TEORIA

IN SINTESI
Logaritmi

Definizione di logaritmo

- **Logaritmo in base a di b**: dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$, è l'esponente da assegnare ad a per ottenere b.

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$$

- **Proprietà**: $a^{\log_a b} = b$; $x = y \leftrightarrow \log_a x = \log_a y$ $(x > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, y > 0)$.

Proprietà dei logaritmi

- 1. **Logaritmo di un prodotto**:
  $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \ (b > 0, c > 0)$.

  2. **Logaritmo di un quoziente**:
  $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \ (b > 0, c > 0)$.

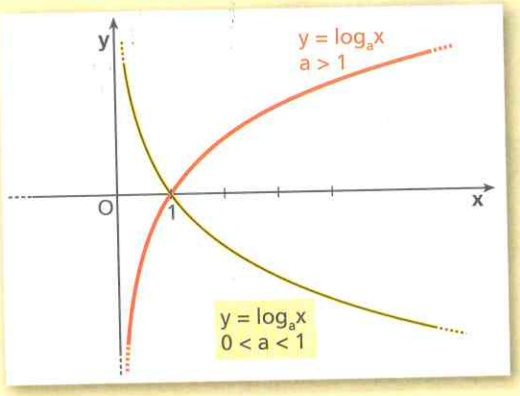
  3. **Logaritmo di una potenza**:
  $\log_a b^n = n \cdot \log_a b \ (b > 0, n \in \mathbb{R})$.

- **Cambiamento di base**: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$,

  con $a \neq 1, c \neq 1, a > 0, b > 0, c > 0$.

Funzione logaritmica

È una funzione da $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ del tipo $y = \log_a x$, con $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$.



Equazioni logaritmiche

L'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo.

ESEMPIO: $\log(x - 7) = 1$

Risoluzione

C.E.: $x - 7 > 0 \rightarrow x > 7$;

$\log(x - 7) = \log 10$;

$x - 7 = 10 \rightarrow x = 17$;

$17 > 7 \rightarrow 17$ è soluzione accettabile.

Disequazioni logaritmiche

- Fra le **disequazioni logaritmiche** consideriamo quelle del tipo: $\log_a A(x) < \log_a B(x)$.
- **Risoluzione**

  Teniamo presente che:
  - per $a > 1$, se $\log_a b < \log_a c$, allora $b < c$;
  - per $0 < a < 1$, se $\log_a b < \log_a c$, allora $b > c$;

  e risolviamo il sistema formato da:
  - le condizioni di esistenza della disequazione;
  - la disequazione che si ottiene dalla disuguaglianza degli argomenti.

Logaritmi ed equazioni e disequazioni esponenziali

Alcune equazioni e disequazioni esponenziali si possono risolvere mediante i logaritmi.

ESEMPIO: $2 \cdot 6^x = 5 \rightarrow \log 2 + x \log 6 = \log 5 \rightarrow$

$$x = \frac{\log 5 - \log 2}{\log 6}.$$

Coordinate logaritmiche e semilogaritmiche

Se utilizziamo le coordinate logaritmiche $(\log_b x; \log_b y)$ o semilogaritmiche $(\log_b x; y)$ oppure $(x; \log_b y)$, i grafici di alcune funzioni non lineari (per esempio, le potenze o le funzioni esponenziali) sono delle rette.

CAPITOLO 11
ESERCIZI

1 Definizione di logaritmo

▶ Teoria a p. 606

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 Considera la definizione di logaritmo e, aiutandoti anche con esempi, spiega perché:
- **a.** non esistono i logaritmi di numeri negativi;
- **b.** la base di un logaritmo deve essere diversa da 1.

2 Ognuna delle seguenti scritture non è corretta. Perché?
- **a.** $\log_4 0 = 1$
- **b.** $\log_{-2} 1 = 0$
- **c.** $\log_3 (-3)^3 = -3$
- **d.** $\log_1 8 = 8$
- **e.** $\log_0 1 = 0$

3 TEST Dato $\log_a b = c$:
- **A** b può essere negativo.
- **B** c è sempre positivo.
- **C** a deve essere maggiore o uguale a 0.
- **D** c può assumere qualunque valore reale.
- **E** a può essere 1.

VERO O FALSO?

4
- **a.** Se $3^x = 11$, allora $x = \log_{11} 3$. V F
- **b.** Se $\log_9 a = -2$, allora $a = (-2)^9$. V F
- **c.** $2^{-\frac{1}{3}} = x$ è equivalente a $\log_2 x = -\frac{1}{3}$. V F
- **d.** $\log_{-2}(-8) = 3$ perché $(-2)^3 = -8$. V F

5
- **a.** $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 3$. V F
- **b.** $\log_a 1 = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$. V F
- **c.** $\log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 1$. V F
- **d.** $\log_x x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. V F

Riscrivi, usando i logaritmi, le seguenti uguaglianze.

6 $2^5 = 32$; $\quad 3^4 = 81$; $\quad 5^2 = 25$.

7 $7^x = 2$; $\quad a^4 = 6$; $\quad 2^9 = b$.

8 $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$; $\quad 10^0 = 1$; $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$.

9 $6^{-5} = b$; $\quad a^{-2} = 8$; $\quad 3^x = \frac{1}{9}$.

Riscrivi, usando le potenze, le seguenti uguaglianze.

10 $\log_7 49 = 2$; $\quad \log_{11} 121 = 2$; $\quad \log_{10} 10\,000 = 4$; $\quad \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$.

11 $\log_a 3 = 7$; $\quad \log_2 b = -\frac{1}{2}$; $\quad \log_5 3 = x$; $\quad \log_2 a = -5$.

12 Fra i seguenti logaritmi elimina quelli privi di significato e spiega il motivo della scelta.
- **a.** $\log_3(-3)$; $\quad \log_2 82$; $\quad \log_2(-1)$; $\quad \log_3 0{,}6$; $\quad \log_5 5$; $\quad \log_{-2}(-8)$.
- **b.** $\log_2(-2)$; $\quad \log_{11}(-0{,}01)$; $\quad \log_1 100$; $\quad \log_5 0$; $\quad \log_8 10$; $\quad \log_{\sqrt{3}} 3$.

13 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo $\log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2})$ applicando la definizione di logaritmo.

$x = \log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2})$ è equivalente a $2^x = 4 \cdot \sqrt[3]{2} \rightarrow 2^x = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \underset{\text{prima proprietà delle potenze}}{\rightarrow} 2^x = 2^{\frac{7}{3}} \rightarrow x = \frac{7}{3}$.

Quindi $\log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2}) = \frac{7}{3}$.

ESERCIZI

Calcola i seguenti logaritmi applicando la definizione.

14 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$; $\log_{10} 10$.

15 $\log_2 1$; $\log_2 2$.

16 $\log_3 243$; $\log_2 64$.

17 $\log_3 27$; $\log_5 25$.

18 $\log_2 16$; $\log_3 9$.

19 $\log_5 125$; $\log_7 49$.

20 $\log 100$; $\log 1000$.

21 $\log_{11} 121$; $\log_7 343$.

22 $\log_3 \frac{1}{9}\sqrt{3}$; $\log_2 \frac{1}{16}$.

23 $\log_5 0{,}04$; $\log_{745} 1$.

24 $\log_2 \frac{4}{\sqrt{2}}$; $\log_3 (3 \cdot \sqrt[4]{3})$.

25 $\log_2 \frac{\sqrt[5]{4}}{2}$; $\log_6 (6 \cdot \sqrt[3]{6})$.

26 $\log_7 (7\sqrt{7})$; $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$.

27 $\log_2 (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2})$; $\log \frac{1}{\sqrt[13]{10}}$.

28 $\log_5 \sqrt[5]{5}$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

29 $\log_3 \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[3]{9}}$; $\log_5 \left(0{,}2 \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

30 $\log_3 (27 \cdot \sqrt{3})$; $\log_4 \frac{1}{2}$.

31 $\log_{25} \frac{5}{\sqrt[3]{5}}$; $\log_8 \sqrt[117]{4}$.

32 $\log_{625} \frac{\sqrt[3]{5}}{25}$; $\log_{16} \frac{2}{\sqrt[7]{2}}$.

33 $\log (1000 \cdot \sqrt[8]{10})$; $\log_{49} \sqrt[5]{\frac{1}{7}}$.

34 $\log_{\sqrt{2}} 1$; $\log_{\sqrt{2}} 256$.

35 $\log_{2\sqrt{2}} 2$; $\log_{0,1} 10$.

36 $\log_{\frac{4}{9}} \frac{27}{8}$; $\log_{\sqrt[3]{9}} \sqrt[4]{27}$.

37 $\log_{32} \sqrt[5]{8}$; $\log_{\frac{4}{3}} \frac{64}{27}$.

38 $\log_a a$; $\log_{2a} (4a^2)$.

39 $\log_{\sqrt{a}} a^3$; $\log_a (a\sqrt{a})$.

40 ESERCIZIO GUIDA Data l'uguaglianza $\log_5 b = 2$, calcoliamo b applicando la definizione di logaritmo.

$\log_5 b = 2$ è equivalente a $5^2 = b$. Quindi $b = 25$.

Calcola il valore dell'argomento b, usando la definizione di logaritmo.

41 $\log_2 b = 1$; $\log_3 b = 4$.

42 $\log_3 b = -1$; $\log_2 b = -1$.

43 $\log_2 b = -2$; $\log_5 b = -2$.

44 $\log_2 b = \frac{1}{2}$; $\log_3 b = \frac{1}{4}$.

45 $\log_4 b = \frac{1}{2}$; $\log_5 b = \frac{1}{3}$.

46 $\log_3 b = 0$; $\log_{0,4} b = 1$.

47 $\log_5 b = -\frac{1}{3}$; $\log_{32} b = -\frac{1}{4}$.

48 $\log_4 b = -2$; $\log_{\frac{2}{3}} b = -\frac{1}{2}$.

49 $\log_{\frac{1}{2}} b = -2$; $\log_5 b = -\frac{2}{5}$.

50 $\log b = 2$; $\log (1 - b) = -1$.

51 ESERCIZIO GUIDA Data l'uguaglianza $\log_a 16 = 2$, calcoliamo la base a.

Applichiamo la definizione di logaritmo: $a^2 = 16 \rightarrow a = \pm 4$.

La base di un logaritmo può essere solo positiva e diversa da 1, quindi $a = 4$.

$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$
$a > 0, a \neq 1, b > 0$

Calcola il valore della base *a* usando la definizione di logaritmo.

52 $\log_a 9 = 2;$ $\log_a 125 = 3.$

53 $\log_a 100 = 2;$ $\log_a 2 = 1.$

54 $\log_a \frac{1}{4} = 2;$ $\log_a \frac{16}{81} = 4.$

55 $\log_a \frac{1}{4} = -2;$ $\log_a \frac{8}{27} = -3.$

56 $\log_a \frac{1}{81} = -4;$ $\log_a \frac{4}{5} = -1.$

57 $\log_a 5 = 1;$ $\log_a 100 = -2.$

58 $\log_a 4 = -2;$ $\log_a \frac{1}{49} = -2.$

59 $\log_a 5 = -1;$ $\log_a 3 = -2.$

60 $\log_a 4 = \frac{1}{2};$ $\log_a \frac{1}{2} = -2.$

61 $\log_a 5 = -2;$ $\log_a 64 = 5.$

62 $\log_a \frac{1}{100} = -2;$ $\log_a 6 = 36.$

63 $\log_a 7 = -\frac{1}{2};$ $\log_a 4 = \frac{1}{3}.$

64 $\log_a (2a - 3) = 1;$ $\log_a (2\sqrt{a} - 2) = \frac{1}{2}.$

65 Calcola: $5^{\log_5 3};$ $10^{\log 2};$ $3^{\log_3 \frac{1}{3}} - \log_3 1;$ $2^{\log_2 7} - 10^{\log 5}.$

$a^{\log_a b} = b$

VERO O FALSO?

66
a. $2^{\log_2 3} = \log_3 2$ V F
b. $7^{\log_{10} 7} = 10$ V F
c. $9^{\log_9 \sqrt{3}} = \sqrt{3}$ V F
d. Se $\log_2 x > \log_2 3$, allora $x > 3$. V F

67
a. $5^{-\log_5 2} = \frac{1}{2}$ V F
b. $\log_2 (6^{\log_6 2}) = 1$ V F
c. $3^{2\log_3 5} = 25$ V F
d. $\log_{\frac{1}{4}} 6 < \log_{\frac{1}{4}} 3$ V F

COMPLETA

68
a. $7^{\log_{\square} 2} = 2$
b. $\log_{\square} 9 = -2$
c. $\log_2 \square = 0$
d. $\log_5 (2^{\log_2 \square}) = 2$
e. $\log_7 \square + \log_4 1 = 1$

69
a. $\log_{\square} (3^{\log_3 10}) = 1$
b. $\log_6 6 - \log_6 \square = 1$
c. $\log_3 \square + \log_3 3 = 3$
d. $5^{2\log_5 2} = \square$
e. $\square^{\log_2 8} = 8$

Calcola il valore delle seguenti espressioni utilizzando la definizione di logaritmo.

70 $\log_2 (\log_8 8)$ [0]

71 $\log_3 (\log_2 8)$ [1]

72 $\log_2 16 - \log_3 27$ [1]

73 $\log 1 + \log 10 + \log 100 + \log 1000$ [6]

74 $2\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 \frac{1}{9}$ [−6]

75 $5^{\log_5 3} + \log(\log_4 4) + \log_3 9$ [5]

76 $\log_{\frac{1}{7}} (6^{\log_6 7}) + \log_4 \frac{1}{2} - (\log_3 \sqrt{3} - \log 1)$ [−2]

77 $\log_2 32 - 4\log_4 16 + \log[\log_2 (\log 100)]$ [−3]

MATEMATICA E STORIA

Un «calcolatore» per i logaritmi Secondo quanto suggerito dal matematico francese Nicolas Chuquet (1445-1488), la seguente tabella delle potenze di 2 consente di ottenere il risultato di moltiplicazioni e divisioni eseguendo addizioni e sottrazioni.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288

Utilizzando i valori in tabella:

a. determina $\log_2 131\,072$;
b. spiega con quale ragionamento si può stabilire che $32 \cdot 16384$ è uguale a 524288;
c. calcola $64 \cdot 16 \cdot 128$;
d. spiega come si può stabilire che $65536 : 512$ è uguale a 128;
e. calcola $524288 : 2048$.

Risoluzione – Esercizio in più

COMPLETA inserendo > o < fra le seguenti coppie di logaritmi.

78 $\log 11 \;\square\; \log 3$; $\log 5 \;\square\; \log 8$; $\log 100 \;\square\; \log 5$; $\log_3 23 \;\square\; \log_3 116$.

79 $\log_2 14 \;\square\; \log_2 11$; $\log_{\frac{2}{3}} \frac{7}{6} \;\square\; \log_{\frac{2}{3}} \frac{11}{9}$; $\log_{0,4} 6 \;\square\; \log_{0,4} 9$; $\log_{\frac{6}{5}} 48 \;\square\; \log_{\frac{6}{5}} 7$.

80 EUREKA! Se $\log_{2n}(1944) = \log_n(486\sqrt{2})$, calcola n^6.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 1996)

$[3^{20} \cdot 2^6]$

2 Proprietà dei logaritmi

▶ Teoria a p. 607

VERO O FALSO?

81
a. $\log 5 - \log 4 = \log 1$ V F
b. $\log \frac{4}{3} = \frac{\log 4}{\log 3}$ V F
c. $\log_2 \sqrt{6} = \frac{1}{2}\log_2 6$ V F
d. $\log_2(2 \cdot 7) = 1 + \log_2 7$ V F
e. $(\log_3 8)^2 = 2\log_3 8$ V F

82
a. $2\log_3 5 = \log_3 10$ V F
b. $\log_4 9 = \log_2 3$ V F
c. $\frac{1}{2}\log_2 36 = \log_2 \frac{1}{2} \cdot 36$ V F
d. $(\log_2 7)^2 = \log_2 49$ V F
e. $\frac{\log 11}{2} = \log\sqrt{11}$ V F

83 ESERCIZIO GUIDA Applicando le proprietà dei logaritmi sviluppiamo l'espressione $\log_2 \frac{a^6}{13 \cdot \sqrt[4]{19}}$.

$\log_2 \frac{a^6}{13\sqrt[4]{19}} =$) logaritmo di un quoziente

$\log_2(a^6) - \log_2(13 \cdot \sqrt[4]{19}) =$) logaritmo di un prodotto

$\log_2 a^6 - (\log_2 13 + \log_2 \sqrt[4]{19}) =$) logaritmo di una potenza

$6\log_2 a - \log_2 13 - \frac{1}{4}\log_2 19$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Nell'ipotesi in cui tutti gli argomenti dei logaritmi considerati siano positivi, sviluppa le seguenti espressioni applicando le proprietà dei logaritmi.

