

A $\frac{y-1}{x-1} = \frac{-5-1}{1-1}$.
B $\frac{y-1}{x-1} = \frac{-1-1}{-5-1}$.
C $\frac{y-1}{-1-1} = \frac{x-1}{-5-1}$.
D $\frac{y-1}{x-1} = \frac{-5-1}{-1-1}$.
E $\frac{y+1}{x+1} = \frac{-5+1}{1+1}$.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 12 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

301 Scriviamo l'equazione della retta passante per i punti:

a) $A(-1; 3), B(-4; 2)$; b) $A(-5; 2), B\left(-5; \frac{1}{2}\right)$; c) $A(6; 3), B\left(-\frac{7}{2}; 3\right)$.

a) Essendo $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$, applichiamo la formula:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Sostituiamo a $(x_1; y_1)$ le coordinate di A e a $(x_2; y_2)$ le coordinate di B:

$$\frac{y - 3}{2 - 3} = \frac{x - (-1)}{(-4) - (-1)} \quad \rightarrow \quad -(y - 3) = -\frac{1}{3}(x + 1) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 3.$$

L'equazione richiesta è $y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$.

b) Poiché $x_A = x_B$, l'equazione della retta è $x = -5$.

c) Poiché $y_A = y_B$, l'equazione della retta è $y = 3$.

Scrivi l'equazione della retta passante per le seguenti coppie di punti.

302 $A(0; 3)$, $B(8; 0)$. $\left[y = -\frac{3}{8}x + 3\right]$

303 $A(-5; 0)$, $B(0; -2)$. $\left[y = -\frac{2}{5}x - 2\right]$

304 $A(-2; 5)$, $B(-2; -3)$. $[x = -2]$

305 $A(7; 0)$, $B(6; -4)$. $[y = 4x - 28]$

306 $A(0; 0)$, $B(1; 1)$. $[y = x]$

307 $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$, $B\left(5; \frac{3}{4}\right)$. $\left[y = \frac{3}{4}\right]$

Stabilisci se i punti delle seguenti terne sono allineati.

308 $A(1; 2)$, $B(0; 3)$, $C(4; 1)$.

309 $A(3; 0)$, $B(-3; 2)$, $C(6; 1)$.

310 $A(1; 5)$, $B(-2; -1)$, $C(0; 3)$.

311 **COMPLETA** la seguente tabella.

P	Q	Retta PQ
$(2; 0)$	$(0; 1)$	……………………
$(-1; 3)$	$(1; 0)$	……………………
$\left(\frac{3}{2}; -1\right)$	$(2; -1)$	……………………
$\left(-\frac{7}{2}; -4\right)$	$\left(-\frac{7}{2}; 3\right)$	……………………

312 Scrivi l'equazione della retta che passa per $A(2; 1)$ e $B(4; -1)$ e stabilisci se il punto $C(-3; 6)$ è allineato ai primi due. $[y = -x + 3; \text{sì}]$

313 **COMPLETA** la seguente tabella.

Punti P e Q	Equazione della retta r passante per P e Q	Coefficiente angolare di r	Ordinata all'origine di r	Equazione della retta parallela a r passante per O
$P(2; 4)$ $Q(-1; 2)$	…	…	…	…
$P(-3; \ldots)$ $Q(\ldots; 6)$	…	-1	4	…
$P\left(\frac{1}{2}; \ldots\right)$ $Q(\ldots; 2)$	…	…	1	$y = 4x$
$P(2; \ldots)$ $Q(\ldots; 4)$	$y + 3x - 1 = 0$	…	…	…

Problemi sulle rette

ESERCIZIO GUIDA

314 Scriviamo l'equazione della retta che soddisfa le due condizioni seguenti:
a) è parallela alla retta passante per $A(-2;\ ...)$

Determiniamo il coefficiente angolare della retta AB:

$$m_{(AB)} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \quad \rightarrow \quad m_{(AB)} = \frac{-2-2}{1-3} = \frac{-4}{-2} \quad \rightarrow \quad m_{(AB)} = 2.$$

Poiché la retta cercata è parallela alla retta AB, ha lo stesso coefficiente angolare:

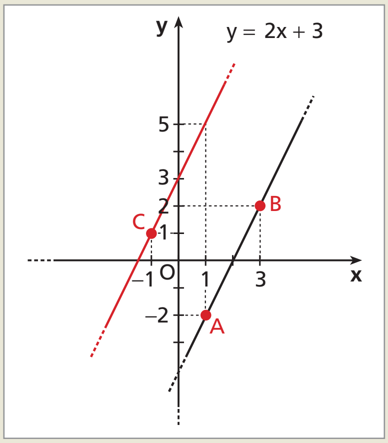
$$m = m_{(AB)} = 2.$$

Poiché la retta passa per C, otteniamo come sua equazione:

$$y - y_C = m(x - x_C) \quad \rightarrow \quad y - 1 = 2(x+1) \quad \rightarrow \quad y - 1 = 2x + 2 \quad \rightarrow \quad y = 2x + 3.$$

$y = 2x + 3$

x	y
–1	1
0	3
1	5



315 Scrivi l'equazione della retta che è perpendicolare alla retta passante per $A(-2;\ -5)$ e $B(3;\ 1)$ e che passa per il punto $C(2;\ -3)$. $[5x + 6y + 8 = 0]$

316 Fra le rette parallele alla retta r di equazione $x + 2y - 10 = 0$, determina quella che passa per il punto $P(4;\ -3)$. $[x + 2y + 2 = 0]$

317 Scrivi l'equazione della retta passante per i punti $A(-2;\ -2)$ e $B(6;\ 10)$. Determina su tale retta un punto C la cui ascissa è la metà dell'ordinata. $[3x - 2y + 2 = 0;\ C(2;\ 4)]$

318 Fra le rette perpendicolari alla retta s di equazione $3x - 6y + 1 = 0$, determina:
a) la retta a che passa per il punto $A(1;\ 3)$;
b) la retta b che passa per l'origine.
[a) $2x + y - 5 = 0$; b) $2x + y = 0$]

319 Fra le rette passanti per il punto $P(1;\ 3)$, determina:
a) l'equazione della retta che interseca l'asse x nel punto $A(2;\ 0)$;
b) l'equazione della retta che interseca l'asse y nel punto $B(0;\ -1)$.
[a) $y = -3x + 6$; b) $y = 4x - 1$]

320 Fra le rette passanti per il punto $Q(-2;\ 5)$, determina l'equazione della retta parallela alla retta passante per i punti $A(-1;\ 0)$ e $B(2;\ -4)$. $\left[y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}\right]$

321 Scrivi l'equazione della retta r passante per $A(-3;\ 0)$ e $B(1;\ 2)$. Determina l'equazione della retta parallela a r passante per $C(1;\ -4)$ e della retta perpendicolare a r passante per $D(6;\ 1)$.
$[x - 2y + 3 = 0;\ x - 2y - 9 = 0;\ 2x + y - 13 = 0]$

322 I punti $A(-3; 1)$, $B(6; 3)$ e $C(-1; -5)$ sono i vertici di un triangolo.
Determina:
a) le equazioni delle rette contenenti i tre lati;
b) le coordinate dei punti di intersezione della retta contenente BC con gli assi cartesiani.

