nikkytok/Shutterstock

CAPITOLO 3 LE FORZE E I MOTI

1 I MOTI SU UNA RETTA

Si chiamano **moti rettilinei** i moti la cui traiettoria è un segmento di retta. In questo paragrafo sono raccolte le caratteristiche principali dei due più semplici moti rettilinei: il *moto rettilineo uniforme* e il *moto rettilineo uniformemente accelerato*.

Il moto rettilineo uniforme

Per il primo principio della dinamica, si tratta del moto che si ottiene quando un punto materiale in movimento è soggetto a una forza totale nulla.

Dal punto di vista matematico, è caratterizzato dal fatto che la sua velocità media, misurata su qualunque intervallo di tempo, è sempre la stessa.

Se si indica con

- v la velocità costante del moto;
- t il generico istante di tempo;
- s_0 la posizione del punto materiale all'istante $t = 0$ s (spesso detto «istante iniziale» del moto);
- s la posizione del punto materiale all'istante t;

la **legge del moto rettilineo uniforme** risulta

$$s = s_0 + vt. \qquad (1)$$

Come si vede nella figura 1, il **grafico spazio-tempo** associato a questa legge è una retta che interseca l'asse verticale delle posizioni nel punto (0 s, s_0). Così, la retta passa per l'origine soltanto quando si ha $s_0 = 0$ m e in tal caso la formula precedente si riduce al caso particolare

Figura 1 Grafico spazio-tempo del moto rettilineo uniforme.

$$s = vt \qquad (2)$$

Nella vita quotidiana, si muovono di moto rettilineo uniforme la luce e, almeno per un certo tratto, una valigia sul nastro trasportatore di un aeroporto.

DrHitch/Shutterstock

ytwong/iStockPhoto

AccelerazÚne costante
Se, per esempio, l'accelerazione ha il valore costante di 4 m/s², in ogni secondo la velocità del corpo aumenta di 4 m/s.

Il moto rettilineo uniformemente accelerato

Per il secondo principio della dinamica, è il moto che si ottiene quando su un punto materiale, inizialmente fermo, agisce una forza costante. La sua caratteristica è che l'accelerazione del corpo in movimento si mantiene costante al trascorrere del tempo.

Se si indica con

- a l'accelerazione costante del moto;
- t il generico istante di tempo;
- v_0 la velocità del punto materiale all'istante $t = 0$ s;
- s_0 la posizione del punto materiale allo stesso istante;
- v la velocità del punto materiale all'istante t;
- s la posizione del punto materiale all'istante t;

la **legge della velocità** per il moto uniformemente accelerato è

$$v = v_0 + at, \qquad (3)$$

il cui grafico velocità-tempo (rappresentato nella **figura 2**) è una retta che interseca l'asse verticale delle velocità nel punto $(0\text{ s}, v_0)$.

La **legge della posizione** per il moto uniformemente accelerato è

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \qquad (4)$$

Nel caso semplice in cui sia ha $s_0 = 0$ m e $v_0 = 0$ m/s, le formule **(3)** e **(4)** diventano, rispettivamente

$$v = a \qquad (5)$$

e

$$s = \frac{1}{2}at^2. \qquad (6)$$

Il grafico spazio-tempo relativo alla formula **(6)** è una parabola con vertice nell'origine (**figura 3**); quello della formula **(4)** è una parabola di forma generale.

Nella vita quotidiana, si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato un sassolino che cade dalla mano; in quel caso il valore dell'accelerazione è $a = g = 9{,}8\text{ m/s}^2$ (accelerazione di gravità).

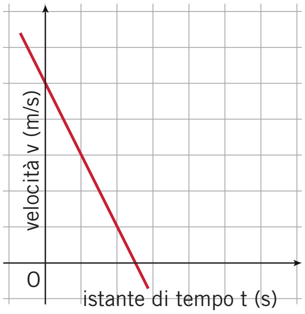


Figura 2 Grafico velocità-tempo per il moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione negativa (moto decelerato).

IN LABORATORIO

Moto uniformemente accelerato:
Real Time Laboratory
- Video (2 minuti)
- Test (3 domande)

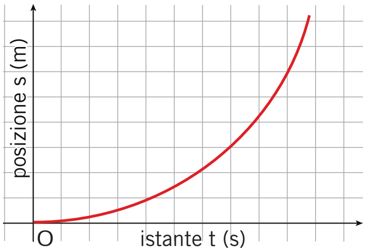


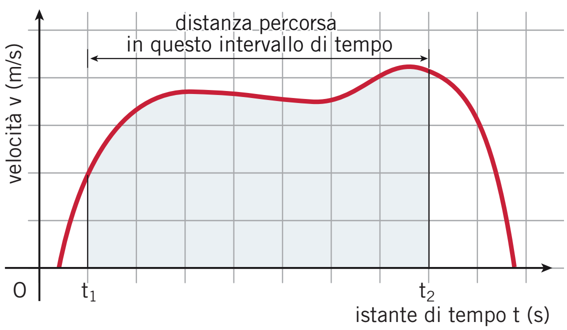
Figura 3 Grafico spazio-tempo del moto uniformemente accelerato con partenza da fermo.

LA DISTANZA E L'INTEGRALE DEFINITO


Phase4Photography/Shutterstock

Consideriamo un moto rettilineo *vario*, cioè che avviene con velocità variabile.

Per esempio, il grafico velocità-tempo della **figura sotto** rappresenta la velocità $v(t)$ di un atleta che corre su una strada rettilinea.

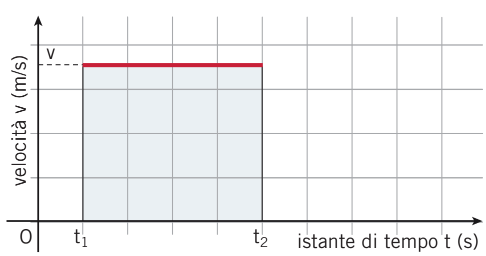


Vogliamo determinare il valore della distanza Δs percorsa dall'atleta durante il suo moto tra l'istante t_1 e l'istante t_2.

Se il valore della velocità fosse costante e uguale a v, la distanza percorsa dal corridore nel suo moto sarebbe

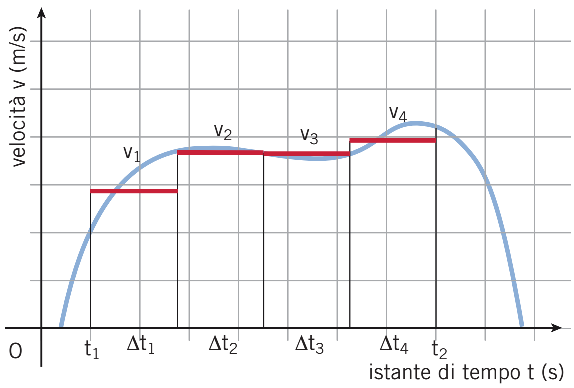
$$\Delta s = v\Delta t = v\,(t_2 - t_1).$$

Nel corrispondente **grafico velocità-tempo** il prodotto $v\,(t_2 - t_1)$ rappresenta l'area del rettangolo di altezza v e base $(t_2 - t_1)$.



Siccome sappiamo calcolare le distanze soltanto nel caso di un moto con velocità costante, *approssimiamo* il moto della prima figura con un altro moto, più semplice da studiare, in cui l'atleta si muove con velocità costante v_1 per un primo intervallo di tempo Δt_1, poi cambia bruscamente velocità fino al un secondo valore v_2, che mantiene per un altro intervallo di tempo Δt_2, e così via.

Il grafico di questo moto approssimato è rappresentato nella **figura sotto**.

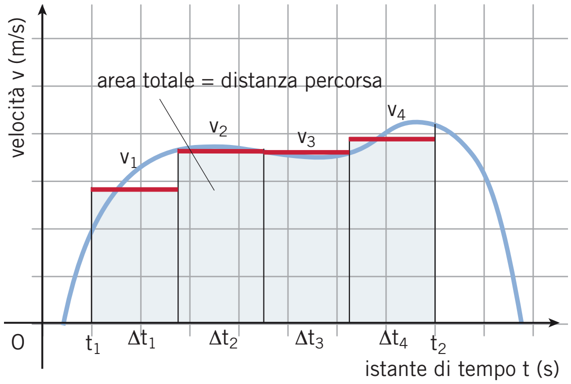


Grazie a questa procedura, siamo in grado di dare un valore approssimato alla distanza percorsa dal corridore durante il suo allenamento: è la somma delle quattro distanze Δs_1, ..., Δs_4 che possiamo calcolare nei quattro tratti percorsi a velocità costante.

Indichiamo questa distanza approssimata con il simbolo $\Delta s(4)$ per sottolineare che è ottenuta approssimando il moto reale con quattro tratti a velocità costante:

$$\Delta s(4) = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \Delta s_4 = \sum_{k=1}^{4} \Delta s_k$$
$$= v_1\Delta t_1 + v_2\Delta t_2 + v_3\Delta t_3 + v_4\Delta t_4 = \sum_{k=1}^{4} v_k \Delta t_k\,.$$

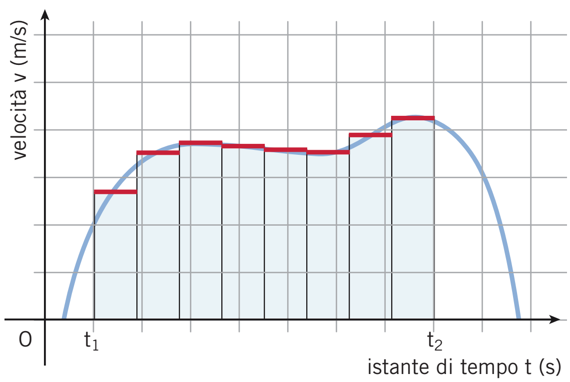
In analogia a quanto detto prima, il valore di questa sommatoria ha un'interpretazione geometrica chiara: è la somma delle aree dei quattro rettangoli di basi Δt_1, Δt_2, ... e di altezze rispettivamente v_1, v_2, ... **(figura seguente)**.



Certamente questo calcolo non fornisce un valore abbastanza preciso della distanza Δs; però la precisione del calcolo si può aumentare quanto si vuole scegliendo di approssimare il moto con un numero più grande di intervalli percorsi a velocità costante.

Per esempio, la **figura seguente** mostra che, raddoppiando il numero di intervalli, la linea rossa che descrive il moto con tratti di velocità costanti approssima meglio la linea azzurra del moto reale.

Così, anche il calcolo approssimato della distanza si avvicina di più al valore corretto.



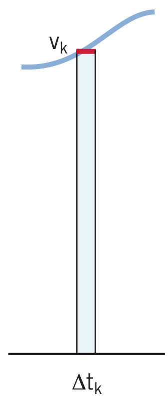
Consideriamo allora il caso in cui il moto dell'atleta è approssimato usando n tratti a velocità costante e indichiamo con $\Delta s(n)$ il valore della distanza corrispondente; generalizzando le formule scritte in precedenza nel caso $n = 4$, otteniamo:

$$\Delta s(n) = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$$
$$= v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \ldots + v_n \Delta t_n = \sum_{k=1}^{n} v_k \Delta t_k \, .$$

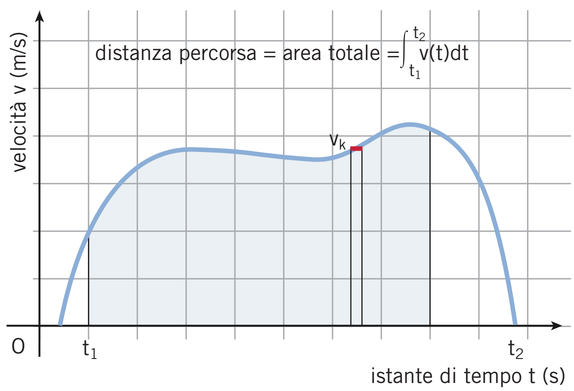
Aumentando il numero n di suddivisioni, la precisione del calcolo è via via crescente. Tuttavia, fino a che n è un numero finito, rimane sempre una differenza tra il valore approssimato $\Delta s(n)$ e il valore Δs che vogliamo calcolare.

Quindi, per concludere il calcolo occorre fare crescere il numero di suddivisioni all'infinito; solo in questo modo la curva a tratti orizzontali approssima arbitrariamente bene la curva continua del grafico velocità-tempo. Così il valore di Δs si ottiene dal valore di $\Delta s(n)$ quando n diventa infinitamente grande (e quindi tutti gli intervalli di tempo Δt_1, Δt_2, ... diventano infinitamente piccoli).

In questo caso, ciascuno dei rettangoli che fornisce la distanza percorsa in un singolo intervallo di tempo Δt_k, con velocità costante v_k, diventa «infinitamente stretto» **(figura a lato)**.



La somma delle aree di questi (infiniti) rettangoli non è altro che l'*area* della parte di piano compresa tra l'asse delle ascisse, il grafico velocità-tempo e gli istanti di tempo t_1 e t_2 **(figura seguente)**.



Dal punto di vista matematico l'aumento indefinito del numero di intervalli si esprime con la scrittura

$$\Delta s = \lim_{n\to+\infty} \Delta s(n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k \Delta t_k ,$$

dove il simbolo $\lim\limits_{n\to+\infty}$ si legge «limite per n che tende a più infinito». Il calcolo di questo limite si ottiene mediante un procedimento che si chiama «integrale definito» e si scrive come

$$\Delta s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k \Delta t_k = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Anche diverse altre grandezze (tra cui il lavoro di una forza variabile e quello compiuto da una trasformazione termodinamica) sono date dall'area di una parte di piano in un sistema di riferimento opportuno.

ESEMPIO

Un piombino è lasciato cadere da fermo.

▶ Quale distanza percorre in un intervallo di tempo di 0,35 s?

In questo casi si utilizza la formula (**6**) con *a* uguale all'accelerazione di gravità *g*; si ottiene:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\times\left(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\times(0{,}35\ \text{s})^2 = 0{,}60\ \text{m}.$$

In 0,35 s il piombino cade di 0,60 m.

2 IL MOTO PARABOLICO (FORZA COSTANTE)

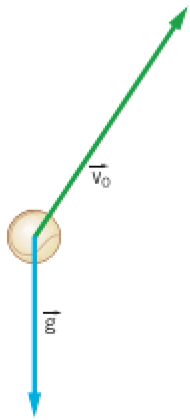


Figura 4 Pallina da tennis con vettore velocità iniziale obliquo.

Una pallina da tennis, colpita dalla racchetta, viene lanciata con una velocità iniziale $\vec{v}_0$ obliqua rispetto al vettore accelerazione di gravità $\vec{g}$ (**figura 4**). In questo caso il vettore velocità iniziale non è parallelo al vettore accelerazione e quindi il moto della pallina da tennis non è rettilineo uniformemente accelerato.

In realtà il moto reale della pallina da tennis è influenzato in maniera rilevante da caratteristiche (come la presenza dell'aria, la variazione di forma della pallina percossa dalla racchetta, la sua rotazione...) che non siamo in grado di trattare.

