CAPITOLO

4

٤

[numerazione araba]

४

[numerazione devanagari]

四

[numerazione cinese]

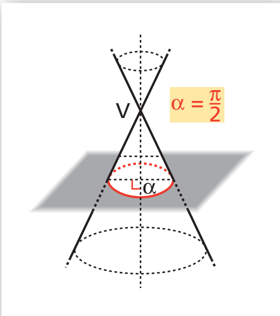
LA CIRCONFERENZA

I TRONCHI DEGLI ALBERI Chi si occupa di piante ha bisogno di misurarne la dimensione del tronco per conoscerne, per esempio, lo stato di salute e l'andamento della crescita. È importante quindi avere un metodo semplice e preciso per misurare il diametro di un albero. Senza abbatterlo!

Come si può conoscere il diametro di un grosso tronco con molta precisione?

La risposta a pag. 258

1. LA CIRCONFERENZA E LA SUA EQUAZIONE



▲ **Figura 1** Consideriamo un cono e tagliamolo con un piano perpendicolare al suo asse. La figura che otteniamo come intersezione fra il piano e la superficie del cono è una circonferenza.

In questo capitolo affrontiamo lo studio della *circonferenza*, che fa parte di un insieme di curve chiamate **coniche** perché si possono ottenere tagliando un cono con un piano. Nei prossimi capitoli studieremo le altre coniche: la *parabola*, l'*ellisse* e l'*iperbole*.

Definiamo ciascuna curva come luogo geometrico e deduciamo poi l'equazione algebrica che la rappresenta nel piano cartesiano.

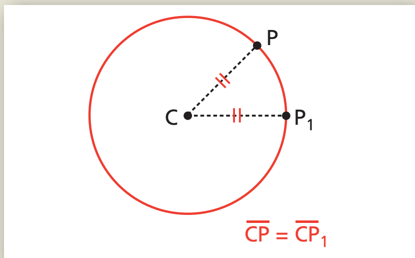
La circonferenza come luogo geometrico

DEFINIZIONE

Circonferenza

Assegnato nel piano un punto C, detto **centro**, si chiama circonferenza la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da C:

$$\overline{PC} = \textbf{costante.}$$



La distanza fra ognuno dei punti della circonferenza e il suo centro è il **raggio** della circonferenza.

L'equazione della circonferenza

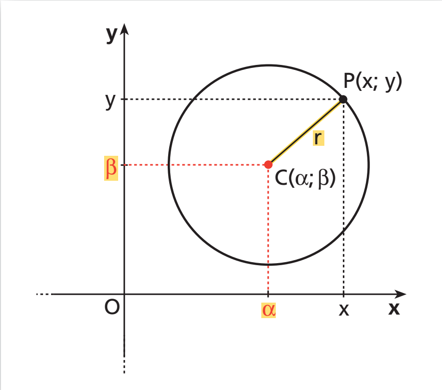
Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali e determiniamo l'equazione della circonferenza di centro $C(\alpha; \beta)$ e raggio r assegnati.

Un generico punto $P(x; y)$ del piano appartiene alla circonferenza se e solo se:

$$\overline{PC} = r, \quad \text{ossia} \quad \overline{PC}^2 = r^2.$$

Per la formula della distanza fra due punti, abbiamo:

$$\overline{PC}^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2.$$



▲ **Figura 2**

Sostituendo nella relazione precedente, otteniamo

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

che è l'equazione cercata. Possiamo scrivere tale equazione anche in altro modo.

Svolgiamo i calcoli:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0.$$

● α, β, r sono numeri reali noti.

Ponendo

$$a = -2\alpha, \qquad b = -2\beta, \qquad c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2,$$

otteniamo l'equazione scritta in modo più semplice:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}.$$

L'equazione trovata è di secondo grado nelle incognite x e y. Osserviamo che non è completa perché manca il termine con il prodotto xy e che i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali a 1.

ESEMPIO

Dato nel piano cartesiano il punto $C(2; -1)$, ricaviamo l'equazione della circonferenza di centro C e raggio 3.

Se un punto $P(x; y)$ appartiene alla circonferenza, è vero che:

$$\overline{PC} = 3, \qquad \text{ossia} \qquad \overline{PC}^2 = 9.$$

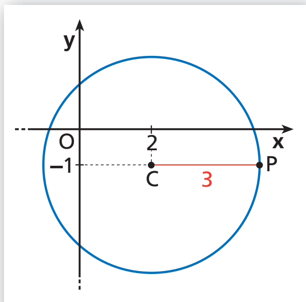
Per la formula della distanza tra due punti, si ha:

$$\overline{PC}^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2.$$

Quindi:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$
$$x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 + 2y = 9$$
$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0.$$

Questa è l'equazione della circonferenza cercata.



▲ Figura 3

Per avere l'equazione di una circonferenza, non è necessario che x^2 e y^2 abbiano coefficiente 1. È sufficiente che i loro coefficienti siano entrambi uguali a un qualunque numero n. In tal caso, infatti, è possibile riottenere i coefficienti uguali a 1 dividendo tutti i termini per n.
Per esempio:

$$4x^2 + 4y^2 - 2x + 3y - 8 = 0 \to$$
$$\to x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - 2 = 0.$$

Per ottenere la seconda equazione dalla prima, basta dividere entrambi i membri per 4.

La condizione di realtà

Ci chiediamo se, viceversa, un'equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

rappresenti sempre una circonferenza. La risposta è «no».
In altre parole, che l'equazione sia del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ è una condizione necessaria per avere l'equazione di una circonferenza, ma non sufficiente.

ESEMPIO

$$x^2 + y^2 + 4 = 0,$$

pur essendo un'equazione del tipo che abbiamo descritto, non è l'equazione di una circonferenza perché **non ha soluzioni reali**. Infatti, due numeri reali elevati al quadrato e sommati danno come risultato un numero sempre positivo o nullo, quindi non può mai essere:

$$x^2 + y^2 = -4.$$

Questo significa che nessun punto del piano ha coordinate $(x; y)$ che soddisfano l'equazione data.

Cerchiamo una condizione per stabilire quando un'equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza.

Aggiungiamo a entrambi i membri dell'equazione i termini $\frac{a^2}{4}$ e $\frac{b^2}{4}$:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}.$$

Riscriviamo l'equazione in modo da evidenziare nel primo membro due quadrati di un binomio:

$$\left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c.$$

Il primo membro rappresenta il quadrato della distanza $\overline{PC}$ di un punto $P(x; y)$ del piano dal punto $C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$.

● Deve risultare:
$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0$.

Di conseguenza, il secondo membro deve essere un numero maggiore o uguale a 0.

Quindi, **l'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rappresenta una circonferenza di centro C se e solo se**:

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0.$$

Le coordinate del *centro* e il *raggio* della circonferenza sono rispettivamente:

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right), \quad r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

● Possiamo considerare un punto come una circonferenza di raggio uguale a 0, che è una **circonferenza degenere**.

Se $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c = 0$, allora $r = 0$ e la circonferenza degenera nel suo centro C.

ESEMPIO

L'equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ rappresenta una circonferenza?
Poiché

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c = 1 + 4 + 11 > 0,$$

l'equazione è quella di una circonferenza.

Dall'equazione al grafico

Per disegnare una circonferenza è sufficiente conoscere le coordinate del centro e la misura del raggio.