$\left[\text{a) } 2x - 9y + 15 = 0, 8x - 7y - 27 = 0, 3x + y + 8 = 0; \text{ b) } \left(0; -\frac{27}{7}\right), \left(\frac{27}{8}; 0\right)\right]$

323 Dati la retta r di equazione

$$2x + y - 12 = 0$$

e il punto $A(-2; -1)$, scrivi:
a) l'equazione della retta parallela a r e passante per A;
b) l'equazione della retta perpendicolare a r e passante per A.

$[\text{a) } 2x + y + 5 = 0; \text{ b) } x - 2y = 0]$

324 Scrivi l'equazione della retta r perpendicolare alla retta s passante per i punti $A(5; 0)$ e $B(0; -3)$ e passante per l'origine degli assi. $[5x + 3y = 0]$

325 Scrivi le equazioni delle rette contenenti i lati del quadrilatero $ABCD$, con $A(-3; 3)$, $B(-3; -1)$, $C(2; -2)$, $D(2; 2)$. Verifica che il quadrilatero è un parallelogramma.
$[x + 3 = 0; x + 5y + 8 = 0; x = 2; x + 5y - 12 = 0]$

326 Disegna il triangolo di vertici $A(1; 4)$, $B(-2; 1)$ e $C(1; 1)$. Scrivi le equazioni delle mediane.
$[x + y - 2 = 0; 2x - y + 2 = 0; x - 2y + 4 = 0]$

327 Scrivi l'equazione della retta passante per i punti $A(3; 1)$ e $B(6; 5)$. Determina su tale retta un punto C la cui ascissa è $\frac{1}{4}$ dell'ordinata.

$\left[4x - 3y - 9 = 0; C\left(-\frac{9}{8}; -\frac{9}{2}\right)\right]$

9. La distanza di un punto da una retta

Teoria a pag. 652

RIFLETTI SULLA TEORIA

328 **VERO O FALSO?**

a) La distanza di un punto dall'asse y è l'ordinata del punto. V F
b) La distanza di un generico punto del piano da una retta è sempre un numero reale non negativo. V F
c) La distanza del punto $A(0; 2)$ dalla retta di equazione $x = 3$ vale 3. V F
d) Non si può determinare la distanza dell'origine O dalla retta di equazione $2x - 5y = 0$. V F
e) La distanza dell'origine O da una generica retta di equazione $ax + by + c = 0$ è $\frac{|c|}{a^2 + b^2}$. V F
f) La distanza del punto $A(1; 0)$ dalla retta di equazione $x - 3y + 1 = 0$ è negativa. V F

329 **TEST** La distanza del punto $P(x_0; y_0)$ dalla retta di equazione $y = mx + q$ vale:

A $\frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$.
B $\frac{|y_0 + (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$.
C $\frac{|y_0 - (mx_0 - q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$.
D $\frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m}}$.
E $\frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 - m^2}}$.

330 **TEST** La distanza del punto $P(0; 1)$ dalla retta di equazione $3x - y = 0$ è:

A $\frac{-1}{\sqrt{9 + 1}}$.
B $\frac{-1}{\sqrt{9 - 1}}$.
C $\frac{1}{\sqrt{9 - 1}}$.
D $\frac{+1}{\sqrt{9 + 1}}$.
E $\frac{|3 - 1|}{\sqrt{9 + 1}}$.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

331 Determiniamo la distanza del punto $P(-2; -3)$ dalla retta di equazione $6x + 8y = 0$.

La formula da applicare è:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Poiché abbiamo $P(-2; -3)$ e la retta di equazione $6x + 8y = 0$, otteniamo:

$$d = \frac{|6 \cdot (-2) + 8(-3)|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|-12 - 24|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{|-36|}{\sqrt{100}} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}.$$

Calcola la distanza dei punti assegnati dalle rette aventi l'equazione indicata a fianco.

332 $A(-2; 1)$, $3x - 4y - 1 = 0$. $\left[\frac{11}{5}\right]$

333 $A(2; 4)$, $y = \frac{4}{3}x + 1$. $\left[\frac{1}{5}\right]$

334 $A(0; 3)$, $6y = -8x + 3$. $\left[\frac{3}{2}\right]$

335 $A(1; 2)$, $y = \frac{5}{12}x - 2$. $\left[\frac{43}{13}\right]$

336 $A(-2; 3)$, $9x - 12y = 0$. $\left[\frac{18}{5}\right]$

337 $A(3; -1)$, $x = 4$. [1]

---

338 Calcola la distanza di $P(-1; 4)$ dalla retta che passa per i punti $A(5; 2)$ e $B\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. $\left[\frac{54}{13}\right]$

339 Calcola le distanze del punto $P(0; 1)$ dalla retta r di equazione $3 - x - 2y = 0$ e dalla retta s di equazione $y = 2x$. Cosa puoi affermare riguardo alla posizione di P rispetto alle due rette? Il punto P appartiene a una retta particolare. Quale? $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}};\right.$ alla bisettrice dell'angolo formato da r e $s\left.\right]$

340 Considera il triangolo ABC di vertici $A(-3; 3)$, $B(2; -1)$, $C(3; 1)$. Determina l'altezza relativa al lato AB e l'area del triangolo. $\left[\frac{14}{\sqrt{41}}; 7\right]$

341 Determina, con la formula della distanza, l'area del triangolo di vertici $A(2; 0)$, $B(-1; 3)$, $C(4; 4)$. [9]

RIEPILOGO LA RETTA

Nel sito: ▶ 11 esercizi di recupero

TEST

342 Nel fascio di rette di equazione
$(3k + 1)x - (1 - k)y + 5k = 0$,
quale valore di $k \in \mathbb{R}$ individua una retta r perpendicolare a $y = 3$?

