

8 IL MOMENTO ANGOLARE

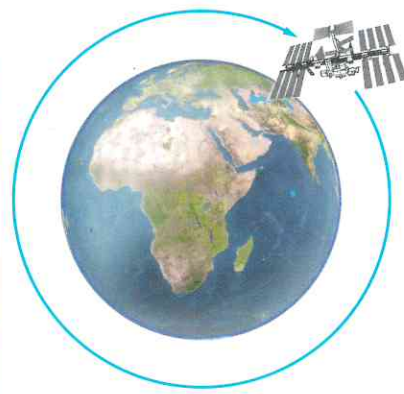
Fino a questo punto abbiamo esaminato soltanto moti di traslazione. Passiamo ora a esaminare i moti di rotazione.

► Se gli attriti sono trascurabili, una ruota di bicicletta messa in rotazione può continuare a girare a lungo attorno al proprio asse.



A

► Anche un satellite, in orbita circolare fuori dall'atmosfera terrestre, continua a muoversi per molti anni senza rallentare.



B

Per descrivere la rotazione di un punto materiale si introduce una nuova grandezza fisica, il **momento angolare** \vec{L} calcolato rispetto a un punto fisso O . Come vedremo nel prossimo paragrafo, la conservazione di questo vettore spiega come mai la ruota di una bicicletta e il satellite tendano a continuare nel loro moto di rotazione senza fermarsi.

Consideriamo una particella di massa m che si muove con velocità \vec{v} e che, a un certo istante, si trova nel punto P ; inoltre indichiamo con \vec{r} il vettore che congiunge O con P , cioè il vettore che dà la posizione di P rispetto al punto O (figura 13).

Possiamo dare la definizione che segue:

il **momento angolare** di una particella è uguale al prodotto vettoriale tra il vettore \vec{r} e la quantità di moto \vec{p} della particella:

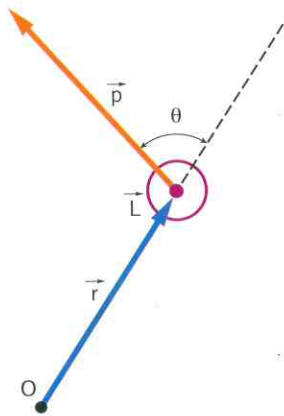
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (15)$$

Per la definizione di prodotto vettoriale, il momento angolare ha

- direzione perpendicolare al piano che contiene \vec{r} e \vec{p} ;
- verso dato dalla regola della mano destra, con \vec{r} rivolta come il pollice e \vec{p} che segue le altre dita (figura 14);
- modulo L dato dalle formule:

$$L = rp_{\perp} = r_{\perp}p = rp \sin \theta, \quad (16)$$

dove θ è l'angolo formato tra il vettore \vec{r} e il vettore \vec{p} .



Il punto O

Come succede per il momento di una forza, anche il momento angolare dipende dal punto O rispetto al quale lo si calcola.

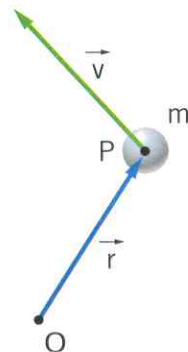


Figura 13 Vettori \vec{r} e \vec{v} che permettono di definire il momento angolare \vec{L} .

Direzione e verso di \vec{p}

Ricorda che $\vec{p} = m\vec{v}$. Quindi, la direzione e il verso di \vec{p} sono quelli di \vec{v} .

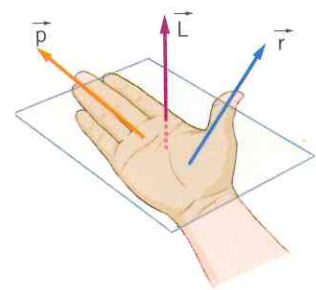


Figura 14 Regola della mano destra per il verso del momento angolare \vec{L} .

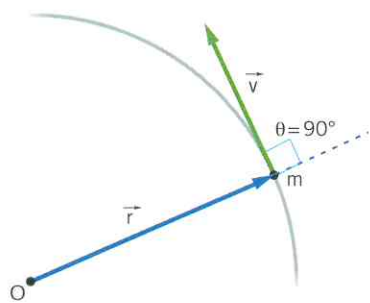


Figura 15 Nel moto circolare il vettore \vec{r} è perpendicolare al vettore $\vec{p} = m\vec{v}$.