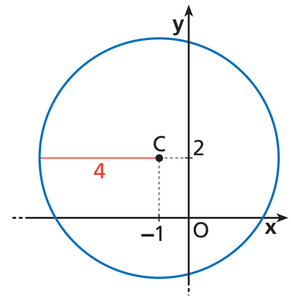
ESEMPIO

Disegniamo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$.
Determiniamo il centro C:

$$\alpha = -\frac{a}{2} = -\frac{2}{2} = -1, \quad \beta = -\frac{b}{2} = -\frac{-4}{2} = 2 \rightarrow C(-1; 2).$$

Il raggio misura: $\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{1 + 4 + 11} = \sqrt{16} = 4.$

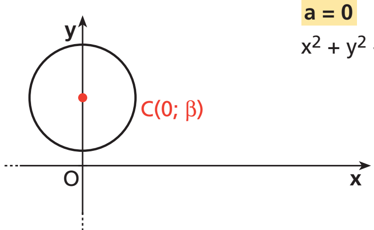
Nella figura a lato è rappresentato il grafico della circonferenza.



▼ Figura 4

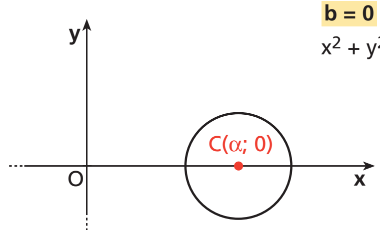
Alcuni casi particolari

Consideriamo l'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Esaminiamo i casi particolari in cui uno o due coefficienti o il termine noto siano nulli.



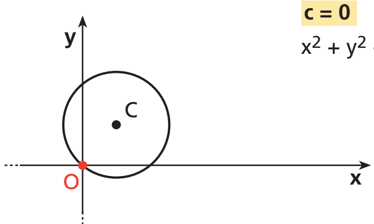
$a = 0$
$x^2 + y^2 + by + c = 0$

a. Si ha $\alpha = 0$, quindi $C(0; \beta)$: **il centro appartiene all'asse *y*.**



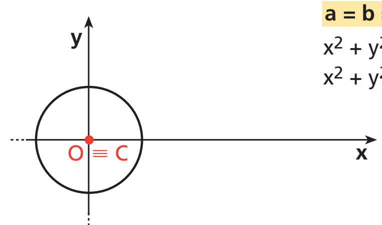
$b = 0$
$x^2 + y^2 + ax + c = 0$

b. Si ha $\beta = 0$, quindi $C(\alpha; 0)$: **il centro appartiene all'asse *x*.**



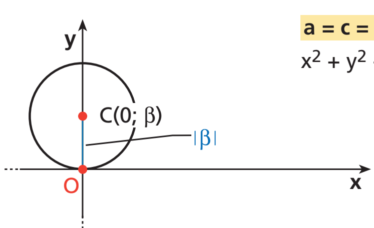
$c = 0$
$x^2 + y^2 + ax + by = 0$

c. Le coordinate di $O(0; 0)$ verificano l'equazione, quindi **la circonferenza passa per l'origine degli assi**.



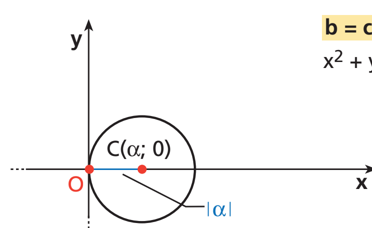
$a = b = 0$
$x^2 + y^2 + c = 0$
$x^2 + y^2 = r^2 \quad (r = \sqrt{-c})$

d. Si ha $\alpha = \beta = 0$, quindi $C(0; 0)$.
La circonferenza ha il centro nell'origine.



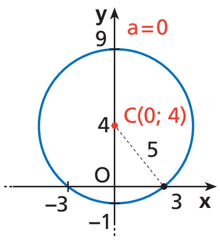
$a = c = 0$
$x^2 + y^2 + by = 0$

e. La circonferenza ha centro sull'asse *y* e passa per l'origine. Il raggio misura $r = \sqrt{\beta^2} = |\beta|$.



$b = c = 0$
$x^2 + y^2 + ax = 0$

f. La circonferenza ha centro sull'asse *x* e passa per l'origine. Il raggio misura $r = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$.



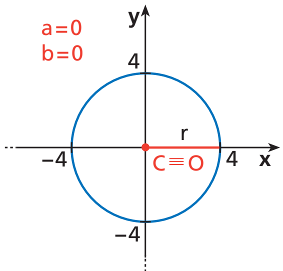
ESEMPIO

Rappresentiamo $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$.
Poiché $a = 0$ e $b = -8$, si ha:

$$\alpha = 0,\ \beta = 4, \quad \text{ossia} \quad C(0; 4).$$

Il raggio misura:

$$r = \sqrt{0 + 16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$



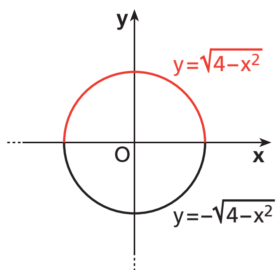
ESEMPIO

Rappresentiamo $x^2 + y^2 - 16 = 0$. Poiché $a = b = 0$, si ha:

$$\alpha = 0,\ \beta = 0, \quad \text{ossia} \quad C(0; 0).$$

Il raggio misura: $r = \sqrt{-c} = \sqrt{16} = 4$.

Altrimenti, si può procedere scrivendo l'equazione nella forma $x^2 + y^2 = r^2$, ossia $x^2 + y^2 = 16$, e ricavare immediatamente $C(0; 0)$ e $r = 4$.



L'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ non rappresenta una funzione perché a ogni valore $x \in \mathbb{R}$ corrispondono due valori di y.
Infatti, se per esempio consideriamo l'equazione $x^2 + y^2 = 4$ ed esplicitiamo rispetto a y, otteniamo: $y^2 = 4 - x^2 \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$.
Il grafico della circonferenza può essere visto come l'unione dei grafici di due semicirconferenze di equazioni $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$, che invece rappresentano delle funzioni.

2. RETTA E CIRCONFERENZA

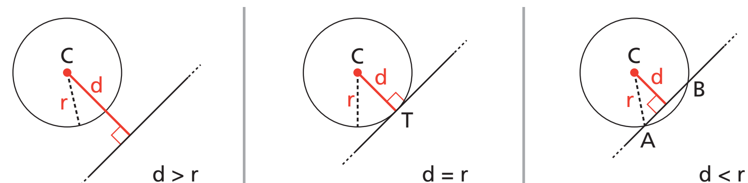
La posizione di una retta rispetto a una circonferenza dipende dalla distanza d della retta dal centro della circonferenza.

Considerando una circonferenza di raggio r, le relazioni che legano la distanza d alla posizione che assume la retta rispetto alla circonferenza sono:

- $\boldsymbol{d > r}$, la retta è **esterna**, cioè non ha punti in comune con la circonferenza (figura 5*a*);
- $\boldsymbol{d = r}$, la retta è **tangente** e ha un solo punto in comune con la circonferenza (figura 5*b*);
- $\boldsymbol{d < r}$, la retta è **secante** e ha due punti distinti in comune con la circonferenza (figura 5*c*).

Ricordiamo che la distanza di un punto da una retta è la misura del segmento che ha per estremi il punto e il piede della perpendicolare condotta dal punto alla retta.

Figura 5



a. La retta è esterna alla circonferenza: retta e circonferenza non hanno punti in comune.

b. La retta è tangente alla circonferenza: retta e circonferenza hanno un solo punto in comune.

c. La retta è secante la circonferenza: retta e circonferenza hanno due punti distinti in comune.

Se vogliamo studiare la posizione di una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ rispetto a una retta di equazione $a'x + b'y + c' = 0$, dobbiamo determinare quante sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Infatti, le soluzioni $(x; y)$ del sistema danno le coordinate dei punti in comune a retta e circonferenza, cioè dei loro punti di intersezione.
Applicando il metodo di sostituzione e studiando il segno del discriminante Δ dell'equazione risolvente si hanno tre casi:

- $\boldsymbol{\Delta < 0}$, il sistema non ha soluzioni reali: non ci sono punti di intersezione, quindi **la retta è esterna** alla circonferenza;
- $\boldsymbol{\Delta = 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e coincidenti: c'è un solo punto di intersezione, quindi **la retta è tangente** alla circonferenza;
- $\boldsymbol{\Delta > 0}$, il sistema ha due soluzioni reali e distinte: ci sono due punti di intersezione, quindi **la retta è secante** la circonferenza.