84 $\log\sqrt[3]{4}$ $\left[\frac{1}{3}\log 4\right]$

85 $\log(4\sqrt{2})$ $\left[\log 4+\frac{1}{2}\log 2\right]$

86 $\log\frac{3}{2}$ $[\log 3-\log 2]$

87 $\log\frac{3}{5a}$ $[\log 3-\log 5-\log a]$

88 $\log_5(3ab^2)$ $[\log_5 3+\log_5 a+2\log_5 b]$

89 $\log\frac{3\sqrt{a}}{b}$ $\left[\log 3+\frac{1}{2}\log a-\log b\right]$

90 $\log_2\left(\frac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

91 $\log\frac{5a}{b^4}\sqrt[7]{b}$ $\left[\log 5+\log a-\frac{27}{7}\log b\right]$

92 $\log_{\sqrt{2}}\frac{\sqrt[5]{4}}{8\sqrt{2}}$ $\left[-\frac{31}{5}\right]$

93 $\log(a^4b^5\sqrt{7})$ $\left[4\log a+5\log b+\frac{1}{2}\log 7\right]$

94 $\log\frac{a^3(a^2+1)}{b^2}$ $[3\log a+\log(a^2+1)-2\log b]$

95 $\log_5\left(\frac{3\sqrt[6]{a}}{\sqrt[27]{b}}\right)$ $\left[\log_5 3+\frac{1}{6}\log_5 a-\frac{1}{27}\log_5 b\right]$

96 $\log_3\frac{a^2\sqrt{b}}{9\sqrt[3]{ab}}$ $\left[\frac{5}{3}\log_3 a+\frac{1}{6}\log_3 b-2\right]$

97 $\log\sqrt{a\sqrt[3]{ab^2}}$ $\left[\frac{2}{3}\log a+\frac{1}{3}\log b\right]$

---

98 RIFLETTI SULLA TEORIA Spiega perché non è corretta la seguente uguaglianza:

$$\log 10=\log[(-2)(-5)]=\log(-2)+\log(-5).$$

TEST

99 Il triplo di log 4 è:

A $\log 12$. B $\log\frac{4}{3}$. C $\log_{30} 4$. D $\log 64$. E $\log_{30} 12$.

100 Un quinto di $\log_5 10$ è:

A $\log_5 2$. B $\log_5\sqrt[5]{10}$. C $\log_1 2$. D $\log_5 10^5$. E $\log_5\frac{1}{10}$.

101 ESERCIZIO GUIDA Applichiamo le proprietà dei logaritmi per trasformare in un unico logaritmo l'espressione

$$2\log_5 10+\log_5 25-\frac{1}{3}\log_5 64.$$

$2\log_5 10+\log_5 25-\frac{1}{3}\cdot\log_5 64=$) logaritmo di una potenza

$\log_5 10^2+\log_5 25-\log_5\sqrt[3]{64}=$) logaritmo di un prodotto

$\log_5 100\cdot 25-\log_5 4=$) logaritmo di un quoziente

$\log_5\frac{2500}{4}=\log_5 625=\log_5 5^4=4$

Applica le proprietà dei logaritmi per scrivere le seguenti espressioni sotto forma di un unico logaritmo, supponendo che tutti gli argomenti dei logaritmi considerati siano positivi.

102 $\log 3+\log 7-\log 6$ $\left[\log\frac{7}{2}\right]$

103 $\log_2 50-\log_2 400+\log_2 4$ $[-1]$

104 $\frac{1}{2}\log 81-\log\frac{9}{7}+\log\frac{10}{7}$ $[1]$

105 $\frac{1}{3}\log 27+\log\frac{9}{3}-\log 9$ $[0]$

ESERCIZI

106 $\frac{1}{4}\log 81 + 2\log\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{9} + \log 2$ $[\log 2]$

107 $\frac{1}{2}\log_2 100 - (\log_2 24 - \log_2 6) + 1$ $[\log_2 5]$

108 $\frac{1}{3}[\log_3 35 - (\log_3 7 - 2\log_3 5)]$ $[\log_3 5]$

109 $\log_5 100\left(\log_3\frac{9}{7} - \log_3\frac{27}{7} + \log_3\sqrt{3}\right)$ $\left[\log_5\frac{1}{2} - 1\right]$

110 $2 + \log_2 24 + \log_2 3 - \left(2\log_2 2 - \log_2\frac{1}{6}\right)$ $[\log_2 12]$

111 $\log_3 a + \log_3 b - \log_3 5 + \log_3\frac{1}{b}$ $\left[\log_3\frac{a}{5}\right]$

112 $\log_5 h - 2\log_5 b + \frac{1}{2}\log_5 6$ $\left[\log_5\frac{h\sqrt{6}}{b^2}\right]$

---

113 $2\log(x^2-1) - \log(x+1) - \log(x-1)$ $[\log(x+1)(x-1)]$

114 $4\log_2 3 - \frac{1}{2}\log_2 h + \frac{4}{5}\log_2 k$ $\left[\log_2\frac{81\cdot\sqrt[5]{k^4}}{\sqrt{h}}\right]$

115 $\frac{1}{2}[\log_2 a + 2\log_2(a+4)] - \log_2(a-1)$ $\left[\log_2\frac{\sqrt{a}\cdot(a+4)}{a-1}\right]$

116 $\frac{1}{2}\log_3 x + 2\log_3(x+1) - \log_3 7$ $\left[\log_3\frac{\sqrt{x}(x+1)^2}{7}\right]$

117 $\frac{1}{2}(\log 7 + \log x - \log 3) + \log\sqrt{3x}$ $[\log x\sqrt{7}]$

118 $\log_2(x-3) - \frac{1}{4}\log_2(x-1) - 1$ $\left[\log_2\frac{x-3}{2\sqrt[4]{x-1}}\right]$

119 $\log(x-1) + \log(x-2) - \log(x+3)$ $\left[\log\frac{(x-1)(x-2)}{x+3}\right]$

120 $\log_2(x+1) + 5\log_2(x-1) - 4\log_2(x^2-1)$ $\left[\log_2\frac{x-1}{(x+1)^3}\right]$

121 $\log_7 a - 2\log_7 b + \frac{1}{2}\log_7 c - 3\left(\log_7 a - \frac{1}{2}\log_7 c\right)$ $\left[\log_7\frac{c^2}{a^2b^2}\right]$

122 $\frac{1}{5}\log(3x-2) + \log x - 2\log\sqrt{x+1} - 1$ $\left[\log\frac{\sqrt[5]{3x-2}\cdot x}{10(x+1)}\right]$

123 $4[\log a + \log(a+5)] - 2\log(a-5)$ $\left[\log\frac{a^4\cdot(a+5)^4}{(a-5)^2}\right]$

124 $3[\log_2 b - 2(\log_2 c + \log_2 a)]$ $\left[\log_2\frac{b^3}{c^6a^6}\right]$

125 $\frac{1}{3}[\log_3 27 - 2(\log_3 a^2 - \log_3 b^2)]$ $\left[\log_3\left(3\cdot\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^4}}\right)\right]$

Trova per quali condizioni le seguenti identità sono vere.

126
a. $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = \log_2(x^2-1)$.
b. $\log_2\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\log_2 x$.
c. $2\log(x^2+x+6) = \log(x^2+x+6)^2$.
d. $\log|x^2-x| = \log|x| + \log|x-1|$.

[a) $x>1$; b) $x>0$; c) $\forall x\in\mathbb{R}$; d) $x\neq 0 \wedge x\neq 1$]

127
a. $\log\sqrt{\frac{x}{x+2}} = \log\sqrt{x} - \log\sqrt{x+2}$.
b. $\log\frac{x^2+9}{x^2+1} = \log(x^2+9) - \log(x^2+1)$.
c. $\log x^4 = 4\log|x|$.
d. $\frac{1}{2}\log\frac{x^2-1}{x} = \log\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$.

[a) $x>0$; b) $\forall x\in\mathbb{R}$; c) $x\neq 0$; d) $-1<x<0 \vee x>1$]

Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando le proprietà dei logaritmi.

128 $8^{-\log_2 5}$; $81^{\log_3 2}$; $7^{\log_7 3+\log_7 2}$; $2^{\log_{\frac{1}{2}} 4}$. $\left[\frac{1}{125}, 16, 6, \frac{1}{4}\right]$

129 $4^{-\log_2 3}$; $25^{-\log_5 10}$; $4^{3-\log_2 7}$; $\log_2(5^{\log_5 8})$. $\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{100}, \frac{64}{49}, 3\right]$

Verifica, senza utilizzare la calcolatrice, le seguenti disuguaglianze.

130 $\log_4 5 + 4\log_4 3 > 3$

131 $2^{2\log_2 3} + \log_2 \sqrt[3]{4} > 5^{\log_5 8}$

132 TEST L'espressione $7^{2+\log_7 x}$ è uguale a:

A $49x$. B $7^2 + x$. C $49 + \log_7 x$. D $49\log_7 x$. E $7x$.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso*, 2003)

Formula del cambiamento di base

133 ESERCIZIO GUIDA Scriviamo $\log_2 3$ usando il logaritmo in base 10 e calcoliamone il valore approssimato.

Utilizziamo la formula del cambiamento di base $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, in cui $a = 2, b = 3, c = 10$:

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Con la calcolatrice approssimiamo log 3 e log 2 con quattro cifre decimali:

$$\begin{matrix}\log 3 \simeq 0,4771 \\ \log 2 \simeq 0,3010\end{matrix} \rightarrow \log_2 3 \simeq \frac{0,4771}{0,3010} \simeq 1,5850.$$

Trasforma i seguenti logaritmi in logaritmi in base 10 e, con la calcolatrice, approssima con quattro cifre decimali i valori trovati.

134 $\log_5 7$; $\log_4 61$; $\log_2 10$.

135 $\log_5 0,23$; $\ln 100$; $\log_2 32$.

136 $\log_3 99$; $\log_{\frac{1}{2}} 15$; $\ln 8$.

137 $\log_5 50$; $\log_{40} 80$; $\log_9 2$.

138 Rappresenta sulla retta orientata i seguenti numeri, utilizzando la calcolatrice.

$\log_2 7$ $\log_3 26$ $\log_4 9$ $\log_{\frac{1}{2}} 6$

139 ESERCIZIO GUIDA Semplifichiamo la seguente espressione utilizzando anche la formula del cambiamento di base:

$$\log_3 8 - \frac{1}{2\log_8 3} + \log_3 4 \log_4 7\sqrt{2}.$$

Trasformiamo $\log_8 3$ e $\log_4 7\sqrt{2}$ in logaritmi in base 3.

$$\log_3 8 - \frac{1}{2}\frac{\log_3 8}{\log_3 3} + \cancel{\log_3 4}\frac{\log_3 7\sqrt{2}}{\cancel{\log_3 4}} = \log_3 8 - \frac{1}{2}\log_3 8 + \log_3 7\sqrt{2} =$$

$\log_3 3 = 1$ logaritmo della potenza

$$\log_3 8 - \log_3(2\sqrt{2}) + \log_3 7\sqrt{2} = \log_3 \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \sqrt{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \log_3 28$$

logaritmo del quoziente e del prodotto

ESERCIZI

Semplifica le seguenti espressioni senza utilizzare la calcolatrice.

140 $\log_4 7 \cdot \log_7 16$ $[2]$

141 $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6$ $[\log_2 6]$

142 $\log_3 5 \cdot \log_{25} 9$ $[1]$

143 $\log_6 5 \cdot \log_5 \sqrt{6}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

144 $\log_3 8 \cdot \log_4 27$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

145 $\log_3 5 + \log_9 4$ $[\log_3 10]$

146 $\log_2 48 - \log_4 9$ $[4]$

147 $\log_{25} 36 + \log_5 \frac{1}{6}$ $[0]$

148 $\log_8 15 + \frac{2}{3}\log_2 15$ $[\log_2 15]$

149 $\log_4 10 + \frac{1}{2\log_{10} 4} + \log_2 10$ $\left[\frac{7}{4}\log_2 10\right]$

150 $\frac{\log_3 12 - \log_9 4}{\log_{\frac{1}{3}} 6}$ $[-1]$

151 $\frac{\log_8 27 + \log_2 5}{\log_4 9 - \log_{\frac{1}{4}} 25}$ $[1]$

---

152 EUREKA! Senza fare uso della calcolatrice valuta $\frac{1}{\log_2 36} + \frac{1}{\log_3 36}$.

(CAN *Canadian Mathematical Olympiad*, 1973)

$\left[\frac{1}{2}\right]$

153 TEST Se $\log_2 10 = a$, allora $\log_{10} 2$ vale:

A $2a$. B $\frac{a}{2}$. C $5a$. D $\frac{a}{5}$. E $\frac{1}{a}$.

(*Kangourou Italia, Categoria Student*, 2001)

154 YOU & MATHS Given that $\log_b(2) \simeq 0.5093$, $\log_b(3) \simeq 0.8072$, and $\log_b(5) \simeq 1.1826$, find approximate for the following:

a. $\log_b(15)$; b. $\log_b\left(\frac{2}{3}\right)$; c. $\log_b\left(\frac{6}{5}\right)$; d. $\log_b(9)$; e. $\log_b(45)$; f. $\log_b(200)$.

(USA *Tacoma Community College*, Math 115 Worksheets 2003)

[a) 1.9898; b) -0.2979; c) 0.1339; d) 1.6144; e) 2.797; f) 3.8931]

EUREKA! Dimostra le seguenti uguaglianze nell'ipotesi in cui esistano i logaritmi.

155 a. $\log_{a^2} b^2 = \log_a b$ b. $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} = \log_a b$

156 a. $\log_a b = -\log_{\frac{1}{a}} b$ b. $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

157 a. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ b. $\log_{a^2}(a\sqrt{a}) = \log_a \sqrt[4]{a^3}$

3 Funzione logaritmica

▶ Teoria a p. 610

158 Traccia per punti il grafico della funzione $y = \log_{\frac{3}{2}} x$, assegnando a x i seguenti valori.

$\frac{8}{27}$ $\frac{2}{3}$ 1 $\frac{9}{4}$ $\frac{81}{16}$

Per ogni funzione indica se è crescente o decrescente e individua il punto in cui si annulla.

159 $y = \log_{0,6} x$ $[(1; 0)]$

160 $y = \log_5(x-2)$ $[(3; 0)]$

161 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+4)$ $[(-3; 0)]$

162 $y = \log_{3,7}(x-1)$ $[(2; 0)]$

Traccia per punti i grafici delle seguenti funzioni logaritmiche nello stesso piano cartesiano e confrontali.

163 $y = \log_3 x$; $y = \log_7 x$.

164 $y = \log_{0,2} x$; $y = \log_{0,5} x$.

165 $y = \log_4 x$; $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

166 $y = \log x$; $y = \ln x$.

167 Indica quali equazioni definiscono una funzione logaritmica e quali no, motivando la risposta.

$$y = \log_4 x^{-1},\quad y = \log_4(-x),\quad y = \log_{-4} x,\quad y = \log_1 x,\quad y = \log_{-1} x,\quad y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1).$$

VERO O FALSO?

168
a. $y = \log_{2\sqrt{2}} x$ è una funzione crescente in $\mathbb{R}$. V F
b. $y = \log_{\sqrt{2}} x$ è positiva per $x > 1$. V F
c. La funzione $y = \log_{\frac{5}{6}} x$ è decrescente. V F
d. La funzione $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ esiste per $a > 0$ e $a \neq 1$ ed è crescente per $a < 1$. V F

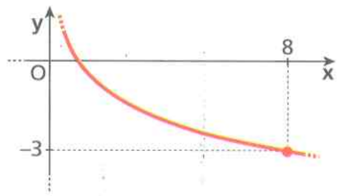
169
a. Le funzioni $y = \log x^4$ e $y = 4\log x$ sono identiche. V F
b. Le due equazioni $y = \ln(x^2 - 1)$ e $y = \ln(x-1) + \ln(x+1)$ rappresentano la stessa funzione. V F
c. La funzione $y = \log_2 x - 1$ ha come funzione inversa $y = 2^{x+1}$. V F
d. Le funzioni $y = 2x$ e $y = 3^{\log_3 2x}$ hanno lo stesso grafico. V F
e. La funzione $y = \log_2 x^2$ ha come dominio l'insieme dei numeri reali. V F

170 **AL VOLO** Quale delle seguenti funzioni cresce più rapidamente? Motiva la risposta.