Forze interne

Gli effetti delle forze interne al sistema si annullano a due a due. Quindi esse non possono variare il momento angolare totale.

Momento della forza

Abbiamo introdotto il momento della forza nel paragrafo 7 del capitolo «Applicazioni dei principi della dinamica».

Il caso più semplice è quello in cui l'angolo θ è retto.

Ciò accade, per esempio, se si calcola il momento angolare di un punto materiale che si muove di moto circolare, scegliendo come punto O il centro della traiettoria circolare (figura 15).

Visto che vale la relazione $\sin 90^\circ = 1$, nel caso $\theta = 90^\circ$ la formula (16) diviene:

$$L = rp \sin \theta = rp = rmv. \quad (17)$$

Il momento angolare di un sistema fisico è dato dalla somma vettoriale dei momenti angolari dei corpi che compongono il sistema, calcolati rispetto allo stesso punto O .

Le dimensioni fisiche del momento angolare sono $[m \cdot l^2 \cdot t^{-1}]$: quindi, nel Sistema Internazionale esso si misura in $(kg \cdot m^2/s)$.

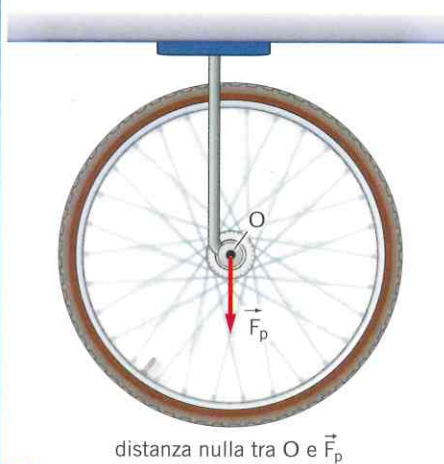
9 CONSERVAZIONE E VARIAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Consideriamo un sistema fisico e calcoliamo il suo momento angolare rispetto a un punto O fisso.

Il momento angolare di un sistema di corpi si conserva nel tempo se è nullo il momento totale delle *forze esterne* che agiscono su di esso.

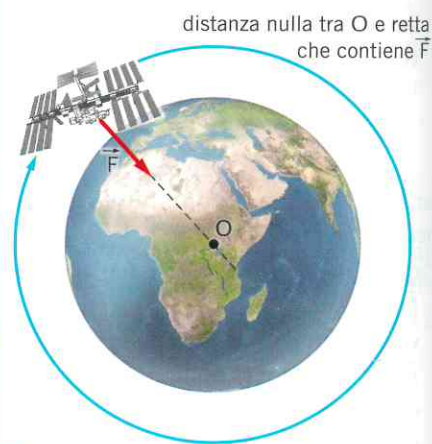
Nei due esempi considerati prima i momenti delle forze esterne sono nulli e quindi i momenti angolari si conservano. Infatti:

► sulla ruota di bicicletta agisce la sua forza-peso \vec{F}_p , applicata nel suo baricentro, che è proprio nel centro di rotazione. Quindi il braccio del momento della forza-peso è nullo e il momento è nullo.



A

► Sul satellite agisce la forza di gravità \vec{F} dovuta al pianeta. Anche in questo caso il braccio di \vec{F} , rispetto al centro di rotazione è uguale a zero e, quindi, il suo momento è nullo.



B

Il momento angolare è un vettore, come la quantità di moto. E, come in quel caso, quando esso si conserva non rimane invariato solo il suo modulo, ma sono costanti anche la sua direzione e il suo verso.

Così, se gli attriti sono trascurabili, la ruota di bicicletta in rotazione non solo tende a ruotare sempre con la stessa frequenza, ma anche nello stesso piano: così il vettore momento angolare, che ha la direzione dell'asse di rotazione della ruota, rimane invariato.