Ricaviamo la x (o, indifferentemente, la y) dall'equazione della retta e sostituiamo l'espressione trovata nell'altra equazione. Otteniamo così un'equazione di secondo grado detta **equazione risolvente**.

ESEMPIO

Studiamo la posizione della retta $3x - 2y + 1 = 0$, rispetto alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 3x - 3y - 2 = 0$.
Risolviamo il sistema:

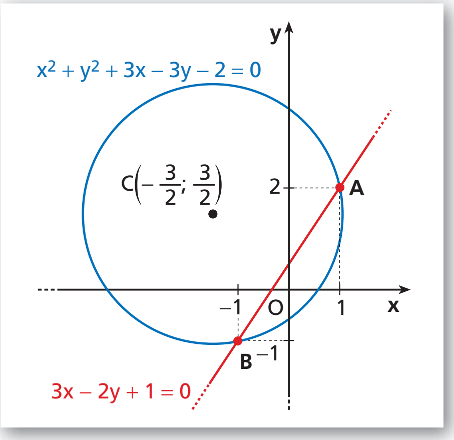
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3x - 3y - 2 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo la y nell'equazione di primo grado, sostituiamo in quella di secondo grado e svolgiamo i calcoli. Otteniamo l'equazione:

$$13x^2 - 13 = 0.$$

Non è necessario calcolare il discriminante, in quanto l'equazione si risolve immediatamente. Dividendo per 13, abbiamo:

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1; \quad x_2 = -1.$$



◀ **Figura 6** La retta $3x - 2y + 1 = 0$ è secante la circonferenza $x^2 + y^2 + 3x - 3y - 2 = 0$ nei punti $A(1; 2)$ e $B(-1; -1)$.

Sostituendo i due valori di x nell'equazione della retta, otteniamo rispettivamente:

$$y_1 = 2 \;\text{ e }\; y_2 = -1.$$

Il sistema ha due soluzioni, quindi la retta è secante la circonferenza. I punti di intersezione sono $A(1; 2)$ e $B(-1; -1)$.

3. LE RETTE TANGENTI

IN PRATICA
▶ Videolezione 15

Dati un punto $P(x_0; y_0)$ e una circonferenza qualsiasi di equazione

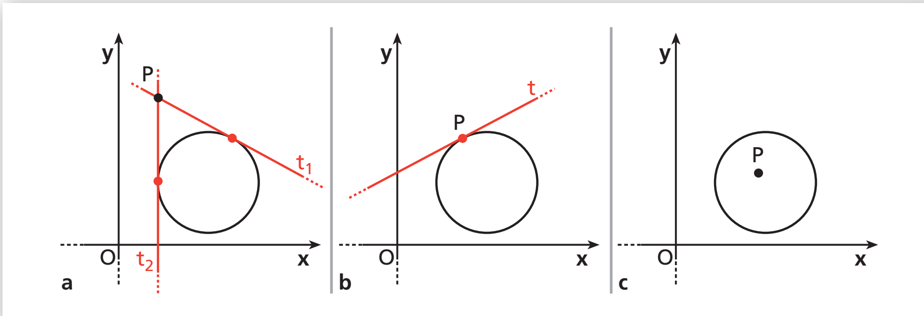
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

si possono presentare i tre seguenti casi.

1. P è esterno alla circonferenza (figura 7*a*);
2. P appartiene alla circonferenza (figura 7*b*);
3. P è interno alla circonferenza (figura 7*c*).

Nel primo caso le rette passanti per P e tangenti alla circonferenza sono due, nel secondo caso è una sola, nel terzo caso non esistono rette tangenti passanti per P.

▶ **Figura 7**



Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti passanti per P, nei casi 1 e 2 è possibile seguire due metodi.

Primo metodo: $\Delta = 0$

- Si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per P, $y - y_0 = m(x - x_0)$.
- Si scrive il sistema delle equazioni del fascio e della circonferenza:

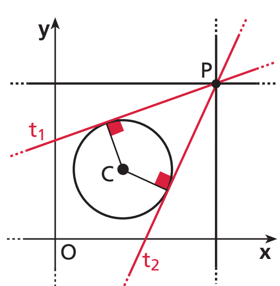
● Il sistema fornisce i punti di intersezione della retta per P con la circonferenza al variare di m.

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}$$

- Si ricava la y nell'equazione del fascio di rette e si sostituisce nell'equazione della circonferenza, ottenendo un'equazione di secondo grado nella variabile x i cui coefficienti sono funzioni del parametro m.
- Si pone la *condizione di tangenza*, ossia $\Delta = 0$, in quanto, affinché la retta per P sia tangente alla circonferenza, è necessario che l'equazione risolvente ammetta due soluzioni coincidenti.
- Si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a m, ottenuta ponendo $\Delta = 0$.

● Negli esercizi esamineremo anche il caso in cui una delle due rette è parallela all'asse y. Come sappiamo, una retta di questo tipo non ha coefficiente angolare.

Se il punto P è esterno alla circonferenza, si ha $m_1 \neq m_2$ e le rette tangenti sono due.
Se il punto P appartiene alla circonferenza, si ha $m_1 = m_2$ e la retta tangente è una sola (o due coincidenti).



Secondo metodo: distanza retta-centro uguale al raggio

- Si determinano le coordinate del centro C e il raggio r della circonferenza.
- Si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per P in forma implicita: $y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow mx - y + y_0 - mx_0 = 0$.
- Si applica la formula della distanza di un punto da una retta per esprimere la distanza del centro C da una generica retta del fascio.
- Si pone tale distanza uguale al raggio e si risolve l'equazione in m.
- Si sostituisce il valore o i valori trovati di m nell'equazione del fascio di rette.

ESEMPIO

Determiniamo le equazioni delle eventuali rette passanti per $P\left(\frac{9}{4}; 0\right)$ e tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

- Determiniamo le coordinate del centro C e il raggio r della circonferenza:

  $C(1; 0), \quad r = 1.$

- Scriviamo l'equazione del fascio di rette passanti per $P\left(\frac{9}{4}; 0\right)$:

  $y - 0 = m\left(x - \frac{9}{4}\right)$, cioè, in forma implicita, $4mx - 4y - 9m = 0$.

- Determiniamo la distanza fra le rette e il centro C:

  $$d = \frac{|4m(1) - 4(0) - 9m|}{\sqrt{16m^2 + 16}} = \frac{|-5m|}{\sqrt{16m^2 + 16}}.$$

- Poniamo tale distanza uguale al raggio e risolviamo l'equazione rispetto a m:

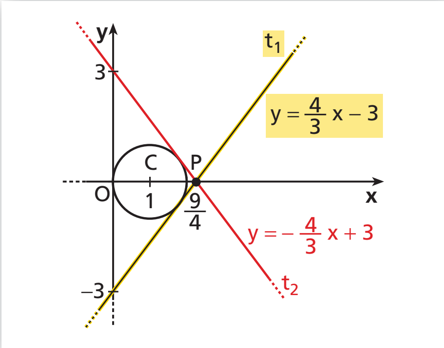
  $$\frac{|-5m|}{\sqrt{16m^2 + 16}} = 1 \;\rightarrow\; |-5m| = \sqrt{16m^2 + 16}.$$

  Eleviamo entrambi i membri al quadrato:

  $$25m^2 = 16m^2 + 16 \;\rightarrow\; 9m^2 = 16 \;\rightarrow\; m^2 = \frac{16}{9} \rightarrow m = \pm\frac{4}{3}.$$

- Sostituiamo i valori di m nell'equazione del fascio di rette e troviamo le equazioni delle due tangenti:

  $$t_1: y = \frac{4}{3}x - 3, \qquad t_2: y = -\frac{4}{3}x + 3.$$



◀ **Figura 8**

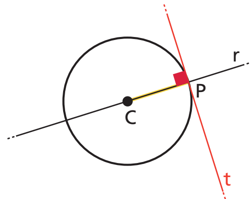
● La formula della distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta di equazione $ax + by + c = 0$ è:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

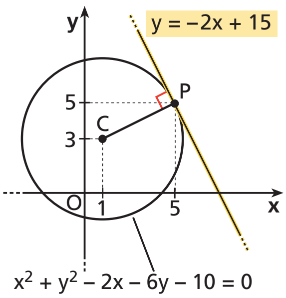
Se il punto P appartiene alla circonferenza, oltre ai due metodi indicati, possiamo applicare anche i seguenti.