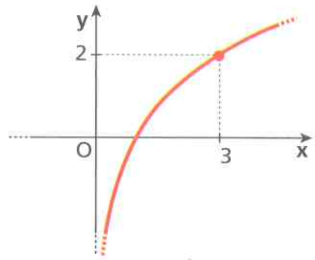
a. $y = \log_4 x$ b. $y = \log_{\sqrt{3}} x$

LEGGI IL GRAFICO **Nelle figure sono disegnati i grafici di funzioni logaritmiche del tipo $y = \log_a x$. Scrivi le equazioni corrispondenti.**

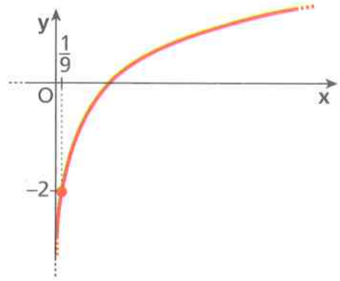
171



172



173



174 Senza utilizzare la calcolatrice indica, fra i seguenti numeri, quali sono positivi e quali negativi.

$\log_3 9$; $\log_{\frac{1}{2}} 9$; $\log_4 \frac{1}{3}$; $\log 2$; $\ln 0{,}5$; $\log(2 - \sqrt{2})$.

175 **TEST** Solo uno dei seguenti logaritmi esiste ed è positivo. Quale?

A $\log_4(-4)$
B $\log_{\frac{1}{3}} 2$
C $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$
D $\log_3 \frac{1}{4}$
E $\log_1 4$

ESERCIZI

Determina il segno dei seguenti logaritmi, senza calcolare il loro valore, ma servendoti eventualmente del grafico.

176 $\log_2 6$; $\log_3 \frac{1}{5}$; $\log_4 18$; $\log_5 \frac{3}{2}$.

177 $\log_{\frac{1}{2}} 4$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{3}$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{5}$; $\log_2 \sqrt{3}$.

178 $\log_{\frac{2}{3}} 5$; $\log_{2,5} 4$; $\log_{0,5} \frac{1}{10}$; $\ln 3$.

179 Traccia il grafico di $y = \log_5 x$ e deduci il grafico di $y = 5^x$.

180 Traccia il grafico di $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ e deduci il grafico di $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Trasformazioni geometriche e grafico della funzione logaritmo

Scrivi le equazioni delle funzioni ottenute da quelle assegnate applicando la trasformazione indicata e traccia i loro grafici.

181 $y = \ln x$ — traslazione di vettore $\vec{v}(-1; 2)$ — $[y = \ln(x+1) + 2]$

182 $y = \log x$ — simmetria rispetto all'origine — $[y = -\log(-x)]$

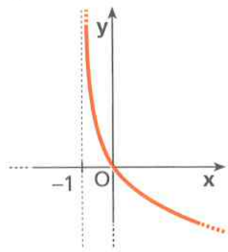
183 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ — simmetria rispetto all'asse x — $[y = -\log_{\frac{1}{2}} x]$

184 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ — simmetria rispetto all'asse y — $[y = \log_{\frac{1}{3}} (-x)]$

185 YOU & MATHS Draw the graphs of these functions in a single Cartesian coordinate system.

$y = \log_2 x$,
$y = \log_2 (x+1)$,
$y = \log_2 x + 1$.

186 TEST Quale funzione è rappresentata nella figura?



A $y = \ln(x+1)$

B $y = \log_{0,5}(x+1)$

C $y = \log_{0,5}(x-1)$

D $y = \ln(x-1)$

E $y = 1 - \log_{0,5} x$

Disegna il grafico delle seguenti funzioni utilizzando le trasformazioni geometriche.

187 $y = \ln(x-1)$; $y = \log_2 x + 4$.

188 $y = \log(x-2) - 3$; $y = \log_3(x+3)$.

189 $y = \ln(-x)$; $y = -\ln x$.

190 $y = 2 + \ln x$; $y = -\log x - 2$.

191 $y = 4 - \log_2(-x)$; $y = \ln x + 3$.

192 $y = \log_2 |x| + 2$; $y = |1 - \log_2 x|$.

193 $y = |\log_2(x-4)|$; $y = 1 - \log_{\frac{1}{2}} |x|$.

194 $y = -\log_3(1-x)$; $y = -\ln(-x) + 4$.

195 $y = \left|\log_{\frac{1}{4}} x\right|$; $y = |\log_2 x|$.

196 $y = -|\ln x|$; $y = -\ln|x|$.

197 $y = -\ln(-x)$; $y = \ln \frac{x}{2}$.

198 $y = \frac{\ln x}{3}$; $y = 2\ln x$.

199 $y = \ln 4x$; $\qquad y = \dfrac{\ln x}{4}$.

200 $y = -3\ln x$; $\qquad y = \dfrac{1}{2}\ln(-x)$.

201 $y = \left|\log|x|\right|$; $\qquad y = -\ln\dfrac{1}{x} + 1$.

202 $y = \dfrac{\ln x}{|\ln x|} + 2\ln x$; $\qquad y = -\log_{\frac{1}{3}} x + 4$.

---

203 Applica alla funzione $y = \log_2 x$ la simmetria rispetto all'asse x e al risultato la simmetria rispetto alla retta $x = 1$. Scrivi l'espressione analitica della funzione ottenuta e disegna il suo grafico. $[y = -\log_2(2 - x)]$

204 Data la funzione $y = \log_3 x$, applica di seguito la traslazione di vettore $\vec{v}(-2; 4)$ e la simmetria rispetto all'asse y. Rappresenta il grafico della funzione ottenuta ed esprimila analiticamente. $[y = \log(-x + 2) + 4]$

205 Data la funzione $y = a^x - 2$, determina a sapendo che il punto $P(2; 7)$ appartiene al suo grafico e rappresentala graficamente. Disegna poi il grafico simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante e determina l'espressione analitica della funzione corrispondente. $[a = 3;\ y = \log_3(x + 2)]$

---

206 Data la funzione f di equazione $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, determina l'equazione della sua trasformata f' che si ottiene mediante la dilatazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x \\ y' = 4y \end{cases}$$

Disegna il grafico di f'. $\left[y = \log_{\frac{1}{2}} 16x^4\right]$

207 Disegna il grafico della funzione f di equazione $y = -\ln x$. Trasforma poi f mediante la dilatazione di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 2y \end{cases}.$$

Disegna la funzione f' ottenuta e trova i punti di intersezione del grafico di f' con gli assi.

$\left[y = -2\ln\dfrac{x}{4}; (4; 0)\right]$

Determina la funzione inversa della funzione data e disegna i due grafici.

208 $y = \log(x + 1)$ $\qquad [y = 10^x - 1]$

209 $y = \log_2 x - 1$ $\qquad [y = 2^{x+1}]$

210 $y = 3^x + 2$ $\qquad [y = \log_3(x - 2)]$

---

211 YOU & MATHS Let $f(x) = \ln(x + 3)$. Find $f^{-1}(x)$.

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, Spring 2001)

$[y = e^x - 3]$

Dominio di funzioni logaritmiche

212 ASSOCIA ogni funzione al suo dominio.

a. $y = \log_2 x - 2$ $\qquad$ **b.** $y = \log_3 x^2 + 1$ $\qquad$ **c.** $y = \log(x - 1)$ $\qquad$ **d.** $y = \log_2(x^2 + 1)$

1. $D: x > 0$ $\qquad$ **2.** $D: \mathbb{R}$ $\qquad$ **3.** $D: x \neq 0$ $\qquad$ **4.** $D: x > 1$

213 ESERCIZIO GUIDA Determiniamo il dominio di $y = \log\dfrac{x + 3}{x - 1}$.

L'argomento del logaritmo deve essere positivo e il denominatore della frazione deve essere diverso da 0:

$$\frac{x + 3}{x - 1} > 0.$$

Numeratore: $x + 3 > 0 \;\rightarrow\; x > -3$.

Denominatore: $x - 1 > 0 \;\rightarrow\; x > 1$.

Compiliamo il quadro dei segni.

		-3		1	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x+3}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

Deduciamo

$D: x < -3 \lor x > 1$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

214 $y=\ln\frac{x^2-1}{x^2+4}$ $[x<-1 \vee x>1]$

215 $y=\log_2\frac{x-3}{x+2}$ $[x<-2 \vee x>3]$

216 $y=\log(x+1)^2$ $[x\neq-1]$

217 $y=\log(x+5)+\log(3-x)$ $[-5<x<3]$

218 $y=\ln|x^2-1|$ $[x\neq\pm1]$

219 $y=\ln(3-|x|)$ $[-3<x<3]$

220 $y=\ln(x^2-4x)+4$ $[x<0 \vee x>4]$

221 $y=\log(4^x-2)+\log(2^x-1)$ $\left[x>\frac{1}{2}\right]$

222 $y=\ln\frac{x-3}{1-x^2}$ $[x<-1 \vee 1<x<3]$

223 $y=\log_3(3x^2+2x-1)$ $\left[x<-1 \vee x>\frac{1}{3}\right]$

224 $y=\ln\frac{x}{\sqrt{x^2}}$ $[x>0]$

225 $y=\log(x^3-1)$ $[x>1]$

226 $y=\sqrt{\log\frac{x}{x-3}}$ $[x>3]$

227 $y=\frac{x}{\log(x+1)}$ $[x>-1 \wedge x\neq0]$

228 $y=\frac{5}{\log(x^2+1)-1}$ $[x\neq\pm3]$

229 $y=\frac{\ln(x-\sqrt{x^2-x})}{\ln(x-3)}$ $[x>3 \wedge x\neq4]$

230 $y=\log_3\log_2 x$ $[x>1]$

231 $y=\frac{1}{\log_2\log_3(x-1)}$ $[x>2 \wedge x\neq4]$

232 $y=\log\frac{x}{\sqrt{x-2}}$ $[x>2]$

233 $y=\log\frac{2x^2+3x-2}{x^2-2x+3}$ $\left[x<-2 \vee x>\frac{1}{2}\right]$

234 $y=\log_2\frac{x^2-4x}{1-x}$ $[x<0 \vee 1<x<4]$

235 $y=\log_3 x+\log_3(4-x^2)$ $[0<x<2]$

236 $y=\frac{\log(x^3+3x^2)}{x+1}$ $[x>-3 \wedge x\neq-1 \wedge x\neq0]$

237 $y=\log\frac{x}{x+5}+\log(x^2-9)$ $[x<-5 \vee x>3]$

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni, indicando per ciascuna il dominio e il codominio.

238 $y=2+\log_2(x-1)$ $[x>1; \forall y\in\mathbb{R}]$

239 $y=|1-\ln x|$ $[x>0; y\geq0]$

240 $y=|\log_2(x+2)|$ $[x>-2; y\geq0]$

241 $y=|\ln x|+\ln x$ $[x>0; y\geq0]$

242 $y=\left|\log_3\frac{1}{3x}\right|-1$ $[x>0; y\geq-1]$

243 $y=-\log(|x|-2)$ $[x<-2 \wedge x>2; \forall y\in\mathbb{R}]$

244 $y=\sqrt{\ln x+1}$ $\left[x\geq\frac{1}{e}; y\geq0\right]$

245 $y=\frac{\ln|x|}{|\ln x|}+\ln x$ $[x>0 \wedge x\neq1; y<-1 \vee y>1]$

---

246 **RIFLETTI SULLA TEORIA** Spiega perché $y=\log x^4$ e $y=4\log x$ non sono funzioni uguali e spiega perché invece $y=\log x^4$ e $y=2\log x^2$ sono uguali.

247 Dimostra che i grafici delle seguenti funzioni sono identici per $x>4$:

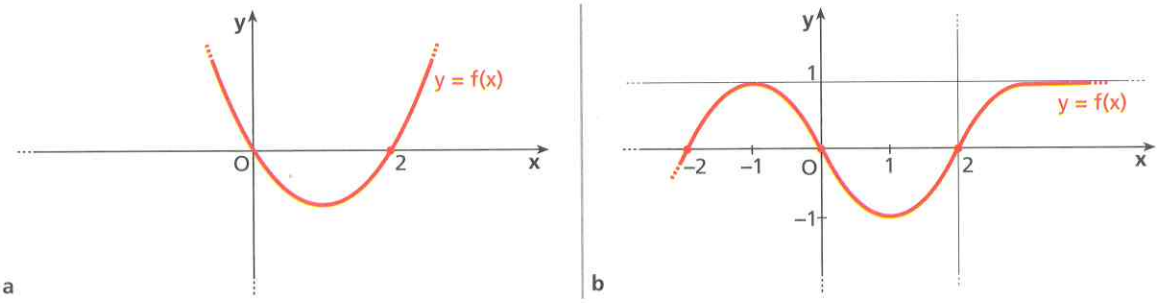
$$y=\log_2 2x-\log_2(x-4);$$

$$y=1+\log_2\frac{x}{x-4}.$$

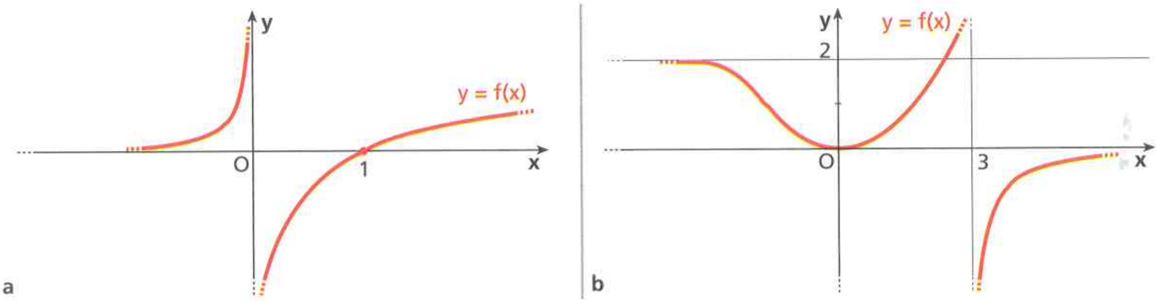
Grafico delle funzioni del tipo $y = \ln f(x)$

LEGGI IL GRAFICO Utilizzando i grafici delle funzioni $y = f(x)$ delle figure, disegna quello di $y = \ln f(x)$.

248



249



Disegna il grafico della funzione $f(x)$ e poi quello di $y = \ln f(x)$.

250 $f(x) = 2|x| + 1$

251 $f(x) = x^2 - 4$

252 $f(x) = \sqrt{x} - 1$

253 $f(x) = \dfrac{x-1}{2x}$

254 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

255 $f(x) = \left|\dfrac{x}{x-1}\right|$

Traccia i grafici delle seguenti funzioni.

256 $y = \ln(2x - x^2)$

257 $y = \ln \dfrac{2x-1}{x}$

258 $y = \ln \dfrac{x}{|x-4|}$

259 $y = \ln \dfrac{1}{|x-2|}$

260 $y = \ln(-1 + \sqrt{1-x})$

261 $y = \ln[(x-1)(x-5)]$

MATEMATICA AL COMPUTER

I logaritmi Con Wiris tracciamo i grafici di $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{4}$ e di $g(x) = \log_2 f(x)$, per mostrare come l'andamento del logaritmo di una funzione possa essere ricavato da quello della funzione stessa.

Risoluzione – 8 esercizi in più

ESERCIZI

4 Equazioni logaritmiche

▶ Teoria a p. 612

TEST

262 Le seguenti equazioni sono tutte equazioni logaritmiche tranne una. Quale?

A $3x+1=\log 4x$

B $3\cdot\log_2 x=17$

C $\log_3(x^2+1)=x^2+1$

D $\log_2 5=x+\dfrac{3}{\log_5 x}$

E $\log 2^x=2$

263 La condizione di esistenza dell'equazione $\log^2 x-4=0$ è:

A $x\geq 4$.

B $x>4$.

C $x<-2\vee x>2$.

D $x>2$.

E $x>0$.

Scrivi le condizioni di esistenza per ciascuna delle seguenti equazioni.

264 $2\log x-\log(1-x)=1$ $[0<x<1]$

265 $\log(x-4)^2=\log x^2$ $[x\neq 0\wedge x\neq 4]$

266 $\dfrac{1}{\log x}=3$ $[x>0\wedge x\neq 1]$

267 $\log_2(x^2+9)-\log x-1=0$ $[x>0]$

268 $\log\dfrac{x^2-4}{2x}=-1$ $[-2<x<0\vee x>2]$

269 $\sqrt{\log x}=2$ $[x\geq 1]$

270 ASSOCIA a ciascuna equazione a sinistra un'equazione equivalente, fra quelle scritte a destra.

a. $\log(x-1)+\log(x+1)=1$

b. $\log[(x+1)(x-1)]=\log 10$

c. $3\log[(1-x)(1+x)]=3$

d. $\log(1-x)+\log(x+1)=0$

1. $\log(x^2-1)=1$

2. $\log(1-x^2)=1$

3. $\log(x-1)=\log 10-\log(1+x)$

4. $\log(x+1)=\log(1-x)^{-1}$

Utilizziamo la definizione di logaritmo

271 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo $\log_3(x+8)=2$.