Questa proprietà entra in gioco quando si viaggia in bicicletta: come si è appena detto, la conservazione del momento angolare tende a fare ruotare le ruote sempre nello stesso piano (figura 16) e ciò aiuta a rimanere in equilibrio. In particolare, il modulo di \vec{L} aumenta se aumenta la velocità di rotazione delle ruote: ciò contribuisce a spiegare come mai è più facile mantenere la bicicletta in equilibrio se si procede ad alta velocità.



Figura 16 La conservazione di \vec{L} aiuta a rimanere in equilibrio la bicicletta.

Il **giroscopio** è uno strumento concettualmente simile a una trottola o alla ruota di bicicletta. Una volta posto in rotazione, per la conservazione del momento angolare esso tende a mantenere sempre lo stesso asse di rotazione rispetto a un sistema di riferimento inerziale, quale il sistema ICR.

Grazie a queste proprietà è utilizzato da molto tempo per la realizzazione di strumenti di controllo della navigazione marina e aerea; per esempio: la *giro-bussola* indica in ogni istante il Nord vero (non quello magnetico, indicato dalla bussola ad ago magnetico) proprio grazie a un giroscopio posto al suo interno.



Come altro esempio, il **monopattino elettrico** permette al suo occupante di rimanere in equilibrio senza difficoltà su due ruote affiancate. Ciò è reso possibile dal fatto che all'interno del dispositivo si trovano almeno tre giroscopi elettronici (uno per ogni asse cartesiano dello spazio tridimensionale) che controllano l'orientazione spaziale del monopattino; una serie di processori interroga 100 volte al secondo i giroscopi e invia ai motori elettrici delle ruote le istruzioni di movimento che servono a mantenere l'equilibrio.



La variazione del momento angolare

Se sul sistema agisce un momento della forza \vec{M} per un intervallo di tempo Δt , la variazione del suo momento angolare è data dalla formula:

$$\Delta \vec{L} = \vec{M} \Delta t \quad (18)$$

variazione del momento angolare ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$) momento torcente ($\text{N} \cdot \text{m}$) intervallo di tempo (s)

La formula (18) è l'analogo, per le rotazioni, del teorema dell'impulso che vale per i moti di traslazione. Essa stabilisce che il momento angolare di un sistema meccanico si conserva (cioè si ha $\Delta \vec{L} = 0$) quando è nullo il momento delle forze esterne applicate al sistema. Altrimenti la variazione di \vec{L} è uguale al prodotto $\vec{M} \Delta t$.

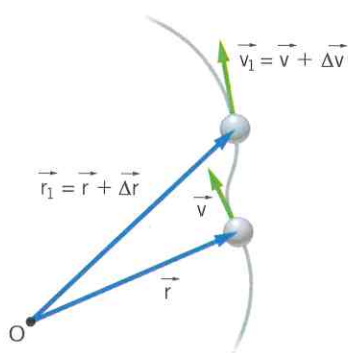


Figura 17 Notazioni utilizzate nella dimostrazione (Δt grande).

Dimostrazione della variazione del momento angolare

Dimostriamo la formula (18) nel caso di una particella puntiforme di massa m , che si muove sotto l'effetto di una forza \vec{F} ; fissiamo un punto O (che è anche l'origine delle posizioni), rispetto al quale calcoliamo i momenti.

A un certo istante t la posizione del punto materiale (rispetto a O) è data dal vettore \vec{r} e la sua velocità è \vec{v} . Dopo un intervallo di tempo Δt infinitamente piccolo, la nuova posizione del punto materiale è descritta dal vettore $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ e la sua nuova velocità è $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ (figura 17).

Dalla cinematica sappiamo che le due quantità $\Delta\vec{r}$ e $\Delta\vec{v}$ sono date dalle formule

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t \quad \text{e} \quad \Delta\vec{v} = \vec{a}\Delta t. \quad (19)$$

Visto che Δt è infinitamente piccolo, anche $\Delta\vec{r}$ e $\Delta\vec{v}$ hanno la stessa proprietà. Vediamo quanto vale $\Delta\vec{L}$:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{L} &= \vec{L}_1 - \vec{L} = m\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 - m\vec{r} \times \vec{v} = \\ &= m[(\vec{r} + \Delta\vec{r}) \times (\vec{v} + \Delta\vec{v}) - \vec{r} \times \vec{v}] = \\ &= m(\cancel{\vec{r} \times \vec{v}} + \Delta\vec{r} \times \vec{v} + \vec{r} \times \Delta\vec{v} + \Delta\vec{r} \times \Delta\vec{v} - \cancel{\vec{r} \times \vec{v}}) = \\ &= m(\Delta\vec{r} \times \vec{v} + \vec{r} \times \Delta\vec{v}). \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo tralasciato il termine $\Delta\vec{r} \times \Delta\vec{v}$, che è trascurabile visto che è il prodotto di due quantità molto piccole.