Terzo metodo: **retta tangente in P come perpendicolare al raggio PC**

- Si determinano le coordinate del centro C della circonferenza.
- Si trova il coefficiente angolare m della retta r passante per P e per C.
- Si calcola il coefficiente angolare $m' = -\frac{1}{m}$ della retta perpendicolare a r.
- Si scrive l'equazione della tangente: $y - y_0 = m'(x - x_0)$.



● La retta tangente t in P è perpendicolare al raggio passante per P.



ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della tangente alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-6y-10=0$ nel suo punto $P(5; 5)$.

Il centro della circonferenza ha coordinate $C(1; 3)$.
Determiniamo il coefficiente angolare m della retta CP e quello $m_\perp$ della perpendicolare:

$$m=\frac{y_P-y_C}{x_P-x_C}=\frac{5-3}{5-1}=\frac{1}{2},$$

$$m_\perp=-\frac{1}{m}=-2.$$

Scriviamo l'equazione della retta tangente in P, che è perpendicolare a CP:

$$y-5=-2(x-5),$$
$$y=-2x+15.$$

Quarto metodo: formule di sdoppiamento

- Si scrive l'equazione della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$.
- Se P ha coordinate $(x_0; y_0)$, si eseguono le sostituzioni

$$x^2\to xx_0,\qquad y^2\to yy_0,$$
$$x\to\frac{x+x_0}{2},\qquad y\to\frac{y+y_0}{2}.$$

- Si può dimostrare che l'equazione della retta tangente è:

$$\boldsymbol{xx_0+yy_0+a\frac{x+x_0}{2}+b\frac{y+y_0}{2}+c=0}.$$

In generale, queste formule si usano per tutte le coniche.

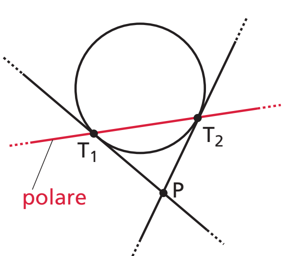
ESEMPIO

La tangente alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ nel suo punto $P(4; 6)$ ha equazione:

$$4x+6y-2\frac{x+4}{2}-4\frac{y+6}{2}-20=0\ \to$$

$$\to\ 4x+6y-x-4-2y-12-20=0\ \to\ 3x+4y-36=0.$$

Se applichiamo le formule di sdoppiamento quando il punto P non appartiene alla circonferenza, otteniamo l'equazione della **polare**, la retta che passa per i due punti T_1 e T_2 di contatto delle tangenti condotte da P alla circonferenza.



Se la circonferenza passa per l'origine, cioè ha equazione del tipo $x^2+y^2+ax+by=0$, applicando le formule di sdoppiamento, otteniamo che l'equazione della retta tangente nell'origine è:

$$x\cdot 0+y\cdot 0+a\cdot\frac{x+0}{2}+b\cdot\frac{y+0}{2}=0\ \to\ ax+by=0,$$

che è il gruppo dei termini di primo grado dell'equazione della circonferenza uguagliato a 0.
Per esempio, l'equazione della tangente nell'origine alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x+5y=0$ è $-2x+5y=0$.

4. DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA

IN PRATICA
▶ Videolezione 16

Poiché nell'equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

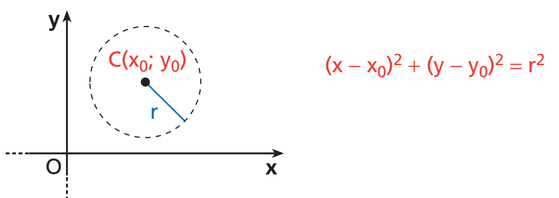
sono presenti tre coefficienti a, b e c, per poterli determinare occorrono tre informazioni geometriche, indipendenti tra loro, sulla circonferenza, dette *condizioni*, che si traducono poi in tre equazioni algebriche nelle incognite a, b, c.

Forniamo l'elenco di alcune possibili condizioni:
- sono noti le coordinate del centro e il raggio;
- sono note le coordinate degli estremi di un diametro;
- la circonferenza passa per un punto e sono note le coordinate del centro;
- la circonferenza passa per tre punti non allineati;
- la circonferenza passa per due punti e il centro appartiene a una retta di equazione nota;
- sono note le coordinate del centro e la circonferenza è tangente a una retta di equazione nota.

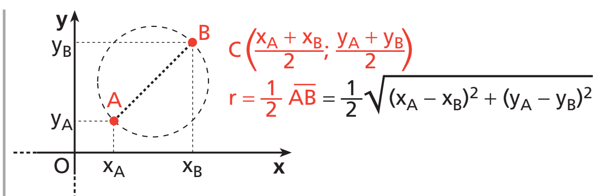
La figura 9 riassume tutti i sei casi elencati.

Le coordinate note di un punto della circonferenza corrispondono a una condizione, perché permettono di scrivere un'equazione in a, b e c; le coordinate del centro corrispondono a due condizioni, perché possiamo determinare sia a sia b; il raggio corrisponde a una condizione.

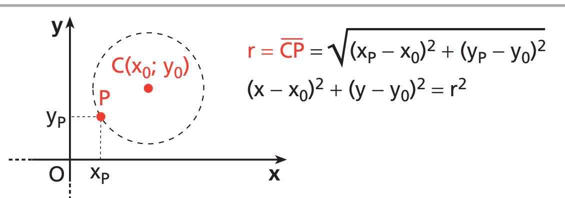
▼ **Figura 9**



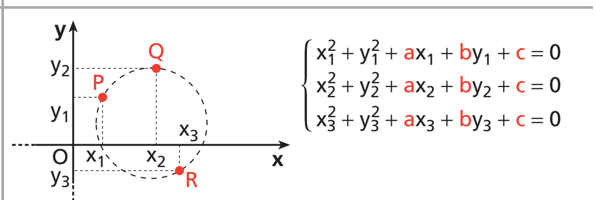
a. Sono noti le coordinate del centro $C(x_0; y_0)$ e il raggio r.



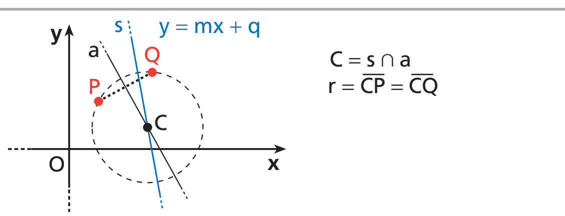
b. Sono note le coordinate degli estremi di un diametro $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$. Il centro è il punto medio del segmento AB e il raggio è metà della distanza fra A e B. Si ricade nel caso *a*.