- A Nessuno.
- B $-\frac{1}{3}$
- C 0
- D 1
- E -1

343 L'asse del segmento di estremi $P\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ e $Q\left(2; \frac{7}{2}\right)$ ha equazione:

- A $x = 2$.
- B $y = -6$.
- C $y = \frac{3}{2}$.
- D $x = \frac{3}{2}$.
- E $y = 2$.

344 Che cosa puoi affermare sul fascio di rette di equazione $(k-2)x+(2-k)y+k-3=0$?

A È un fascio proprio.
B È un fascio improprio di coefficiente angolare 1.
C È un fascio improprio di rette parallele a $y=-x$.
D Per $k=2$ una retta del fascio passa per l'origine.
E Contiene l'asse x.

345 Considera il triangolo ABC di vertici $A(1;0)$, $B(0;3)$ e $C(3;1)$. Della retta di equazione $x-2y-1=0$ fa parte:

A il lato AC.
B il lato BC.
C il lato AB.
D l'altezza AH.
E l'altezza CK.

346 La distanza del punto $P(3;5)$ da una retta r vale $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Qual è, fra le seguenti, l'equazione della retta r?

A $2x-y-3=0$
B $x-2y+3=0$
C $2x+y-3=0$
D $x+2y-3=0$
E $2x+y-1=0$

347 Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la distanza del punto $P(k;2k)$ dalla retta di equazione $2x-y=0$ vale $\sqrt{5}$?

A $k=\sqrt{5}$
B $k=5 \vee k=-5$
C $k=-\sqrt{5}$
D $k=\frac{1}{5}$
E Per nessun valore di k.

348 Verifica se i tre punti $A(1;2)$, $B(-3;4)$, $C(2;-1)$ sono allineati. [no]

349 Dati i punti $A(-1;2)$, $B(3;-1)$, $C(2;4)$, determina le equazioni dei lati del triangolo da essi individuato.
[$3x+4y-5=0$; $5x+y-14=0$; $2x-3y+8=0$]

350 Dato il triangolo ABC di vertici $A(-2;-4)$, $B(6;-2)$, $C(2;2)$, determina le equazioni delle sue mediane.
[$2x-3y-8=0$; $x+6y+6=0$; $x=2$]

351 Dato il triangolo ABC di vertici $A(1;2)$, $B(6;2)$, $C(3;8)$, determina le equazioni delle sue altezze.
[$x=3$; $x-2y+3=0$; $x+3y-12=0$]

352 Dato il triangolo ABC di vertici $A(2;2)$, $B(10;-2)$, $C(2;6)$, determina le equazioni degli assi dei lati.
[$2x-y-12=0$; $x-y-4=0$; $y=4$]

353 Determina l'equazione della retta passante per $A(-5;4)$ e $B(-5;-6)$ e l'equazione della perpendicolare condotta per $P(3;2)$ alla retta AB. Determina l'area del triangolo ABP.
[$x=-5$; $y=2$; area $=40$]

354 Data la retta di equazione

$$(k+1)x-2y+3=0,$$

determina k in modo che:

a) la retta sia parallela alla retta $y-1=0$;
b) la retta sia parallela alla retta $2x-y=0$;
c) la retta sia perpendicolare alla retta $x-3y=0$;
d) la retta passi per il punto $(2;-1)$.

$\left[\text{a) } k=-1; \text{ b) } k=3; \text{ c) } k=-7; \text{ d) } k=-\frac{7}{2}\right]$

355 Data la retta di equazione

$$x+(a+2)y-1=0, \text{ con } a \in \mathbb{R},$$

determina a in modo che la retta:

a) sia parallela all'asse x;
b) sia parallela all'asse y;
c) passi per l'origine.

[a) non esiste; b) $a=-2$; c) non esiste]

356 Dato il fascio di rette di equazione

$$kx-2ky+1=0,$$

a) stabilisci se si tratta di un fascio proprio o improprio;
b) determina la retta del fascio passante per $A(0;1)$.

[a) fascio improprio; b) $x-2y+2=0$]

357 È dato il quadrilatero $ABCD$ di vertici $A(4;3)$, $B(12;9)$, $C(13;16)$, $D(5;10)$.
Dopo aver verificato che $ABCD$ è un parallelogramma:

a) calcola l'altezza relativa al lato AB;
b) determina l'area del parallelogramma.

[a) 5; b) 50]

358 Scrivi le equazioni delle rette dei lati del triangolo di vertici $A(-3; 1)$, $B(4; -1)$, $C(4; 6)$ e determina la sua area.

$\left[2x + 7y - 1 = 0; x = 4; 5x - 7y + 22 = 0; \frac{49}{2}\right]$

359 Il triangolo isoscele ABC ha la base AB di estremi $A(-2; -1)$ e $B(6; 3)$ e il vertice C sull'asse y. Trova l'ordinata di C e l'area del triangolo.

$[y_C = 5; 20]$

360 Verifica che il quadrilatero di vertici $A(1; 1)$, $B(5; 4)$, $C(2; 8)$, $D(-2; 5)$ è un quadrato e trova le equazioni delle sue diagonali.

$[7x - y - 6 = 0; x + 7y - 33 = 0]$

361 Scrivi l'equazione della retta r passante per i punti $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ e $B\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$. Calcola le distanze di questi punti dalla retta s di equazione $4x - 3y + 2 = 0$. Come sono tra loro le rette r e s?

$\left[8x - 6y - 3 = 0; \frac{7}{10}; \text{parallele}\right]$

362 Considera il fascio di equazione:

$kx + (k-3)y - k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$.

Esistono punti in comune fra due rette del fascio? Perché?

363 Verifica che nel triangolo di vertici $A(-2; 2)$, $B(4; 3)$, $C(1; 7)$ il segmento che unisce i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e congruente a metà di questo.

364 Determina l'equazione della retta parallela a $3x - 2y + 5 = 0$ e passante per il punto medio del segmento di estremi $A(3; 7)$ e $B(-1; -3)$.

$[3x - 2y + 1 = 0]$

365 Dato il quadrilatero $ABCD$ di vertici $A(-1; 0)$, $B(0; -1)$, $C\left(\frac{1}{3}; 0\right)$, $D(0; 3)$, verifica che si tratta di un trapezio e determina la misura dell'altezza.

$\left[\frac{4}{\sqrt{10}}\right]$

366 Disegna sul piano cartesiano la retta passante per l'origine degli assi e per $A(3; 2)$. Calcola poi la distanza del punto $P(5; -1)$ da tale retta. $[\sqrt{13}]$

BRAVI SI DIVENTA ► E29

367 Determina l'equazione della retta r passante per i punti $A\left(-\frac{1}{2}; -3\right)$ e $B\left(2; \frac{9}{2}\right)$ e data la retta s di equazione $2kx - (k-1)y + 4(k-1) = 0$:

a) trova per quale valore di k le due rette sono parallele;
b) calcola la distanza tra le due rette.

