Poniamo $t = \sqrt{x}$, da cui: $x = t^2 \to dx = 2t\,dt$. Sostituiamo nell'integrale:

$$\int \frac{1}{2t(1+t^2)} 2t\,dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan t + c.$$

Sostituiamo, nella primitiva trovata, $\sqrt{x}$ a t: $\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} dx = \arctan\sqrt{x} + c$.

Calcola i seguenti integrali per sostituzione, utilizzando il suggerimento scritto a fianco.

361 $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$ $\quad t = \sqrt{x-1}$ $\quad \left[\frac{2}{3}\sqrt{x-1}(x+2) + c\right]$

362 $\int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ $\quad t = \sqrt{x}$ $\quad \left[2(e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}) + c\right]$

363 $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$ $\quad t = \sqrt{2x-1}$ $\quad \left[2\arctan\sqrt{2x-1} + c\right]$

364 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}} dx$ $\quad x = t^3 - 1$ $\quad \left[\frac{6x-9}{10}\sqrt[3]{(x+1)^2} + c\right]$

365 $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx$ $\quad t = \sqrt{x}$ $\quad \left[2\arcsin\sqrt{x} + c\right]$

Calcola i seguenti integrali per sostituzione.

366 $\int \frac{6}{\sqrt{8-3x}} dx$ $\quad \left[-4\sqrt{8-3x} + c\right]$

367 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} dx$ $\quad \left[-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-x)^2} + c\right]$

368 $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$ $\quad \left[\frac{1}{3}\sqrt{2x+1}(x-1) + c\right]$

369 $\int \frac{1}{x - \sqrt{x}} dx$ $\quad \left[\ln(\sqrt{x}-1)^2 + c\right]$

370 $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ $\quad \left[\arctan e^x + c\right]$

371 $\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}} dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}\ln|e^{2x} - 1| + c\right]$

372 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}$ $\quad \left[2\sqrt{x} - 6\ln(\sqrt{x}+3) + c\right]$

373 $\int \frac{3dx}{2\sqrt{x} + x\sqrt{x}}$ $\quad \left[3\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2x}}{2} + c\right]$

374 $\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}} dx$ $\quad \left[\frac{2}{3}\sqrt{x+2}(x+5) + c\right]$

375 $\int \frac{3x}{\sqrt{8-x}} dx$ $\quad \left[-2\sqrt{8-x}(x+16) + c\right]$

376 $\int \frac{4\sqrt{x}}{1+x} dx$ $\quad \left[8\sqrt{x} - 8\arctan\sqrt{x} + c\right]$

377 $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x}} dx$ $\quad \left[-\frac{2}{3}\sqrt{1-x}(x+11) + c\right]$

378 $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$ $\quad \left[2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2x}}{2} + c\right]$

379 $\int \frac{1}{1+2\sqrt{x}} dx$ $\quad \left[\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln(2\sqrt{x}+1) + c\right]$

380 TEST A quale dei seguenti integrali è equivalente $\int 3 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$?

A $\int 6 f(t)\,dt$ B $\int \frac{3}{2} f(t)\,dt$ C $\int \frac{2}{3} f(t)\,dt$ D $\int 3 f(t)\,dt$ E $\int 4 f\left(\frac{t}{3}\right) dt$

Indica come si trasformano i seguenti integrali con la sostituzione indicata a fianco.

381 $\int f(3x)\,dx$ $\quad t = 3x$

382 $\int f(x^2)\,dx$ $\quad t = x^2$

383 $\int 2f(2x-1)\,dx$ $\quad t = 2x - 1$

384 $\int 6f(\sqrt{x})\,dx$ $\quad t = \sqrt{x}$

ESERCIZI

385 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo l'integrale $\int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x + 1} dx$.

Poniamo $\tan x = z$ e utilizziamo il metodo di sostituzione senza ricavare la variabile x in funzione di z. Poiché $\tan x = z$, calcolando il differenziale di entrambi i membri otteniamo:

$$(1 + \tan^2 x) dx = dz.$$

Sostituiamo:

$$\int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x + 1} dx = \int \frac{dz}{z+1} = \ln|z+1| + c = \ln|\tan x + 1| + c.$$

Calcola i seguenti integrali.

386 $\int \sqrt{1 + 2\cos x} \sin x \, dx$ $\quad t = \cos x$ $\quad \left[-\frac{1}{3}(1+2\cos x)^{\frac{3}{2}} + c\right]$

387 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} dx$ $\quad t = 1 - \cos x$ $\quad [2\sqrt{1-\cos x} + c]$

388 $\int \cos x \sqrt{3 + 2\sin x} \, dx$ $\quad t = 3 + 2\sin x$ $\quad \left[\frac{1}{3}\sqrt{3 + 2\sin x}\,(3 + 2\sin x) + c\right]$

389 $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$ $\quad t = e^x$ $\quad [\arctan e^x + c]$

390 $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$ $\quad t = \sin x$ $\quad \left[\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c\right]$

391 $\int \frac{e^x \sin e^x}{\cos e^x} dx$ $\quad t = \cos e^x$ $\quad [-\ln|\cos e^x| + c]$

392 $\int \frac{\sin x}{3 + 2\cos x} dx$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\ln|3 + 2\cos x| + c\right]$

393 $\int \frac{\tan x}{3 + \cos^2 x} dx$ $\quad \tan x = t$ $\quad \left[\frac{1}{6}\ln(4 + 3\tan^2 x) + c\right]$

394 $\int \frac{2\arctan x + 1}{x^2 + 1} dx$ $\quad t = \arctan x$ $\quad [\arctan^2 x + \arctan x + c]$

395 $\int \tan^3 x \, dx$ $\quad \left[\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + c\right]$

396 $\int \frac{\sin x}{4 + \cos^2 x} dx$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\arctan\frac{\cos x}{2} + c\right]$

397 $\int \frac{2e^{2x}}{1 + e^x} dx$ $\quad [2e^x - 2\ln(e^x + 1) + c]$

398 $\int \frac{1}{\tan^3 x} dx$ $\quad \left[-\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + c\right]$

399 $\int \frac{\tan^3 x + \tan x}{\tan x + 2} dx$ $\quad t = 2 + \tan x$ $\quad [\tan x - \ln(\tan x + 2)^2 + c]$

Integrazione per sostituzione con le formule parametriche

400 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo $\int \frac{2}{1 + \sin x} dx$.