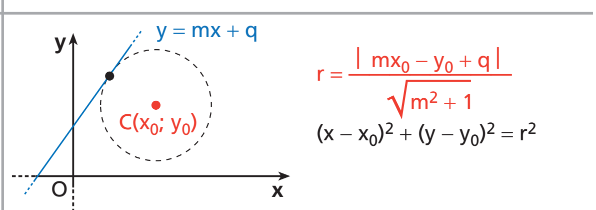
c. La circonferenza passa per un punto $P(x_P; y_P)$ e sono note le coordinate del centro $C(x_0; y_0)$. Si ricade ancora nel caso *a*.



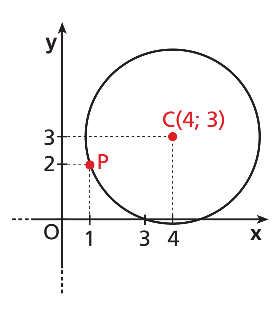
d. La circonferenza passa per tre punti non allineati $P(x_1; y_1)$, $Q(x_2; y_2)$ e $R(x_3; y_3)$.



e. La circonferenza passa per due punti P e Q e il centro C appartiene a una retta nota s. Si trova l'equazione dell'asse del segmento PQ: il centro C è il punto di intersezione della retta nota s con l'asse, e il raggio $r = \overline{CP} = \overline{CQ}$. Siamo di nuovo nel caso *a*.



f. Sono note le coordinate del centro $C(x_0; y_0)$, e la circonferenza è tangente a una retta di equazione $y = mx + q$. Si trova il raggio applicando la formula della distanza del centro dalla retta tangente. Si ricade nel caso *a*.



▲ Figura 10

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della circonferenza di centro $C(4; 3)$ e passante per il punto $P(1; 2)$.

Le condizioni sono analoghe al caso della figura 9*c*:

$$r = \overline{CP} = \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 10.$$

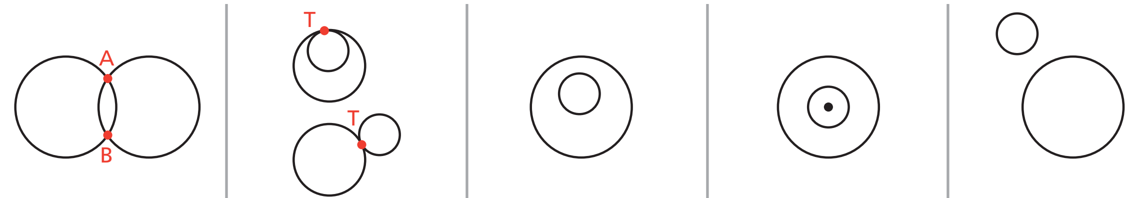
L'equazione della circonferenza richiesta è:

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0.$$

5. LA POSIZIONE DI DUE CIRCONFERENZE

Due circonferenze possono essere secanti in due punti, tangenti in uno stesso punto (esternamente o internamente), una interna all'altra (non concentriche oppure concentriche), esterne (figura 11).

▼ Figura 11



a. Circonferenze secanti. **b.** Circonferenze tangenti. **c.** Circonferenze una interna all'altra. **d.** Circonferenze concentriche. **e.** Circonferenze esterne.

Per determinare gli eventuali punti di intersezione o il punto di tangenza, occorre risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Se $a \neq a'$ o $b \neq b'$, è possibile applicare il metodo di riduzione, sottraendo membro a membro:

$$\ominus \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

$$\overline{(a-a')x + (b-b')y + (c-c') = 0}$$

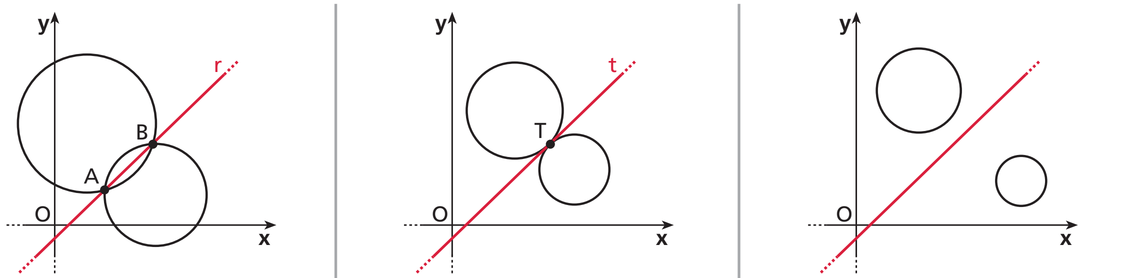
● Se $a = a'$ e $b = b'$, le circonferenze sono concentriche e quindi non si intersecano (se $c \neq c'$) oppure sono coincidenti (se anche $c = c'$).

L'equazione ottenuta è lineare in x e y, perciò rappresenta una retta. Tale retta viene chiamata **asse radicale** delle due circonferenze.

Il sistema iniziale è equivalente al sistema formato dall'equazione di una delle due circonferenze e dall'equazione dell'asse radicale:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ (a-a')x + (b-b')y + (c-c') = 0 \end{cases}$$

Se le due circonferenze si intersecano in due punti A e B, l'asse radicale passa per essi (figura 12*a*); se le circonferenze sono tangenti in un punto T, l'asse radicale passa per T (figura 12*b*).



a. L'asse radicale è la retta r passante per i punti di intersezione delle due circonferenze.

b. L'asse radicale è la retta t passante per il punto di tangenza delle due circonferenze.

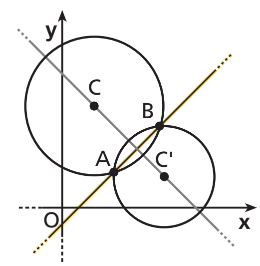
c. L'asse radicale esiste anche se le circonferenze non sono secanti.

▲ Figura 12

Il coefficiente angolare m_a dell'asse radicale è $-\dfrac{a-a'}{b-b'}$. Il coefficiente angolare m_c della retta passante per i centri $C\left(-\dfrac{a}{2}; -\dfrac{b}{2}\right)$ e $C'\left(-\dfrac{a'}{2}; -\dfrac{b'}{2}\right)$ è:

$$m_c = \frac{-\dfrac{b}{2}+\dfrac{b'}{2}}{-\dfrac{a}{2}+\dfrac{a'}{2}} = \frac{-b+b'}{-a+a'} = \frac{-(b-b')}{-(a-a')} = \frac{b-b'}{a-a'}.$$

Poiché $m_a \cdot m_c = -\dfrac{a-a'}{b-b'} \cdot \dfrac{b-b'}{a-a'} = -1$, *l'asse radicale risulta perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze* (figura 13).
Si deduce, quindi, che nel caso di circonferenze tangenti (figura 12*b*) l'asse radicale coincide con la retta tangente alle circonferenze nel loro comune punto di tangenza T.



▲ **Figura 13** L'asse radicale è perpendicolare alla retta che passa per i centri delle due circonferenze.

Se si conosce l'equazione dell'asse radicale, si possono trovare gli eventuali punti di intersezione di due circonferenze.

ESEMPIO

Determiniamo gli eventuali punti di intersezione delle due circonferenze di equazioni:

$$x^2+y^2+2x-4y-11=0 \text{ e } x^2+y^2+2x-16y+13=0.$$

Troviamo l'equazione dell'asse radicale sottraendo membro a membro le due equazioni:

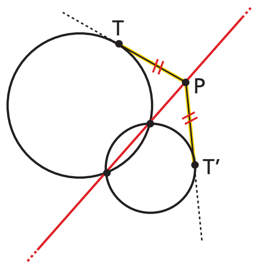
$$\ominus\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y-11=0 \\ x^2+y^2+2x-16y+13=0 \end{cases}$$
$$12y-24=0 \rightarrow y=2$$

L'asse radicale è una retta parallela all'asse x.