In questo paragrafo svilupperemo quindi un modello semplificato (ma utile in tante situazioni) in cui *si trascura l'attrito con l'aria* e *si considera l'oggetto in movimento come un punto materiale*. Questo modello viene di solito indicato con «moto di un proiettile» o, per motivi che vedremo tra poco, «moto parabolico».

Velocità iniziale orizzontale

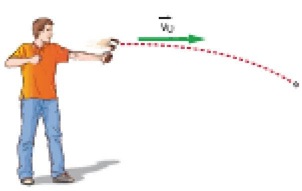


Figura 5 Esempio di moto con velocità iniziale obliqua orizzontale.

Consideriamo prima una pallina lanciata *in orizzontale* con velocità iniziale $\vec{v}_0$ (**figura 5**). Trascurando l'attrito con l'aria, l'unica forza che agisce sulla pallina è il suo peso; quindi per il secondo principio della dinamica la pallina ha un'accelerazione uguale a quella di gravità:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

L'accelerazione $\vec{g}$ è *verticale* e rivolta verso il basso; quindi:

- non esiste alcuna accelerazione orizzontale: in orizzontale la pallina continua a muoversi per inerzia alla velocità iniziale $\vec{v}_0$;
- esiste una accelerazione verticale costante: il moto verticale della pallina è uniformemente accelerato, con accelerazione pari a $\vec{g}$.

Da queste due osservazioni si deduce che

il moto di un oggetto lanciato in orizzontale è la sovrapposizione di due moti:
un moto rettilineo uniforme orizzontale,
un moto rettilineo uniformemente accelerato verticale.

Scegliendo il punto di partenza come origine degli assi coordinati, l'asse delle *y* rivolto verso l'alto e come istante $t = 0$ quello in cui inizia il moto, le coordinate *x* e *y* delle posizioni occupate dalla pallina sono allora date dalle formule

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad (7)$$

Isoliamo t nella prima equazione del sistema **(7)** e sostituiamolo nella seconda equazione:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0} \\ y = -\dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0} \\ y = -\dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{v_0}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0} \\ y = -\dfrac{1}{2} \dfrac{g}{v_0^2} x^2 \end{cases} .$$

L'equazione

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2} x^2 \qquad (8)$$

fornisce l'equazione cartesiana della traiettoria seguita dalla pallina. Essa rappresenta una parabola che ha il vertice nell'origine degli assi.

La parabola
La parabola, con vertice nell'origine degli assi, ha equazione $y = ax^2$. Quando, come in questo caso, il coefficiente a è negativo, la concavità è rivolta verso il basso.

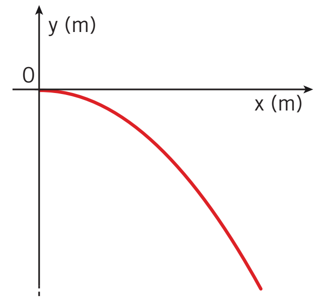


Figura 6 Arco di parabola con il vertice nell'origine.

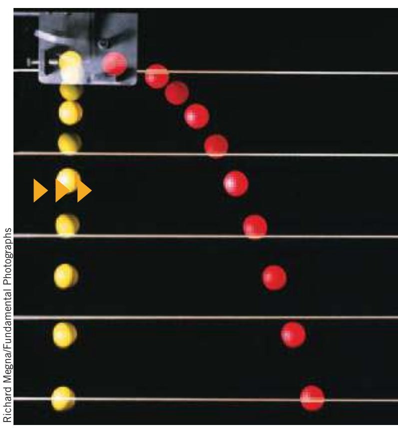
> La traiettoria di un oggetto lanciato in orizzontale è una *parabola* con il vertice nel punto di lancio **(figura 6)**.

Un esperimento ci permette di controllare se questa previsione è corretta. Facciamo partire due palline da golf nello stesso istante: la prima cade da ferma, la seconda è lanciata in orizzontale.

Una fotografia a esposizione multipla rileva le posizioni delle due palline a intervalli di tempo costanti.

Istante dopo istante, le due palline si trovano alla *stessa quota verticale*. In particolare, le due palline arrivano a terra nello stesso istante.

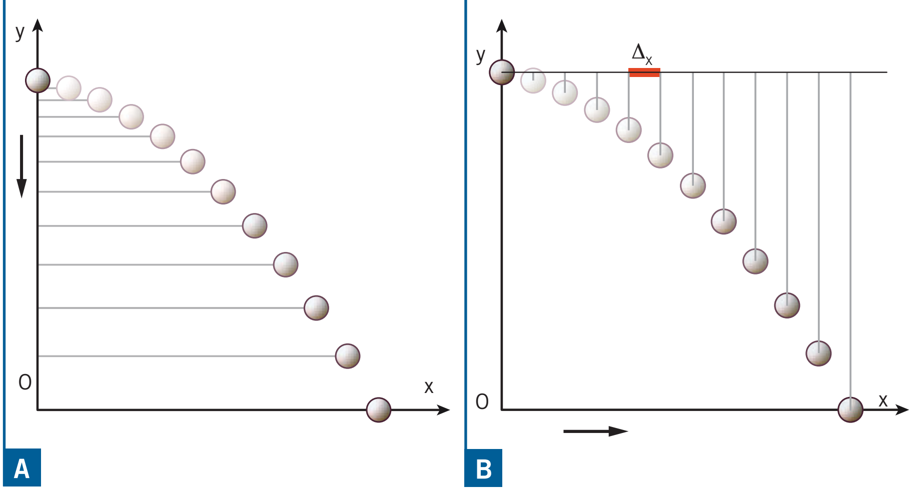
Inoltre possiamo esaminare il fenomeno per avere la conferma della sovrapposizione dei moti.



Richard Megna/Fundamental Photographs

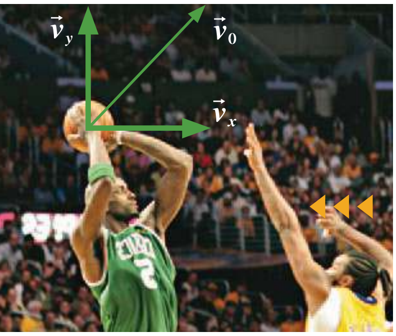
▶ Il moto della *coordinata y* della seconda pallina è uguale al moto della pallina lasciata cadere, cioè è un moto uniformemente accelerato con accelerazione g.

▶ In intervalli di tempo uguali, la *coordinata x* della seconda pallina aumenta di quantità Δx uguali, cioè (come avevamo previsto) compie un moto rettilineo uniforme.



Abbiamo così confermato sperimentalmente che il moto della pallina ha proprio le proprietà che abbiamo calcolato applicando il secondo principio della dinamica.

Velocità iniziale obliqua



Mike Liu/Shutterstock.com

Consideriamo una palla da basket che viene lanciata verso il canestro. È conveniente scomporre la sua velocità iniziale $\vec{v}_0$ nei componenti orizzontale e verticale, che indicheremo con $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$. Per il teorema di Pitagora, vale la relazione

$$v_0 = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}. \qquad (9)$$

Il moto della palla è ancora la sovrapposizione di un moto rettilineo uniforme in orizzontale e di un moto rettilineo uniformemente accelerato in verticale.

Con le stesse convenzioni di prima, e con un calcolo simile al precedente, si dimostra che l'equazione della traiettoria di questo moto è

$$y = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2}x^2. \qquad (10)$$

Il risultato ottenuto è una curva del tipo $y = A x^2 + B x$; quindi:

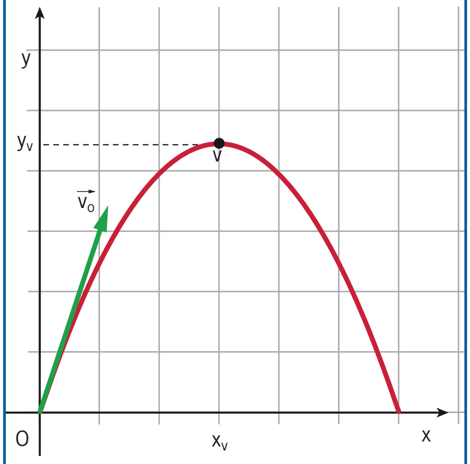
> la traiettoria di un oggetto lanciato in direzione obliqua è una parabola.

Questa volta il vertice V della parabola non è nel punto di lancio, ma ha le seguenti coordinate

$$x_V = -\frac{B}{2A} = \frac{v_x v_y}{g}, \quad y_V = -\frac{\Delta}{4A} = \frac{1}{2}\frac{v_y^2}{g}.$$

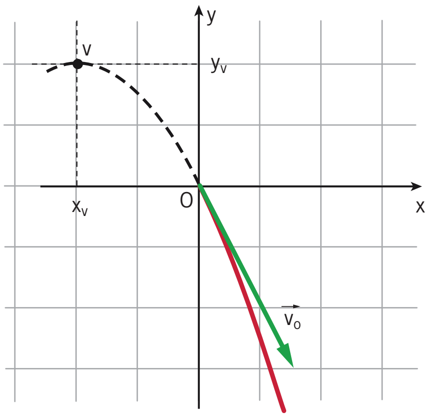
Il significato di questo punto dipende dai casi.

▶ Una palla da basket, lanciata obliquamente verso l'alto, raggiunge la massima quota y_V nel vertice e la x_V corrispondente è l'ascissa del punto di massimo.



A

▶ Un sasso lanciato obliquamente verso il basso, per esempio da una scogliera, segue una traiettoria parabolica che ha per vertice un punto da cui il sasso non è passato.



B

La gittata

Si chiama **gittata** la distanza che separa il punto di partenza di un corpo lanciato in direzione obliqua, verso l'alto, dal punto in cui esso torna al suolo.

Dal momento che la traiettoria parabolica è simmetrica rispetto all'asse verticale passante per il vertice, la lunghezza L della gittata è il doppio dell'ascissa del vertice calcolata prima (figura 7). Quindi il valore della gittata è

$$L = 2x_V = 2\frac{v_x v_y}{g}. \qquad \textbf{(11)}$$

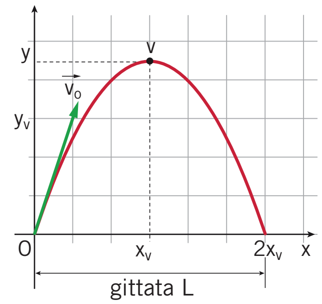


Figura 7 Gittata in un moto parabolico.

Nella figura 8 sono disegnate diverse traiettorie per oggetti lanciati con velocità che hanno lo stesso valore, ma inclinazioni diverse.

Si osserva che al crescere dell'angolo di lancio, la gittata aumenta fino a raggiungere un valore massimo, per poi diminuire quando l'angolo di lancio aumenta ancora.

Se l'attrito con l'aria è trascurabile, la gittata massima si ha quando la velocità iniziale del corpo lanciato forma un angolo di 45° rispetto al terreno.

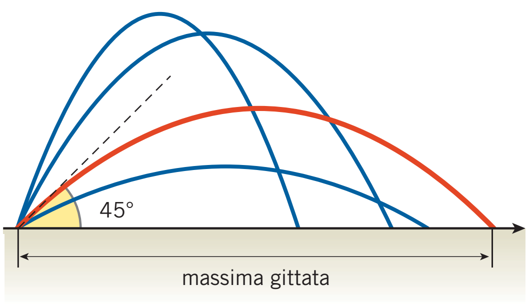


Figura 8 La gittata per diversi valori dell'angolo di lancio.

ESEMPIO

Un sasso è lanciato in direzione obliqua, con una componente verticale della velocità $v_y = 5{,}2$ m/s e una componente orizzontale $v_x = 3{,}8$ m/s.

▶ Quanto vale la gittata L del lancio?

Utilizzando la formula **(11)** la gittata risulta:

$$L = 2\frac{v_x v_y}{g} = 2\frac{\left(5{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\times\left(3{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{\left(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 4{,}0\ \text{m}.$$

L'effetto dell'aria

Un tappo di spumante o una palla magica, lanciati obliquamente verso l'alto, seguono con buona approssimazione un moto parabolico.

Se l'attrito esercitato dall'aria su un oggetto in movimento (per esempio un pallone) non è trascurabile, la traiettoria che esso segue può essere molto diversa da una parabola.

▶ Un esempio ben noto è dato dalla strana traiettoria seguita da un aeroplanino di carta.

▶ Un altro esempio è la traiettoria (non contenuta in un piano) del pallone in alcuni calci di punizione con effetto.

Vladimir Melnikov/Shutterstock

A

Matthew Ashton/AMA/Corbis

B

3 IL MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Passando dai moti sulla retta a quelli nel piano si esamina il *moto circolare uniforme*.

Il moto circolare uniforme descrive un punto materiale che percorre una traiettoria circolare mantenendo costante il modulo del vettore velocità istantanea.

Chiamiamo **raggio vettore** $\vec{r}$ il vettore che in ogni istante congiunge il centro della traiettoria circolare con il punto in cui si trova il corpo in movimento.

Nel moto circolare uniforme il raggio vettore che individua un punto A della circonferenza è sempre perpendicolare alla velocità istantanea del moto nello stesso punto A (**figura 9**).

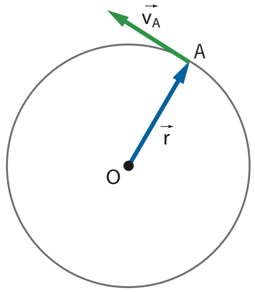


Figura 9 Nel moto circolare uniforme i vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$ relativi allo stesso punto sono perpendicolari.

Il periodo e la frequenza

Il moto circolare uniforme è un esempio di moto *periodico*.

Si definisce periodico un moto che si ripete sempre uguale dopo un intervallo di tempo T, che si chiama **periodo** del moto.

Nel moto circolare uniforme il periodo è la durata di un giro completo della traiettoria circolare.

In un moto periodico:

si definisce **frequenza** f del moto il numero di periodi che il moto compie nell'unità di tempo.

Il legame tra frequenza f e periodo T è dato dalla relazione:

$$f = \frac{1}{T} \tag{12}$$

Nel Sistema Internazionale la frequenza si misura in s^{-1} (o in 1/s). A questa unità è stato dato il nome *hertz* (simbolo Hz).

Il modulo del vettore velocità

Se il raggio della traiettoria circolare è r e il periodo del moto è T, il modulo v della velocità del moto circolare uniforme risulta:

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \tag{13}$$

Dal momento che $1/T = f$, questa formula può essere riscritta anche come

$$v = 2\pi r f. \tag{14}$$

4 LA VELOCITÀ ANGOLARE

Consideriamo la stazione spaziale ISS in orbita attorno alla Terra. Mentre la stazione si muove da A a B sulla circonferenza, il raggio vettore spazza un angolo al centro $A\hat{O}B$, che misura $\Delta\alpha$ (figura 10).

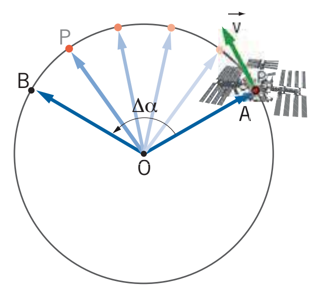


Figura 10 Angolo al centro $\Delta\alpha$.