Ora sostituiamo le formule (19) nell'ultima espressione trovata e otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{L} &= m(\Delta t \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} \Delta t) = \vec{r} \times (m\vec{a}) \Delta t = \\ &= (\vec{r} \times \vec{F}) \Delta t = \vec{M} \Delta t \end{aligned}$$

che è proprio la formula (18) nel caso di una particella singola.

Prodotto nullo

Ricorda che il prodotto vettoriale tra due vettori paralleli è nullo, quindi lo è anche quello tra due vettori \vec{v} uguali.

IN LABORATORIO

Momento di inerzia e accelerazione angolare

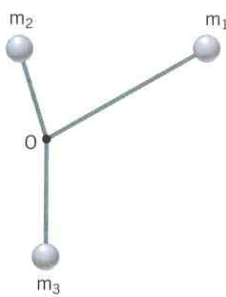
- Video (2 minuti)
- Test (3 domande)



10 IL MOMENTO D'INERZIA

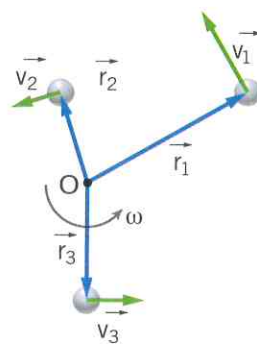
Vogliamo ora calcolare il momento angolare di un corpo rigido. Iniziamo a studiare un caso particolare, cioè:

- un corpo rigido molto semplice, composto da tre particelle di masse m_1 , m_2 e m_3 collegate rigidamente al centro di rotazione O mediante tre sbarrette di massa trascurabile.



A

- Le lunghezze delle aste sono r_1 , r_2 , r_3 e indichiamo con \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \vec{v}_3 i vettori velocità delle tre particelle. Il corpo rigido ruota attorno a O con velocità angolare ω .



B

Il momento angolare totale \vec{L} del corpo rigido rispetto a O è la somma dei momenti delle tre particelle:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3.$$

Questi hanno tutti la stessa direzione (perpendicolare al foglio del libro) e lo stesso verso (uscente dal foglio). Quindi il modulo è semplicemente la somma dei tre moduli:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 + m_3 v_3 r_3.$$

Semplifichiamo questa espressione usando la velocità angolare ω e scrivendo, per esempio, $v_1 = \omega r_1$; allora il primo addendo diventa $m_1 v_1 r_1 = m_1 (\omega r_1) r_1 = m_1 r_1^2 \omega$. Ripetendo la stessa operazione per v_2 e v_3 otteniamo

$$L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + m_3 r_3^2 \omega = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) \omega.$$

La quantità che compare tra parentesi nell'ultima espressione viene chiamata **momento d'inerzia** I del corpo rigido. In questo modo il modulo del momento angolare può essere scritto come

$$L = I\omega. \quad (20)$$

Dalla definizione, l'unità di misura del momento d'inerzia è $(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$.

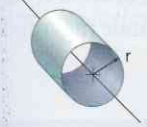
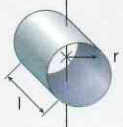
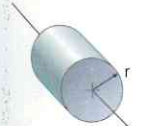
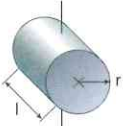

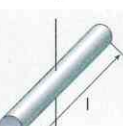
Il momento d'inerzia di un corpo rigido formato da n masse puntiformi è definito come

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + \dots + m_n r_n^2. \quad (21)$$

In generale, per calcolare il momento d'inerzia di un solido è necessario fare crescere n all'infinito; in questo caso le masse m_1, m_2, \dots diventano infinitamente piccole. Inoltre, quando il corpo rigido è tridimensionale (e non planare come quello formato da tre sole masse) i valori r_1, r_2, \dots sono le distanze delle singole masse dall'asse di rotazione.