- Condizioni di esistenza: $x+8>0 \ \rightarrow\ x>-8$.
- Risolviamo l'equazione applicando la definizione di logaritmo.

$x+8=3^2 \ \rightarrow\ x+8=9 \ \rightarrow\ x=1$ accettabile perché maggiore di -8

Risolvi le seguenti equazioni.

AL VOLO

272 $\log_5 x=-2$

273 $\log_4 x=\dfrac{1}{2}$

274 $\log_2(x-4)=0$ $[5]$

275 $-\log(x+102)+2=0$ $[-2]$

276 $\log(x^2-3)=0$ $[\pm 2]$

277 $\log_2\left(\dfrac{5}{4}x-1\right)=-2$ $[1]$

278 $\log_3(x^2+2x)=1$ $[-3;1]$

279 $3-\log_2(x^2-2x)=0$ $[-2;4]$

280 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-8)=-3$ $[\pm 4]$

281 $\log\dfrac{x-9}{4x}=0$ $[-3]$

282 $\log_2\dfrac{2x}{x+3}=-1$ $[1]$

283 $\log_{x^2}(-2x+8)=1$ $[-4; 2]$

284 $\log_2(\sqrt{5-x^2}-x)=0$ $[1]$

285 $\log_2\left|\,|x^2-3|-1\right|=1$ $[0; \pm\sqrt{6}]$

286 $\ln(x-2)=1$ $[e+2]$

287 $\log_4(3x-20)=3$ $[28]$

288 $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)=-2$ $[6]$

289 $3\log_8(4x-7)=-2$ $\left[\frac{29}{16}\right]$

290 $4\log_{16}x=\log_5\frac{1}{125}$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

291 $\log_7(\sqrt{2x+1}-1)=0$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

292 $\frac{2}{3}\log_4(2x-3)=\log_8 2$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

---

293 **Volume al massimo** Il livello acustico L percepito viene espresso per convenzione in decibel (dB) e si ricava dalla formula:

$$L=10\log\frac{I}{I_0},$$

dove I è l'intensità sonora che dipende da proprietà fisiche dell'onda sonora, e $I_0=10^{-12}$ W/m² è il più piccolo valore di intensità udibile.


discoteca: L = 100 dB

a. Calcola l'intensità sonora I in discoteca.

b. Calcola a quanti decibel corrisponde il valore di intensità sonora che provoca dolore, sapendo che è mille miliardi più intenso di I_0. [a) 10^{-2} W/m²; b) 120 dB]

I due membri si possono scrivere come logaritmi di ugual base

294 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo l'equazione:

$$\log_2(x-2)-\log_2(8-x)=\log_2 x-3.$$

- Condizioni di esistenza:

$$\begin{cases}x-2>0\\8-x>0\\x>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x>2\\x<8\\x>0\end{cases}\rightarrow\ 2<x<8$$

- Risolviamo l'equazione.
Al secondo membro, poiché per la definizione di logaritmo è $\log_a a=1$, possiamo scrivere:

$$3=3\cdot 1=3\log_2 2=\log_2 2^3=\log_2 8.$$

Sostituiamo questo risultato nell'equazione data e applichiamo le proprietà dei logaritmi.

$$\log_2(x-2)-\log_2(8-x)=\log_2 x-\log_2 8$$

$$\log_2\frac{x-2}{8-x}=\log_2\frac{x}{8}$$ uguagliamo gli argomenti

$$\frac{x-2}{8-x}=\frac{x}{8}$$ trasformiamo in equazione intera ricordando che $2<x<8$

$$8(x-2)=x(8-x)$$

$$x^2-16=0 \quad x_1=4,\quad x_2=-4$$ non accettabile

- La soluzione dell'equazione è: $x=4$.

Risolvi le seguenti equazioni.

295 $\log_5 x+\log_5 3=\log_5 6$ $[2]$

296 $\log_2(x+1)=2\log_2 3$ $[8]$

297 $\log_2 x-\log_2 7=\log_2(x-1)$ $\left[\frac{7}{6}\right]$

298 $\log x-2\log 3=\log(x-1)$ $\left[\frac{9}{8}\right]$

299 $\log x-\log(x+1)=\log 2-\log 5$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

300 $\log(x-1)+\log(x-3)=\log 8$ $[5]$

301 $\log_2 x+\log_2(x-1)=2\log_2 x$ [impossibile]

302 $\log(3x-1)+\log(x-2)=\log 22$ $[4]$

303 $\log_2(x-2)-\log_2 x=\log_2 x$ [impossibile]

304 $\log_5(x^2+1)=\log_5 2+\log_5(x^2-4)$ $[3; -3]$

305 $\log_3(x-2)+\log_3 x=2\log_3 x$ [impossibile]

306 $\log_5(x+1)+\log_5 4=\log_5 6x$ $[2]$

ESERCIZI

307 $\log_7(x-3)=\log_7(x^2-3x)$ [impossibile]

308 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x)+\log_2 2x-1=0$ [5]

309 $\frac{1}{3}\log(9x+8-x^3)=\log(2-x)$ [0]

310 $\frac{1}{2}\log_2(2x-7)=2+\frac{1}{2}\log_2 x$ [impossibile]

311 $\frac{1}{2}\log(1-8x)=\log(1-\sqrt{2x})$ $\left[0; \frac{2}{25}\right]$

312 $\log_3|2x-1|-\log_3 x=0$ $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$

313 $-2\log_4\sqrt{6x}+\log_4(x^2-16)=0$ [8]

---

314 $\log(x-1)-\log(x+1)=\log(x-3)-\log(x-2)$ [5]

315 $\log_3(2x+7)=2+\log_3 x$ [1]

316 $2\log_2\sqrt{x-2}+\log_2 x=3$ [4]

317 $\log(2x+1)-\log(x-1)=\log(x+4)-\log 2$ [3]

318 $1+\log_3(x-2)+\log_3(x+2)=\log_3 5+\log_3 x$ [3]

319 $\log_2(x^2+1)=1-\log_{\frac{1}{2}} x$ [1]

320 $\log(2x^2+5x-3)-\log(x+3)=\log(4-x)$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

321 $\log(10-x^2)-\log 8=2\log\frac{x}{5}-2\log\frac{\sqrt{2}}{5}$ $[\sqrt{2}]$

322 $\log_2(x^2+2x+8)=2+\log_2(x+2)$ [0; 2]

323 $\log_2 x+\log_2(x-1)=\log_2 3x$ [4]

324 $\log_4(x^2+2)-\log_4(x^2-1)=\log_4 5-\log_4(x+1)$ [impossibile]

325 $\log_2(x^2-4)+2\log_2 x=1+\log_2(5x^2+16)$ [4]

326 $\log_2(x^2+1)=1+\frac{2}{3}\log_2 x+\log_8 x$ [1]

---

327 TEST L'equazione $\log_x 4+\log_4 x=-2$ è:

A verificata per $x=1$.

B impossibile.

C verificata per $x=4$.

D verificata per $x=-4$.

E verificata per $x=\frac{1}{4}$.

Usiamo un'incognita ausiliaria

328 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo $2(\log_2 x)^2+5\log_2 x-3=0$.

C.E.: $x>0$.

Poniamo $\log_2 x=t$ e sostituiamo nell'equazione:

$$2t^2+5t-3=0 \;\rightarrow\; t=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm 7}{4} \begin{cases} t_1=\frac{1}{2}, \\ t_2=-3. \end{cases}$$

Dai due valori di t, tenendo conto dell'assegnazione, otteniamo le soluzioni dell'equazione iniziale:

$$\log_2 x=-3 \quad\rightarrow\quad x_1=\frac{1}{8}, \qquad \log_2 x=\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad x_2=\sqrt{2}.$$

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni.

329 $3\log^2 x - 2\log x = 0$ $[1; \sqrt[3]{100}]$

330 $(\log_4 x)^2 + 3\log_4 x = 4$ $\left[4; \frac{1}{256}\right]$

331 $\log_3 x(3\log_3 x - 4) + 1 = 0$ $[\sqrt[3]{3}; 3]$

332 $2(\log_2 x)^2 - 9\log_2 x + 4 = 0$ $[\sqrt{2}; 16]$

333 $4(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 2 = 0$ $\left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right]$

334 $2\ln x + \ln^2 x = 0$ $[1; e^{-2}]$

335 $3 - \log x = \frac{2}{\log x}$ $[10; 100]$

336 $1 - \ln^2 x = 0$ $\left[e; \frac{1}{e}\right]$

337 $\frac{3}{\log x - 2} + \log x + 2 = 0$ $\left[\frac{1}{10}; 10\right]$

338 $\log x - \frac{1}{2} = \log\sqrt{x}$ $[10]$

339 $\log_2 x^2 + (\log_2 x)^2 = 0$ $\left[1; \frac{1}{4}\right]$

340 $(\log_2 x^2)^2 + 4\log_2\sqrt{x} - 2 = 0$ $\left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right]$

341 $2 = \log_3 x - 8\log_x 3$ $\left[\frac{1}{9}; 81\right]$

342 $(\log_2 x)^3 + 6(\log_2 x)^2 - 16\log_2 x = 0$ $\left[\frac{1}{256}; 1; 4\right]$

343 $[\log_3(x-1)]^2 = 2 + 2\log_9(x-1)$ $\left[\frac{4}{3}; 10\right]$

344 $\log_3\sqrt{x}(\log_3 x + 1) - 2\log_3 x = 2$ $\left[\frac{1}{3}; 81\right]$

345 $(\log_2 x^2)^2 + 9\log_2 x + 2 = 0$ $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$

346 $3 = \frac{14}{\log_5 x + 2} + \frac{4}{\log_5 x - 1}$ $[1; 5^5]$

Riepilogo: Equazioni logaritmiche

347 TEST Le equazioni $\log\sqrt{x} = 1$ e $\frac{1}{2}\log x = 1$ sono equivalenti?

A Sì.
B Solo se $x \geq 0$.
C Sì, $\forall x \in \mathbb{R}$.
D Solo per $x < 0$.
E No.

348 ASSOCIA a ciascuna equazione a sinistra le sue soluzioni scritte a destra.

a. $\log_x 9 = 2$ 1. $x = \pm 3$
b. $\log(x^2 + 1) = 1$ 2. $x = 3$
c. $\log_2\frac{1}{8} = x$ 3. $x = -3$
d. $\log(-1000) = x$ 4. impossibile

349 TEST L'equazione $\log x = 2\log 2x$ è verificata per:

A $x = 0$. B $x = \frac{1}{4}$. C $x = \frac{1}{2} \vee x = 0$. D $x = \frac{1}{4} \vee x = 0$. E $x = \frac{1}{2}$.

Risolvi le seguenti equazioni.

350 AL VOLO $\log_2 x = -5$

351 $\log(x-2) + \log 5 = \log x$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

352 $5\log^2 x - \log x = 0$ $[1; \sqrt[5]{10}]$

353 $\ln^2 x - 9 = 0$ $[e^{-3}; e^3]$

354 AL VOLO $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

355 $\ln\frac{x-4}{2x+1} = 0$ $[-5]$

356 $\log x - \frac{1}{2} = \log\sqrt{x}$ $[10]$

357 $\log_3(x+1) + 2\log_9(x+1) = \log_3 9$ $[2]$

358 $\log(x-3) + \log(x+1) = \log(4x-3)$ $[6]$

359 $\log(x+1) + \log(x+2) = \log 2$ $[0]$

ESERCIZI

360 $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = 0$ [impossibile]

361 $\log 21 - \log(x + 5) - \log(23 - x) = -\log 7$ $[2; 16]$

362 $\log_3(x + 1) = \log_3(x^2 + 9) - 2$ $[0; 9]$

363 $\log(5 + x) = \frac{3}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log(x + 3)$ $[-1]$

364 $\log_3(x^2 + 3x - 3) - 1 = \log_3(x + 2) + \log_3(x - 2)$ $[3]$

365 $\log_2(2x + 6) - \log_4(x - 1) = 3$ $[5]$

366 $\log_5(x^2 + 6x - 2) = 1 + \log_5(x + 2)$ $[3]$

367 $\log(x - 1) - 2 \cdot \log(x + 1) - \log 8 = -2$ $\left[\frac{3}{2}; 9\right]$

368 $\log 2 + \frac{1}{2}\log(x^2 + 5) = \log(x^2 + 2)$ $[-2; 2]$

369 $4\log(3 - 2x) - \log(4 - x^2) = \log(3 - 2x)^3$ $[1 - \sqrt{2}]$

370 $2\log_2\left(\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}\right) = \log_2(x^2 - 5) - 2$ [impossibile]

---

371 $\log_2(x - 2) + 3 = \log_2\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\log_2 64$ $\left[\frac{16}{5}\right]$

372 $\frac{\log(x^2 + 2x - 8)}{\log(x + 12)} = 1$ $[-5; 4]$

373 $1 - \frac{2}{\log_3 x + 2} = 3\log_{\frac{1}{3}} x$ $\left[\frac{\sqrt[3]{9}}{27}; 1\right]$

374 $\frac{1}{5}\log_5(x + 1) - \log_{x+1} 5 = \frac{4}{5}$ $\left[-\frac{4}{5}; 3124\right]$

375 $\frac{5}{4}\log_4 x + \log_{16}\sqrt[4]{x} = \frac{11}{16}$ $[2]$

376 $2\log_2 x = 2 + \log_2(x + 3)$ $[6]$

377 $\log_5 x + \log_5(\sqrt{5}\,x - 4) = \frac{1}{2}$ $[\sqrt{5}]$

378 $\log(x + 1) - \log(\sqrt{x + 1}) = 2$ $[9999]$

379 $\ln x \cdot \ln x^2 + \ln x^3 - 2 = 0$ $\left[\frac{1}{e^2}; \sqrt{e}\right]$

380 $|\log_2\sqrt{x + 1} - 1| = 2$ $\left[-\frac{3}{4}; 63\right]$

381 $\frac{\log_2(2x + 3)}{\log_2 x} = \frac{\log_2 4x^2}{\log_2 x} - 1$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

382 $\sqrt{\log_2 x} - 8\log_2\sqrt{x} = 0$ $[1; \sqrt[16]{2}]$

383 $\log_2\log_3(x - 5) = 2$ $[86]$

384 $6\left(\log_3 x - \log_{\frac{1}{3}} x\right) + \log_3\frac{1}{x} = 5$ $[\sqrt[11]{3^5}]$

385 $\log_3|2x^2 + x| + \log_3\frac{1}{5} = 1$ $\left[-3; \frac{5}{2}\right]$

386 $2(\log_2 x)^2 + \log_2 x^5 - 3 = 0$ $\left[\frac{1}{8}; \sqrt{2}\right]$

387 $\log_2^2 x^2 + \log_2 x = 7(1 - \log_2 x) - 2$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{8}; \sqrt{2}\right]$

388 $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x + 5} - \sqrt{\log_2 x - 1} = 2$ $[2]$

389 $\log_2^3 x - \frac{1}{2}\log_2^2 x^2 - 4\log_2 x^2 = 0$ $\left[\frac{1}{4}; 1; 16\right]$

390 $\frac{3\log_2 x - 1}{2\log_2 x + 8} = \frac{13}{40} + \frac{2\log_2 x - 3}{\log_2 x^4 + 4}$ $\left[2; 2^{\frac{16}{9}}\right]$

391 $\frac{\log_2 x}{\log_2 x + 3} + \frac{6}{\log_2 x - 3} + \frac{72}{9 - \log_2^2 x} = 0$ $\left[\frac{1}{512}; 64\right]$

392 $\frac{3}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln x + 1} = 2 + \frac{1}{\ln x}$ $[e^{\sqrt{2}}; e^{-\sqrt{2}}]$

393 $\sqrt{\log_2^2 x + \log_2 x - 2} = \log_{\frac{1}{2}} x - 2$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

394 $\log_{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{3^{2-x}} + 3^x\right) = -1 + \log_{\frac{1}{4}}(2^{x-3} + 2^x)$ $[4]$

395 $\frac{2}{1-\log_5 x^2} - \frac{\log_5 x}{\log_5 x + 3} = \frac{\log_5^2 x - 10\log_5 x}{2\log_5^2 x + \log_5 x^5 - 3}$ $[5; 25]$

396 $\sqrt{10 + \log_3 x^2} = 5 - \sqrt{10 + 3\log_{\frac{1}{3}} x}$ $\left[\frac{1}{3^5}; 27\right]$

397 $3 + \log x^5 - 2\log^2 x = (\log x + 6)(\log x - 1)$ $[10^{\sqrt{3}}; 10^{-\sqrt{3}}]$

398 $\log(5x-2) + \log(x+3)^2 = \log 7 + \log(x+3) + 2\log(5x-2)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

---

399 $\log_3(2+x)\log_2(x-4) = 0$ $[5]$

400 $\frac{3\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_2 x - 1} = -4$ $[16]$

401 $\log^2 x - 2\log x = -1$ $[10]$

402 $\log^2 x^2 + 4\log x = 0$ $\left[1; \frac{1}{10}\right]$

403 $-\log_{\frac{1}{3}} 6 + \log_3(x+1) = \log_3(5x)$ [impossibile]

404 $1 + \frac{\log_2(x+1)}{\log_2 x} = \frac{1}{\log_2 x}$ [impossibile]

405 $\frac{3}{\log_2 x - 1} + \frac{2}{\log_2 x + 1} = 2$ $\left[8; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

406 $\log_3(2x-1) = 2\log_9(3x+6) - 2$ $[1]$

407 $\frac{3}{\log_2 x(1+\log_2 x)} = 2 - \frac{3}{\log_2 x}$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}; 4\right]$

408 $\frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x+4) + \log_3 x + \log_3(x-1)}{\log_3 \frac{x}{2}} = 0$ $[4]$

---

409 TEST Risolvi, ricavando il valore di x, l'equazione $\log_4 \sqrt{x^{\frac{4}{3}}} + 3\log_x(16x) = 7$.

A 16. B 27. C 64. D 81. E 343.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2001)

410 YOU & MATHS Find the value of x in $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1995)

$[x = 6]$

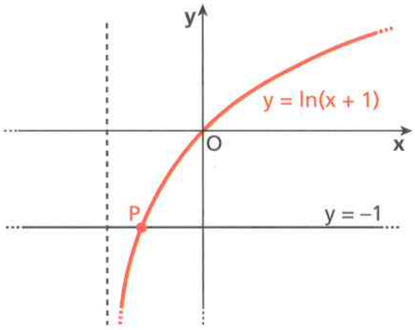
411 EUREKA! Risolvi l'equazione $(x-1)^x = \left(\frac{x}{2}\right)^{2x}$. $[2]$

412 TEST Il grafico di $y = \log(x+9)$ incontra la retta di equazione $y = 1$ nel punto di coordinate:

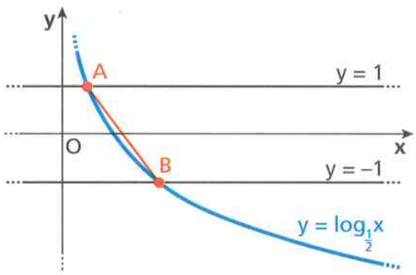
A $(1; 0)$. B $(1; 1)$. C $(-8; 0)$. D $(-1; 1)$. E $(-1; 0)$.