Si definisce **velocità angolare** ω di un moto circolare uniforme il rapporto tra l'angolo al centro $\Delta\alpha$ e il tempo Δt impiegato dal raggio vettore a spazzare tale angolo.

$$\underbrace{\omega}_{\text{velocità angolare (rad/s)}} = \frac{\overbrace{\Delta\alpha}^{\text{angolo al centro (rad)}}}{\underbrace{\Delta t}_{\text{intervallo di tempo (s)}}} \tag{15}$$

Nel Sistema Internazionale le ampiezze degli angoli si misurano in radianti (rad), per cui la velocità angolare si misura in **radianti al secondo** (rad/s).

La velocità angolare rappresenta la rapidità con cui il raggio vettore spazza l'angolo al centro determinato, in un certo intervallo di tempo, da un punto che si muove di moto circolare.

L'angolo in radianti

Dato un angolo $A\hat{O}B$, la sua ampiezza in radianti si definisce considerando una circonferenza di raggio r centrata nel vertice O e indicando con l la lunghezza dell'arco AB di circonferenza intercettato dall'angolo (figura 11).

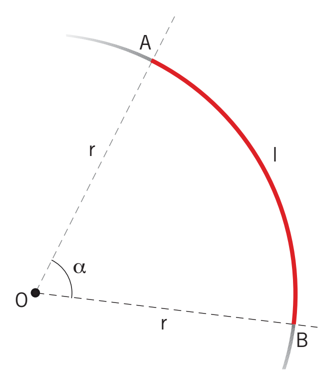


Figura 11 Arco l intercettato dall'angolo α.

L'ampiezza α di un angolo, espressa in radianti, è data dal rapporto tra la lunghezza dell'arco *AB* e il valore del raggio della circonferenza:

$$\alpha = \frac{l}{r} \qquad (16)$$

lunghezza dell'arco (m)
angolo (rad)
lunghezza della circonferenza (s)

RelazÚne tra radianti e gradi
In generale, se indichiamo con α l'ampiezza in radianti di un angolo e con g° la sua misura in gradi, vale la relazione:

$$\frac{\alpha}{g^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

Di conseguenza, l'angolo che misura un radiante è quello che intercetta un arco di circonferenza lungo quanto il raggio della circonferenza stessa. Il suo valore in gradi è di circa 57° 18'.

L'angolo giro intercetta l'intera circonferenza, cioè ha $l = 2\pi r$. Quindi l'ampiezza in radianti dell'angolo giro è

$$\text{angolo giro in radianti} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi.$$

Partendo dall'angolo giro si possono ottenere le ampiezze in radianti degli altri angoli di uso comune. I loro valori sono contenuti nella tabella seguente.

Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
Radianti	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	π	3π/2	2π

L'angolo in radianti, essendo dato dal rapporto l/r tra due grandezze dello stesso tipo, ha le dimensioni fisiche di un numero puro.

Il valore della velocità angolare

In un moto circolare uniforme con periodo T, il raggio vettore descrive un angolo retto (ampio $\pi/2$) nel tempo $T/4$, un angolo piatto (ampio π) nel tempo $T/2$ e un angolo giro (ampio 2π) nel tempo T.

Si vede, quindi, che

nel moto circolare uniforme gli angoli al centro spazzati dal raggio vettore sono direttamente proporzionali ai corrispondenti intervalli di tempo.

ANIMAZIONE

Velocità angolare
(1 minuto e mezzo)

Il valore di ω può allora essere calcolato prendendo un angolo Δα qualunque e il corrispondente valore di Δt. La cosa più semplice è scegliere $\Delta\alpha = 2\pi$ e $\Delta t = T$, ottenendo:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (17)$$

Questa espressione permette di scrivere in modo diverso il valore di v: partendo dalla formula **(13)** otteniamo

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) r = \omega r \quad \Rightarrow \quad v = \omega r. \qquad (18)$$

I diversi punti di una giostra, per esempio, si muovono di moto circolare uniforme con lo stesso periodo T e la stessa velocità angolare ω. Però i punti più vicini al centro della giostra sono più lenti di quelli che si trovano sul bordo.

Ciò è espresso dalla formula $v = \omega r$, secondo cui il modulo v della velocità dei punti della giostra aumenta in modo direttamente proporzionale alla loro distanza dal centro.

ESEMPIO

La lancetta dei minuti di una sveglia analogica compie un giro completo in 1,00 h.

▶ Calcola la velocità angolare del moto della lancetta.

Il moto della lancetta ha periodo $T = 1{,}00\ \text{h} = 3{,}60 \times 10^3\ \text{s}$. Allora, dalla formula **(17)** si ricava la velocità angolare:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times (3{,}14\ \text{rad})}{3{,}60 \times 10^3\ \text{s}} = 1{,}74 \times 10^{-3}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$


Hadou/Shutterstock

5 L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA

Un punto che si muove di moto circolare uniforme è soggetto a un'accelerazione vettoriale sempre rivolta verso il centro della traiettoria. Per questa ragione tale accelerazione è detta «centripeta»; come è dimostrato in seguito, il suo valore a_c è dato dalla formula

Perché «centripeta»
«Centripeta» significa «che punta verso il centro».

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{19}$$

Sostituendo nella relazione precedente la formula **(18)** $v = \omega r$, il valore di a_c può essere espresso anche come

$$a_c = \omega^2 r \tag{20}$$

Dimostrazione delle proprietà di $\vec{a}_c$

Nel moto circolare uniforme, il vettore velocità è, in ogni punto, perpendicolare alla traiettoria e, quindi, al raggio vettore $\vec{r}$.

Disegnando le frecce che rappresentano le velocità con le code nello stesso punto, nella **figura 12** si vede che la punta di $\vec{v}$ compie un moto circolare uniforme.

Il vettore $\vec{v}$ compie un giro completo ogni volta che il raggio vettore $\vec{r}$ conclude un giro.

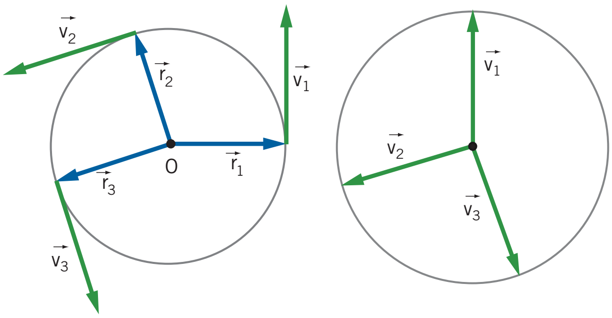


Figura 12 La punta del vettore velocità istantanea descrive un moto circolare uniforme.

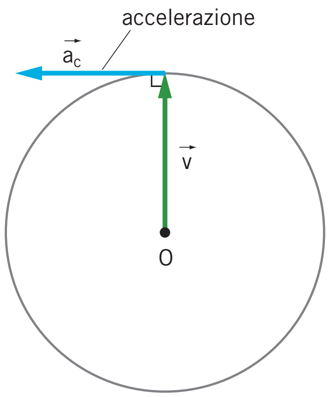
Quindi i moti circolari dei due vettori hanno lo stesso periodo.

- Il moto circolare della punta di $\vec{v}$ ammette un vettore «velocità della velocità», che è l'accelerazione.

ANIMAZIONE

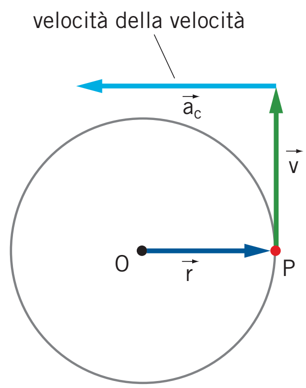
Accelerazione centripeta (2 minuti)

▶ Il vettore accelerazione $\vec{a}_c$ è tangente alla traiettoria della punta di $\vec{v}$ e, quindi, è perpendicolare a $\vec{v}$.



A

▶ Dal momento che $\vec{v}$ è perpendicolare a $\vec{r}$, i vettori $\vec{a}_c$ e $\vec{r}$ risultano paralleli e con versi opposti.



B

PassaggÚ matematico

Siccome vale

$$\frac{2\pi}{T} r = v$$

si ha

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}.$$

Abbiamo quindi confermato che l'accelerazione del moto circolare uniforme è centripeta, perché ha la direzione del raggio vettore ed è rivolta nel verso opposto di $\vec{r}$, cioè verso il centro. Ora, questa osservazione ci permette di calcolare il valore di a_c.

- La relazione tra v e r è data da $v = \frac{2\pi}{T} r$. Nel moto circolare uniforme della punta di $\vec{v}$ deve valere la stessa relazione matematica tra a e v. Quindi troviamo:

$$a = \frac{2\pi}{T} v = \frac{v}{r} v = \frac{v^2}{r}.$$

È così dimostrata la formula (**19**).

6 LA FORZA CENTRIPETA E LA FORZA CENTRIFUGA APPARENTE

Per il secondo principio della dinamica, l'accelerazione centripeta $\vec{a}_c$ esposta nel paragrafo precedente deve essere causata da una forza $\vec{F}_c = m\vec{a}_c$ che è sempre rivolta verso il centro.

> Affinché un oggetto si muova di moto circolare uniforme, è necessario che subisca una forza verso il centro, chiamata **forza centrìpeta**, che cambia la direzione del vettore velocità, ma non il suo valore.

Ricordando le formule (**19**) e (**20**), nel caso di un moto circolare uniforme l'intensità della forza centripeta F_c è data da

$$F_c = ma_c = m\frac{v^2}{r} \quad \text{oppure} \quad F_c = ma_c = m\omega^2 r. \qquad \textbf{(21)}$$

La forza centrifuga apparente

Quando ci troviamo in un'automobile che descrive una curva abbiamo l'impressione che ci sia una forza che ci spinge verso l'esterno. Questa forza sembra così reale che le si è dato anche un nome: *forza centrifuga*.

In realtà, la forza centrifuga è soltanto una delle **forze apparenti** che incontriamo nella vita quotidiana. Per esempio, se un autobus accelera di colpo o frena improvvisamente, avvertiamo una «forza» che ci spinge all'indietro (nel primo caso) o in avanti (nel secondo caso); in realtà, nessuno ci spinge o tira.

Questa forza apparente è dovuta soltanto al fatto che, mentre l'autobus accelera o frena, per il principio di inerzia il nostro corpo tende a mantenere la velocità che aveva prima e, quindi, rimane indietro se l'autobus accelera o va in avanti se esso diminuisce la propria velocità.

La forza apparente è il segnale del fatto che l'autobus (mentre varia la propria velocità) non è un sistema di riferimento inerziale.

Allo stesso modo, l'auto che curva è soggetta all'accelerazione centripeta. Così il sistema di riferimento dell'automobile è non inerziale e in esso si avvertono delle forze apparenti.

Per fare un esempio, consideriamo un CD appoggiato sul portaoggetti posteriore di un'automobile.

Durante una brusca curva a destra, si ha l'impressione che la forza centrifuga spinga il CD verso sinistra, cioè verso l'esterno della curva.

A

Però, nel sistema di riferimento (inerziale) della Terra, il CD continua a muoversi in linea retta (almeno finché non giunge al bordo).

B

Per il principio d'inerzia, durante la curva il CD tende a muoversi con la stessa velocità vettoriale che aveva all'inizio della curva. All'interno dell'auto si vede il CD muoversi verso sinistra e si ha l'impressione che esista una forza (la forza centrifuga) che agisce su di esso.

Perché gli astronauti in orbita non avvertono il peso?

La stazione spaziale ISS mantiene la sua orbita (e non si perde nello spazio) grazie all'effetto della forza-peso che la «lega» alla Terra. Ma, allora, perché gli astronauti che si trovano all'interno della stazione appaiono senza peso?

Per capirlo cominciamo a esaminare un caso più semplice, quello di una persona che si trova in un ascensore in caduta libera. L'ascensore, la persona e tutti gli oggetti presenti cadono con la stessa accelerazione $\vec{g}$.

Figura 13 Ascensore in caduta libera.

La figura 13 schematizza questa situazione: i rettangoli rappresentano l'ascensore in caduta, osservato a intervalli di tempo uguali. Il punto rosso rappresenta la persona nell'ascensore. Il punto blu indica un mazzo di chiavi che la persona ha lasciato andare all'inizio della caduta. Sono visualizzati anche i vettori velocità con cui la persona e le chiavi si muovono verso il basso, e l'ascensore precipita anch'esso con la stessa velocità.

Visto che tutti i corpi (l'ascensore, la persona, le chiavi) hanno, istante per istante, la stessa velocità, alla persona sembra di «fluttuare» nell'ascensore, visto che non riesce a «poggiare» i piedi sul fondo. Inoltre, la persona vede le chiavi ferme a mezz'aria di fianco a sé, come se fluttuassero. Se si appoggia su una bilancia, la persona legge un valore di zero kilogrammi, perché la bilancia, cadendo, «scappa» via dai piedi della persona.

Fino a quando l'ascensore non arriva al suolo, nel sistema di riferimento (non inerziale) dell'ascensore gli oggetti si comportano come se non avessero peso.

Questo principio è sfruttato dalle agenzie spaziali per allenare i futuri astronauti.

Un aereo (il cosiddetto «vomit Comet») esegue una particolare traiettoria parabolica che, come mostra la foto, per un breve intervallo di tempo permette di ottenere la condizione di mancanza di peso.

Una situazione analoga si ritrova sulla ISS (come anche nello Shuttle e in tutte le altre navicelle orbitanti).

NASA / SCIENCE PHOTO LIBRARY

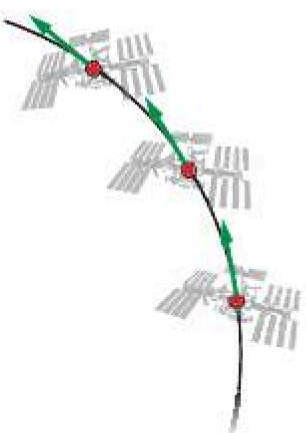


Figura 14 Moto della Stazione Spaziale Internazionale e di un astronauta al suo interno.

La figura 14 mostra il moto della stazione orbitale e di un astronauta al suo interno (di cui è mostrato il vettore velocità). Ancora una volta, stazione e astronauta cadono con la stessa accelerazione per effetto della forza-peso. Muovendosi con la stessa legge del moto della stazione, l'astronauta si ritrova sempre fermo rispetto a essa e «fluttua» al suo interno.

Lo stesso accade, naturalmente, a ogni altro astronauta e a tutti gli oggetti che si trovano nella stazione.

Quindi la stazione spaziale costituisce un sistema di riferimento non inerziale (visto che è accelerato rispetto al sistema IRC), ma di tipo particolare: nel suo volume limitato, un corpo fermo, su cui non agiscono forze, rimane fermo. In tale sistema, i princìpi della dinamica sono validi.