368 Determina l'equazione della retta r passante per $P(1; 3)$ e avente per coefficiente angolare $m = 2$; calcola la misura dell'area del triangolo individuato dalla retta e dagli assi cartesiani.

$\left[2x - y - 1 = 0; \text{area} = \frac{1}{4}\right]$

369 Determina l'equazione della retta passante per $A(-5; 2)$ e $B(3; 2)$. Dopo aver verificato se il punto $P(5; -3)$ appartiene a tale retta, calcola la sua distanza dal punto A. $[y = 2; \sqrt{125}]$

370 Dopo aver determinato l'equazione della retta r passante per $A(2; -3)$ e $B(1; 4)$, trova le coordinate del punto P appartenente a essa di ascissa 3. Determina poi l'equazione della retta s passante per P e perpendicolare alla retta r.

$[7x + y - 11 = 0; P(3; -10); x - 7y - 73 = 0]$

371 Disegna sul piano cartesiano la retta r di equazione $y = 2x - 3$. Determina le coordinate del suo punto di intersezione A con l'asse delle ordinate. Trova le equazioni delle rette s e t passanti per A, con s perpendicolare a r e t parallela all'asse x.

$[A(0; -3); x + 2y + 6 = 0; y + 3 = 0]$

372 Dato il triangolo di vertici $A(-1; 2)$, $B(-9; 2)$, $C(-5; -1)$, verifica che è un triangolo isoscele e determina il suo perimetro, l'area e le coordinate del baricentro. (Suggerimento. Il baricentro è il punto d'incontro delle mediane e divide ogni mediana in due parti tali che una è doppia dell'altra.) $[18; 12; (-5; 1)]$

373 Determina l'equazione della retta parallela alla bisettrice del II e IV quadrante passante per $A(3; 1)$. Rappresenta poi la retta sul piano cartesiano determinando i punti B e C in cui interseca rispettivamente l'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate. Calcola area e perimetro del triangolo BOC.

$[x + y - 4 = 0; B(4; 0); C(0; 4); \text{area} = 8; \text{perimetro} = 8 + 4\sqrt{2}]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **MATEMATICA.BLU - Vol. 2** © Zanichelli 2012 *Algebra, Geometria, Probabilità*

374 Scrivi l'equazione della retta r, passante per $P(0; 4)$ parallela alla retta $2x - y + 1 = 0$, e calcola l'area del quadrilatero limitato dalle due rette e dagli assi cartesiani. $\left[2x - y + 4 = 0; \text{area} = \frac{15}{4}\right]$

375 Dato il fascio di rette $y = mx - 3m + 10$, calcola per quali valori di h, $k \in \mathbb{R}$, il punto $M(2k + 1; 3 - h)$ risulta medio di OA, con O origine degli assi e A centro del fascio. $\left[k = \frac{1}{4}; h = -2\right]$

376 Stabilisci per quale valore di m le rette r di equazione $mx - 2y + 3 = 0$ e s di equazione $y = \frac{2x - 1}{3}$ sono perpendicolari. Determina poi la distanza del punto P di ascissa 1, appartenente alla retta s, dalla retta r così trovata. $\left[m = -3; d = \frac{2}{3\sqrt{13}}\right]$

377 Verifica che il quadrilatero $ABCD$ di vertici $A(-3; 1)$, $B(2; 11)$, $C(0; 27)$, $D(-11; 5)$ è un trapezio rettangolo e determina la sua area. [160]

378 Data la retta r di equazione $ax + 2y + a + 1 = 0$, determina a in modo che:

a) r sia parallela all'asse x;
b) r sia parallela all'asse y;
c) r passi per l'origine;
d) r abbia coefficiente angolare positivo;
e) r sia parallela alla retta passante per $A(4; -5)$, $B(5; -7)$.

[a) $a = 0$; b) non esiste; c) $a = -1$; d) $a < 0$; e) $a = 4$]

379 Trova l'area del triangolo che ha per vertici i centri dei tre fasci di rette di equazioni:

$y = m(x - 1)$;
$kx - y + 3k - 1 = 0$;
$y = mx - 4m - 3$.

$\left[\text{area} = \frac{15}{2}\right]$

---

380 Dato il triangolo ABC di vertici $A(1; 1)$, $B(4; 7)$, $C(-5; 4)$:

a) verifica che è un triangolo rettangolo;
b) determina le equazioni dei lati;
c) determina l'ortocentro (non sono necessari calcoli, perché...);
d) determina il circocentro (ricorda che il circocentro del triangolo rettangolo è...).

$\left[\text{b) } 2x - y - 1 = 0, x - 3y + 17 = 0, x + 2y - 3 = 0; \text{c) } (1; 1); \text{d) } \left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)\right]$

381 Considera la retta passante per $A(1; 3)$ e $B(-1; -5)$. Determina su tale retta un punto C la cui ascissa è tripla dell'ordinata. Considera la retta parallela all'asse x passante per A e la retta parallela all'asse y passante per B. Determina il punto D di intersezione di queste due rette e calcola l'area del triangolo DAC.

$\left[C\left(\frac{3}{11}; \frac{1}{11}\right); D(-1; 3); \text{area} = \frac{32}{11}\right]$

382 Sono date due rette di equazioni $3x + 4y = 0$ e $5x - 12y = 0$. Come determini le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle due rette? Dopo averle determinate, osserva le loro equazioni. Come sono fra loro tali bisettrici?

$\left[y = 8x, y = -\frac{1}{8}x; \text{perpendicolari}\right]$

383 Dato il quadrilatero di vertici $A(1; 1)$, $B(9; 7)$, $C(12; 3)$, $D(0; -6)$, verifica che è un trapezio e che il segmento che congiunge i punti medi dei lati obliqui è parallelo alle due basi e congruente alla loro semisomma.

384 Verifica che il quadrilatero di vertici $A(-3; 0)$, $B(-1; 4)$, $C(5; 1)$, $D(3; -3)$ è un parallelogramma. Determina le misure dei lati e il punto di incontro delle diagonali.

$\left[\sqrt{20}; \sqrt{45}; \left(1; \frac{1}{2}\right)\right]$

LABORATORIO DI MATEMATICA

Le rette con Excel

ESERCITAZIONE GUIDATA

Determiniamo rispettivamente le equazioni delle rette s, passante per i punti M e N assegnati, e r, passante per un punto P noto e parallela alla retta s.
Troviamo i risultati supponendo che $M(-1; -1)$, $N(2; 5)$ e $P(3; 4)$.