LEGGI IL GRAFICO

413 Determina l'ascissa di P.



414 Trova la misura di AB.

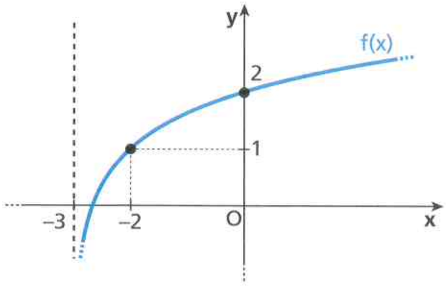


ESERCIZI

415 ●● LEGGI IL GRAFICO Nella figura è rappresentata la funzione

$f(x) = \log_a(x+b)+c$.

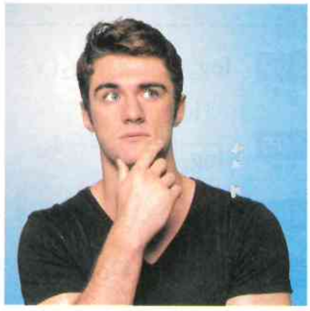
Determina a, b, c. Trova poi il punto di intersezione del grafico di $f(x)$ con l'asse x. $\left[a=3, b=3, c=1; \left(-\frac{8}{3}; 0\right)\right]$



416 ●○ Rappresenta graficamente le funzioni $y=-\log_2(x-3)+1$ e $y=\frac{1}{2}\log_2 x$ e trova il loro punto di intersezione sia graficamente che algebricamente. $[(4; 1)]$

417 ●○ Traccia il grafico di $y=\log_2(x+2)$ e $y=3-\log_2 x$ e trova il loro punto di intersezione. $[(2; 2)]$

418 ●○ REALTÀ E MODELLI **Pensarci su** Nella teoria dell'informazione, la legge di Hick afferma che, se aumenta il numero n di possibilità di scelta, il tempo T che impieghiamo a scegliere cresce secondo la legge $T = b\log_2(n+1)$. Il parametro b dipende da chi effettua la scelta e dalle condizioni in cui si trova a scegliere.
Lucia e Fabio partecipano a un gruppo di ricerca: devono effettuare delle scelte tra un numero variabile di alternative e viene misurato il tempo che impiegano. I due ragazzi impiegano lo stesso tempo a completare il test e al termine viene loro comunicato che il parametro b di Fabio vale 5, quello di Lucia 10. Sapendo che Lucia aveva 6 alternative di scelta in meno rispetto a Fabio, calcola quante erano le alternative di Fabio. [8]



Sistemi con equazioni logaritmiche

Risolvi i seguenti sistemi.

419 ●○ $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ $\left[\left(2; \frac{1}{2}\right)\right]$

420 ●○ $\begin{cases} 2\log_3 x - y = 1 \\ \log_3 x + 2y = 4 \end{cases}$ $\left[\left(3\sqrt[5]{3}; \frac{7}{5}\right)\right]$

421 ●○ $\begin{cases} x + y = 11 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$ $[(10; 1), (1; 10)]$

422 ●○ $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(y-x) = -1 \\ 2\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{9}{5} \end{cases}$ $[(3; 5)]$

423 ●○ $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 4 \\ \log_2 x + \log_2 y = 0 \end{cases}$ $\left[\left(4; \frac{1}{4}\right)\right]$

424 ●○ $\begin{cases} \log_3(x-y) = 1 \\ \log_3 x + \log_3 y = 2\log_3 2 \end{cases}$ $[(4; 1)]$

425 ●○ $\begin{cases} \log_3(2x-y) = 0 \\ 3^y + 3^x - \frac{4}{3} = 0 \end{cases}$ $[(0; -1)]$

426 ●● $\begin{cases} \log_{xy} 12 = 1 \\ 2^{x-4} \cdot 3^{x-1} = \frac{6^y}{8} \end{cases}$ $[(4; 3); (-3; -4)]$

427 ●● $\begin{cases} 4\log_2 x - \log_2 y^2 = 4 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$ $[(4; 4)]$

428 ●● $\begin{cases} 3^x \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^y = 27 \\ \frac{1}{2}\log_2(x-y) = \log_4 x \end{cases}$ $[(3; 0)]$

5 Disequazioni logaritmiche

▶ Teoria a p. 613

429 ●○ COMPLETA con il simbolo > o <.

a. $\log_3 7 \square \log_3 5$; $\quad \log_6 4 \square \log_6 14$.

b. $\log_{0,5} 4 \square \log_{0,5} 0,7$; $\quad \log_{1,5} 12 \square \log_{1,5} 2$.

c. $\log_{\frac{2}{5}} 8 \square \log_{\frac{2}{5}} 9$; $\quad \log_{\frac{5}{2}} 3 \square \log_{\frac{5}{2}} 5$.

I due membri si possono scrivere come logaritmi di uguale base

430 TEST Puoi affermare che $\log_a A > \log_a B \rightarrow A > B$ se a vale:

A -1. B 0. C $\frac{2}{3}$. D $\frac{3}{2}$. E $\frac{3}{5}$.

431 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo: **a.** $\log_{11}(2-x) > \log_{11}(x+2)$; **b.** $\log_{\frac{1}{5}} 20x < -3$.

a. Dobbiamo risolvere il seguente sistema.

$$\begin{cases} 2-x>0 & \text{condizione di esistenza} \\ x+2>0 & \text{condizione di esistenza} \\ 2-x>x+2 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti con lo stesso verso di quella fra i logaritmi, dato che la base è maggiore di 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x>-2 \\ x>-2 \\ -2x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-2 \\ x<0 \end{cases} \rightarrow -2<x<0$$

b. Osserviamo che, per la definizione di logaritmo, possiamo scrivere

$$-3 = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \log_{\frac{1}{5}} 5^3 = \log_{\frac{1}{5}} 125$$

e perciò la disequazione assume la forma:

$$\log_{\frac{1}{5}} 20x < \log_{\frac{1}{5}} 125.$$

Ora dobbiamo risolvere il seguente sistema.

$$\begin{cases} 20x>0 & \text{condizione di esistenza} \\ 20x>125 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti con verso opposto rispetto a quella fra i logaritmi, essendo la base minore di 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ 20x>125 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>\frac{25}{4} \end{cases} \rightarrow x>\frac{25}{4}$$

Risolvi le seguenti disequazioni.

432 $\log_3 x > 2$ $[x>9]$

433 $\log_2 x \le \log_2(3x-1)$ $\left[x \ge \frac{1}{2}\right]$

434 $\log(9-x) \ge \log 12$ $[x \le -3]$

435 $\ln x < 1$ $[0<x<e]$

436 $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(4x)$ $\left[x>\frac{1}{3}\right]$

437 $\log x \le -1$ $\left[0<x\le\frac{1}{10}\right]$

438 $\log_{\frac{3}{4}} x < 2$ $\left[x>\frac{9}{16}\right]$

439 $\log(x-3) \ge 0$ $[x \ge 4]$

440 $\log_{0,5}(5+3x) \ge \log_{0,5} 2$ $\left[-\frac{5}{3}<x\le -1\right]$

441 $\log_{\frac{1}{2}}(2x) > 0$ $\left[0<x<\frac{1}{2}\right]$

442 $\log_5(5-x) \le \log_5(5x+2)$ $\left[\frac{1}{2}\le x<5\right]$

443 $\log_{\frac{2}{3}}(3+x) < \log_{\frac{2}{3}}(2x-3)$ $\left[\frac{3}{2}<x<6\right]$

444 $\log_3(2-5x) > 2$ $\left[x<-\frac{7}{5}\right]$

445 $\log_{\frac{7}{9}}(2x+5) \ge 1$ $\left[-\frac{5}{2}<x\le-\frac{19}{9}\right]$

446 $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3) > -1$ $\left[\frac{3}{4}<x<\frac{3}{2}\right]$

447 $\log_5\left(\frac{2-x}{x+3}\right) < \log_5 4$ $[-2<x<2]$

ESERCIZI

448 $\log(2x - x^2) < \log(x - 2)$ [impossibile]

449 $\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > \log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ $[x < -1]$

450 $\log_{\frac{4}{5}}(2 - x^2) < \log_{\frac{4}{5}}(1 - 2x)$ $\left[1 - \sqrt{2} < x < \frac{1}{2}\right]$

451 TEST Quale fra le seguenti disequazioni ammette come soluzioni $x > 0$?

A $\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) > 0$

B $\log_2(x + 1) > 0$

C $\log x > 10$

D $\log_2 x > 0$

E $\log_{\frac{1}{2}} x < 0$

Utilizziamo anche le proprietà dei logaritmi

Risolvi le seguenti disequazioni.

452 $\log_3 x^2 - \log_3 x < 3$ $[0 < x < 27]$

453 $\log_2(x - 1) + \log_2 x > 1$ $[x > 2]$

454 $\log_3(2x - 3) - \log_3(x + 1) < 2$ $\left[x > \frac{3}{2}\right]$

455 $\log_{\frac{3}{5}}(2 - x) + \log_{\frac{3}{5}}(x + 2) > \log_{\frac{3}{5}} 3x$ $[1 < x < 2]$

456 $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 6) - \log_{\frac{1}{4}}(x - 3) > -1$ [impossibile]

457 $\log(x + 5) - \log(4 - x) + \log(3x - 1) > \log(3x - 1) - \log(x + 4)$ $\left[\frac{1}{3} < x < 4\right]$

458 $\log_{\frac{1}{4}}(x + 1) - 2\log_{\frac{1}{4}}(x - 2) + \log_{\frac{1}{4}}(x - 1) < 0$ $[x > 2]$

459 $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 4) \geq \log_2(2x - 1) + 1$ $[x \geq 2]$

460 $\frac{1}{2}\log(-x^2 + 2x) < \log x$ $[1 < x < 2]$

461 $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(25 - x) - \log_{\frac{1}{3}}(x - 5) < 0$ $[5 < x < 9]$

462 $\log\left(2 + \frac{1}{x}\right) - \log\left(2 - \frac{1}{x}\right) < \log(2x + 1) - \log(1 - 2x)$ [impossibile]

463 $\frac{1}{2}\log(6 - x) - \frac{1}{2}\log(2x - 5) > \log 3$ $\left[\frac{5}{2} < x < \frac{51}{19}\right]$

Usiamo un'incognita ausiliaria

464 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo la disequazione $\log_2 4x < 3 + \frac{4}{\log_2 4x}$.

Introduciamo l'incognita ausiliaria $y = \log_2 4x$ e sostituiamo:

$$y < 3 + \frac{4}{y} \quad \rightarrow \quad \frac{y^2 - 3y - 4}{y} < 0 \quad \rightarrow \quad y < -1 \vee 0 < y < 4.$$

Ora dobbiamo risolvere:

$$\log_2 4x < -1, \quad 0 < \log_2 4x < 4.$$

- La disequazione $\log_2 4x < -1$ è equivalente al seguente sistema.

$$\begin{cases} 4x > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \\ \log_2 4x < \log_2 \frac{1}{2} & \text{poiché } -1 = \log_2 \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4x < \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{1}{8} \end{cases} \rightarrow 0 < x < \frac{1}{8}$$

- La disequazione $0 < \log_2 4x < 4$ è equivalente al seguente sistema.

$$\begin{cases} 4x > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \\ \log_2 4x < \log_2 16; & 4 = \log_2 16 \\ \log_2 4x > \log_2 1 & 0 = \log_2 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4x < 16 \\ 4x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{4} < x < 4$$

Le soluzioni della disequazione assegnata sono pertanto: $0 < x < \frac{1}{8} \vee \frac{1}{4} < x < 4$.

Risolvi le seguenti disequazioni.

465 $(\log_2 x)^2 - \log_2 x < 0$ $[1 < x < 2]$

466 $(\log_3 x)^2 - 6\log_3 x + 9 \leq 0$ $[27]$

467 $\log^2 x - 7\log x + 12 < 0$ $[1000 < x < 10\,000]$

468 $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x - 2 < 0$ $\left[\frac{1}{4} < x < 2\right]$

469 $2(\log_3 x)^2 + 3\log_3 x - 2 < 0$ $\left[\frac{1}{9} < x < \sqrt{3}\right]$

470 $[\log_2(x+5)]^2 - \log_2(x+5) - 6 > 0$ $\left[-5 < x < -\frac{19}{4} \vee x > 3\right]$

471 $3\log_5(x-4) > \dfrac{6}{\log_5(x-4)+1}$ $\left[\frac{101}{25} < x < \frac{21}{5} \vee x > 9\right]$

Riepilogo: Disequazioni logaritmiche

472 COMPLETA

Disequazione	a	Soluzione
$\log_a(x-1) < 1$	2	
$\log_2(x+1) < a$		$-1 < x < 7$
$\log_{\frac{1}{3}}(x+a) < -2$		$x > 0$

473 ASSOCIA a ogni disequazione le sue soluzioni.

a. $\log_2 x < 3$
b. $\log_{\sqrt{2}} x > 4$
c. $\log_{\frac{1}{3}}(2-x) > \log_{\frac{1}{3}}(1-2x)$
d. $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) < 1$

1. $x > 3$
2. $x < -1$
3. $0 < x < 8$
4. $x > 4$

474 TEST La disequazione $\log x \cdot \log 2x < 0$ è verificata per:

A $x > 1$. B $x > 0$. C $\frac{1}{2} < x < 1$. D $x < 0$. E $0 < x < \frac{1}{2}$.

ESERCIZI

Risolvi le seguenti disequazioni.