7 IL MOTO ARMONICO

ANIMAZIONE

Il moto armonico (1 minuto e mezzo)

Il moto di un pendolo e quello di un'altalena sono moti *oscillatori*, in cui la traiettoria del moto è ripetuta diverse volte in versi opposti. Il modello più semplice di moto oscillatorio, in cui si trascurano gli effetti degli attriti che smorzano l'oscillazione, è quello del **moto armonico**.

Si chiama **moto armonico** il movimento che si ottiene proiettando su un diametro le posizioni di un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme.

Nella **figura 15** i punti Q, che rappresentano il moto armonico, sono disegnati a intervalli di tempo uguali; si nota allora che

> nelle zone centrali il moto armonico è più rapido e percorre distanze maggiori in tempi uguali; agli estremi il moto armonico è più lento e percorre distanze minori negli stessi tempi. Nei punti di inversione del moto la velocità istantanea del punto è nulla.

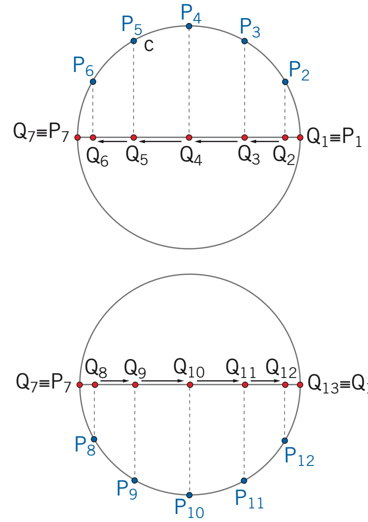


Figura 15 Moto del punto Q sul diametro in conseguenza del moto di P sulla circonferenza.

Il grafico spazio-tempo del moto armonico

Il moto armonico si può studiare in laboratorio grazie a una molla di buona qualità a cui è attaccato un pesetto.

Con un sensore di movimento posto sotto la molla si rileva il grafico spazio-tempo della **figura 16**.

Dal grafico si possono dedurre due grandezze fondamentali del moto armonico:

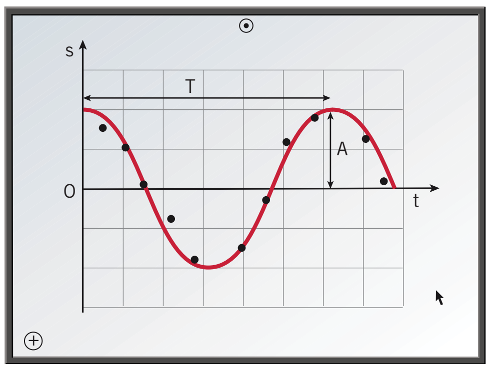
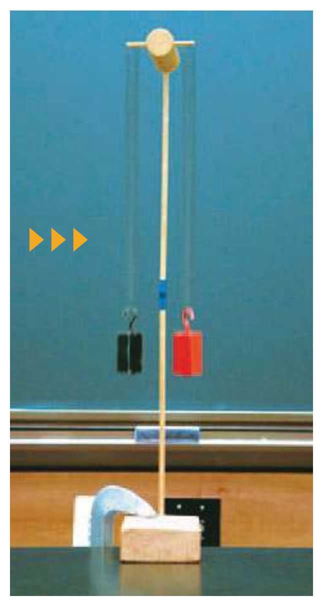


Figura 16 Grafico spazio-tempo del moto di un pesetto attaccato a una molla.

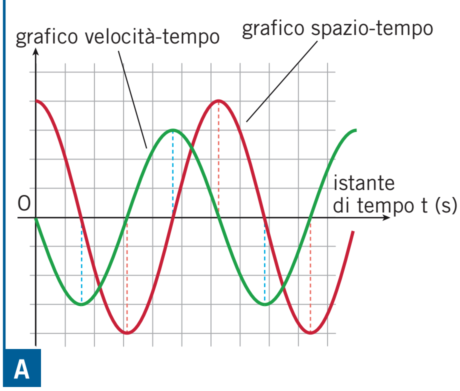


Massimiliano Trevisan

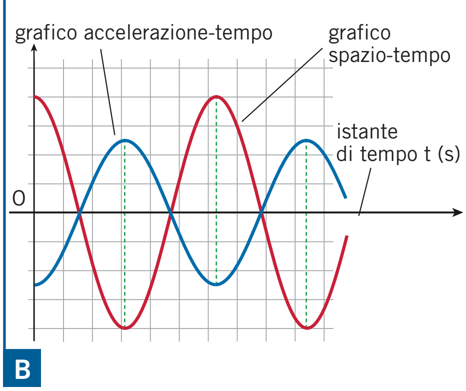
> il **periodo** T, che è la durata di un'oscillazione completa avanti e indietro;
> l'**ampiezza** dell'oscillazione, che è la distanza tra il valore massimo della curva da quello centrale dell'oscillazione ed è uguale al raggio della circonferenza ideale che genera il moto armonico.

Con altri sensori è possibile studiare anche il grafico velocità-tempo del moto armonico e quello accelerazione-tempo; nelle figure seguenti questi grafici sono sovrapposti a quello spazio-tempo per avere un confronto.

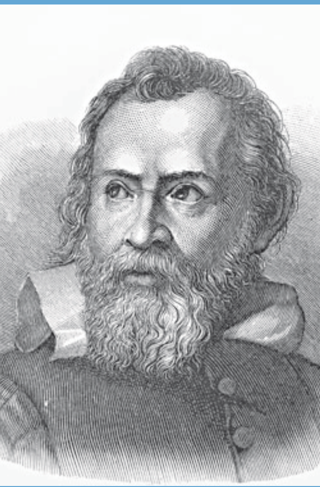
▶ Il grafico v-t conferma che la velocità si annulla nei punti di inversione del moto (linee tratteggiate azzurre), mentre assume il valore massimo (positivo o negativo) al centro dell'oscillazione (linee tratteggiate arancioni).



▶ Il grafico a-t rivela che a è nulla quando il moto oscillatorio passa per il centro (punti di intersezione tra le due curve); inoltre a è massima quando lo spostamento s è minimo e viceversa (linee tratteggiate).



GALILEO GALILEI E IL METODO SPERIMENTALE



Nicku/Shutterstock
Rostislav Glinsky/Shutterstock

Come ha fatto Galileo a scoprire che tutti i corpi cadrebbero a terra nello stesso modo, se non ci fosse l'attrito dell'aria? Non è una verità evidente, che sta davanti agli occhi di tutti.

Al contrario è un'affermazione che va contro il senso comune: un vaso di fiori che cade dal secondo piano arriva a terra ben prima di una foglia che si è staccata dalla pianta.

Oggi sappiamo che Galileo ha ragione. Robert Boyle lo ha verificato poco dopo la metà del Seicento, mettendo oggetti di peso e forma diversi dentro un tubo nel quale aveva fatto il vuoto, cioè aveva aspirato dell'aria. Capovolgendo il tubo, tutti gli oggetti toccano il fondo nello stesso istante.

Anche gli astronauti lo hanno verificato nel 1971 sulla Luna, dove non c'è atmosfera: una piuma e un martello, lasciati cadere dalla stessa altezza, arrivano al suolo contemporaneamente.

Nel Seicento, ai tempi di Galileo, per spiegare la caduta dei gravi si faceva riferimento alla teoria di Aristotele, secondo la quale la velocità di caduta è direttamente proporzionale alla massa del corpo: una pietra di 10 kg sarebbe 10 volte più veloce di un sasso da 1 kg.

Galileo ha avuto il coraggio di mettere in dubbio ciò che diceva Aristotele, la cui autorità era all'epoca indiscutibile. Per prima cosa ha demolito logicamente la sua affermazione, inventando un esperimento ideale, il cui risultato porta a una contraddizione.

Immagina di far cadere due oggetti diversi dalla stessa altezza; secondo Aristotele, quando arrivano a terra il più pesante ha una velocità v_p maggiore della velocità v_l di quello più leggero. Poi immagina di legare i due oggetti insieme con una corda sottile:

- puoi aspettarti che quello più leggero e lento ostacoli il moto dell'altro e sia tirato da esso. Quindi la velocità comune con cui i due arrivano a terra dovrebbe essere *compresa* tra v_p e v_l.
- Ma si può ragionare in un altro modo: i due oggetti uniti formano un unico corpo, più pesante di ciascuno dei due. Stando così le cose, la velocità comune con cui i due arrivano a terra dovrebbe essere *maggiore* di v_p.

Due ragionamenti diversi ma corretti, entrambi basati sulla teoria di Aristotele, portano a risultati incompatibili tra loro. Ciò è inaccettabile e quindi dobbiamo ammettere che l'idea di partenza è sbagliata.

Così, con un esperimento ideale Galileo ha falsificato la teoria.

Il passo successivo consiste nell'inventare un nuovo modello che descriva in modo accurato il fenomeno. Ancora una volta Galileo fa ricorso a un esperimento, questa volta reale.

LA CADUTA LIBERA COME CASO LIMITE DEL PIANO INCLINATO

L'esperimento ha lo scopo di verificare l'ipotesi che i corpi cadano con accelerazione costante, cioè aumentino la velocità in modo direttamente proporzionale al tempo.

Tuttavia i mezzi tecnici a sua disposizione non gli permettono di misurare la velocità istantanea. Mentre per valutare le lunghezze gli basta un metro, misurare con precisione i brevi intervalli di tempo necessari ai corpi per toccare terra costituisce un problema.

Allora, visto che il moto di caduta libero è troppo veloce per essere studiato, Galileo realizza la caduta libera al rallentatore grazie a un piano inclinato, ben levigato per ridurre l'attrito, su cui rotola una sfera di bronzo, che può quindi raggiungere il suolo in tempi più lunghi, misurabili con gli strumenti a sua disposizione. Inoltre, l'attrito con l'aria non modifica in modo apprezzabile il moto della pesante sfera di bronzo.

L'apparato sperimentale è composto da:

- un **piano inclinato** con una scanalatura;
- un **regolo** (cioè un metro) di ottone suddiviso in intervalli uguali;
- una **sfera di bronzo**;
- un **orologio ad acqua**. Il tempo di caduta della sfera è ottenuto pesando la quantità d'acqua che, durante la discesa della sfera lungo il piano, fuoriesce da un secchio attraverso un sottile cannello e si raccoglie in un recipiente posato sul piatto di una bilancia.

Galileo misura il tempo di caduta della sfera per diverse lunghezze del percorso. Poi, confrontando tempi di discesa e lunghezze, verifica che esiste una proporzionalità diretta fra le distanze percorse Δs e i quadrati dei corrispondenti intervalli di tempo $(\Delta t)^2$; questo è vero per diverse inclinazioni del piano e anche quando cambia la massa la composizione della sfera:

$$\Delta S = \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2.$$

Da ciò arriva alla formulazione di una legge generale sul moto di caduta libera, che vale anche al limite quando il piano inclinato è in posizione verticale.

Tradotta in parole, la legge afferma che, se non ci fosse l'attrito con l'aria, tutti i corpi cadrebbero con un moto uniformemente accelerato.

IL METODO SPERIMENTALE

Galileo è stato un rivoluzionario. Ha avuto il coraggio di mettere in dubbio ciò che i suoi contemporanei ritenevano ovvio e soprattutto ha inventato il metodo sperimentale, su cui si fonda la scienza.

Secondo questo metodo, un'affermazione è vera se è verificata dagli esperimenti e non se si basa sul principio di autorità («l'ha detto Aristotele»). Gli esperimenti sono il banco di prova di un modello o una teoria: fino a quando la verificano, la teoria è vera; basta un solo esperimento che la contraddica per renderla falsa.

Ripercorriamo i passi del metodo sperimentale, facendo riferimento alla caduta dei gravi.

1. *Osservazione di un fenomeno*: tutti i corpi cadono e il loro moto verso il basso è influenzato dall'attrito dell'aria.
2. *Scelta delle grandezze fisiche per descriverlo*: lunghezza, tempo, velocità, accelerazione.
3. *Formulazione di un'ipotesi*: se l'attrito con l'aria è trascurabile, i corpi cadono con accelerazione costante.
4. *Esperimenti per verificare l'ipotesi*: misura della relazione fra tempi e lunghezze nella caduta dal piano inclinato, caduta libera come piano inclinato a 90 gradi in condizioni tali che l'attrito sia trascurabile. Se gli esperimenti contraddicono l'ipotesi, occorre scartarla, inventarne una nuova e ripetere il ciclo.
5. *Enunciazione della legge sperimentale*:

$$\Delta S = \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2.$$

Le leggi sperimentali costituiscono delle conoscenze particolari che sono poi integrate in strutture logiche più complete, le teorie fisiche.

Per esempio, la legge di caduta dei gravi può essere dedotta a partire dai princìpi della dinamica, che sono le leggi su cui si basa tutta la meccanica.

Le teorie, infatti, sono costruite in modo da permettere di derivare dai loro assiomi tutte le leggi sperimentali note in un certo ambito della fisica. L'accordo con le leggi sperimentali conferma la teoria.

ANIMAZIONE

Grafico spazio-tempo del moto armonico (1 minuto)

Quindi,

> il grafico spazio-tempo e quello accelerazione-tempo sono direttamente proporzionali, ma i segni delle due grandezze sono sempre opposti.

La legge del moto armonico

La curva che compare nel grafico spazio-tempo del moto armonico disegnata dal sensore di posizione si chiama *cosinusoide*. L'abbiamo ottenuta scegliendo un sistema di riferimento in cui l'origine $s = 0$ m è posta al centro dell'oscillazione e scegliendo l'istante $t = 0$ s nel momento in cui l'oscillazione è nel suo punto massimo. La formula che fornisce la posizione s in funzione dell'istante di tempo t è:

$$s = r \cos \omega t = r \cos \frac{2\pi t}{T} \qquad (22)$$

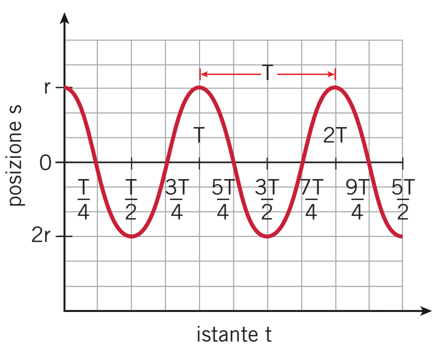


Figura 17 Grafico spazio-tempo del moto armonico.

Ricordando la costruzione presentata all'inizio del paragrafo, ω è la velocità angolare del moto circolare uniforme che genera il moto armonico e r è il raggio della traiettoria circolare; ω e T sono legati dalle equazioni (**17**).

Nel moto armonico r è l'ampiezza dell'oscillazione e la grandezza ω viene chiamata **pulsazione**.

Riferendoci al grafico (figura 17) della cosinusoide riportato a lato, studiamo nella tabella seguente alcuni casi:

Moto armonico				
t	0	$T/4$	$T/2$	T
s	$s = r \cos 0 = r$	$s = r \cos \pi/2 = 0$	$s = r \cos \pi = -r$	$s = r \cos 2\pi = r$

- All'istante iniziale il corpo è nel punto di massimo spostamento positivo dal centro dell'oscillazione.
- Dopo 1/4 di periodo passa per il punto centrale.
- Dopo 1/2 periodo è giunto al punto di massima oscillazione negativa.
- Dopo un periodo, l'oscillazione ricomincia.