Analizziamo il percorso risolutivo del problema

Osserviamo che la soluzione non esiste se i due punti M e N coincidono.
Abbiamo un caso particolare quando la retta s è parallela all'asse x e un caso limite quando P appartiene a s.
Determiniamo altrimenti l'equazione di s con la formula della retta passante per due punti e l'equazione di r con la formula della retta passante per un punto e parallela a una retta data.

Costruiamo il foglio corrispondente

- Apriamo il foglio elettronico Excel, inseriamo le didascalie per inserire i dati e leggere i risultati e mettiamo un bordo alle celle che richiedono i dati d'ingresso.

- Per ottenere l'equazione della retta s digitiamo rispettivamente:

```
= SE(B6 = B4; SE (D6 = D4; “non esiste”; “x =”); ”y =”);   in A11
= SE(B6 = B4; SE (D6 = D4; “”; B4); (D6-D4)/(B6-B4));      in B11
= SE(B6 = B4; “”;”* x +”);                                  in C11
= SE(B6 = B4; “”; - B11*B4 + D4).                           in D11
```

- Per ottenere l'equazione della retta r digitiamo rispettivamente:

```
= SE(B6 = B4; SE (D6 = D4; “non esiste”; “x =”); ”y =”);   in A13
= SE(B6 = B4; SE (D6 = D4; “”; B8); B11);                   in B13
= SE(B6 = B4; “”;”* x +”);                                  in C13
= SE(B6 = B4; “”; - B13*B8 + D8).                           in D13
```

- Immettiamo le coordinate dei punti M, N e P e vediamo il foglio di figura 1.

	A	B	C	D
1	Un problema sulle rette			
2				
3	Inserisci le coordinate di *M*			
4	*x* di *M* =	-1	*y* di M =	-1
5	Inserisci le coordinate di *N*			
6	*x* di *N* =	2	*y* di *N* =	5
7	Inserisci le coordinate di *P*			
8	*x* di *P* =	3	*y* di *P* =	4
9				
10	L'equazione della retta *s*			
11	y =	2	* x +	1
12	L'equazione della retta *r*			
13	y =	2	* x +	-2
14				

▲ Figura 1

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 8 esercitazioni in più

Esercitazioni

Risolvi i seguenti problemi in modo analogo a quello dell'esercitazione guidata.

1 Determina l'equazione di una retta r sapendo che passa per il punto medio M del segmento AB di estremi noti e per l'origine. Casi proposti:
a) $A(3; 2)$ e $B(-1; 4)$;
b) $A(3; -2)$ e $B(-3; 2)$;
c) $A(-3; 2)$ e $B(3; 4)$.
[a) $y = 3x$; b) la retta non esiste; c) $x = 0$]

2 Determina l'equazione della mediana AM del triangolo ABC, i cui vertici hanno coordinate note. Casi proposti:
a) $A(3; 1)$, $B(1; 5)$, $C(-2; 2)$;
b) $A(2; -3)$, $B(1; -5)$, $C(3; 5)$;
c) $A(2; 1)$, $B(1; 5)$, $C(2; 1)$.
[a) $AM: 5x + 7y - 22 = 0$; b) $AM: x - 2 = 0$; c) il triangolo non esiste]

Matematica per il cittadino

LA CORSA

Durante un allenamento di atletica, Marco corre per 4 minuti esatti partendo da fermo; il suo allenatore annota i seguenti dati.

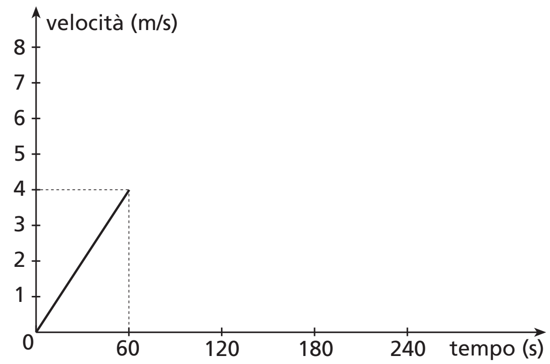
- 1° minuto: aumento uniforme della velocità, fino a 4 m/s; distanza percorsa: 120 m;
- 2° minuto: velocità costante;
- 3° minuto: diminuzione uniforme della velocità fino a 3 m/s; distanza percorsa nel minuto: 210 m;
- 4° minuto: aumento uniforme della velocità fino a 8 m/s; distanza percorsa nel minuto: 330 m.

1. Quale distanza totale ha percorso Marco?

2. Qual è stata la velocità media di Marco durante la corsa?

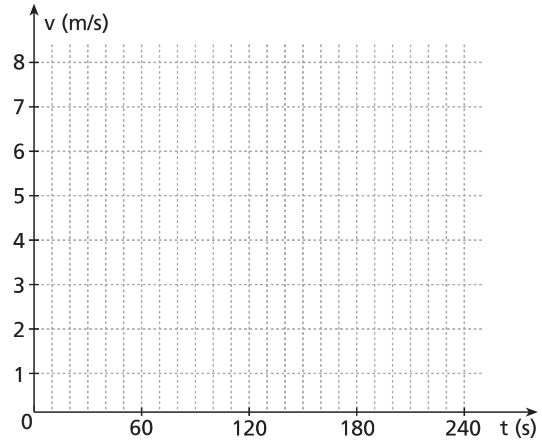
A 5 m/s B 37,5 m/s C 2,75 m/s D 3,75 m/s

3. Completa il seguente grafico velocità-tempo in base ai dati disponibili.



4. Utilizzando il grafico nella figura sopra, valuta per quanto tempo la velocità di Marco è stata superiore a 3,5 m/s. Esprimi tale risultato in percentuale rispetto al tempo totale della corsa con un'approssimazione alla prima cifra decimale.

5. In un'altra prova Marco, partendo da fermo, aumenta in modo uniforme la sua velocità e arriva a 6 m/s in quattro minuti. Roger parte un minuto dopo di lui e raggiunge la velocità di 7 m/s in tre minuti. Rappresenta nel seguente grafico le velocità dei due ragazzi e stabilisci, in modo approssimativo, dopo quanto tempo dalla sua partenza la velocità di Marco viene superata da quella di Roger.



Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ► questi test interattivi ► 30 test interattivi in più

1 Un punto $A(p; q)$ diverso dall'origine sta sulla bisettrice del II e IV quadrante. Quale delle seguenti relazioni è giusta?