475 $\log_4(x-1)\le -2$ $\quad\left[1<x\le\frac{17}{16}\right]$

476 $\log_{\frac13}(1-2x)<1$ $\quad\left[x<\frac13\right]$

477 $\log x\cdot\log(x-3)>0$ $\quad[x>4]$

478 $\ln x+\ln^2 x<0$ $\quad\left[\frac1e<x<1\right]$

479 $\log_{\frac12}(x+3)<-1$ $\quad[x>-1]$

480 $\log x+\frac{1}{\log x}<0$ $\quad[0<x<1]$

481 $3-\ln|x|<0$ $\quad[x<-e^3 \vee x>e^3]$

482 $x\log(x+2)>0$ $\quad[-2<x<-1\vee x>0]$

483 $\log(x^2+17x+16)<2$ $\quad[-21<x<-16\vee -1<x<4]$

484 $\log_{\frac23}x^5-\log_{\frac23}x<8$ $\quad\left[x>\frac49\right]$

485 $\log_4(4x-4)\le\log_2 x$ $\quad[x>1]$

486 $(\log_{\frac14}x)^2+\frac52\log_{\frac14}x>\frac32$ $\quad\left[0<x<\frac12\vee x>64\right]$

487 $\frac{1}{\log x}-3\log x<2$ $\quad\left[\frac1{10}<x<1\vee x>\sqrt[3]{10}\right]$

488 $\log(3-x)^2-2\log(4+x)<0$ $\quad\left[x>-\frac12\wedge x\ne3\right]$

489 $\log_{\frac13}(2x+8)\ge\log_{\frac13}6x-1$ $\quad\left[x\ge\frac12\right]$

490 $\log_2\sqrt x\le\frac12\log_4x^2+\log_2 x$ $\quad[x\ge1]$

491 $\log_3\frac1x-\log_3x^2<6$ $\quad\left[x>\frac19\right]$

492 $\log_{\frac12}x^4\ge\log_{\frac12}x^3$ $\quad[0<x\le1]$

493 $\log_2x>-\log_{\frac12}\sqrt x$ $\quad[x>1]$

494 $2\log_{\frac12}(x-1)\ge\log_{\frac12}\frac14$ $\quad\left[1<x\le\frac32\right]$

495 $\log_{\frac13}9+\log_{\frac13}x\ge0$ $\quad\left[0<x\le\frac19\right]$

496 $\log_{\frac23}x^5-2\log_{\frac23}\sqrt x<1$ $\quad\left[x>\sqrt[4]{\frac23}\right]$

497 $\log_{\frac15}\frac{x-1}{x+5}>\log_5\frac2x$ $\quad[x>1]$

498 $\log_{\frac13}(x^2-3x)-2\log_{\frac13}(6-x)<-\log_{\frac13}4$ $\quad[x<-2\sqrt3\vee2\sqrt3<x<6]$

499 $\log_{\sqrt[3]{2}}(2x-5)-\log_{\sqrt[3]{2}}\frac{2x-5}{x+4}<3$ $\quad[S=\varnothing]$

500 $3\log_2(2x-4)-\log_2(-x+3)>2\log_2(x-5)$ $\quad[S=\varnothing]$

501 $\frac12\log_x[2(1-x)]+\log_x\sqrt x+\frac14\log_x x^2<2$ $\quad[0<x<\sqrt3-1]$

502 $\log_2(\sqrt{1-x}-2)>0$ $\quad[x<-8]$

503 $\log_2(1-|x|)>3$ $\quad$[impossibile]

504 $\sqrt{4-\log_2 x}>3$ $\quad\left[0<x<\frac1{32}\right]$

505 $\log\log(x-1)\ge0$ $\quad[x\ge11]$

506 $\log_{\frac12}\log_{\frac12}\left(x+\frac32\right)\le1$ $\quad\left[-\frac32<x\le\frac{\sqrt2-3}{2}\right]$

507 $\ln x+\frac2{\ln x}-3\le0$ $\quad[0<x<1\vee e\le x\le e^2]$

508 $3(\log_3x+\log_x3)\ge10$ $\quad[1<x\le\sqrt[3]3\vee x\ge27]$

509 $\log_2|x^2+2x+3|>1$ $\quad[x\ne-1]$

510 $\frac{(\log_2x)^2-9\log_2x+20}{|\log_2x|}\le0$ $\quad[16\le x\le32]$

511 $\sqrt{\log_3x}-6\log_3\sqrt x>0$ $\quad[1<x<\sqrt[9]3]$

512 $\frac{\log(x-1)}{\log x-1}\le0$ $\quad[2\le x<10]$

513 $(\log_2x)^3-9\log_2x\le0$ $\quad\left[0<x\le\frac18\vee1\le x\le8\right]$

514 $(\log_2x)^2-8\ge4\log_2\sqrt x$ $\quad\left[0<x\le\frac14\vee x\ge16\right]$

515 $\frac{\log_2x}{\log_{\frac12}2x+2}>0$ $\quad[1<x<2]$

516 $\log_4|x-3|\le1$ $\quad[-1\le x\le7\wedge x\ne3]$

517 $\log^4x-8\log^2x+16>0$ $\quad\left[x>0\wedge x\ne\frac1{100}\wedge x\ne100\right]$

518 $\log_2\sqrt{2x-x^2}<0$ $[0<x<2\wedge x\neq 1]$

519 $\dfrac{1}{\log_5(x-1)}<-1$ $\left[\dfrac{6}{5}<x<2\right]$

520 $\log_2(3x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)\leq 2$ $\left[x>\dfrac{2}{3}\right]$

521 $\dfrac{1}{2}\log_4 8x-(\log_4 8x)^2<\dfrac{1}{2}$ $[x>0]$

522 $\log_2\log_3(x+4)>0$ $[x>-1]$

523 $\dfrac{4-\log_2 x}{\log_2(x-2)}\geq 0$ $[3<x\leq 16]$

524 $\log^3 x-4\log^2 x+4\log x\leq 0$ $[0<x\leq 1\vee x=100]$

525 $(\log_2 x)[\log_2(x+1)]<2\log_2 x$ $[1<x<3]$

526 $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{|x-2|}{x}<-1+\log_2 x$ $[x>4]$

527 $|\log_3|2x+3||-3>0$ $\left[x<-15\vee x>12\vee-\dfrac{41}{27}<x<-\dfrac{40}{27}\wedge x\neq-\dfrac{3}{2}\right]$

528 $\log_2\log_{\frac{1}{2}}(x-6)<0$ $\left[\dfrac{13}{2}<x<7\right]$

529 $\log_4\sqrt{3x-2}-[\log_4(3x-2)]^2<\dfrac{1}{2}$ $\left[x>\dfrac{2}{3}\right]$

530 $\log_6\sqrt{x^2-2x}<\log_6|x|-\dfrac{1}{2}$ $\left[2<x<\dfrac{12}{5}\right]$

531 $\dfrac{\log_2(x+1)}{4}>\dfrac{1}{3}\log_4(x\sqrt{x}+1)$ $[x>0]$

---

532 Traccia il grafico di $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ e $g(x)=\log_2 x-1$ e trova per quali valori di x si ha $f(x)\geq g(x)$.

533 Data la disequazione $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+k)>k$:

a. determina le soluzioni se $k=-1$;

b. stabilisci se per $k=0$ è equivalente alla disequazione $2\log_{\frac{1}{2}}x>0$.

$[a)\ -\sqrt{3}<x<-1\ \vee\ 1<x<\sqrt{3};\ b)\ \text{no}]$

534 TEST Il dominio della funzione $y=\log_2\log_{\frac{1}{2}}x$ è:

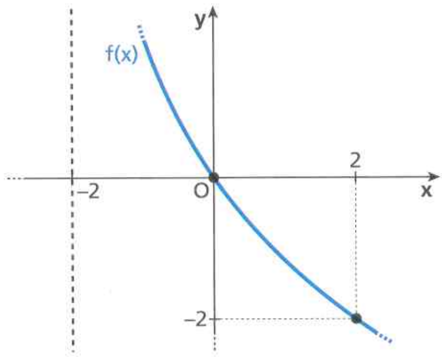
A $[0;1]$. B $]0;+\infty[$. C $]1;+\infty[$. D $]-\infty;0[$. E $]0;1[$.

535 LEGGI IL GRAFICO L'equazione della funzione rappresentata in figura è del tipo $f(x)=a\log_2(x+b)+c$. La retta tratteggiata è un asintoto per il grafico di $f(x)$.

a. Trova a, b, c.

b. Calcola per quali valori di x è $f(x)\geq 4$.

$\left[a)\ a=-2,\ b=2,\ c=2;\ b)\ -2<x\leq-\dfrac{3}{2}\right]$



Sistemi con disequazioni logaritmiche

Risolvi i seguenti sistemi.

536 $\begin{cases}\log_3\dfrac{3x}{x+1}>1\\ \log(1-x)\leq 1\end{cases}$ $[-9\leq x<-1]$

537 $\begin{cases}\log_2\dfrac{x}{x-1}<2\\ \log_{\frac{1}{2}}(x-1)<-2\end{cases}$ $[x>5]$

538 $\begin{cases}\log^2 x<\dfrac{2}{\log x+1}\\ \dfrac{\log x-1}{\log(x-1)}\leq 0\end{cases}$ $[2<x<10]$

539 $\begin{cases}\log x^2\geq 3\log x\\ \log x-1\leq 0\end{cases}$ $[0<x\leq 1]$

540 $\begin{cases}\log_4(x-1)+\dfrac{3}{2}<0\\ \log_2\log_3 x\leq 1\end{cases}$ $\left[1<x<\dfrac{9}{8}\right]$

541 $\begin{cases}\log_3(x+9)\leq\log_3(x+1)+2\\ (\log_3 x)^2-1>0\end{cases}$ $\left[0<x<\dfrac{1}{3}\vee x>3\right]$

542 $\begin{cases}\log_2(4^x-2)<1\\ \log_2 x+2\geq 0\end{cases}$ $\left[\dfrac{1}{2}<x<1\right]$

ESERCIZI

6 Logaritmi ed equazioni e disequazioni esponenziali

Equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

▶ Teoria a p. 614

543 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo $7^{x+1} + 2 \cdot 7^x = 11$.

$7^{x+1} + 2 \cdot 7^x = 11$) raccogliamo 7^x

$7^x(7+2) = 11$

$9 \cdot 7^x = 11$) dividiamo entrambi i membri per 9

$7^x = \frac{11}{9}$) calcoliamo i logaritmi in base 7 del primo e secondo membro

$\log_7 7^x = \log_7 \frac{11}{9}$) logaritmo di una potenza

$x \cancel{\log_7 7} = \log_7 \frac{11}{9}$) $\log_7 7 = 1$

$x = \log_7 \frac{11}{9}$) cambiamo la base del logaritmo da 7 a 10

$$x = \frac{\log \frac{11}{9}}{\log 7} = \frac{\log 11 - \log 9}{\log 7}$$

Risolvi le seguenti equazioni usando le proprietà dei logaritmi.

544 $5^x = 9$ $\left[\frac{\log 9}{\log 5}\right]$

545 $3^x - 2 = 0$ $\left[\frac{\log 2}{\log 3}\right]$

546 $4 \cdot 5^x = 3 \cdot 7^x$ $\left[\frac{\log 3 - \log 4}{\log 5 - \log 7}\right]$

547 $\frac{7}{2^x} = 1$ $\left[\frac{\log 7}{\log 2}\right]$

548 $\sqrt[3]{7^x} = 5$ $\left[\frac{3\log 5}{\log 7}\right]$

549 $3 \cdot 2^x + 2^{x+1} = 19$ $\left[\frac{\log 19 - \log 5}{\log 2}\right]$

550 $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 26$ $\left[\frac{\log 2}{\log 3}\right]$

551 $7^{x+1} - 7^x + 2 \cdot 7^{x-1} = 2$ $\left[1 - \frac{\log 22}{\log 7}\right]$

552 $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 15$ $\left[\frac{\log 30 - \log 7}{\log 2}\right]$

553 $9^x - 3^x - 2 = 0$ $\left[\frac{\log 2}{\log 3}\right]$

554 $12 - 2^{x+3} + 2^{2x} = 0$ $\left[1; \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2}\right]$

555 $3^x + 20 = 9^x$ $\left[\frac{\log 5}{\log 3}\right]$

556 $3 \cdot 5^x - \frac{12}{5^x} = 5^x$ $\left[\frac{\log 6}{2\log 5}\right]$

557 $5^x \cdot 2^{2x} = 10$ $\left[\frac{\log 5 + \log 2}{\log 5 + 2\log 2}\right]$

558 $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{2-x} = 29$ $\left[2; \frac{\log 2}{\log 3} - 1\right]$

559 $6 - 5 \cdot 3^x + (3^x)^2 = 0$ $\left[1; \frac{\log 2}{\log 3}\right]$

560 $9 \cdot 2^{2x+1} - 9^2 - 4^{2x} = 0$ $\left[\frac{\log 3}{\log 2}\right]$

561 $2^{2x+3} - 25 \cdot 2^x + 3 = 0$ $\left[-3; \frac{\log 3}{\log 2}\right]$

562 $\frac{2}{5^x} = \frac{3}{7^x}$ $\left[\frac{\log 3 - \log 2}{\log 7 - \log 5}\right]$

563 $3^x + 3^{x+1} = 5^x$ $\left[\frac{2\log 2}{\log 5 - \log 3}\right]$

564 $7 \cdot 2^x + \frac{5}{2^x} = \frac{117}{4}$ $\left[2; \frac{\log 5 - \log 28}{\log 2}\right]$

565 $5^x + 233 = 33(\sqrt{5^x} + 1)$ $\left[4; \frac{\log 64}{\log 5}\right]$

TEST

566 Fra le seguenti equazioni esponenziali, *una sola* può essere risolta senza ricorrere all'uso dei logaritmi. Quale?

A $7^{x+1} = 5^x$

B $3^{x-1} = 6^{2x}$

C $2^{3x-1} = 5^x$

D $2^{x-1} = 4^x + 3$

E $2^{2x} + 2 = 6^{1-x}$

567 Tutte le seguenti equazioni si devono risolvere ricorrendo all'uso dei logaritmi, *tranne* una. Quale?

A $2^{x-1} = 3^{x+1}$

B $\sqrt[3]{4^x} = 3$

C $3^{x-1} + 3 = 9$

D $7 \cdot 5^{x+2} = 7^{x+1}$

E $\frac{2}{4^x} = \frac{3}{6^x}$

Risolvi le seguenti equazioni con il metodo che ritieni opportuno.

568 $3^{\frac{x+2}{2}} = 9$ $[2]$

569 $4^{5-x} = 3^{x+1}$ $\left[\frac{5\log 4 - \log 3}{\log 3 + \log 4}\right]$

570 $3^{\sqrt{x+2}} = 9^{\sqrt{x}}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

571 $\sqrt{3^{x+3}} = \frac{3^{2x+4}}{27^{5x}}$ $\left[\frac{5}{27}\right]$

572 $49^x - 13 \cdot 7^x + 36 = 0$ $[\log_7 9; \log_7 4]$

573 $25^x - 2 \cdot 5^x = 8$ $\left[\frac{\log 4}{\log 5}\right]$

574 $4 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 2$ $\left[\frac{\log 2 - \log 7}{\log 3}\right]$

575 $\frac{8^x \cdot 2}{2^{x+3}} = \frac{2^{x+1}}{2^{2x+2}}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

576 $64 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^{x+2} - 2 = 0$ $[-4]$

577 $3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$ $[-1; 2]$

578 $6 - \frac{3 + 5^x}{5^x} = 6 \cdot 5^x$ [impossibile]

579 $\frac{1}{2^x - 1} + \frac{2^x}{4^x - 1} = \frac{3 \cdot 2^x - 1}{2^x + 1}$ $[1]$

580 $\frac{(2^{x-2})^x}{4^{2x+1}} = \frac{(2^{2x})^{x-3}}{8^{x+4}}$ $[-2; 5]$

581 $\frac{2 \cdot 25^x - 13 \cdot 5^x + 15}{5^x - 5} = 0$ $\left[\frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 5}\right]$

582 $6 \cdot 2^x + \frac{1}{2^x} = 5$ $\left[-1; -\frac{\log 3}{\log 2}\right]$

583 $5^x + 5^{x+1} + 5^{x-1} - 93 = 0$ $\left[1 + \frac{\log 3}{\log 5}\right]$

584 $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{4}{9}\right)^x$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

585 $\frac{20 - 4^x}{5 + 4^x} = \frac{4}{5}$ $\left[\frac{\ln 80 - \ln 9}{\ln 4}\right]$

586 $3^x = 16 \cdot 3^{-x+1} + 2$ $\left[\frac{\ln 8}{\ln 3}\right]$

587 $2^{x+3} - 2^{x+2} = 4 + 2 \cdot 4^{\frac{x}{2}}$ $[1]$

588 $\left(2^x - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}\right) \cdot (3^x - 5) = 0$ $\left[-\frac{4}{3}; \frac{\log 5}{\log 3}\right]$

589 $3^{x+1} - 2 \cdot 3^x + 3^{x+2} = 5^{x-1}$ $\left[\frac{2\log 5 + \log 2}{\log 5 - \log 3}\right]$

590 $\frac{3^{x-2} \cdot 2^{1-x}}{6} = 7^x$ $\left[\frac{\log_7 \frac{1}{27}}{\log_7 \frac{14}{3}}\right]$

591 $5\sqrt{9^{x-1}} - 2^x = 3^{x-1}$ $\left[\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}\right]$

592 $\frac{4^{x-1} \cdot 5^x}{3^{x-3}} = 4$ $\left[\frac{\log_3 16 - 3}{\log_3 20 - 1}\right]$

593 $3^x = 6^{x-2} \cdot 3$ $[\log_2 12]$

594 $3^{\frac{x+1}{2}} \cdot 7^{x-1} = \frac{1}{49^x \cdot 9^x}$ $\left[\frac{2\ln 7 - \ln 3}{5\ln 3 + 6\ln 7}\right]$

595 $(2^x - 1)(2^x - 4) = 10$ $\left[\frac{\ln 6}{\ln 2}\right]$

596 $\frac{2^{x-3} + 4}{2^{3-x}} = 32$ $[5]$

597 $\frac{2}{25^x - 1} + \frac{3}{4} = \frac{2}{5^x - 1}$ $[\log_5 3]$

598 $4^x + 10^x = 25^x$ $\left[\log_{\frac{2}{5}} \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right]$

599 Data la funzione $f(x) = \frac{3^x}{2 - 3^x}$:

a. determina il suo dominio;

b. trova per quale valore di x si ha $f(x) = -\frac{3}{2}$.