Per la velocità istantanea nel moto armonico, il grafico velocità-tempo visto in precedenza e la teoria stabiliscono che vale la relazione

$$v = -\omega r \operatorname{sen} \omega t = -v_0 \operatorname{sen} \omega t. \qquad (23)$$

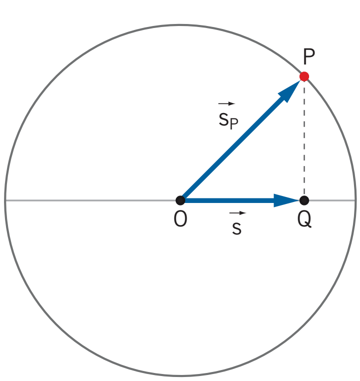
Dove $v_0 = \omega r$ è il massimo modulo della velocità del corpo che oscilla ed è anche il modulo della velocità del moto circolare uniforme ideale che genera il moto armonico.

L'accelerazione del moto armonico

Una pallina che si muove di moto armonico si trova nel punto Q della sua traiettoria.

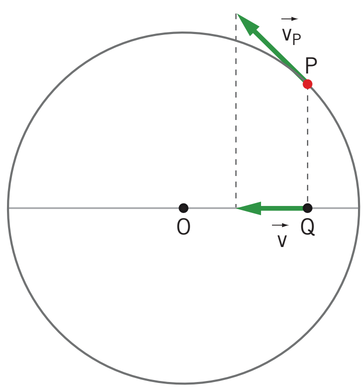
Q è la proiezione di un punto P che si muove di moto circolare uniforme. Il **vettore posizione** $\vec{s}$ di Q è il vettore che ha origine nel centro di oscillazione e la punta dove si trova Q.

▶ Il vettore posizione della pallina è la proiezione sul diametro del raggio vettore $\vec{s}_P$, che è il vettore posizione del punto P.



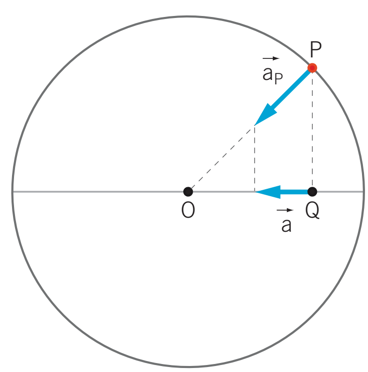
A

▶ Allo stesso modo, il vettore velocità della pallina è la proiezione sul diametro del vettore velocità istantanea di P.



B

▶ Così anche il vettore accelerazione della pallina è la proiezione sul diametro dell'accelerazione centripeta del punto P.



C

Dalle figure precedenti si vede che

> L'accelerazione $\vec{a}$ in un punto Q del moto armonico ha sempre verso opposto al vettore posizione $\vec{s}$ di Q **(figura 18)**.

ESPERIMENTO VIRTUALE

Moto circolare e armonico
- Gioca
- Misura
- Esercitati

Nel confronto tra il grafico spazio-tempo e quello accelerazione-tempo avevamo inoltre visto che in ogni istante il valore di a e quello di s sono direttamente proporzionali.

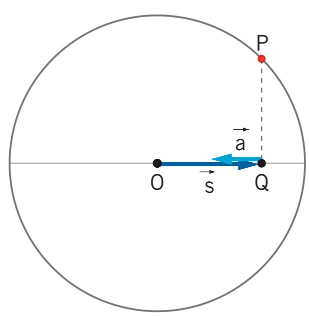


Figura 18 I vettori $\vec{a}$ e $\vec{s}$ hanno la stessa direzione e versi opposti.

La formula che fornisce $\vec{a}$ e che riassume queste due proprietà è:

pulsazione (rad/s)

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{s} \qquad (24)$$

vettore accelerazione (m/s²)

vettore posizione (m)

Ricordando la formula (22), il valore dell'accelerazione può essere espresso come

$$a = -\omega^2 s = -\omega^2 r \cos \omega t = -a_0 \cos \omega t, \qquad (25)$$

dove $a_0 = \omega^2 r$ è il massimo modulo dell'accelerazione del corpo che oscilla ed è anche valore dell'accelerazione centripeta del moto circolare uniforme ideale che genera il moto armonico.

ESEMPIO

Una massa attaccata a una molla oscilla di moto armonico con una pulsazione $\omega = 4{,}1$ rad/s; a un certo punto la massa si trova nella posizione $s = -0{,}057$ m.

▶ Calcola il valore dell'accelerazione della massa in tale condizione.

Dalla formula (**24**) si ottiene

$$a = -\omega^2 s = -\left(4{,}1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \times (-\,0{,}057\ \text{m}) = 0{,}96\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

L'unità di misura risulta m/s² perché il radiante è un numero puro e quindi non compare nel risultato finale.

Dimostrazione della legge per l'accelerazione nel moto armonico

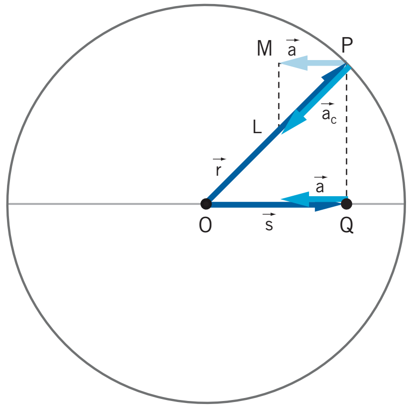


Figura 19 Posizioni e accelerazioni del moto circolare uniforme e del corrispondente moto armonico.

Per dimostrare la formula (**24**), disegniamo il raggio vettore $\vec{r}$, il vettore posizione $\vec{s}$ di Q, l'accelerazione centripeta $\vec{a}_c$ del moto circolare e l'accelerazione $\vec{a}$ del moto armonico (figura 19).

- Si vede che i vettori $\vec{a}$ e $\vec{s}$ hanno la stessa direzione e versi opposti, quindi possiamo introdurre un fattore di proporzionalità k fra il modulo di $\vec{a}$ e il modulo di $\vec{s}$, cioè scrivere $\vec{a} = -k\,\vec{s}$.

- Per calcolare k notiamo che i due triangoli OQP e PML sono simili perché sono entrambi rettangoli e hanno uguali gli angoli $Q\hat{O}P$ e $L\hat{P}M$ (alterni interni tra $\vec{s}$ e $\vec{a}$, con la trasversale $\vec{r}$). Allora si può scrivere la proporzione

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{PL}}{\overline{OP}}, \quad \text{cioè} \quad \frac{a}{s} = \frac{a_c}{r}.$$

Il valore di a (modulo del vettore $\vec{a}$) si ricava moltiplicando per s i due membri della seconda equazione e sostituendo al posto di a_c l'espressione $\omega^2 r$:

$$a = \frac{a_c}{r}s = \frac{\omega^2 \cancel{r}}{\cancel{r}}s = \omega^2 s \qquad \Rightarrow \qquad a = \omega^2 s.$$

- Quindi il valore di k è ω^2, per cui otteniamo infine la formula (**24**): $\vec{a} = -\omega^2\vec{s}$.

IL MOTO SU UNA RETTA E IL MOTO PARABOLICO

In un sistema di riferimento inerziale, il moto più semplice è quello compiuto da un punto materiale sul quale agisce una forza totale nulla. In base al primo principio della dinamica, il punto materiale mantiene costante il proprio vettore velocità e la sua traiettoria è rappresentata da una retta, cioè si muove di moto rettilineo uniforme.

Grafico spazÚ-tempo del moto rettŠineo uniforme (forza nulla)

$$s = s_0 + vt$$

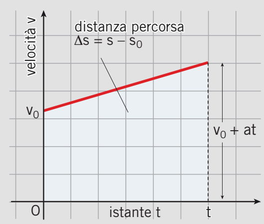
posizione all'istante t = posizione all'istante t_0 + (velocità del moto) × × (istante di tempo)

- È una retta che interseca l'asse verticale delle posizioni nel punto (0 s, s_0): la retta passa per l'origine solo quando si ha $s_0 = 0$ m e in tal caso la legge oraria si riduce al caso particolare $s = vt$.

Moto rettŠineo uniformemente accelerato (forza costante)

Per il secondo principio della dinamica un punto materiale soggetto a una forza costante in modulo, direzione e verso, subisce un'accelerazione costante: il punto materiale descrive un moto rettilineo uniformemente accelerato.

Grafico velocità-tempo

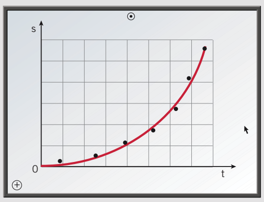


$$v = v_0 + at$$

velocità = velocità iniziale + (accelerazione) × (istante di tempo)

- È una retta che interseca l'asse verticale delle velocità nel punto (0 s, v_0).
- Nel caso semplice in cui il punto materiale parta da fermo ($v_0 = 0$ m/s), l'equazione diventa $v = at$.

Grafico spazio-tempo



$$s = \frac{1}{2}at^2$$

posizione = 1/2 × (accelerazione) × (istante di tempo)^2

- Nel caso in cui il punto materiale parte da fermo ($v_0 = 0$ m/s) dall'origine delle posizioni ($s_0 = 0$ m), si tratta di una parabola con vertice nell'origine.
- Nel caso generale, la formula diventa $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

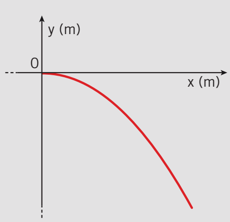
Moto parabolico (moto di un proiettŠe)

- Si ha quando il vettore velocità iniziale $\vec{v}_0$ è obliquo rispetto al vettore accelerazione $\vec{g}$.
- È dato dalla sovrapposizione di due moti: un moto rettilineo uniforme orizzontale e un moto rettilineo uniformemente accelerato verticale.

Velocità iniziale orizzontale

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}x^2$$

- v_0 è la velocità iniziale orizzontale;
- g è l'accelerazione di gravità.

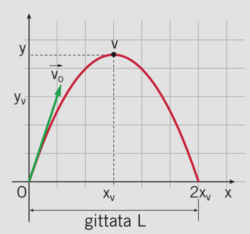


- La traiettoria di un oggetto lanciato in orizzontale è una *parabola* con il vertice nel punto di lancio.

Velocità iniziale obliqua

$$y = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_x^2}x^2$$

- v_x è la componente di v_0 lungo l'asse x;
- v_y è la componente di v_0 lungo l'asse y.



- La traiettoria di un oggetto lanciato in direzione obliqua è una *parabola*.
- Si chiama *gittata* la distanza che separa il punto di partenza di un corpo lanciato in direzione obliqua, verso l'alto, dal punto in cui esso torna al suolo.

IL MOTO CIRCOLARE UNIFORME E IL MOTO ARMONICO

Il *moto circolare uniforme* descrive un punto materiale che percorre una traiettoria circolare mantenendo costante il modulo del vettore velocità istantanea. Si chiama *moto armonico* il movimento che si ottiene proiettando su un diametro le posizioni di un punto materiale che si muove di moto circolare uniforme.

Grandezze caratteristiche del moto circolare uniforme

Periodo

- È la durata di un giro completo della traiettoria circolare.
- Nel Sistema Internazionale si misura in s.

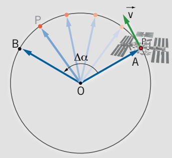
Frequenza

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\text{frequenza} = \frac{1}{\text{periodo}}$$

- È il numero di periodi che il moto compie nell'unità di tempo.
- Nel Sistema Internazionale si misura in s^{-1} o *hertz* (simbolo Hz).

Velocità angolare



$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{velocità angolare} = \frac{\text{angolo spazzato}}{\text{tempo impiegato}}$$

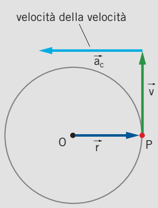
- È il rapporto tra l'angolo al centro $\Delta\alpha$ e l'intervallo di tempo Δt impiegato dal raggio vettore a spazzare tale angolo.
- Nel Sistema Internazionale si misura in radianti al secondo (rad/s).
- Viene utilizzata per esprimere il modulo del vettore velocità istantanea:
$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f = \left(\frac{2\pi}{T}\right) r = \omega r$$

AccelerazÚne centrìpeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\text{accelerazione centripeta} = \frac{(\text{velocità})^2}{\text{raggio}} = (\text{velocità angolare})^2 \times \text{raggio}$$

- Nel moto circolare uniforme il vettore accelerazione istantanea (*accelerazione centripeta*) è sempre rivolto verso il centro della circonferenza.

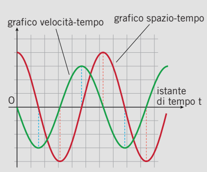


Proprietà del moto armonico

Grafico *spazio-tempo* e *velocità-tempo*

$s = r \cos \omega t$

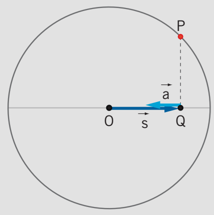
$v = -\omega r \,\mathrm{sen}\, \omega t = -v_0 \,\mathrm{sen}\, \omega t$



- r è il raggio del moto circolare uniforme che genera il moto armonico ed è uguale all'ampiezza dell'oscillazione;
- ω è la velocità angolare (pulsazione) del moto circolare uniforme che genera il moto armonico.
- Entrambe le curve sono *cosinusoidi*.

Accelerazione del moto armonico

$a = -\omega^2 s = -\omega^2 r \cos \omega t = -a_0 \cos \omega t$



- Il modulo dell'accelerazione in un punto Q del moto armonico è direttamente proporzionale alla distanza dal centro dell'oscillazione (modulo del vettore posizione).
- L'accelerazione in un punto Q del moto armonico ha sempre verso opposto al vettore posizione $\vec{s}$ di Q: l'accelerazione è massima quando lo spostamento è minimo, ed è nulla quando l'oscillazione passa per il centro.
- $a_0 = \omega^2 r$ è il massimo modulo dell'accelerazione del corpo che oscilla ed è anche il valore dell'accelerazione centripeta del moto circolare uniforme ideale che genera il moto armonico.

Forza centrìpeta

$$F_c = m a_c = m\frac{v^2}{r}$$

$$\text{forza centripeta} = \text{massa} \times \frac{(\text{velocità})^2}{\text{raggio}}$$

- Agisce su un oggetto che si muove di moto circolare uniforme.
- È diretta verso il centro della traiettoria circolare, cambia la direzione del vettore velocità dell'oggetto, ma non il suo valore.
- Quando si osserva un fenomeno in un sistema non inerziale con accelerazione centrìpeta, compare una forza apparente, detta *centrifuga*.

ESERCIZI

20 test (30 minuti)
TEST INTERATTIVI

DOMANDE SUI CONCETTI

1 In tre grafici spazio-tempo sono riportati (a) un segmento con pendenza positiva, (b) un segmento con pendenza negativa e (c) un segmento con pendenza nulla (quindi orizzontale). Di che segno è la velocità dei moti descritti da ciascun grafico?