A $|p| = |q|$ C $p = \frac{1}{q}$ E $|p| \neq |q|$

B $p = q$ D $p \cdot q > 0$

2 Il punto medio del segmento di estremi $A(-4; 3)$ e $B(2; 5)$ è:

A $M(6; 2)$. D $M(-2; 8)$.

B $M(3; 1)$. E $M(1; 4)$.

C $M(-1; 4)$.

3 Nella figura è rappresentato il triangolo di vertici $A(-2; 1)$, $B(3; 1)$ e $C(4; -2)$. L'altezza relativa al lato AB misura:

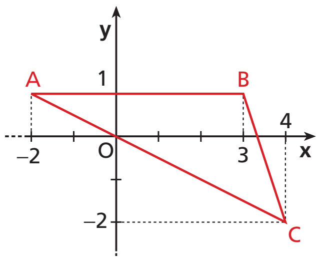
A 5

B 6

C -3

D 3

E 1



4 Una delle seguenti rette è parallela all'asse delle ordinate. Quale?

A $x = y$ C $y = -2$ E $1 - 3y = 0$

B $2x + 7 = 0$ D $x = -y$

5 L'equazione della retta passante per $A(3; -2)$ e $B(-7; -2)$ è:

A $3x - 7y = -2$. D $3x - 7y = 2$.

B $10x = 3$. E $y = -2$.

C $3x + 7y = -2$.

6 Quale fra le rette seguenti *non* è parallela alla retta di equazione $y = 2x - 3$?

A $2x - y - 1 = 0$ D $2x + y + 1 = 0$

B $4x - 2y + 3 = 0$ E $-6x + 3y = 0$

C $-4x + 2y - 5 = 0$

7 Quale fra le seguenti rette è perpendicolare alla retta di equazione $x + 3y - 1 = 0$?

A $y = 3x + 1$ D $x = 3y + 2$

B $y = -3x + 2$ E $y = -\frac{1}{3}x$

C $x = -3y + 1$

8 L'equazione $y = k$ rappresenta:

A un fascio improprio di rette, con coefficiente angolare k.

B il fascio proprio di rette passanti per il punto $P(0; k)$.

C un fascio improprio di rette con coefficiente angolare zero.

D la bisettrice del primo e terzo quadrante.

E l'asse x.

9 Soltanto una delle seguenti equazioni rappresenta la retta che passa per i punti $P(0; 2)$ e $Q(-4; 0)$. Quale?

A $y = 2x - 4$ D $x = -4$

B $y = 2$ E $y = -\frac{1}{2}x + 2$

C $y = \frac{1}{2}x + 2$

10 Il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A(-3; 2)$ e $B(1; 4)$ è:

A $\frac{1}{2}$. B 2. C -2. D $-\frac{1}{2}$. E $-\frac{1}{3}$.

11 Sono noti i vertici $A(-2; 2)$, $B(2; 1)$ e $C(6; 4)$ del parallelogramma $ABCD$. L'equazione del lato AD è:

A $x + 4y - 22 = 0$. D $x + 4y - 6 = 0$.

B $3x - 4y + 14 = 0$. E $4x + 3y - 4 = 0$.

C $3x - 4y - 2 = 0$.

12 L'equazione della retta r è:

$5x + y - 6 = 0$.

Quanto vale il coefficiente angolare di una retta perpendicolare a r?

A 5 B -5 C $\frac{1}{5}$ D $-\frac{1}{5}$ E -1

13 Se $a = b = c = 0$, l'equazione $ax + by + c = 0$ rappresenta:

A un punto.
B l'asse x.
C nessun ente geometrico.
D l'asse y.
E un piano.

14 L'equazione della retta passante per $A(3; 1)$ e parallela alla bisettrice del I e III quadrante è:

A $x - y - 3 = 0$
B $2x - y - 1 = 0$
C $x - y - 2 = 0$
D $x + y - 2 = 0$
E $y = x$

SPIEGA PERCHÉ

15 È dato il fascio proprio di equazione

$y - y_0 = m(x - x_0)$, con $m \in \mathbb{R}$.

A ogni valore di m corrisponde una determinata retta del piano. Vale anche il viceversa? Perché?

16 Si può associare una e una sola equazione lineare in due variabili $ax + by + c = 0$ a una qualunque retta del piano? Perché?

17 Se nell'equazione della retta $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, poni $c = 0$, ottieni l'equazione di una retta passante per l'origine. Perché?

18 Come puoi usare la formula della retta passante per due punti per verificare che i punti $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ e $C(x_3; y_3)$ sono allineati?

19 Sono date due rette r e s di equazioni rispettivamente $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ con a, b, c, a', b', c' numeri reali.
Qual è la condizione di parallelismo fra r e s? Perché?

20 Per descrivere il fascio di tutte le rette parallele alla bisettrice del primo e del terzo quadrante, puoi usare l'equazione

$x - y + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$.

Perché?

21 Perché non esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali le rette di equazione

$(2k - 1)x - (1 - 2k)y + 5k = 0$

sono parallele agli assi cartesiani?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

22 Verifica che il triangolo di vertici $A(2; 1)$, $B(6; 5)$ e $C(-2; 9)$ è un triangolo isoscele e calcolane l'area. [24]

23 Scrivi in forma esplicita le seguenti equazioni, specificando quali sono il coefficiente angolare e il termine noto, poi disegna il grafico delle tre rette.
a) $2x - 2y + 3 = 0$;
b) $3y + 5 = 0$;
c) $x - 3y + 9 = 0$.

24 Scrivi l'equazione della retta per $A(-2; -3)$ e $B(5; -3)$ e l'equazione della parallela condotta per $P\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ alla retta AB.

$\left[y = -3; y = \frac{3}{2}\right]$

25 Considera le rette le cui equazioni sono le seguenti e stabilisci quali sono parallele fra loro e quali perpendicolari.

$r: y = 2x - 1$; $s: x + 2y + 3 = 0$;
$t: 2x - y - 6 = 0$; $u: y = \frac{1}{2}x$; $v: y = \frac{1}{2}x - 3$.

$[r \perp s; r /\!/ t; s \perp t; u /\!/ v]$

26 Scrivi l'equazione del fascio improprio di rette contenente la retta di equazione $2x + 3y - 1 = 0$ e disegna tre rette qualsiasi del fascio.

$\left[y = -\frac{2}{3}x + q\right]$

27 Scrivi l'equazione del fascio di rette passante per il punto $P(-2; 3)$ e disegna le rette del fascio aventi coefficiente $m = -1$, $m = 1$, $m = 5$.