La tabella seguente mostra i valori dei momenti d'inerzia calcolati, sulla base della definizione (21), per diversi corpi rigidi di forma comune.

Momenti di inerzia di alcuni corpi rigidi

	Guscio cilindrico, rispetto all'asse $I = mr^2$	Guscio cilindrico, rispetto a un diametro passante per il centro $I = \frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{12} ml^2$	
	Cilindro pieno, rispetto all'asse $I = \frac{1}{2} mr^2$	Cilindro pieno, rispetto a un diametro passante per il centro $I = \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} ml^2$	
	Sfera piena, rispetto a un diametro $I = \frac{2}{5} mr^2$	Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per il suo centro $I = \frac{1}{12} ml^2$	

Angolo retto

Ricorda che il modulo dei singoli momenti angolari è semplicemente uguale al prodotto del valore di r per il corrispondente valore di p perché i vettori \vec{r} sono perpendicolari ai rispettivi vettori $\vec{p} = m\vec{v}$.

Analogia formale

La formula (20), valida per la rotazione di un corpo rigido, è analoga alla formula $p = mv$, che riguarda il moto traslatorio di un punto materiale. L'analisi si ottiene scambiando contemporaneamente p con L , m con I e v con ω .

ESEMPIO

Un cilindro pieno ha una massa $m = 1,3 \text{ kg}$ e un raggio $r = 5,4 \text{ cm}$.

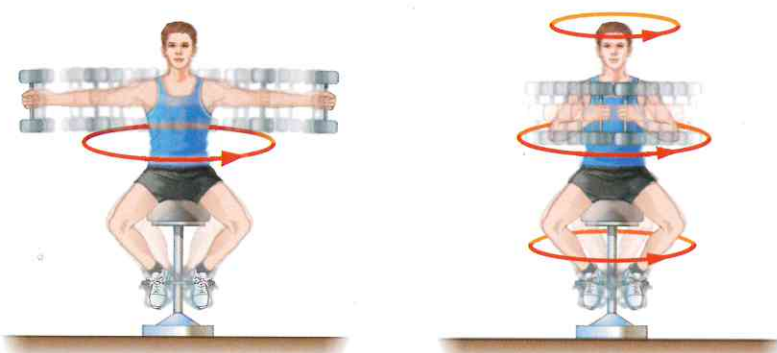
- Calcola il momento d'inerzia I_c del cilindro, rispetto al suo asse di simmetria.

Il raggio del cilindro è $r = 5,4 \text{ cm} = 0,054 \text{ m}$. Dalla tabella precedente possiamo allora calcolare il valore di I_c come:

$$I_c = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \times (1,3 \text{ kg}) \times (0,054 \text{ m})^2 = 1,9 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

A parità di massa totale il momento d'inerzia aumenta al crescere delle dimensioni del corpo e diminuisce se esso diventa più piccolo.

Un ragazzo che regge due manubri da palestra con le braccia aperte siede su uno sgabello che può girare attorno a un asse e ruota con una certa velocità angolare. Se stringe le braccia, il suo momento angolare $I\omega$ si conserva (se gli attriti sono trascurabili). Visto che I diminuisce, la velocità angolare ω aumenta.



In questo esempio, il momento angolare si conserva perché il momento totale delle forze esterne rispetto a qualsiasi punto è nullo. In assenza di attriti, una volta messo in rotazione lo sgabello le uniche forze esterne che agiscono sul ragazzo sono la sua forza-peso e la reazione vincolare dello sgabello, che si annullano.

Questo fenomeno è molto sfruttato negli sport: i **pattinatori** aumentano la propria velocità di rotazione attorno a un asse verticale avvicinando le braccia al corpo. I **tuffatori** riescono a ruotare velocemente attorno a un asse orizzontale raggruppando il corpo il più possibile.



L'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione

L'introduzione del momento d'inerzia permette di esprimere in maniera semplice l'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione.