2 In tre grafici velocità-tempo sono riportati (a) un segmento con pendenza positiva, (b) un segmento con pendenza negativa e (c) un segmento con pendenza nulla (quindi orizzontale). Di che segno è l'accelerazione dei moti descritti da ciascun grafico?

3 Un oggetto subisce solo la forza-peso e ha quindi accelerazione $\vec{a} = \vec{g}$. Possiamo affermare che si muove sempre seguendo una traiettoria parabolica?

4 Il moto circolare uniforme è un moto accelerato?

5 Come mai nel moto circolare uniforme la forza centripeta non causa l'avvicinamento dell'oggetto in moto verso il centro?

6 Quando un DVD viene inserito nel lettore ottico e avviato, le sue parti si muovono alla stessa velocità (in modulo) o alla stessa velocità angolare?

7 La catena della bicicletta è montata su due corone di raggi diversi. Quando la bicicletta si muove, le parti esterne delle due corone hanno la stessa velocità (in modulo) o la stessa velocità angolare?

8 Come è diretta l'accelerazione nel moto circolare non uniforme, in cui la velocità cambia anche in modulo?

9 Le gare di ciclismo nei velodromi si svolgono su piste inclinate verso l'interno in corrispondenza delle curve. Per quale motivo secondo te queste piste non sono piane?

10 Il *Cilindro di O'Neill* è un progetto di habitat spaziale per la colonizzazione dello spazio cosmico, costituito da due cilindri in rotazione, di raggio 3 km, sulla cui superficie interna possono camminare gli astronauti. La rotazione serve a creare una forza di gravità artificiale. Perché?

11 La forza centripeta è una forza come la forza elastica, la forza-peso o la forza di attrito? In altre parole, è una «nuova» forza da aggiungere a queste?

12 Un'automobilina si muove a velocità di modulo costante in uno spazio tra due pareti: quando ne urta una, si gira di 180° e si dirige verso l'altra parete. Il moto dell'automobilina può essere considerato un moto armonico?

PROBLEMI

1 IL MOTO SU UNA RETTA

1 ★☆☆ Un'auto che si muove alla velocità costante di 36 km/h lungo una strada rettilinea si trova in un certo istante 12 m prima di un incrocio.

▶ Quanto era distante dall'incrocio due secondi prima?

[32 m]

2 ★☆☆ Quando passa vicina alla Terra, la cometa di Halley ha una velocità di circa 70 km/s. Durante il passaggio, percorre una distanza di $4{,}0 \times 10^5$ km, pari a circa quella tra la Terra e la Luna.

▶ Quanto tempo impiega a percorrere quella distanza?

[$5{,}7 \times 10^3$ s]

3 ★☆☆ Una palla di raggio $r = 20$ cm e massa $m = 400$ g è lasciata cadere da un aereo ad alta quota. L'attrito dell'aria produce una forza di attrito viscoso diretta verso l'alto, di intensità $F_v = 6\pi\eta r v$, dove v è la velocità della palla e $\eta = 18 \times 10^{-6}$ kg/(m·s) è il coefficiente di attrito viscoso dell'aria. Assumi che questa sia l'unica forza che agisce sulla palla, oltre la forza-peso. A causa dell'attrito dell'aria, la palla finirebbe per avere una velocità costante di caduta, detta *velocità limite*.

▶ Determina la velocità limite che avrebbe palla.

[$5{,}8 \times 10^4$ m/s]

4 ★★☆ Un treno viaggia a 157 km/h. A un certo punto, il macchinista vede una mucca ferma sui binari e inizia a rallentare con un'accelerazione negativa pari a $-6{,}8\ \text{m/s}^2$. La manovra di frenata inizia alla distanza di 180 m dall'animale.

▶ Quanto tempo impiega il treno a fermarsi?

▶ A quanti metri dall'animale si arresta il treno?

[6,4 s; 40 m]

5 ★★☆ Per trascinare un carrello di massa 400 kg un operaio applica una forza di 50 N a una corda inclinata di 30° gradi rispetto al pavimento.

▶ Calcola lo spazio percorso dal carrello in 30 s.

▶ Calcola il tempo necessario perché il carrello raggiunga la velocità di 5,0 m/s partendo da fermo.

▶ Caricato con un baule, il carrello impiega 67 s per raggiungere la velocità di 5,0 m/s. Qual è la massa del baule?

[49 m; 46 s; $1{,}8 \times 10^2$ kg]

6 ★★☆ Un vigile urbano viaggia in moto alla velocità di 36 km/h e viene superato da un'auto che viaggia alla velocità costante di 72 km/h. Due secondi dopo essere stato superato, il vigile accelera al massimo per raggiungere l'auto, ma nello stesso istante anche l'auto accelera al massimo per fuggire. La massa del vigile e della moto è 300 kg e la forza massima del suo motore è 3,0 kN. La massa del guidatore e dell'auto è 900 kg e la forza massima del suo motore è 6,0 kN.

▶ Dopo quanto tempo il vigile riesce a raggiungere l'auto?

[7,3 s]

7 ★★☆ Un'auto lanciata a una velocità di 90 km/h vede un ostacolo davanti a sé e si arresta in 50 m frenando su una strada orizzontale. Schematizziamo l'azione dei freni come l'applicazione di una forza costante all'auto.

▶ Quanto vale il modulo dell'accelerazione dell'auto?

(Elaborato da *Olimpiadi della fisica, gara nazionale di secondo livello,* 2003).

[$6{,}3\ \text{m/s}^2$]

2 IL MOTO PARABOLICO (FORZA COSTANTE)

8 ★☆☆ Un tennista lancia una pallina con un angolo di 45° rispetto al terreno e velocità iniziale di intensità 21 m/s. Calcola:

▶ le componenti orizzontale e verticale della velocità iniziale;

▶ la gittata.

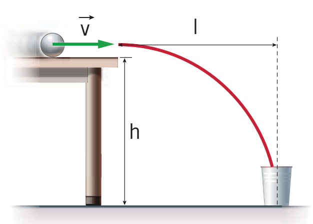
[15 m/s; 15 m/s; 46 m]

9 ★★☆ **PROBLEMA SVOLTO**

Una biglia viene lanciata oltre il bordo del tavolo con una velocità $v = 0{,}56\ \text{m/s}$.
Il tavolo è alto 76 cm.

▶ A che distanza dal tavolo cade la biglia?

v = 0,560 m/s   l = ?
h = 76,0 cm



■ Strategia e soluzione

- La biglia è sottoposta solo alla forza-peso, dunque compie un moto parabolico, descritto dalle equazioni

$$x = x_0 + v_{0,x}t$$

$$y = y_0 + v_{0,y}t + \frac{1}{2}at^2$$

- Dalla scelta del sistema di assi cartesiani dipendono sia i valori iniziali della posizione sia il segno di velocità e accelerazione. Scegliendo come origine del sistema di assi il punto in cui la biglia lascia il tavolo, le posizioni iniziali sono $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Se l'asse x è diretto verso destra e l'asse y verso l'alto, le velocità iniziali della biglia sono

$$v_{0,x} = 0{,}56 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad v_{0,y} = 0,$$

mentre l'accelerazione nella direzione verticale è negativa, $a_y = -g = -9{,}81 \text{ m/s}^2$.

- Quando la biglia tocca terra, la sua posizione verticale è $y = -0{,}76$ cm. Inserendo questo valore e gli altri nell'equazione per il moto verticale

$$-(0{,}76 \text{ m}) = -\frac{1}{2}gt^2$$

ricaviamo il tempo che la biglia impiega per giungere a terra:

$$t = \sqrt{\frac{2 \times (0{,}76 \text{ m})}{(9{,}81 \text{ m/s}^2)}} = 0{,}39 \text{ s}$$

- Inserendo questo dato nell'equazione del moto nella direzione orizzontale otteniamo la distanza richiesta:

$$x = \left(0{,}56 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \times (0{,}39 \text{ s}) = 0{,}22 \text{ m}.$$

Discussione

Per moti a bassa velocità, come quello qui esaminato, le forze dovute alla presenza dell'aria sono trascurabili (vedi gli esercizi 3 e 4) ed è lecito approssimare l'accelerazione della biglia con quella di gravità. Nel risolvere un problema è importante scegliere posizione e orientamento del sistema di assi cartesiani: da questa scelta dipendono sia i valori di alcune delle grandezze coinvolte, come la posizione, sia i loro segni.

10 ★★☆ Nel 1991 ai Campionati Mondiali di Atletica Leggera di Tokyo, l'atleta statunitense Mike Powell stabilì il record mondiale di salto in lungo con la misura di 8,95 m, migliorando così il precedente record di 8,90 m. Assumi che la forza di attrito sia stata trascurabile durante il salto e che Powell sia saltato dalla pedana con un angolo di inclinazione di 45°.

▶ Quale velocità aveva Powell al momento del salto?

[9,4 m/s]

11 ★★☆ Una cameriera distratta lancia orizzontalmente un bicchiere vuoto sul tavolo al barman perché lo riempia. Purtroppo il lancio è lungo, e il bicchiere cade a terra a una distanza orizzontale di 53 cm dal bordo del tavolo che è alto 71 cm.
Calcola:

▶ dopo quanto tempo il bicchiere arriva a terra;

▶ la velocità del bicchiere al momento del distacco dal tavolo.

[0,38 s; 1,4 m/s]

12 ★★☆ Un pallone viene lanciato con una velocità di 8,7 m/s e con un'inclinazione di 60° rispetto al suolo.

▶ Determina la massima altezza che il pallone può raggiungere.

▶ Determina quando il pallone si trova a metà dall'altezza massima.

[2,9 m; 0,22 s e 1,3 s]

13 ★★☆ Una palla da baseball viene lanciata in 0,65 s da un giocatore a un compagno di squadra che dista 17 m. Assumi di potere trascurare l'attrito dell'aria.

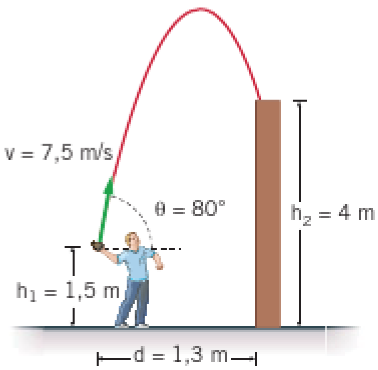
▶ Determina la velocità iniziale della palla nella direzione verticale.

[3,2 m/s]

14 ★★☆ Un ragazzo lancia un sacchetto di sabbia in cima a un muro alto 4 m e posto 1,3 m davanti a lui. Il sacchetto si stacca dalle mani del ragazzo a un'altezza di 1,5 m da terra, come è mostrato in figura. La velocità di lancio è 7,5 m/s, l'angolo con l'orizzontale è 80°, l'attrito con l'aria è trascurabile.

▶ Quanto dura il volo del sacchetto di sabbia?
(*Olimpiadi della Fisica, gara di primo livello 2010*)

[1,0 s]



3 IL MOTO CIRCOLARE UNIFORME

15 ★ Determina le frequenze delle lancette dei secondi, dei minuti e delle ore di un orologio.

[$1{,}7 \times 10^{-2}$ Hz; $2{,}8 \times 10^{-4}$ Hz, $2{,}3 \times 10^{-5}$ Hz]

16 ★ La Terra ruota intorno al suo asse in circa 24 ore. Il raggio terrestre all'Equatore è di circa $6{,}4 \times 10^3$ km.

▶ Determina la velocità con cui si muove nello spazio un punto sull'Equatore.

[$4{,}7 \times 10^2$ m/s]

17 ★★ Un vecchio disco in vinile ha una circonferenza di 53 cm e contiene una canzone di durata pari a 3,0 min. Per ascoltarla, il disco deve compiere 135 giri.

▶ Calcola il modulo della velocità di un punto che si trova sul bordo della circonferenza.

[0,40 m/s]

18 ★★ La lancetta dei minuti di un orologio è lunga 4 cm. La velocità della punta della lancetta dei minuti è 24 volte quella della lancetta delle ore.

▶ Quanto è lunga la lancetta delle ore?

[2×10^{-2} m]

4 LA VELOCITÀ ANGOLARE

19 ★ La distanza media Venere-Sole è di $1{,}1 \times 10^8$ km. Il periodo orbitale è di 224,70 giorni.

▶ Quanto vale il valore della sua velocità media?

▶ Quanto vale la velocità angolare di rotazione attorno al Sole?

(Assumi che l'orbita di Venere intorno al Sole sia circolare.)

[$3{,}6 \times 10^4$ m/s; $3{,}2 \times 10^{-7}$ rad/s]

20 ★ La sirena di un'ambulanza lampeggia 15 volte in 3,0 s.

▶ Qual è la velocità angolare dello schermo che periodicamente copre e scopre la luce della sirena?

[31 rad/s]

21 ★★ **PROBLEMA SVOLTO**

Il lettore di un impianto stereo fa girare un CD con una frequenza variabile tra 200 giri al minuto e 500 giri al minuto. Supponiamo che, mentre si sta leggendo una certa traccia, il CD stia compiendo 330 giri al minuto.

▶ Quanto vale la frequenza f di rotazione del CD?

▶ Qual è il valore della velocità angolare ω?

▶ Quanto è ampio l'angolo $\Delta\alpha$ di cui è ruotato il CD dopo un intervallo di tempo $\Delta t = 0{,}100$ s?

Strategia e soluzione

- La frequenza del CD può essere calcolata come:

$$f = \frac{330 \text{ giri}}{1 \text{ min}} = \frac{330 \text{ giri}}{60 \text{ s}} = 5{,}50 \text{ Hz.}$$

- Partendo dalla formula (**17**) e ricordando che $f = \frac{1}{T}$, la velocità angolare è data da:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = (2\pi\,\text{rad})(5{,}50\ \text{s}^{-1}) = 34{,}6\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- Per trovare l'angolo di cui è ruotato il disco è sufficiente isolare $\Delta\alpha$ moltiplicando i due membri della formula (**15**) per Δt:

$$\Delta\alpha = \omega\Delta t = 34{,}6\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 0{,}100\ \text{s} = 3{,}46\ \text{rad}.$$

Discussione

Indichiamo con $\Delta g°$ la misura in gradi dell'angolo $\Delta\alpha$. Visto che a 180° corrispondono π radianti, vale la proporzione $\Delta g°/180° = \Delta\alpha/\pi$. Da essa ricaviamo

$$\Delta g° = \frac{\Delta\alpha \cdot 180°}{\pi} = \frac{3{,}46\ \text{rad} \cdot 180°}{3{,}14\ \text{rad}} = 198°.$$

Quindi, in un decimo di secondo il CD ruota di un angolo ampio 198°.

22 ★★☆ Il bordo di un vecchio disco a 45 giri (al minuto) ruota alla velocità di 0,47 m/s.

▶ Qual è il valore della velocità di un punto del disco a 3,0 cm dal bordo?