Determiniamo i punti di intersezione, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y-11=0 \\ y=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+2x-15=0 \\ y=2 \end{cases}$$

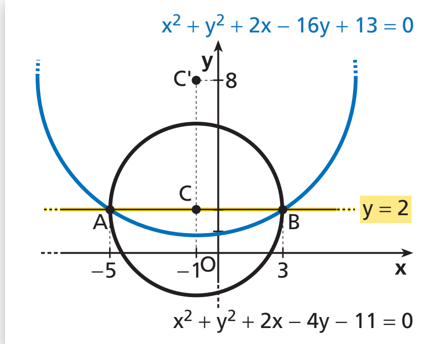
▶ **Figura 14** La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ ha centro $C(-1; 2)$ e raggio $r = 4$; la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 16y + 13 = 0$ ha centro $C'(-1; 8)$ e raggio $r' = \sqrt{52}$. L'asse radicale è perpendicolare alla retta CC' e ha equazione $y = 2$.



da cui, risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$\begin{cases} x = -1 \pm 4 = \begin{cases} -5 \\ 3 \end{cases} \\ y = 2 \end{cases}$$

Le due circonferenze si intersecano nei punti $A(-5; 2)$ e $B(3; 2)$.



● Si può dimostrare che l'asse radicale gode della seguente proprietà: *se per ogni punto P dell'asse si conducono i segmenti di tangente PT e PT' alle due circonferenze, risulta sempre PT ≅ PT'*.

IN PRATICA
▶ Videolezione 17

6. I FASCI DI CIRCONFERENZE

Come generare un fascio di circonferenze

Sono date le circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ di equazione:

$$\mathscr{C}: \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 = 0,$$

$$\mathscr{C}': \quad x^2 + y^2 - 8y - 10 = 0.$$

Combiniamo linearmente le due equazioni, introducendo due parametri reali p e q non entrambi nulli, ossia scriviamo l'equazione:

$$p \cdot (x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10) + q \cdot (x^2 + y^2 - 8y - 10) = 0.$$

Tale equazione rappresenta infinite circonferenze al variare di p e q.
L'insieme costituito da queste infinite circonferenze viene detto **fascio di circonferenze con generatrici $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$**.

● L'equazione del fascio con 2 parametri (p e q) comprende **tutte** le circonferenze del fascio, **incluse** $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$, che si ottengono per $q = 0$ o $p = 0$.

Se $p = 0$ e $q \neq 0$, si ha l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}'$, mentre se $p \neq 0$ e $q = 0$ otteniamo quella di $\mathscr{C}$.
Poiché p e q non sono entrambi nulli, supposto per esempio $p \neq 0$, dividiamo entrambi i membri dell'equazione precedente per p, in modo da ottenere un'equazione con un solo parametro, $k = \dfrac{q}{p}$:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 + k(x^2 + y^2 - 8y - 10) = 0.$$

● L'equazione del fascio con un solo parametro k descrive anch'essa **tutte** le circonferenze del fascio, **eccetto** $\mathscr{C}'$, che non corrisponde ad alcun valore di k.

Per ogni valore di k si ottiene l'equazione di una circonferenza particolare.

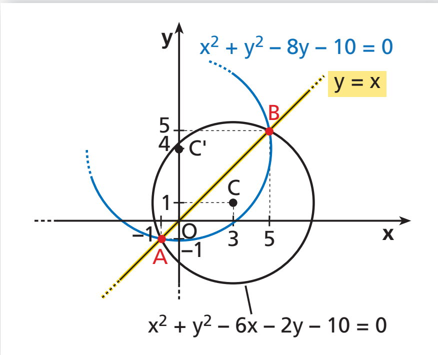
Per $k = 0$ si ottiene la circonferenza $\mathscr{C}$, mentre non esiste alcun valore di k che fornisca l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}'$.

Per $k = -1$, l'equazione diventa

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 6x - 2y - 10 - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 8y + 10 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad -6x + 6y = 0 \quad \rightarrow \quad -x + y = 0 \quad \rightarrow \quad y = x$$

ossia otteniamo l'asse radicale delle circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ (figura 15).



◀ **Figura 15** Le due circonferenze, di centri $C(3; 1)$ e $C'(0; 4)$ e raggi $r = 2\sqrt{5}$ e $r' = \sqrt{26}$, si intersecano nei punti $A(-1; -1)$ e $B(5; 5)$, e l'asse radicale è la bisettrice del primo e terzo quadrante, di equazione $y = x$.

In generale, diamo la seguente definizione.

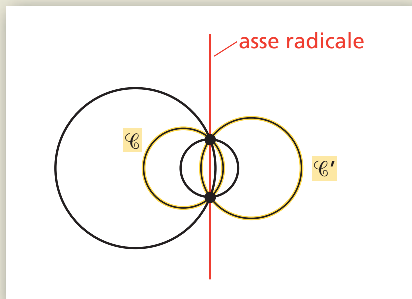
DEFINIZIONE

Fascio di circonferenze

Date due circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$, rispettivamente di equazioni

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ e}$$
$$x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0,$$

si chiama *fascio di circonferenze definito da* $\mathscr{C}$ *e* $\mathscr{C}'$ l'insieme della circonferenza $\mathscr{C}'$ e di tutte le circonferenze rappresentate dall'equazione:



$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

● $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ si dicono **generatrici del fascio**.

Svolgendo i calcoli, possiamo anche scrivere l'equazione del fascio nella forma:

$$(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + (a + ka')x + (b + kb')y + c + kc' = 0.$$

● Si può dimostrare che si ottiene lo stesso fascio se a $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ si sostituiscono altre due circonferenze del fascio, dove una delle due può anche essere l'asse radicale.

Per k diverso da -1, otteniamo l'equazione:

$$x^2 + y^2 + \frac{a + ka'}{k + 1}x + \frac{b + kb'}{k + 1}y + \frac{c + kc'}{k + 1} = 0.$$

Per $k = -1$, otteniamo invece l'equazione della retta

$$(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0,$$

che rappresenta l'**asse radicale del fascio**.

L'asse radicale può essere considerato come una particolare circonferenza con un raggio infinitamente grande, ossia come una *circonferenza degenere*.

● Una **circonferenza degenere** può essere una retta (circonferenza di raggio infinitamente grande) oppure un punto (circonferenza di raggio nullo).

Se le due circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$:

- si intersecano nei punti A e B, tutte le circonferenze del fascio passano per A e B, che vengono detti **punti base del fascio**, e l'asse radicale è la retta AB (figura 16*a*);
- sono tangenti nel punto A, allora tutte le circonferenze del fascio passano per A, che è l'**unico punto base**, e l'asse radicale è la retta tangente in A alle circon-

ferenze (figura 16*b*); in questo caso, al fascio appartiene anche la circonferenza degenere di centro A e raggio nullo: se $(x_0; y_0)$ sono le coordinate del punto A, questa circonferenza ha equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0,$$

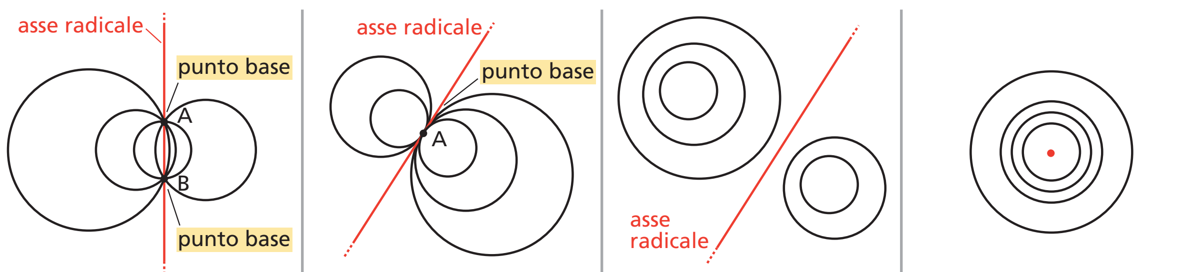
e il fascio di circonferenze tangenti in A alla retta t di equazione

$$ax + by + c = 0$$

si può scrivere nel seguente modo:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + k(ax + by + c) = 0;$$

- non si intersecano e non sono concentriche, non esistono punti comuni alle circonferenze del fascio e l'asse radicale è esterno alle circonferenze (figura 16*c*);
- sono concentriche, allora tutte le circonferenze del fascio sono concentriche e, dato che $a = a'$, $b = b'$, l'asse radicale non esiste (figura 16*d*).



a. Fascio di circonferenze per due punti.
b. Fascio di circonferenze per un punto.
c. Fascio di circonferenze senza punti comuni.
d. Fascio di circonferenze concentriche.