Torniamo di nuovo al corpo rigido composto di tre particelle: se esso ruota con velocità angolare, la sua energia cinetica è

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 \omega^2 + m_2 r_2^2 \omega^2 + m_3 r_3^2 \omega^2) = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2) \omega^2.$$

Nell'ultimo passaggio, la quantità che si trova tra parentesi è il momento d'inerzia del corpo rigido. Il calcolo può essere ripetuto nella stessa maniera qualunque sia il numero di punti che formano il corpo, ottenendo sempre il risultato

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (22)$$

La dinamica rotazionale di un corpo rigido

Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno a un asse con velocità angolare ω e che, quindi, ha un momento angolare $L = I\omega$. Esso viene poi accelerato fino alla velocità angolare ω_1 , per cui il suo momento angolare diventa $L_1 = I\omega_1$. La variazione ΔL del momento angolare del corpo vale:

$$\Delta L = L_1 - L = I\omega_1 - I\omega = I(\omega_1 - \omega) = I\Delta\omega.$$

Dalla formula (18) possiamo allora scrivere:

$$\Delta L = I\Delta\omega = M\Delta t.$$

Dividendo per Δt gli ultimi due termini della formula precedente otteniamo, infine:

$$M = I \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (23)$$

Il rapporto $\Delta\omega/\Delta t$ esprime la rapidità con cui varia la velocità angolare del corpo ed è chiamato **accelerazione angolare** α :

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (24)$$

variazione della velocità angolare (rad/s)

accelerazione angolare (rad/s²)

intervallo di tempo (s)

Avendo introdotto questa grandezza, la formula (23) può essere riscritta come

$$M = I\alpha. \quad (25)$$

Questa formula, che descrive la rotazione di un corpo rigido, è analoga dalla legge $F = ma$ che vale per un moto di traslazione.

Traslazione e rotazione

La formula (22) per l'energia cinetica di rotazione ha la stessa forma matematica dell'energia cinetica di traslazione

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

se si scambia, come visto in precedenza, m con I e v con ω .

APPROFONDIMENTO

Giro della morte per un corpo che rotola (2 pagine)



lo ponticello di massa trascurabile e lungo $l = 1,0$ m che possa consentire all'uomo di portarsi sulla banchina. Quando l'uomo è arrivato all'estremo vicino al molo la barca si è spostata.

► Di quanto si è spostata la barca? (Trascura tutti gli attriti.)

► La lunghezza del ponticello è sufficiente?

[2,0 m: no]

8 IL MOMENTO ANGOLARE

30 ★ La pallina di una roulette di raggio 30 cm ha massa 2,0 g. Il croupier lancia la pallina facendola ruotare alla velocità di 25 cm/s in senso antiorario.

► Quali sono la direzione, il verso e il modulo del suo momento angolare calcolato rispetto al centro della roulette?

[$1,5 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, direzione perpendicolare al tavolo, verso l'alto]

31 ★★ Un corridore di massa 80 kg si allena su una pista circolare di raggio 30 m con una velocità di intensità 5,0 m/s.

► Quanto vale il suo momento angolare?

[$1,2 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$]

32 ★★ La massa di Marte è 10 volte più piccola di quella della Terra e Marte dista 1,5 volte di più dal Sole. Inoltre la velocità di rivoluzione di Marte attorno al Sole è 0,82 volte quella della Terra.

► Quanto vale il rapporto fra il modulo del momento angolare di rivoluzione della Terra e quello di Marte?

[8,1]

33 ★★ Una giostra è formata da un braccio lungo 3,0 m con un seggiolino a ogni estremità. Sui seggiolini siedono due bambini di massa rispettivamente 30 kg e 45 kg. La giostra ruota alla velocità di 2,5 m/s.

► Quanto vale l'intensità del momento angolare del sistema calcolato rispetto al centro della giostra?

[$2,8 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$]

9 CONSERVAZIONE E VARIAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

34 ★★ Durante l'orbita intorno al Sole, la cometa di Halley passa da una distanza massima dal Sole di $5,2 \times 10^{12}$ m a una distanza minima di $8,8 \times 10^{10}$ m. La sua velocità nel punto più lontano dal Sole vale $9,1 \times 10^2$ m/s.

► Quanto vale la velocità della cometa nel punto più vicino al Sole, se il momento angolare della cometa si conserva?