$[y = mx + 2m + 3]$

28 Determina l'equazione dell'asse del segmento AB con $A\left(-\frac{5}{2}; 4\right)$ e $B\left(2; -\frac{1}{2}\right)$. $[x - y + 2 = 0]$

29 Trova la distanza del punto $P(-3; 4)$ dalla retta AB con $A(-5; 2)$ e $B(3; -2)$. Determina l'equazione della retta perpendicolare ad AP condotta per P. $\left[d = \frac{6}{\sqrt{5}}; x + y - 1 = 0\right]$

30 Sono dati i seguenti enunciati aperti:

a) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = 2x + 1 \wedge 2 < x < 5\}$
b) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = -x + 2 \wedge -6 < x \leq 0\}$
c) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = 3 \wedge 0 \leq x \leq 5\}$
d) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x = 1 \wedge 1 \leq y < 7\}$

Rappresenta nel piano cartesiano gli insiemi di verità degli enunciati e sottolinea la differenza fra quelli con la disuguaglianza forte e quelli con la disuguaglianza debole. [segmenti]

31 Sono dati i seguenti enunciati aperti:

a) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = x - 1 \wedge 1 < x \leq 6\}$
b) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x - y + 1 = 0 \wedge -1 < x \leq 4\}$
c) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x - y = 1 \wedge 1 \leq x \leq 6\}$
d) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid x = y + 1 \wedge 0 < y \leq 5\}$
e) $\{x, y \in \mathbb{R} \mid y = x + 1 \wedge x > -1 \wedge y \leq 5\}$

Quali fra essi rappresentano gli stessi segmenti? [b) ed e) ; a) e d)]

32 Dato il triangolo di vertici $A(2; 2)$, $B(-1; -1)$ e $C(6; 0)$, scrivi le equazioni dei suoi lati. $\left[y = x; y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}; y = -\frac{1}{2}x + 3\right]$

33 Data la retta di equazione $(k - 1)x + 3y - 2 = 0$, determina k in modo che:

a) la retta sia parallela alla retta $y + 2 = 0$;
b) la retta sia parallela alla retta $x - 3y = 0$;
c) la retta sia perpendicolare alla retta $x + 2y = 0$;
d) la retta passi per $P(-2; 1)$.

$\left[\text{a) } k = 1; \text{b) } k = 0; \text{c) } k = -5; \text{d) } k = \frac{3}{2}\right]$

34 Dato il triangolo di vertici $A(-1; 2)$, $B(2; -3)$, $C(5; 4)$, scrivi l'equazione della mediana AM e verifica che il punto $G(2; 1)$ appartiene a tale retta e inoltre divide la mediana AM in due parti, una doppia dell'altra. $[x + 3y - 5 = 0]$

35 Data la retta di equazione $2x - 3y + 2 = 0$, scrivi le equazioni delle rette passanti per il punto $A(2; 3)$, l'una perpendicolare e l'altra parallela alla retta data. $[3x + 2y - 12 = 0; 2x - 3y + 5 = 0]$

36 Nel triangolo di vertici $A(2; 6)$, $B(5; 1)$, $C(-1; -2)$:

a) determina le lunghezze delle mediane e le equazioni delle rette a cui appartengono;
b) verifica che tali rette passano tutte per il punto $D\left(2; \frac{5}{3}\right)$.

$\left[\text{a) } \frac{13}{2}, x = 2; \frac{\sqrt{85}}{2}, 2x + 9y - 19 = 0; \frac{\sqrt{202}}{2}, 11x - 9y - 7 = 0\right]$

37 Il segmento AB ha come estremo il punto $A(-3; 4)$. Il punto medio di AB è $M(1; 1)$.
Determina:

a) le coordinate di B;
b) l'equazione della retta AB;
c) l'equazione dell'asse del segmento AB.

[a) $B(5; -2)$; b) $3x + 4y - 7 = 0$; c) $4x - 3y - 1 = 0$]

38 È dato il parallelogramma $ABCD$ con $A(3; 2)$, $B(7; 4)$ e $D(1; -6)$. Determina le equazioni dei lati del parallelogramma e le coordinate del vertice C. $[x - 2y + 1 = 0; 4x - y - 10 = 0; x - 2y - 13 = 0; 4x - y - 24 = 0; (5; -4)]$

39 In un triangolo di vertici $A(-2; 3)$, $B(3; 2)$, $C(1; -2)$ calcola:

a) la misura della mediana BM e dell'altezza BH;
b) l'equazione di BM e quella di BH;
c) l'area del triangolo.

$\left[\text{a) } \frac{\sqrt{58}}{2}, \frac{22}{\sqrt{34}}; \text{b) } 3x - 7y + 5 = 0, 3x - 5y + 1 = 0; \text{c) } 11\right]$

40 Determina le equazioni dei lati e l'area del triangolo ABC di vertici $A(-2; 1)$, $B(3; -3)$ e $C(2; 4)$.

$\left[AB)\ 4x + 5y + 3 = 0; AC)\ 3x - 4y + 10 = 0; BC)\ 7x + y - 18 = 0; \text{area} = \frac{31}{2}\right]$

41 Tra le rette del fascio di centro $M(6; -1)$ determina l'equazione della retta:

a) passante per l'origine;
b) parallela all'asse x;
c) passante per $P(2; -5)$;
d) parallela alla retta che passa per $A(-1; 2)$ e $B(4; 3)$.

$\left[\text{a) } y=-\frac{1}{6}x\text{; b) } y=-1\text{; c) } y=x-7\text{; d) } y=\frac{1}{5}x-\frac{11}{5}\right]$

42 Trova per quale valore di k le rette r e s di equazione, rispettivamente, $(k+1)x-3y+2=0$ e $y=\frac{4x+1}{3}$ sono:

a) parallele;
b) perpendicolari.

Determina per quale valore di k la retta r passa per il punto di ascissa 5 della retta s.

$\left[\text{a) } 3\text{; b) } -\frac{13}{4}; \frac{14}{5}\right]$

43 Dato il fascio di rette di equazione:

$2kx+2y+6-k=0,$

determina k in modo che:

a) la retta passi per $P\left(-\frac{3}{2}; 2\right)$;
b) la retta sia parallela all'asse x;
c) la retta sia perpendicolare all'asse x;
d) la retta sia parallela alla retta AB, con $A\left(1; \frac{2}{3}\right)$ e $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right)$.

$\left[\text{a) } k=\frac{5}{2}\text{; b) } k=0\text{; c)impossibile; d)} k=\frac{2}{3}\right]$

44 Scrivi l'equazione della retta AB con $A(-1; -3)$ e $B(5; 6)$.
Determina le coordinate di un punto P appartenente alla retta AB, avente l'ascissa uguale all'ordinata e l'equazione della retta r per P e perpendicolare ad AB.