[a) D: $x \neq \log_3 2$; b) $\log_3 6$]

ESERCIZI

600 Considera la funzione $y = 2^{2x} - 3 \cdot 2^x$ e trova i punti di intersezione del suo grafico con l'asse x e con la retta di equazione $y = \frac{7}{4}$. $\left[(\log_2 3; 0); \left(\log_2 \frac{7}{2}; \frac{7}{4}\right)\right]$

REALTÀ E MODELLI

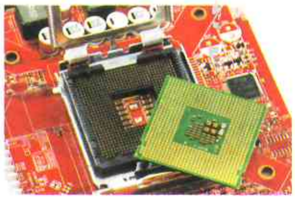
601 **Capelli in caduta** Circa l'80% degli uomini dopo i 45 anni è colpito da una perdita di capelli. Indicata con C_0 la quantità di capelli all'inizio della caduta, si può pensare che il numero decresca secondo la legge $C(t) = C_0 e^{-kt}$, dove t è il tempo espresso in anni.

stima media capelli iniziali
uomini bruni: 100 000
uomini biondi: 140 000

a. Scrivi le espressioni analitiche delle funzioni che riguardano uomini bruni ($k = 0{,}138$) e uomini biondi ($k = 0{,}147$) e traccia i loro grafici.
b. Verifica che dopo 5 anni il numero di capelli di un uomo bruno si è dimezzato.
c. Mediante un'equazione calcola dopo quanto tempo un uomo biondo e uno bruno hanno lo stesso numero di capelli e quanti sono i capelli dopo quel tempo.

[a) $C(t) = 100\,000 e^{-0{,}138t}$, $C(t) = 140\,000 e^{-0{,}147t}$; c) circa 37 anni e 5 mesi, 575 capelli]

602 **Veder lontano** Nel 1965 Gordon Moore, che diventò poi il fondatore di Intel, teorizzò che la potenza di calcolo dei processori sarebbe cresciuta negli anni successivi in modo prevedibile: in particolare, il numero di transistor presenti nei processori sarebbe raddoppiato ogni dodici mesi circa.



a. Scrivi l'espressione della funzione $t(x)$ che esprime questa relazione in funzione di x, numero di mesi trascorsi.
b. Un processore, nel gennaio 1992, conteneva 750 000 transistor. Se la legge di Moore è valida, in quale anno è stato realizzato un processore con 1 000 000 000 di transistor?

[a) $t(x) = t_0 \cdot 2^{\frac{x}{12}}$; b) 2002]

603 **Non riesco a dormire!** Se si beve caffè, per calcolare approssimativamente la quantità totale di caffeina presente nel corpo al passare del tempo si può utilizzare la formula $C(t) = C_0 e^{-\frac{3}{20}t}$, dove il tempo t è espresso in ore e C_0 è la quantità di caffeina che si assume all'istante t_0 (la formula deriva da valori medi, infatti l'assorbimento della caffeina dipende fortemente dalle caratteristiche di ogni singola persona).

a. Una tazzina di caffè contiene circa 60 mg di caffeina; quanto tempo ci vuole per portare a 40 mg la quantità di caffeina nel corpo di chi la assume?
b. Rappresenta graficamente la funzione che indica come varia la quantità di caffeina presente al variare del tempo se si bevono due tazzine di caffè una subito dopo l'altra.

[a) circa 2 ore e 42 minuti]

604 **Quanto tempo?** Andrea impegna € 18 000 in un piano di gestione patrimoniale. Le condizioni offerte sono riportate a fianco.

tasso di rendimento
del 2% annuo
zero spese di gestione
accredito dell'utile
alla fine di ogni anno
e suo reimpiego nella gestione

a. Calcola per quanto tempo Andrea deve lasciare la somma nella gestione per ottenere € 20 000, utilizzando la funzione $M = C \cdot (1 + x)^t$, dove C è il valore investito, M il valore finale che Andrea ritira, x il tasso di rendimento annuo e t la durata, espressa in anni, dell'operazione.
b. Se invece l'operazione fosse descritta con la funzione $M = C \cdot e^{xt}$, quale sarebbe il tempo necessario?

[a) 5 anni, 3 mesi, 25 giorni; b) 5 anni, 3 mesi, 6 giorni]

605 YOU & MATHS The growth of bacteria is known to follow the law of exponential growth $N(t) = N_0 e^{kt}$. If the original size of the colony is 100 bacteria and 4 hours later it is 100,000 bacteria, how many hours after the original time will the colony number count up to 1,000,000 bacteria?

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam, Fall 2001)

[5h 20′]

Disequazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

▶ Teoria a p. 615

606 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo $7^x > 4 \cdot 3^{5x}$.

Applichiamo a entrambi i membri il logaritmo in base 10. Poiché la base è maggiore di 1, manteniamo il segno $>$ nella disequazione fra logaritmi.

$\log 7^x > \log(4 \cdot 3^{5x})$) logaritmo di un prodotto

$\log 7^x > \log 4 + \log 3^{5x}$) logaritmo di una potenza

$x \log 7 > 2\log 2 + 5x \log 3$

$x\log 7 - 5x\log 3 > 2\log 2 \;\rightarrow\; x \cdot (\log 7 - 5\log 3) > 2\log 2$

Dato che $\log 7 - 5\log 3 \simeq -1{,}54 < 0$, dividendo entrambi i membri della disequazione per questo fattore, invertiamo il verso della disequazione.

Le soluzioni sono pertanto: $x < \dfrac{2\log 2}{\log 7 - 5\log 3}$.

Risolvi le seguenti disequazioni usando le proprietà dei logaritmi.

607 $2^x < 5$ $\left[x < \dfrac{\log 5}{\log 2}\right]$

608 $3^{2x} - 4 \geq 0$ $\left[x \geq \dfrac{\log 4}{2\log 3}\right]$

609 $4 - 7^{2x} > 0$ $\left[x < \dfrac{\log 4}{2\log 7}\right]$

610 $6^x + 6 \geq 6^{-1}$ $[\forall x]$

611 $10 \cdot 5^{2x} < 1$ $\left[x < -\dfrac{1}{2\log 5}\right]$

612 $3^{x+1} \geq 2^{1-x}$ $\left[x \geq \dfrac{\log 2 - \log 3}{\log 2 + \log 3}\right]$

613 $100^x - 2^{3-x} < 0$ $\left[x < \dfrac{3\log 2}{2 + \log 2}\right]$

614 $5^{2x} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1} < 0$ $\left[x < \dfrac{\log 3}{2\log 5 + \log 3}\right]$

615 $1 - \dfrac{1}{4 \cdot 9^x - 4} \geq 0$ $\left[x < 0 \vee x \geq \log_9 \dfrac{5}{4}\right]$

616 $25^{x+1} - 3 \cdot 5^{2x+1} < 31 - 7 \cdot 25^x$ $\left[x < \dfrac{\log 31 - \log 17}{2\log 5}\right]$

617 $40 - 9 \cdot 2^x > 20 + 2^{2-x}$ $\left[\dfrac{\log 2 - \log 9}{\log 2} < x < 1\right]$

618 $4^x + 10 > 7 \cdot 2^x$ $\left[x < 1 \vee x > \dfrac{\log 5}{\log 2}\right]$

619 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-x} < 2$ $\left[x > \dfrac{\log 2}{\log 2 - \log 3}\right]$

620 $\dfrac{3^x \cdot 14}{3^2(2^2+3)} < 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$ $\left[x < \dfrac{2\log 3 - \log 2}{\log 3 - \log 2}\right]$

621 $\sqrt{5^{x-1}} < 9 \cdot 3^{2x}$ $\left[x > \dfrac{\log 5 + 4\log 3}{\log 5 - 4\log 3}\right]$

622 $24 \cdot 5^x \geq 5 \cdot 6^{x+1}$ $\left[x \leq \dfrac{\log 5 - \log 4}{\log 5 - \log 6}\right]$

623 $\left|\left(\dfrac{2}{5}\right)^x - \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-2x}\right| < 2$ $\left[x > \dfrac{\log 2}{\log 2 - \log 5}\right]$

624 $\dfrac{3}{10^x - 2} - \dfrac{1}{10^x + 2} > 1 - \dfrac{2}{10^x + 2}$ $\left[\log 2 < x < \log(2 + \sqrt{12})\right]$

625 $\dfrac{x-1}{5^{2x-1} - 7^{x+1}} \leq 0$ $\left[1 \leq x < \dfrac{\log 5 + \log 7}{2\log 5 - \log 7}\right]$

626 $(7^x - 1)^2 - 5 \cdot (7^x - 1) + 4 < 0$ $\left[\dfrac{\log 2}{\log 7} < x < \dfrac{\log 5}{\log 7}\right]$

627 $0{,}2^x \cdot (6 \cdot 0{,}2^x - 13) \geq -5$ $\left[x \leq \dfrac{\log 3 - \log 5}{\log 5} \vee x \geq \dfrac{\log 2}{\log 5}\right]$

ESERCIZI

628 $\sqrt{25-5^x} \leq 5^x - 5$ $\left[\frac{\log 9}{\log 5} \leq x \leq 2\right]$

629 $4^{3+x} \geq 7^{2-x}$ $\left[x \geq \frac{2\log 7 - 6\log 2}{\log 7 + 2\log 2}\right]$

630 $5 \cdot 3^{1-x} - 2^{1+x} \geq 4 \cdot 3^{1-x} + 3 \cdot 2^{1+x}$ $\left[x \leq \frac{\log 3 - 3\log 2}{\log 3 + \log 2}\right]$

631 $(0,1)^x - 3 \cdot 6^x > 6^x - 8 \cdot (0,1)^x$ $\left[x < \frac{2\log 3 - 2\log 2}{\log 3 + 2\log 2 + \log 5}\right]$

632 $\frac{|2^x - 4| - 2^x + 4}{5^x - 2} > 0$ $[\log_5 2 < x < 2]$

633 $\frac{15^x - 5^{x+1} + 5 \cdot 3^x - 9^x}{4^x - 4} \leq 0$ $\left[x \leq 0 \vee 1 < x \leq \frac{\log 5}{\log 3}\right]$

634 REALTÀ E MODELLI **Cavolo logaritmico** Il broccolo romanesco ha una struttura molto affascinante: la parte che si consuma normalmente è composta da una serie di infiorescenze disposte lungo una spirale logaritmica. Il processo di accrescimento del raggio delle infiorescenze (o rosette) si può descrivere con l'equazione $r = 2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{\frac{1}{7}t}$ (t indica il tempo in giorni e r il raggio in cm). Il broccolo è maturo quando il raggio delle rosette più grandi è compreso tra 4 cm e 8 cm. Quanti giorni impiega a maturare? [circa 70 giorni]

Dominio e segno di funzioni con esponenziali e logaritmi

TEST

635 Quale fra le seguenti funzioni *non* ha dominio $x \neq 0$?

A $y = \log e^{\frac{1}{x}} + 1$

B $y = \ln x^2 - 1$

C $y = \log_3 |x| + 5$

D $y = 3^x + \ln x^2$

E $y = \frac{\ln(x+3)}{x}$

636 Quale delle seguenti funzioni ha dominio $\mathbb{R}$?

A $y = 3^{x-1}$

B $y = \log x$

C $y = \log(x^2 - 5)$

D $y = \log\sqrt{x}$

E $y = \frac{x+1}{\log x}$

637 Il dominio della funzione

$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ è:

A $x > 2$.

B $1 < x \leq 2$.

C $x > 1$.

D $1 \leq x < 2$.

E $x \geq 2$.

638 Il dominio della funzione $y = \log_\alpha x - 1$ è:

A $x > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

B $x < 0 \quad$ se $0 < \alpha < 1$.

C $x < 1 \quad$ se $0 < \alpha < 1$.

D $x > 1 \quad$ se $\alpha > 1$.

E $x > 0 \quad$ se $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$.

639 ASSOCIA a ciascuna funzione il suo dominio.

a. $y = \log_2 \sqrt{x}$

b. $y = \sqrt{\log_2 x}$

c. $y = \frac{1}{\log_2|x| - 1}$

d. $y = \frac{\log x}{\log_2 x - 1}$

1. $x \neq 0 \wedge x \neq \pm 2$

2. $x > 0$

3. $x > 0 \wedge x \neq 2$

4. $x \geq 1$

640 ESERCIZIO GUIDA Cerchiamo il dominio delle seguenti funzioni:

a. $y = \dfrac{\ln x}{1-\ln^2 x}$; **b.** $y = \ln(1-e^{-2x})$.

a. Dobbiamo risolvere il seguente sistema.

$$\begin{cases} x > 0 & \text{condizione di esistenza di } \ln x \\ 1-\ln^2 x \neq 0 & \text{denominatore diverso da 0} \end{cases}$$

Cerchiamo i valori che annullano il denominatore risolvendo l'equazione:

$$1-\ln^2 x = 0 \;\rightarrow\; \ln^2 x = 1 \;\rightarrow\; \ln x = \pm 1.$$

$$\ln x = -1 \;\rightarrow\; x = e^{-1}; \qquad \ln x = 1 \;\rightarrow\; x = e.$$

Il dominio della funzione è dunque D: $x > 0 \wedge x \neq e^{-1} \wedge x \neq e$.

b. Imponiamo la condizione di esistenza del logaritmo:

$$1-e^{-2x} > 0 \;\rightarrow\; 1 > e^{-2x} \;\rightarrow\; e^{-2x} < e^0 \underset{e>1}{\rightarrow} -2x < 0 \;\rightarrow\; 2x > 0 \;\rightarrow\; x > 0.$$

Il dominio della funzione è D: $x > 0$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

641 $y = \log(2-x) + \log(x+3)$ $\quad [-3 < x < 2]$

642 $y = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$ $\quad [0 < x < e^{-1} \vee x > e^{-1}]$

643 $y = \sqrt{\log_3 x - 2}$ $\quad [x \geq 9]$

644 $y = \sqrt{4-(\log_{\frac{1}{2}} x)^2}$ $\quad \left[\frac{1}{4} \leq x \leq 4\right]$

645 $y = \dfrac{\log x}{\ln x - 2}$ $\quad [0 < x < e^2 \vee x > e^2]$

646 $y = \sqrt{3-\log_2(x-1)}$ $\quad [1 < x \leq 9]$

647 $y = \dfrac{\ln(9-6x)}{\ln x - 1}$ $\quad \left[0 < x < \frac{3}{2}\right]$

648 $y = \dfrac{\ln x - 4}{\sqrt{4-\ln x}}$ $\quad [0 < x < e^4]$

649 $y = \sqrt{\log_2 x - 1} + \sqrt{-\log_2 x + 4}$ $\quad [2 \leq x \leq 16]$

650 $y = \log_2(2^x + 2^{1-x} - 3)$ $\quad [x < 0 \vee x > 1]$

651 $y = \dfrac{1}{\log^2 x - \log x}$ $\quad [x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 10]$

652 $y = \sqrt{\dfrac{\ln x}{\ln x - 1}}$ $\quad [0 < x \leq 1 \vee x > e]$

653 $y = \dfrac{\sqrt{4-x}}{\ln(2^x-3)}$ $\quad [\log_2 3 < x \leq 4 \wedge x \neq 2]$

654 $y = \sqrt{3^x - 5}$ $\quad \left[x \geq \frac{\log 5}{\log 3}\right]$

655 $y = \sqrt{e^{-x} - e^x}$ $\quad [x \leq 0]$

656 $y = \dfrac{1}{\log(2^x-1)}$ $\quad [0 < x < 1 \vee x > 1]$

657 $y = \dfrac{\log(x-2)-8}{(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2}$ $\quad [2 < x < 9 \vee x > 9]$

658 $y = \dfrac{1}{\log_2|x|} - \dfrac{1}{\log_2 x - 3}$ $\quad [x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq 8]$