▲ **Figura 16** I diversi tipi di fasci di circonferenze.

Il luogo dei centri delle circonferenze del fascio è una retta perpendicolare all'asse radicale e si chiama **asse centrale**.

Lo studio di un fascio di circonferenze

Per **studiare un fascio di circonferenze** occorre trovare:

a) centro e raggio in funzione del parametro k;
b) le due generatrici;
c) gli eventuali punti base;
d) l'asse radicale e l'asse centrale;
e) eventuali circonferenze degeneri.

Come esempio, nell'esercizio guida 272 a pagina 289 studieremo il fascio di equazione:

$$(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + (2 - 4k)x - 6y - 1 + 2k = 0.$$

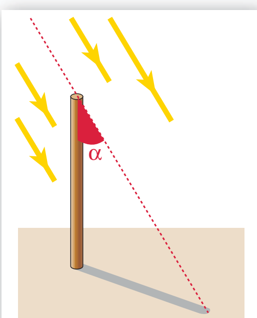
ESPLORAZIONE

Eratostene e il meridiano terrestre

Eratostene, fondatore della Biblioteca di Alessandria e grande scienziato dell'epoca, nel terzo secolo avanti Cristo ipotizzò che la Terra fosse una sfera e ne calcolò il raggio misurando un arco di meridiano da Alessandria a Siene (l'attuale Assuan).

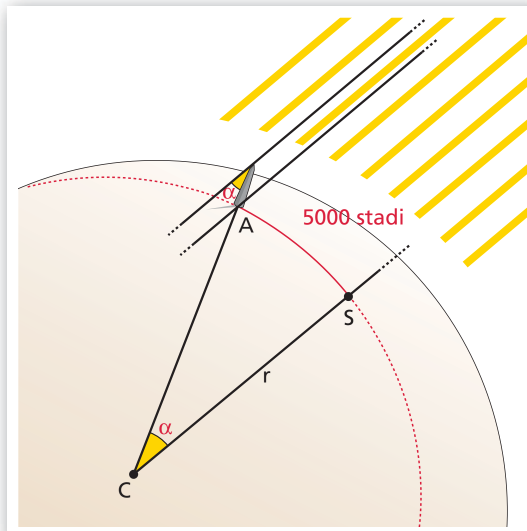
Secondo le misure di Eratostene, le due città erano sullo stesso meridiano (in realtà oggi sappiamo che tra loro c'è una differenza di tre gradi di longitudine), quindi il percorso più breve dall'una all'altra era un arco di meridiano, cioè di una circonferenza terrestre. Si stimava che questa distanza fosse di circa 5000 *stadi*.

Eratostene osservò poi che a mezzogiorno del solstizio d'estate a Siene il Sole illuminava il fondo dei pozzi. Ciò significava che i suoi raggi cadevano perpendicolari alla superficie terrestre. Ad Alessandria invece, nello stesso momento, i raggi formavano con la verticale un cinquantesimo dell'angolo giro, ossia 7,2°.



◄ **Eratostene utilizzò il metodo dello *gnomone* per misurare l'angolo formato dai raggi del Sole con la verticale. Misurò infatti l'angolo che un bastone conficcato nel terreno (gnomone) formava con la retta congiungente la cima del bastone e l'estremità della sua ombra.**

Supponendo che i raggi del Sole siano paralleli, puoi osservare nella figura grande che anche l'angolo α con vertice nel centro della Terra e con i lati che passano per Alessandria e Siene ha ampiezza 7,2°.



L'angolo α e l'angolo formato dai raggi del Sole con la verticale ad Alessandria sono infatti *alterni interni* se si considerano due raggi paralleli passanti per Alessandria e Siene tagliati dalla trasversale che dal centro della Terra passa per Alessandria.
Vale allora la proporzione:

$$7,2:360=5000:x \rightarrow x = 5000\cdot\frac{360}{7,2}=250\,000.$$

Si stima che lo *stadio* dovesse essere lungo 157,5 metri. Accettando questo valore, la lunghezza della circonferenza calcolata da Eratostene è di 39 375 km, valore molto vicino a quello che oggi conosciamo di 40 009 km.

Attività

Eratostene in rete

- Trovate una scuola, italiana o meglio europea, che stia sul vostro stesso meridiano e con una delle sue classi misurate allo stesso istante l'angolo che i raggi del Sole formano con la verticale. Da qui ricavate il raggio della Terra. In Internet potete consultare il sito *Rete di Eratostene*, che si occupa di collegare e aiutare le scuole che vogliono realizzare l'esperienza.

Per saperne di più

- D. Guedj, *La chioma di Berenice*, Longanesi, 2003. Un romanzo su Eratostene e la misura del Mondo.

@ **Cerca nel Web:**
rete, Eratostene, meridiano

I TRONCHI DEGLI ALBERI

Come si può conoscere il diametro di un grosso tronco con molta precisione?

▶ Il quesito completo a pag. 241

Il metodo della corda
Consiste nell'avvolgere una corda intorno al tronco a un'altezza predefinita e misurare la circonferenza.
La sezione di un tronco non è esattamente un cerchio, ma per misurarne il diametro possiamo pensare che sia così.
Se non serve essere troppo precisi, per ottenere il diametro basta dividere la circonferenza per 3 oppure, se si vuole essere più esatti, per 3,14.
L'errore relativo che si commette usando 3 al posto di π è del 4,5%, accettabile per esempio nel caso in cui si voglia vendere il legname.

Per essere più precisi...
Chi cura grandi alberi vuole monitorare costantemente il loro stato di salute, perché improvvisi arresti nella crescita del diametro del tronco sono indicatori di stress dovuti alla mancanza d'acqua o a qualche malattia.
La crescita di un grande albero nel corso di un mese è certamente inferiore all'errore che si può avere con il metodo della corda.
È necessario quindi trovare altre soluzioni. Su alcune piante vengono inseriti dei sensori elettronici che misurano la crescita del diametro. Non tutti gli alberi però sopportano che si impianti un sensore nel loro tronco. E così si ricorre a un metodo geometrico.

Il metodo delle tre aste
Con tre aste di legno (una corta, una lunga un metro e la terza piuttosto lunga) si fa la seguente costruzione.

- Si appoggia la prima asta tangente al tronco.
- La seconda, lunga un metro, viene messa perpendicolare alla prima a partire dal punto di contatto col tronco: in questo modo la seconda asta, se prolungata idealmente all'interno del tronco, passa per il centro della circonferenza.
- Infine, si posiziona la terza asta con un'estremità a contatto col punto della seconda più lontano dal tronco, e le si fa toccare il tronco tangenzialmente (vedi figura).