[0,33 m/s]

23 ★★☆ Una piattaforma rotante ha un raggio di 50 cm e descrive un angolo di 90° in un intervallo di tempo pari a 0,60 s. Calcola:

▶ il valore della velocità angolare;

▶ la frequenza di rotazione della piattaforma;

▶ il periodo di rotazione della piattaforma;

▶ il modulo della velocità di un oggetto che si trova sul bordo della piattaforma.

[2,6 rad/s; 0,42 Hz; 2,4 s; 1,3 m/s]

5 L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA

24 ★☆☆ Una giostra in movimento descrive una traiettoria circolare. Per descrivere l'arco di circonferenza che va dall'estremo R del suo diametro all'estremo opposto S impiega 1,0 s. In entrambi i punti, il valore della velocità è 10 cm/s.

▶ Rappresenta graficamente la situazione.

▶ Calcola il modulo del vettore accelerazione.

[20 cm/s²]

25 ★☆☆ Un satellite spia artificiale orbita attorno alla Terra all'altezza dell'Equatore su un'orbita circolare a 140 km dal suolo. Assumi che la forza-peso sia la sola responsabile del moto circolare uniforme del satellite attorno alla Terra, con velocità di modulo 28 180 km/h. Il raggio terrestre è di circa 6380 km.

▶ Calcola il valore dell'accelerazione del satellite.

[9,4 m/s²]

26 ★★☆ Nel passare il pallone a un compagno, un giocatore di pallacanestro descrive con il braccio un arco di circonferenza di ampiezza 60,0° in 0,750 s, a velocità approssimativamente costante. La lunghezza del braccio del giocatore è di 80,0 cm.

▶ Calcola con quale velocità viene lanciato il pallone.

▶ Qual è il valore dell'accelerazione centripeta impressa al pallone durante la rotazione del braccio?

[1,12 m/s; 1,56 m/s²]

27 ★★☆ Un mulino a vento fa girare il suo perno, che ha un diametro di 40 cm, con un periodo di 11 s. Il perno aziona una macina che acquista una velocità di 0,63 m/s.

Calcola:

▶ il valore della velocità del perno;

▶ il valore dell'accelerazione centripeta del perno;

▶ il diametro della macina;

▶ il valore dell'accelerazione centripeta della macina.

[$1,1 \times 10^{-1}$ m/s; $6,5 \times 10^{-2}$ m/s^2; 2,2 m; $3,6 \times 10^{-1}$ m/s^2]

6 LA FORZA CENTRIPETA E LA FORZA CENTRIFUGA APPARENTE

28 ★☆☆ All'aeroporto una valigia di 25 kg, posta su una piattaforma in rotazione su un piano orizzontale, si muove di moto circolare uniforme. Il raggio della traiettoria è 2,8 m e l'accelerazione centripeta è 8,3 m/s^2. Calcola:

▶ il valore della forza che agisce sulla valigia.

▶ La velocità della valigia.

[$2,1 \times 10^2$ N; 4,8 m/s]

29 ★★☆ Le ruote di un trenino elettrico di massa 10 kg hanno un diametro di 8,2 cm e una velocità di rotazione di 10 giri al secondo. Il trenino percorre una pista e dopo un tratto rettilineo affronta a velocità di valore numerico costante una curva di raggio 1,2 m. Calcola:

▶ la velocità a cui viaggia il treno.

▶ la forza centripeta sul treno durante la curva.

[2,6 m/s; 56 N]

30 ★★☆ Un'auto di massa 1000 kg affronta una curva alla velocità di 55 km/h. Il coefficiente di attrito tra le gomme e il piano stradale è 0,7.

▶ Quanto misura il raggio della curva?

(*Suggerimento*: la forza centripeta è la forza di attrito della strada.)

[34 m]

31 ★★☆ Un cavallo di 400 kg trotta in circolo alla velocità di 2,0 m/s. Il cavallo è tenuto per mezzo di una corda lunga 3,8 m da un addetto del maneggio che si trova al centro del cerchio. Assumi che la corda sia di massa trascurabile.

▶ Determina la forza che l'uomo esercita sulla corda.

▶ A un certo punto, l'addetto si stanca: per fare meno fatica deve allentare la corda permettendo al cavallo una traiettoria circolare più ampia o, viceversa, deve accorciare la corda avvicinando il cavallo a sé?

[$4,2 \times 10^2$ N]

7 IL MOTO ARMONICO

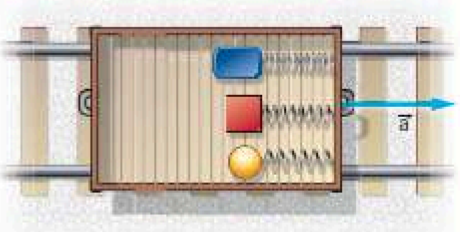
32 ★☆☆ In un circo un acrobata di 55 kg salta su un tappeto elastico che oscilla con moto armonico. Il periodo dell'oscillazione è 2,3 s.

▶ Calcola la costante elastica del tappeto.

[$4,1 \times 10^2$ N/m]

33 ★★☆ **PROBLEMA SVOLTO**

Un carrellino si muove lungo un binario rettilineo con una accelerazione costante di 1,5 m/s^2, partendo da fermo. Al suo interno sono contenuti tre dinamometri agganciati alla parete anteriore del carrellino. All'altro estremo di ciascun dinamometro è agganciato un oggetto, come mostra la figura che ritrae il carrellino visto dall'alto. I tre oggetti hanno massa, rispettivamente, di 1 kg, 2 kg e 4 kg. Quando il carrellino è in moto, i tre oggetti oscillano con ampiezza di oscillazione di 6,0 cm. Trascura le forze di attrito.



▶ Determina la pulsazione dei tre oggetti.

▶ Determina la loro velocità massima durante l'oscillazione.

Strategia e soluzione

- Al momento della partenza, la parete anteriore del carrellino ha accelerazione $\vec{a}$ rispetto ai tre oggetti, che accelerano gradualmente a causa dell'allungamento delle molle dei dinamometri. Se si esamina la situazione dal sistema di riferimento del carrellino (che è un sistema di riferimento non inerziale), i tre oggetti hanno inizialmente accelerazione $-\vec{a}$ rispetto alla parete del carrellino ed è quindi come se fossero sottoposti a tre forze $\vec{F}_1 = -m_1\vec{a}$, $\vec{F}_2 = -m_2\vec{a}$ e $\vec{F}_3 = -m_3\vec{a}$.

- Queste forze nascono dal fatto di essere in un sistema di riferimento non inerziale e sono perciò *forze apparenti*: esse sono dovute a una accelerazione lineare del sistema di riferimento (in questo differiscono dalla forza centrifuga, discussa nel paragrafo 7, che nasce invece da una accelerazione centripeta).

- La situazione iniziale dei tre oggetti è simile a quella di un oggetto sospeso a un dinamometro discussa nel paragrafo 8, per cui i tre oggetti oscillano orizzontalmente con moto armonico, di pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{a}{s}} = \sqrt{\frac{1{,}5\ \text{m/s}^2}{0{,}06\ \text{m}}} = \sqrt{25\ \text{s}^{-2}} = 5{,}0\ \text{rad/s}$

- La velocità massima durante l'oscillazione è $v_{max} = s\omega = (5{,}0\ \text{rad/s}) \times (0{,}06\ \text{m}) = 0{,}30\ \text{m/s}$.

Discussione

Le tre forze apparenti $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ si comportano a tutti gli effetti come una "forza-peso" diretta orizzontalmente, dal momento che ogni oggetto ha una accelerazione costante di modulo $a = 1{,}2\ \text{m/s}^2$.
Le forze apparenti indicano che ci troviamo in un sistema di riferimento non inerziale. Bisogna però tenere presente che esse non sono delle forze vere e proprie: infatti, non soddisfano il terzo principio della dinamica.

34 ★★☆ L'accelerazione massima di un oggetto che si muove di moto armonico è 450 m/s². La frequenza del moto è di 30 Hz.

▶ Scrivi la legge oraria di questo moto.

▶ Calcola il modulo della velocità massima dell'oggetto.

[$s = 0{,}013 \cos 60\pi t$; 2,5 m/s]

35 ★★☆ Il piatto di un forno a microonde compie una rotazione completa in 12,2 s. Viene messo a scaldare un pezzo di pane in un punto del piatto, a 7,0 cm dal centro. Un bambino guarda il microonde e vede il pezzo di pane muoversi di moto armonico.

▶ Qual è l'accelerazione massima del pezzo di pane in moto armonico rispetto al bambino?

▶ Calcola la frequenza e la pulsazione del moto armonico in questione.

[$1{,}9 \times 10^{-2}$ m/s²; 0,082 Hz ; 0,52 rad/s]

36 ★★☆ Un diapason a forchetta, utilizzato per accordare una chitarra, può far vibrare una delle sue punte di moto armonico con una frequenza di 440,0 Hz (corrispondente al *la* dell'ottava centrale del pianoforte). La corsa della punta del diapason è di 0,90 mm.

▶ Trova l'accelerazione massima della punta del diapason.

▶ Qual è la massima velocità della punta?

[$3{,}44 \times 10^3$ m/s²; $v_{max} = 1{,}24$ m/s]

37 ★★☆ Una ruota, di diametro 90 cm, sta ruotando con una pulsazione di 5,03 rad/s. Sul bordo della ruota c'è una manovella e la sua ombra si proietta verticalmente sul terreno, descrivendo un moto armonico.

▶ Calcola il periodo del moto armonico.

▶ Trova l'ampiezza del moto armonico dell'ombra.

[1,25 s; 0,90 m]

38 ★★ Un oggetto si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza di raggio 30 cm e compie 1 giro completo in 1,5 s. Considera il moto armonico che si ottiene proiettando su un diametro della circonferenza le posizioni occupate dall'oggetto durante il suo moto.

▶ Calcola il periodo e la frequenza del moto armonico.

▶ Calcola il valore della pulsazione.

▶ Disegna il grafico spazio-tempo relativo a tale moto.

[1,5 s; 0,67 Hz; 4,2 rad/s]

PROBLEMI GENERALI

1 ★★ Un cestista alto 2,0 m effettua un tiro libero. La linea del tiro libero dista in orizzontale 4,6 m dal canestro che si trova a 3,05 m dal suolo. Il cestista tira la palla con un angolo di inclinazione di 45° rispetto al suolo.

▶ Quale velocità deve dare il cestista alla palla per fare canestro?

[7,6 m/s]

2 ★★ Due pulegge, montate sugli assi *A* e *B*, sono collegate con una cinghia che trasmette il moto rotatorio da *A* a *B*. La puleggia montata su quest'ultimo asse ha diametro D_B = 80 cm e ruota a 500 giri/min, mentre la frequenza di rotazione dell'asse *A* è di 5000 giri/min.

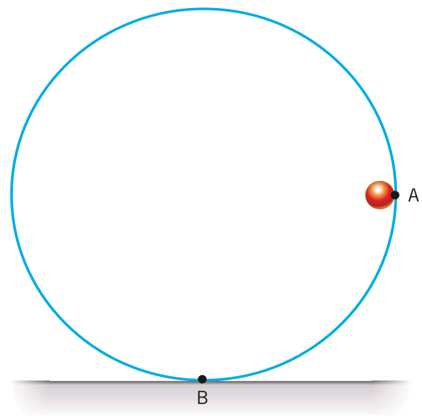
▶ Quale deve essere il diametro D_A della puleggia da collocare sull'asse *A*?

[8,0 cm]

3 ★★ Un profilo circolare è posto verticalmente come nella figura e tenuto fermo. Una biglia di 30 g viene posta al suo interno nel punto *A* e lasciata libera di scivolare lungo la guida.

▶ Determina l'intensità della forza che il profilo esercita in direzione radiale sulla biglia quando questa si trova nel punto *B* con velocità v_B = 2,21 m/s;

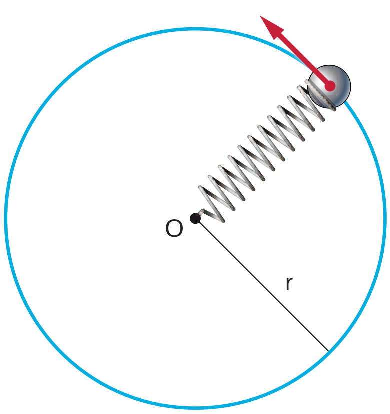
[0,59 N]



4 ★★ Come è mostrato nella figura, una pallina di massa 210 g è vincolata a un punto *O* per mezzo di una molla di costante elastica 289 N/m. La pallina è in moto circolare con una velocità angolare di 3,21 rad/s su un piano orizzontale. Il raggio della circonferenza è 38,1 cm.

▶ Calcola la lunghezza a riposo della molla.

[0,378 m]



5 ★★ Un motociclista percorre una curva di 120 m di raggio alla velocità di 90 km/h.

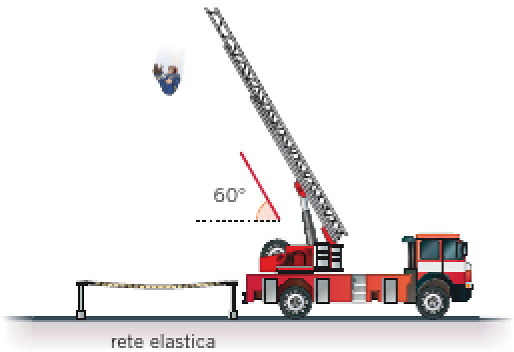
▶ Che informazione se ne può ricavare circa il coefficiente di attrito statico μ_s tra la gomma della ruota e l'asfalto della strada?

(*Olimpiadi della Fisica, gara nazionale di secondo livello, 2002*)

(*Suggerimento*: la forza di attrito dinamico diretta verso il centro della curva ha intensità $F_d \leq \mu_s F_N$, dove F_N è il valore della forza di reazione del suolo.)

[Il coefficiente di attrito statico è maggiore di 0,53]

6 ★★★ Per effettuare un'esercitazione un vigile del fuoco deve salire su un'autoscala, lunga 23 m e inclinata di 60° rispetto al suolo, e lasciarsi cadere su una rete elastica.



▶ Dopo quanto tempo il vigile del fuoco tocca la rete elastica?

▶ Con che velocità finale?

[2,0 s; 20 m/s]

7 ★★★ In un giorno di pioggia un ragazzo per gioco fa ruotare un ombrello aperto. Dal bordo dell'ombrello a un'altezza di 2,2 m dal suolo e a una distanza r 5 0,70 m dall'asta si stacca orizzontalmente una goccia d'acqua. La goccia cade con attrito trascurabile a una distanza di 1,4 m dalla verticale del punto di stacco. Calcola:

▶ il tempo impiegato dalla goccia a toccare terra:

▶ la velocità con cui ruota il bordo dell'ombrello;

▶ il tempo impiegato dall'ombrello per fare un giro.