$[3x-2y-3=0; P(3; 3); r\text{: } 2x+3y-15=0]$

45 È dato il triangolo di vertici $A(10; -11)$, $B(3; 13)$, $C(-6; 1)$.

a) Trova il perimetro.
b) Verifica se il triangolo è rettangolo.
c) Considera i punti medi M e N dei lati AC e CB e verifica che il segmento MN è metà del lato AB.
d) Verifica che le rette MN e AB sono parallele.

[a) 60]

46 Dato il quadrilatero di vertici $A(-1; 0)$, $B(0; -3)$, $C(6; -1)$, $D(1; 4)$, verifica che il poligono che si ottiene congiungendo i punti medi dei suoi lati è un parallelogramma.

47 Tra le rette parallele a quella di equazione $6x-8y+1=0$ trova quella che:

a) passa per $A(2; 0)$;
b) ha distanza dall'origine uguale a 3;
c) ha ordinata all'origine uguale a 3;
d) passa per il punto di ascissa 5 della retta di equazione $x-2y+3=0$.

[a) $3x-4y-6=0$; b) $3x-4y+15=0$, $3x-4y-15=0$; c) $3x-4y+12=0$; d) $3x-4y+1=0$]

48 Scrivi l'equazione della retta AB con $A(-3; -7)$ e $B(1; 5)$.
Determina le coordinate di un punto P appartenente alla retta AB e avente l'ordinata doppia dell'ascissa. Determina il punto Q di intersezione della retta AB con l'asse x e l'equazione della retta r condotta per Q e perpendicolare ad AB.

$\left[3x-y+2=0; P(-2; -4); Q\left(-\frac{2}{3}; 0\right); r\text{: } 3x+9y+2=0\right]$

49 Determina l'equazione della retta p condotta per $P(3; 2)$ e parallela alla retta AB con $A(-2; 4)$ e $B(-2; -3)$. Detti S il punto di intersezione della retta BP con l'asse x e K il piede della perpendicolare condotta da A alla retta p, calcola l'area del trapezio $ABPK$ e l'area dei triangoli ABS e APS.

$\left[x=3; \text{area}_{ABPK}=\frac{45}{2}; \text{area}_{ABS}=\frac{21}{2}; \text{area}_{APS}=7\right]$

50 Scrivi l'equazione della retta p condotta per $P(4; -1)$ e parallela alla retta AB con $A(-2; 2)$ e $B(7; 2)$. Detti R il punto di intersezione della retta AP con l'asse y e H il piede della perpendicolare condotta da B alla retta p, determina l'area del trapezio $ABHP$ e l'area dei triangoli ABR e BRP.

$\left[y=-1, \text{area}_{ABHP}=18; \text{area}_{ABR}=\frac{9}{2}; \text{area}_{RBP}=9\right]$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 7 esercizi in più

51 Una retta r del piano cartesiano passa per $A(-2; -1)$ e ha coefficiente angolare $m = -1$. La base AB del triangolo isoscele ABC appartiene a r; inoltre B appartiene all'asse delle ordinate e C all'asse delle ascisse. Determina i tre vertici del triangolo e la sua area.

[$A(-2; -1)$, $B(0; -3)$, $C(1; 0)$; area $= 4$]

52 Sono date due rette di equazioni: $ax + 2y - 1 = 0$ e $3x - by + 2 = 0$. Determina i valori reali da assegnare ai parametri a e b affinché esse risultino perpendicolari e si intersechino sull'asse y.

$\left[a = \frac{8}{3}; b = 4\right]$

53 Sono dati i punti $A(2; -2)$ e $B(6; -2)$. Stabilisci le coordinate del centro della circonferenza che ha AB come corda ed è tangente in A alla bisettrice del II e IV quadrante. [$C(4; 0)$]

54 TEST I vertici $ABCD$ di un quadrilatero hanno coordinate $A(0; 0)$, $B(h; 0)$, $C(h + k; l)$, $D(k; l)$, ove $h \neq 0$ e $l \neq 0$. Allora $ABCD$ è:

A un quadrato.
B un rettangolo.
C un parallelogramma.
D un rombo.
E un trapezio scaleno.

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede*, 1994)

55 Siano $M(3b - 2; -2)$ e $N(1; 1 - 3b)$ due punti del piano cartesiano con $b \in \mathbb{R}$. Come devono risultare i punti M e N affinché le rette OM e ON siano parallele? Che valore assume b in questi casi?

[se M, O e N allineati, allora $b = 0$; se $M \equiv N$, allora $b = 1$]

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 4 esercizi in più

56 Find the value of y if $(6; y)$ lies on the same line as $(4; 6)$ and $(0; 4)$.

(USA *Southeast Missouri State University: Math Field Day*, 2005)

57 Determine whether the lines

$$L_1: x - 2y = 8, \qquad L_2: 2x - y = 3$$

are parallel, perpendicular or neither parallel nor perpendicular.

58 H is the point of coordinates $(-2; 5)$ and K is the point $(-2; -5)$. Show that the x-axis bisects the line segment HK. T is the point such that the origin is the centre of HT. Find the coordinates of T. Verify that the y-axis bisects the line segment KT.

(IR *Leaving Certificate Examination*, *Ordinary Level*, 1992)

[$T(2; -5)$]

59 A square $ABCD$ is drawn with A on the y-axis, B on the x-axis, and C at the point $(13; 8)$. What is the area of the square?

(USA *Florida Atlantic University*, Stuyvesant Alumni Math Competition, 2000)

60 Find the equation of the line through $(2; 4)$ with slope 6.

(CAN *John Abbott College*, Final Exam, 2000)

61 P and Q are two points having coordinates $(-1; 3)$ and $(5; -1)$, respectively. Find:

a) slope of PQ;
b) K, the midpoint of PQ;
c) the equation of the line through K which is perpendicular to PQ. Test if this line contains the point $(4; 5)$.

(IR *Leaving Certificate Examination*, *Ordinary Level*, 1992)

$\left[\text{a) } -\frac{2}{3}; \text{ b) } K(2; 1); \text{ c) } y = 1{,}5x - 2; \text{ no}\right]$

GLOSSARY

axis: asse	**line**: retta	**slope**: pendenza
to bisect: dividere in due parti uguali	**midpoint**: punto medio	**square**: quadrato
to draw-drew-drawn: disegnare	**point**: punto	**through**: attraverso
to lie-lay-lain: giacere	**respectively**: rispettivamente	**whether**: se