[$5,4 \times 10^4$ m/s]

35 ★★ Le caratteristiche del moto della Terra intorno al Sole sono: all'afelio, la sua velocità di rivoluzione è $v_A = 2,93 \times 10^4$ m/s, la distanza dal Sole è $r_A = 1,52 \times 10^{11}$ m; al perielio la velocità di rivoluzione è $v_P = 3,03 \times 10^4$ m/s, la distanza dal Sole è $r_P = 1,47 \times 10^{11}$ m. La massa della Terra è $5,98 \times 10^{24}$ kg.

► Verifica che il moto di rivoluzione della Terra soddisfa la legge di conservazione del momento angolare.

36 ★★ Un lanciatore di martello scaglia il suo attrezzo dopo averlo fatto accelerare per 2,0 s applicandogli una forza media di 35 N tangente alla traiettoria. Il martello pesa 2,5 kg e la catena a cui è attaccato è lunga 90 cm.

► Quanto vale il momento angolare del martello al momento del lancio?

[$63 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$]

37 ★★ Un papà spinge il figlio di 14 kg seduto su un seggiolino di una giostra circolare per 0,90 s. La giostra ha un diametro di 2,6 m. Dopo la spinta il bimbo ruota compiendo 1 giro in 6,0 s.

► Qual è stata la forza media esercitata dal papà sul figlio? (Trascura la massa della giostra.)

[21 N]

38 ★★ Agli estremi di un'asticella lunga $2l$ e di massa trascurabile sono saldate due sferette di massa m . Il sistema è poggiato su un piano orizzontale privo d'attrito. Le due sfere ruotano intorno a un asse perpendicolare al centro dell'asticella. La ve-

ESERCIZI

locità angolare iniziale costante è ω . Un meccanismo interno all'asticella porta la distanza tra le due masse a $l/4$.

► Ricava il rapporto tra le energie cinetiche del sistema prima e dopo l'intervento del meccanismo. (Trascura l'attrito dell'aria.)

$$[K_f/K_i = 16]$$

10 IL MOMENTO D'INERZIA

39 Una catapulta giocattolo lancia in aria una pallina solida di plastica di massa 50 g. Il braccio della catapulta è lungo 25 cm. La pallina al momento del lancio ha un'accelerazione angolare di 100 rad/s^2 .

► Quanto vale il momento torcente sulla pallina? (Trascura il momento d'inerzia del braccio della catapulta.)

$$[0,31 \text{ N} \cdot \text{m}]$$

40 Una pattinatrice ferma in mezzo alla pista sta facendo una piroetta con le braccia distese e con velocità angolare di intensità $3,50 \text{ rad/s}$. A un certo punto raccoglie le braccia intorno al corpo: così facendo, il suo momento d'inerzia si dimezza.

► Quanto vale ora il modulo della sua velocità angolare?

$$[7,00 \text{ rad/s}]$$

41 Un disco di massa 1,60 kg e raggio 15 cm sta rotolando senza scivolare. La sua velocità vale $2,00 \text{ m/s}$. Calcola:

► il momento d'inerzia del disco.

► la sua velocità angolare.

► la sua energia cinetica di rotazione.

$$[0,018 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; 13 \text{ rad/s}; 1,6 \text{ J}]$$

42 Un disk jockey appoggia un dito sul bordo esterno di un disco omogeneo e lo fa ruotare spingendolo per $0,10 \text{ s}$. Il disco ha un raggio di 16 cm e una massa di 160 g. Dopo la spinta il disco ruota con velocità angolare $\omega = 3,14 \text{ rad/s}$.

► Calcola il momento di inerzia del disco rispetto al suo asse.

► Qual è stata la forza media esercitata dal disk jockey sul disco?

► Quale sarebbe stata la forza se il disk jockey avesse appoggiato il dito a metà del disco anziché sul bordo esterno?

$$[2,0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2; 0,39 \text{ N}; 0,78 \text{ N}]$$

44 U
d
z
u
L
n
d
c
ta
ce
m
di
de
ria

★★★

43

★★★

PROBLEMA SVOLTO

Una carrucola che ha un raggio di 15 cm e una massa di 3,4 kg è costituita da un disco che può ruotare attorno al suo centro. Uno spago avvolto attorno alla carrucola è tirato in modo da imprimere una forza di modulo pari a 2,8 N.