[0,67 s; 2,1 m/s; 2,1 s]

8 ★★★ L'asse terrestre varia progressivamente, in modo lentissimo, la propria direzione (ma non l'inclinazione): esso ruota facendo perno nel centro della Terra, cosicché i due semiassi ricoprono due superfici coniche opposte al vertice. Immaginando di prolungare l'asse fino a incontrare la sfera celeste, nei due poli celesti, questi, nel tempo, disegnano una linea all'incirca circolare. Il moto completo si compie in circa 26×10^3 anni. Questo spostamento ha come conseguenza la precessione, cioè un anticipo, anno dopo anno, di circa 20 minuti, del punto di intersezione (punto gamma) tra l'equatore celeste e l'eclittica, occupato dal Sole all'equinozio di primavera.

▶ Calcola la frequenza e la velocità angolare del moto di precessione del punto gamma.

▶ Qual è l'ampiezza dell'angolo descritto dal raggio vettore, che unisce il centro della Terra al punto gamma, durante la vita di una persona? (Assumi come vita media 75 anni)

[$1{,}22 \times 10^{-12}$ Hz ; $7{,}66 \times 10^{-12}$ rad/s; 0,018 rad]

9 ★★★ Un criceto fa ruotare la ruota della sua gabbietta con un periodo di 1,1 s. La ruota ha raggio $r_1 = 9{,}0$ cm. Calcola:

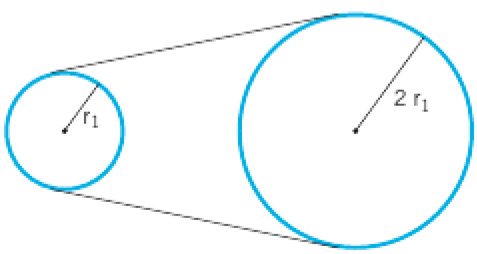
▶ la velocità angolare della ruota;

▶ il valore della velocità di un punto sul bordo della ruota;

▶ il valore dell'accelerazione centripeta della ruota;

▶ la velocità angolare, i valori della velocità e dell'accelerazione centripeta per una ruota di raggio doppio, che è collegata alla prima ruota tramite una cinghia.

[5,7 rad/s; 0,51 m/s; 2,9 m/s²; 2,9 rad/s; 0,51 m/s; 1,5 m/s²]



10 ★★★ Alle Olimpiadi di Pechino del 2008 la gara maschile di lancio del martello è stata vinta con la misura di 82,02 m. Trascura l'attrito dell'aria e assumi che il martello, al momento del rilascio, sia partito con una inclinazione di 45° rispetto al suolo, da un'altezza di 1,7 m. Il martello è lungo 120 cm e ha una massa di 7,27 kg, mentre le braccia dell'atleta sono lunghe 75 cm.

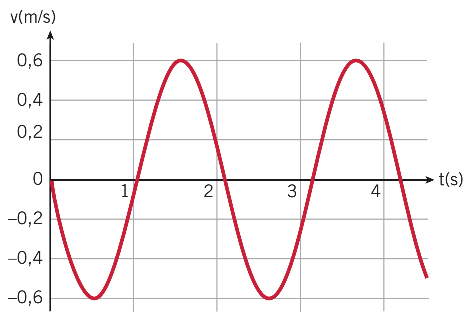
▶ Determina la velocità con cui il martello è stato lanciato.

▶ Determina la forza che l'atleta imprimeva al martello al momento del rilascio.

[29 m/s; $3{,}1 \times 10^3$ N]

11 ★★★ Il grafico nella figura riproduce la velocità al variare del tempo di un moto armonico con accelerazione massima $\alpha = 1{,}8\ \text{m/s}^2$.

▶ Disegna i grafici accelerazione-tempo e spazio-tempo di questo moto armonico.



QUESITI PER L'ESAME DI STATO

Rispondi ai quesiti in un massimo di 10 righe.

1 Trascurando l'attrito con l'aria, ricava l'equazione della traiettoria di un proiettile che si muove con velocità iniziale obliqua.

2 Descrivi le proprietà dei vettori velocità istantanea e accelerazione istantanea nel moto circolare uniforme.

3 Discuti il significato dell'affermazione «la forza centrifuga è una forza apparente».

4 Definisci il moto armonico e illustrane le principali caratteristiche.

TEST PER L'UNIVERSITÀ

1 Un oggetto puntiforme si muove di moto circolare uniforme lungo una circonferenza il cui raggio misura 2 m. Sapendo che l'accelerazione centripeta dell'oggetto è uguale a $2\ \text{m/s}^2$, qual è la sua velocità?

A 2 m/s

B 4 m/s

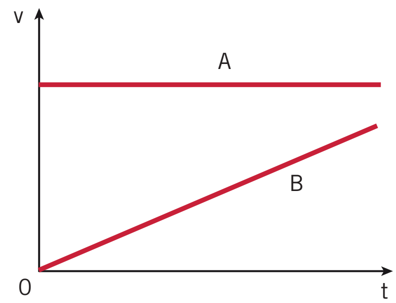
C 1 m/s

D 1,4 m/s

E 2 km/h

(*Prova di ammissione al corso di laurea nelle Professioni Sanitarie*, 2009/2010)

2 Il grafico rappresentato in figura si riferisce al moto rettilineo di due corpi *A* e *B*. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?



A Il moto di *A* è uniformemente accelerato, quello di B rettilineo uniforme.

B Il moto di *A* è rettilineo uniforme, quello di *B* uniformemente accelerato.

C *A* è fermo e *B* si muove con accelerazione nulla.

D Entrambi i corpi hanno un'accelerazione diversa da zero.

(*Concorso a borse di studio per l'iscrizione ai corsi di laurea della classe «Scienze e Tecnologie Fisiche» della SIF*, 2008/2009)

3 Un corpo si muove con un'accelerazione costante $a = 2\ \text{m/s}^2$, con velocità iniziale nulla e partendo da una posizione iniziale $s_0 = 1$ m. Quale delle seguenti equazioni può rappresentare il moto del corpo?

A $s = 1 + 2t$

B $s = 1 + 2t^2$

C $s = 1 + t^2$

D $s = 2t^2$

(*Concorso a borse di studio per l'iscrizione ai corsi di laurea della classe «Scienze e Tecnologie Fisiche» della SIF*, 2008/2009)

4 Un corpo si muove con accelerazione costante $a = 8\ \text{m/s}^2$ e a $t = 0$ s ha una velocità $v_0 = 2$ m/s. Dopo quanto tempo la velocità del corpo sarà di 18 m/s?

A 3 s

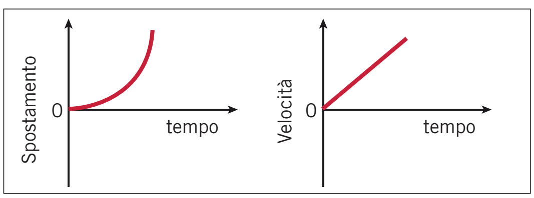
B 10 s

C 5 s

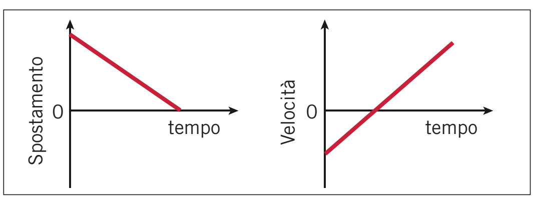
D 2 s

(*Concorso a borse di studio per l'iscrizione ai corsi di laurea della classe «Scienze e Tecnologie Fisiche» della SIF*, 2008/2009)

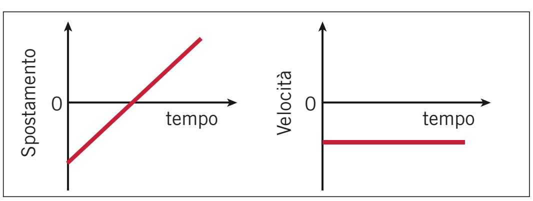
5 Indica quale coppia di grafici rappresenta lo stesso moto di un oggetto:



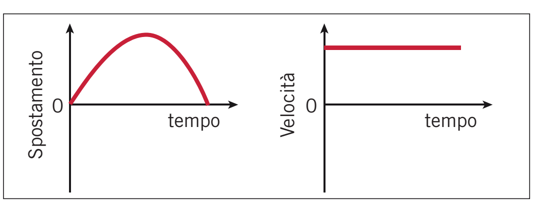
A



B



C



D

(*Concorso a borse di studio per l'iscrizione ai corsi di laurea della classe «Scienze e Tecnologie Fisiche» della SIF*, 2006/2007)

PROVE D'ESAME ALL'UNIVERSITÀ

1 Due treni (A e B) partono alla stessa ora da due stazioni situate sulla stessa linea ferroviaria e viaggiano a velocità costante uno verso l'altro su due binari paralleli. I treni sono diretti ciascuno verso la stazione di partenza dell'altro. Il treno A viaggia a velocità $v_A = 60$ km/h e incontra il treno B quando ha percorso un quarto della distanza totale fra le due stazioni. Determinare:

- la velocità (costante) del treno B.
- se il treno più veloce arriva a destinazione 2 ore prima del treno più lento, quanto distano le due stazioni ?

(*Esame di Fisica, Corso di laurea in Farmacia, Università La Sapienza di Roma*, 2008/2009)

2 All'istante $t = 0$, dal punto $x = 0$ viene lanciato un proiettile alla velocità c. Un secondo proiettile viene poi lanciato nella stessa direzione, con la stessa velocità, all'istante t_0. Determinare:

- gli istanti t_1 e t_2 nei quali i proiettili colpiscono un bersaglio fermo in x_0;
- gli istanti t'_1 e t'_2 nei quali i proiettili colpirebbero invece un bersaglio in movimento con legge oraria $x = vt + x_0$.

$x_0 = 150$ m

$t_0 = 0{,}5$ s

$c = 250\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

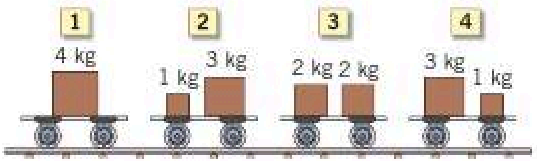
$v = 150\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

(*Esame di Fisica Generale, Corso di laurea in Ingegneria Civile, Università di Napoli*, 2004/2005)

3 Un piccolo aeroplano, che viaggia alla velocità di 400 km/h, parallela al suolo, lascia cadere un pacco di massa 10 kg, che raggiunge il suolo dopo 6 s. Supponendo che nell'istante iniziale il pacco abbia esattamente la stessa velocità dell'aereo e che la resistenza dell'aria sia trascurabile, calcolare la quota dell'aereo rispetto al suolo.

(*dall'Esame di Fisica, Corso di laurea in CTF, Università La Sapienza di Roma*, 2001/2002)

STUDY ABROAD

1 

Each of the four identical carts shown above is loaded with a total mass of 4 kilograms. All of the carts are initially at rest on the same level surface. Forces of the same magnitude directed to the right act on each of the carts for the same length of time. If friction and air resistance are negligible, which cart will have the greatest velocity when the forces cease to act?

A Cart 1

B Cart 2

C Cart 3

D Cart 4

E All four carts will have the same velocity.

(*Scholastic Aptitude Test (SAT), USA*)

2 A pendulum is swinging upward and is halfway toward its highest position, as shown above, when the string breaks. Which of the paths shown best represents the one that the ball would take after the string breaks?

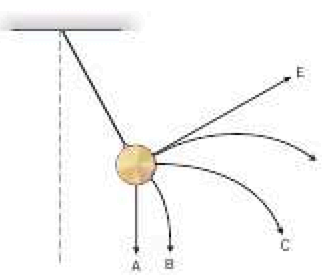
A A

B B

C C

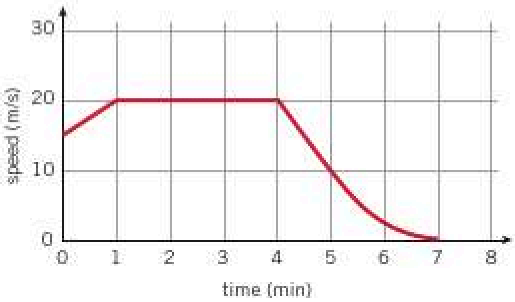
D D

E E



(*Scholastic Aptitude Test (SAT), USA*)

3 The graph represents the motion of a vehicle during part of a journey.



▶ What is the best estimate of the distance travelled during the part of the journey shown?

A 100.00 m

B 107.50 m

C 115.00 m

D 6.00 km

E 6.45 km

F 6.90 km

(*BioMedical Admission Test (BMAT), UK*, 2009/2010)

4 STATEMENT 1 An astronaut in an orbiting space station above the Earth experiences weightlessness.

And

STATEMENT 2 An object moving around the Earth under the influence of Earth's gravitational force is in a state of «free-fall».

A Statement 1 is true, Statement 2 is true; Statement 2 is a correct explanation for Statement 1.

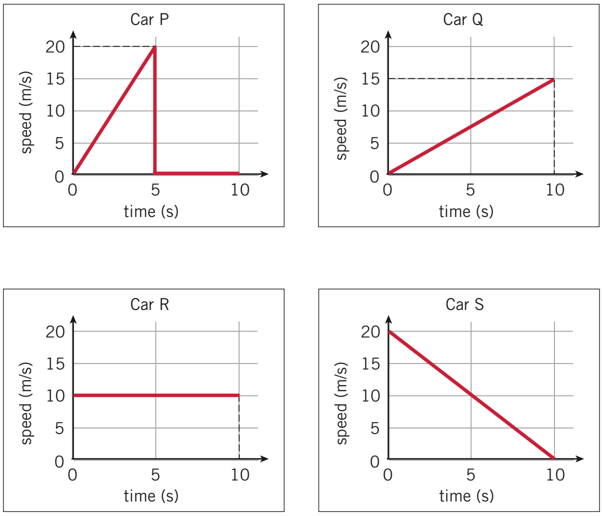
B Statement 1 is true, Statement 2 is true; Statement 2 is NOT a correct explanation for Statement 1.

C Statement 1 is true, Statement 2 is false.

D Statement 1 is false, Statement 2 is true.

(*Joint Entrance Examination for Indian Institutes of Technology (JEE), India*, 2008/2009)

6 The graphs below show how the speeds of four different cars (P, Q, R and S) vary with time over a period of 10 seconds.



▶ Which two cars travel the same distance in the 10 seconds?

A P and Q

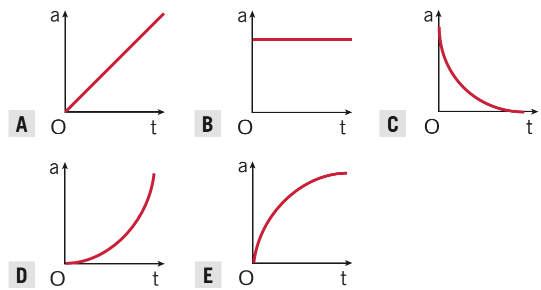
B P and R

C Q and S

D R and S

(*BioMedical Admission Test (BMAT), UK,* 2005/2006)

7 A block is pulled along a horizontal surface with a constant horizontal force of magnitude F. The surface exerts a frictional force of constant magnitude f on the block.



The graph of speed v as a function of time t for the block is shown above. Which of the following shows the graph of acceleration a as a function of time t for the block?

(*Scholastic Aptitude Test (SAT), USA*)