659 $y = \sqrt{1-\sqrt{\log_2(x+1)}}$ $\quad [0 \leq x \leq 1]$

660 $y = \dfrac{1}{(\log 2x)^2 - \log 4x^2}$ $\quad \left[x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{2} \wedge x \neq 50\right]$

661 $y = \log\dfrac{\log x - 1}{\log x}$ $\quad [0 < x < 1 \vee x > 10]$

662 $y = \log_2 \log_2 \log \dfrac{x}{2}$ $\quad [x > 20]$

663 $y = \log(|2^x - 1| - 2)$ $\quad \left[x > \frac{\log 3}{\log 2}\right]$

ESERCIZI

664 $y=\sqrt{\dfrac{\log_3 x-2}{10^x-10}}$ $[0<x<1 \vee x\ge 9]$

665 $y=\sqrt{\log_2 x-1}+\sqrt{\log_2(x-1)}$ $[x\ge 2]$

666 $y=\log\dfrac{11^{-x}-11^x}{13^{x+1}-13^{-x-1}}$ $[-1<x<0]$

667 $y=\sqrt{2\left(\log_{\frac12}x\right)^2+\log_{\frac12}x-1}$ $\left[0<x\le\dfrac{\sqrt2}{2}\vee x\ge 2\right]$

668 $y=\dfrac{\sqrt{e^x-6}}{2\ln^2x-3\ln x+1}$ $[x\ge\ln 6\wedge x\ne e]$

669 $y=\sqrt{1-3^{x-2}}-\sqrt{6^{2x+1}-12}$ $\left[\dfrac{\ln2}{2\ln6}\le x\le 2\right]$

670 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\log_3\log_{\frac12}(1-2^x)}$ $[-2\le x<0\wedge x\ne -1]$

671 $y=\dfrac{\sqrt{\log_{\frac13}x}}{\log_2(3-2x)}$ $[0<x<1]$

672 $y=\dfrac{\sqrt{9^x-3}}{\log_3\sqrt{|x|}}$ $\left[x\ge\dfrac12\wedge x\ne1\right]$

673 $y=\sqrt{\dfrac{\ln(3-x)-\ln 2x}{\ln(3-x)}}$ $[0<x\le1\vee 2<x<3]$

674 $y=\sqrt{\dfrac{\log x-2}{2^{2x-2}-64}}$ $[0<x<4\vee x\ge100]$

675 $y=\dfrac{\log(12x-7)}{|7^x-1|-6}$ $\left[x>\dfrac{7}{12}\wedge x\ne1\right]$

676 $y=e^{\frac{6}{\log_2(3+x)-2}}$ $[-3<x<1\vee x>1]$

677 $y=\dfrac{1}{\log_2x^2-4}-\dfrac{1}{2-\log_2|x|}$ $[x\ne0\wedge x\ne\pm4]$

678 $y=\sqrt{2\cdot e^x+5-3\cdot e^{-x}}$ $[x\ge-\ln2]$

679 $y=\dfrac{\sqrt{1-x}\cdot\log x}{\log(2-3^x)}$ $[0<x<\log_3 2]$

680 $y=\dfrac{3}{(\log_3x)^2-\log_3x-2}$ $\left[x>0\wedge x\ne\dfrac13\wedge x\ne9\right]$

681 $y=\sqrt{|e^x-2|-1}$ $[x\le0\vee x\ge\ln3]$

682 $y=\log_{\frac12}\left[\log_{\frac12}(x+5)\right]$ $[-5<x<-4]$

683 $y=\dfrac{1}{5^x-25^x+6}$ $\left[x\ne\dfrac{\log3}{\log5}\right]$

684 $y=\dfrac{5}{|\log_2(5-x)|-1}$ $\left[x<5\wedge x\ne\dfrac92\wedge x\ne3\right]$

685 $y=\log(2^{-x}-3)$ $\left[x<-\dfrac{\log3}{\log2}\right]$

686 $y=\ln(1-2\sqrt{-x})$ $\left[-\dfrac14<x\le0\right]$

687 $y=\sqrt{\log_2(x+1)}+\sqrt{\log_{\frac12}x-4}$ $\left[0<x\le\dfrac1{16}\right]$

688 $y=\sqrt{\dfrac{\ln(x^2+4)}{\ln(x+1)-2}}$ $[x>e^2-1]$

689 $y=\sqrt{\log_{\frac13}|x|}$ $[-1\le x\le1\wedge x\ne0]$

690 $y=\log_{\frac12}\log_2\log_3x$ $[x>3]$

691 $y=\dfrac{2}{\log_3\sqrt x}$ $[x\ne0\wedge x\ne-1]$

692 $y=\sqrt{\dfrac{3^x-2}{\log_3x}}$ $[0<x\le\log_3 2\vee x>1]$

Determina il dominio delle seguenti funzioni, studia il segno e determina gli eventuali zeri.

693 $y=\log_3(x+1)$ $[D: x>-1;\ y>0: x>0;\ y=0: x=0]$

694 $y=\log_{\frac14}(2x)$ $\left[D: x>0;\ y>0: 0<x<\dfrac12;\ y=0: x=\dfrac12\right]$

695 $y=\log_{0,3}(x-3)$ $[D: x>3;\ y>0: 3<x<4;\ y=0: x=4]$

696 $y=\log_4\left(\dfrac1x\right)$ $[D: x>0;\ y>0: 0<x<1;\ y=0: x=1]$

697 $y=\sqrt{3^x-5}$ $\left[D: x\ge\dfrac{\log5}{\log3};\ y>0: x>\dfrac{\log5}{\log3};\ y=0: x=\dfrac{\log5}{\log3}\right]$

698 $y=\sqrt{\ln x-1}$ $[D: x\ge e;\ y>0: x>e;\ y=0: x=e]$

699 $y = \log \dfrac{2x-4}{x}$ $[D: x < 0 \vee x > 2;\ y > 0: x < 0 \vee x > 4;\ y = 0: x = 4]$

700 $y = \log \dfrac{1}{x+2}$ $[D: x > -2;\ y > 0: -2 < x < -1;\ y = 0: x = -1]$

701 $y = \log_2 \log_2 x$ $[D: x > 1;\ y > 0: x > 2;\ y = 0: x = 2]$

702 $y = \dfrac{1}{\log(2^x - 1)}$ $[D: 0 < x < 1 \vee x > 1;\ y > 0: x > 1;\ y = 0:$ impossibile$]$

703 $y = \log(x-2) - 2$ $[D: x > 2;\ y > 0: x > 102;\ y = 0: x = 102]$

704 $y = \dfrac{\log x}{\log(x-3)}$ $[D: x > 3 \wedge x \neq 4;\ y > 0: x > 4;\ y = 0:$ impossibile$]$

705 Data la funzione $y = \log_3\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 3\right]$ determina:

a. il suo dominio;

b. per quali valori di x il grafico della funzione è sopra all'asse delle ascisse. $[$a) $D: x < 0$; b) $x < 1 - \log_3 4]$

706 Data la funzione $y = a\log_2(3^{x-1} - 1)$, $a \in \mathbb{R}$, determina:

a. il dominio;

b. se $a < 0$, per quali valori di x è $y > 0$;

c. se $a = 1$, per quale valore di x si ha $y = 1$.

$[$a) $D: x > 1$; b) $1 < x < 1 + \log_3 2$; c) $x = 2]$

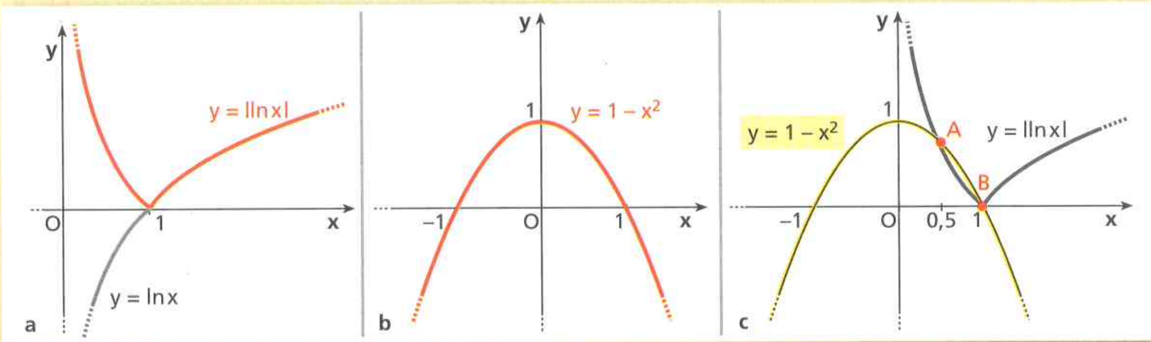
Equazioni e disequazioni logaritmiche risolvibili solo graficamente

Equazioni

707 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo il valore approssimato delle soluzioni della seguente equazione utilizzando il metodo grafico:

$|\ln x| = 1 - x^2.$

Le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti di intersezione dei grafici delle due funzioni di equazioni $y = |\ln x|$ e $y = 1 - x^2$. Tracciamo il grafico di $y = |\ln x|$ (figura **a**) e il grafico di $y = 1 - x^2$ (figura **b**), riportandoli in uno stesso piano cartesiano (figura **c**), e segniamo i punti di intersezione A e B.



L'ascissa di A si trova fra 0 e 1, approssimativamente in 0,5, mentre quella di B in 1.
Le soluzioni dell'equazione sono $x_1 \simeq 0,5$ e $x_2 = 1$.

ESERCIZI

Risolvi le seguenti equazioni utilizzando il metodo grafico.

708 $\ln x = 4 - x^2$ $[x \simeq 1{,}8]$

709 $\ln(x+3) + x = 10$ $[x \simeq 7{,}6]$

710 $\ln(x+6) - |x| = 0$ $[x_1 \simeq -1{,}5;\ x_2 \simeq 2{,}1]$

711 $\ln x = -2x + 2$ $[x = 1]$

712 $\log(x-2) = x - 2$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

713 $\log_{\frac{1}{2}} x = -\frac{1}{x}$ $[x \simeq 1{,}6]$

714 $\ln(x-1) - 1 = \frac{x^2}{16}$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

715 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = \ln(x+1)$ $[x \simeq 0{,}2]$

Disequazioni

Risolvi le seguenti disequazioni utilizzando il metodo grafico.

716 $\log_2 x \leq 1 - x$ $[x \leq 1]$

717 $x < \log_{\frac{1}{3}} x + 2$ $[0 < x < a,\ \text{con } a \simeq 1{,}6]$

718 $\ln(x+3) > x^2 - 4$ $[-2 < x < a,\ \text{con } a \simeq 2{,}4]$

719 $x^2 + 1 > \ln x$ $[x > 0]$

720 $\ln(x+2) > 3^x$ [impossibile]

721 $\log_{\frac{1}{2}} x \leq x^2 - 5$ $[x \geq 2]$

722 $|e^{-x} - 1| \geq \ln x$ $[x \leq a,\ \text{con } a \simeq 2{,}5]$

723 $\ln(x-1) < \frac{1}{x-1}$ $[1 < x < a,\ \text{con } a \simeq 2{,}8]$

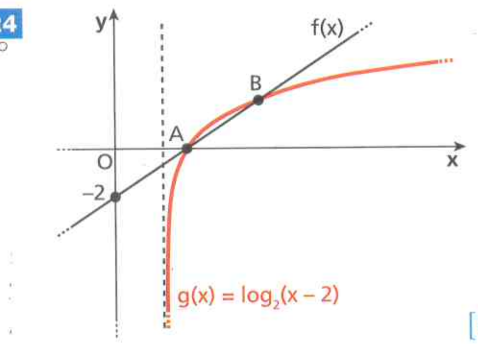
LEGGI IL GRAFICO Utilizza le informazioni delle figure e determina:

a. l'equazione di $f(x)$;

b. le coordinate dei punti di intersezione dei grafici di $f(x)$ e $g(x)$;

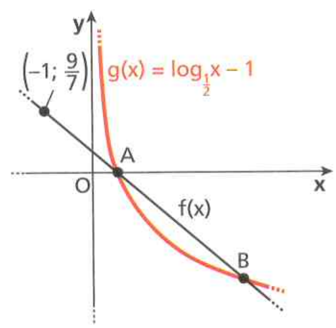
c. gli intervalli in cui $f(x) > g(x)$.

724



[b) (6; 2)]

725



[b) (4; – 3)]

7 Coordinate logaritmiche e semilogaritmiche

▶ Teoria a p. 615

Rappresenta le seguenti funzioni in un piano logaritmico con base $b = 10$. Considera le funzioni solo per $x > 0$ e $y > 0$.

726 $x^2 y = 10$

727 $xy^{-2} = 2$

728 $4xy = 1$

729 $y^3 = x^2$

730 $x^2 y^2 = \frac{1}{2}$

731 $\sqrt[3]{x^2}\, y = 2$

732 $3x^4 = y^3$

733 $x^{-\frac{1}{3}} y^2 = 10$

734 $(xy)^3 = 6$

Rappresenta le seguenti funzioni in un piano semilogaritmico, utilizzando la base più opportuna. Considera le funzioni solo per $y > 0$.

735 $y = 3^{2x}$

736 $10^{-x} = y$

737 $y = e^x$

738 $y \cdot 2^{-x} = 1$

739 $\frac{y}{5^{2x}} = 1$

740 $y = (10e)^x$

741 $y - e^{3x+1} = 0$

742 $\frac{y}{6^x} = 1$

743 $4^x \cdot y - 1 = 0$

Rappresenta le seguenti funzioni espresse in coordinate logaritmiche o semilogaritmiche. Esprimile poi in coordinate cartesiane utilizzando le coordinate indicate e, se possibile, rappresentale in un piano cartesiano.

744 $Y = 5X + 1$. $\quad Y = \log_3 y$; $X = \log_3 x$.

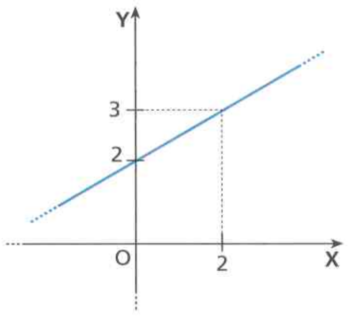
745 $Y = \log_4 3 + X$. $\quad Y = y$; $X = \log_4 x$.

746 $Y = \log_7 3 - X$. $\quad Y = \log_7 y$; $X = x$.

747 $Y + X = 3$. $\quad Y = \ln y$; $X = \ln x$.

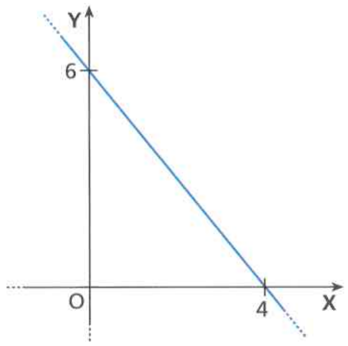
LEGGI IL GRAFICO **Trova per ogni grafico la sua equazione in coordinate logaritmiche o semilogaritmiche, con base 10, e trasformala in coordinate cartesiane.**

748



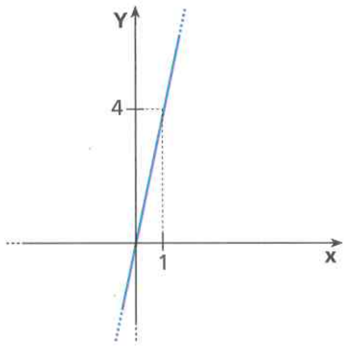
$\left[Y = \frac{1}{2}X + 2;\ y = 100\sqrt{x}\right]$

750



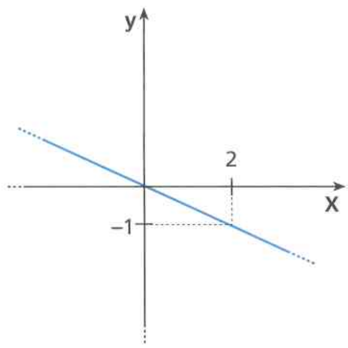
$\left[Y = -\frac{3}{2}X + 6;\ y = \frac{10^6}{\sqrt{x^3}}\right]$

749



$[Y = 4x;\ y = 10^{4x}]$

751



$\left[y = -\frac{1}{2}X;\ \sqrt{x} \cdot 10^y = 1\right]$

Per ognuna delle seguenti tabelle, riporta i dati su un piano logaritmico con base 10 e deduci la funzione che lega le due variabili x e y. Ricorda che $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$.

752

X	Y
1	$\frac{1}{2}$
2	0
5	$-\frac{3}{2}$
6	-2

753

X	Y
0	$\log_{10} 7$
$\log_{10} 7$	$8 \log_{10} 7$
1	$7 + \log_{10} 7$
7	$49 + \log_{10} 7$

754

X	Y
-3	1
$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0
6	-2