► Quanto vale l'accelerazione angolare impressa alla carrucola?



$$\begin{aligned} r &= 15 \text{ cm} \\ m &= 3,4 \text{ kg} \\ F &= 2,8 \text{ N} \\ \alpha &= ? \end{aligned}$$

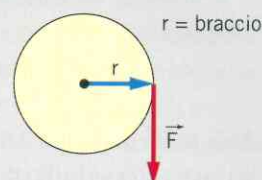
Strategia e soluzione

- Il disco della carrucola è un cilindro pieno che ruota attorno al suo asse di simmetria. Secondo la tabella di questo paragrafo, il suo momento d'inerzia è

$$I = \frac{1}{2} mr^2 = \frac{1}{2} (3,40 \text{ kg}) \times (0,15 \text{ m})^2 = 0,038 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

- La forza \vec{F} ha un braccio pari al raggio della carrucola, per cui il suo momento torcente vale

$$M = rF = (0,15 \text{ m}) \times (2,8 \text{ N}) = 0,42 \text{ N} \cdot \text{m}.$$



- Ora possiamo utilizzare la formula (25), da cui otteniamo

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{0,42 \text{ N} \cdot \text{m}}{0,038 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 11 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

■ Discussione

Il risultato trovato indica che, ogni secondo, la velocità aumenta di 11 rad/s. Un angolo giro misura $2\pi \text{ rad} \approx 6,28 \text{ rad}$ e quindi il valore di 11 rad corrisponde a quasi due angoli giri. Quindi, l'accelerazione angolare trovata corrisponde a un aumento della frequenza di rotazione di quasi due giri al secondo.

Controlliamo inoltre che le unità di misura del risultato ottenuto siano corrette. Nel penultimo passaggio compariva l'unità di misura $\text{N}/(\text{kg} \cdot \text{m})$, che si semplifica come

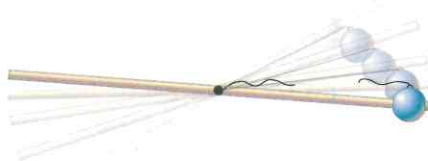
$$\frac{\text{N}}{\text{kg} \cdot \text{m}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}} = \frac{1}{\text{s}^2}.$$

Se si tiene conto che l'unità di misura radiante (rad) ha le dimensioni fisiche di un numero puro, questa unità di misura è in accordo con quella dell'accelerazione angolare.

- 44** Un'asta sottile di forma cilindrica lunga $l = 1,0 \text{ m}$ e di massa $M = 3,0 \text{ kg}$ è appoggiata su un piano orizzontale privo d'attrito. L'asta può ruotare intorno a un asse verticale passante per il suo centro di massa. Lungo l'asta può scorrere senza attrito un oggetto di massa m che è posto inizialmente in quiete al centro di massa dell'asta, legato a essa tramite una sottile corda di massa trascurabile. Il sistema è messo in rotazione alla velocità angolare $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$. A un certo istante il filo si rompe e l'oggetto comincia a muoversi. Quando esso si trova in corrispondenza di uno dei due estremi dell'asta, la velocità angolare del sistema è $\omega = 5,0 \text{ rad/s}$. Trascura l'attrito dell'aria e il momento d'inerzia dell'oggetto.

- Calcola il valore della massa m dell'oggetto.

[1,0 kg]



PROBLEMI GENERALI

- 1** Billy the Kid si sta esercitando con la sua pistola. Spara un proiettile di 10 g contro un pezzo di legno di massa 500 g posto su un muretto. Il proiettile colpisce il bersaglio alla velocità di 550 m/s e lo attraversa tutto. Il pezzo di legno balza via dal muretto alla velocità di 6,0 m/s.

- Di quanto diminuisce l'energia cinetica totale del sistema?

[$1,2 \times 10^3 \text{ J}$]

- 2** In un autoscontro al luna park, Alice che guida un veicolo in moto rettilineo di massa 100 kg urta in modo elastico il veicolo di Claudia, che ha massa 125 kg ed è fermo. Prima dell'urto, il veicolo di Alice si muoveva verso destra con velocità di modulo 1,25 m/s.

- Quali sono le velocità finali di Alice e Claudia dopo l'urto?