Ora non resta che misurare la parte della terza asta tra l'estremità e il punto di contatto col tronco.
Diciamo che sia lunga C. Poiché l'estremità della terza asta, il suo punto di tangenza e il centro della circonferenza formano un triangolo rettangolo, vale la relazione

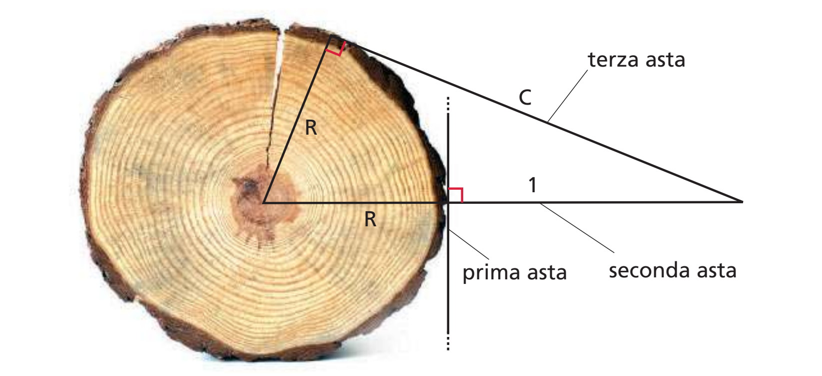
$$(1 + R)^2 = R^2 + C^2,$$

dove 1 è la lunghezza della seconda asta e R è il raggio, che possiamo quindi ricavare:

$$R = \frac{1}{2}(C^2 - 1).$$

Le tre aste eliminano due problemi che si hanno usando la corda:

- la sezione del tronco non è un cerchio perfetto;
- la corda potrebbe essere tesa diversamente nelle misure fatte a distanza di tempo.



I cerchi di Kandinskij

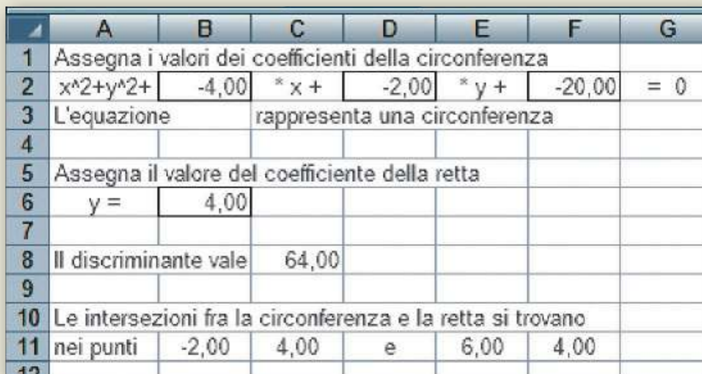
Nella sua sperimentazione verso la pittura astratta Kandinskij sceglie il cerchio come una delle forme fondamentali. Nel dipinto che proponiamo (*Alcuni cerchi*, 1926, Solomon R. Guggenheim Museum, New York) egli pensa il cerchio come «un legame con il cosmico», come «la forma più modesta, che si afferma con prepotenza, precisa ma variabile, stabile e allo stesso tempo instabile, silenziosa e contemporaneamente sonora» e ancora come «una tensione che porta in sé infinite tensioni». Kandinskij afferma: «Oggi amo il cerchio come prima amavo il cavallo e forse di più, perché nel cerchio trovo maggiori possibilità interiori».

LABORATORIO DI MATEMATICA
LA CIRCONFERENZA

ESERCITAZIONE GUIDATA

Costruiamo con l'aiuto di Excel le coordinate degli eventuali punti di intersezione fra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e la retta di equazione $y = q$, dopo aver letto i valori dei loro coefficienti. Proviamo il foglio con i seguenti valori: $a = -4$, $b = -2$, $c = -20$ e $q = 6$.

- Attiviamo Excel e scriviamo i messaggi per indicare dove immettere i dati e le didascalie per illustrare la soluzione del problema, come vediamo in figura 1.
- Nella cella C3 digitiamo la formula che controlla l'esistenza della circonferenza: = SE(B2^2 + D2^2 > 4*F2; "rappresenta una circonferenza"; "non rappresenta una circonferenza").
- In C8 scriviamo la formula che calcola il discriminante del sistema formato dalle equazioni della circonferenza e della retta: = B2^2 − 4*(B6^2 + B6*D2 + F2).
- Inseriamo le risposte al problema condizionate dai valori assunti dal discriminante: in A11 = SE(C8 > 0; "nei punti"; SE(C8 = 0; "nel punto"; "in nessun punto")), in B11 = SE(C8 >= 0; (− B2 − RADQ(C8))/2); ""), in C11 = SE(C8 >= 0; B6; ""), in D11 = SE(C8 > 0; "e"; ""), in E11 = SE(C8 > 0; (− B2 + RADQ(C8))/2); "") e in F11 = SE(C8 > 0; B6; "").
- Inseriamo i dati proposti: − 4 in B2, − 2 in D2, − 20 in F2 e 4 in B6 e al termine vediamo il foglio della figura 1.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Assegna i valori dei coefficienti della circonferenza						
2	x^2+y^2+	-4,00	* x +	-2,00	* y +	-20,00	= 0
3	L'equazione		rappresenta una circonferenza				
4							
5	Assegna il valore del coefficiente della retta						
6	y =	4,00					
7							
8	Il discriminante vale		64,00				
9							
10	Le intersezioni fra la circonferenza e la retta si trovano						
11	nei punti	-2,00	4,00	e	6,00	4,00	
12							

▲ Figura 1

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 8 esercitazioni in più

Esercitazioni

Per ognuno dei seguenti problemi costruisci un foglio elettronico che legga i dati e determini gli eventuali risultati. Prova il foglio con i dati proposti.

1 Dopo aver assegnato le coordinate dei punti $M(x_M; y_M)$ e $N(x_N; y_N)$, determina l'equazione della circonferenza di diametro MN.
Prova il foglio con $M(2; 3)$ e $N(-4; 5)$; con $M(2; 3)$ e $N(2; 5)$; con $M(2; 3)$ e $N(2; 3)$.
[$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$; $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$; la circonferenza non esiste]

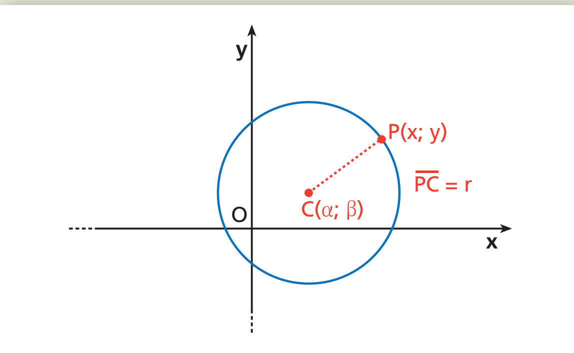
2 Trova l'equazione della circonferenza avente il centro nel punto dato $C(x_C; y_C)$ e passante per il punto dato $P(x_P; y_P)$.
Prova il foglio con $C(2; 3)$ e $P(1; 3)$, con $C(3; -5)$ e $P(-1; -2)$, con $C(-3; 1)$ e $P(-3; 1)$.
[$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$; $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$; la circonferenza non esiste]

3 Determina le coordinate delle intersezioni con gli assi cartesiani di una circonferenza, date la misura r del raggio e le coordinate del centro C.
Prova il foglio con $r = \sqrt{5}$ e $C(1; 1)$, con $r = 5$ e $C(5; 3)$, con $r = 2$ e $C(-3; 4)$.
[$(-1; 0), (3; 0), (0; -1), (0; 3)$; $(1; 0), (9; 0), (0; 3)$; le intersezioni non esistono]

LA TEORIA IN SINTESI
LA CIRCONFERENZA

1. LA CIRCONFERENZA E LA SUA EQUAZIONE

- **Circonferenza**: curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto C, detto **centro**.
- **Raggio della circonferenza**: distanza fra ognuno dei punti della circonferenza e il suo centro.



- **Equazione della circonferenza**
Note le coordinate del centro $(\alpha; \beta)$ e la misura r del raggio, l'equazione della circonferenza è:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

L'equazione può anche essere scritta nella forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

dove a, b e c soddisfano le seguenti relazioni:

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta = -\frac{b}{2},$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c},$$

con $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$.

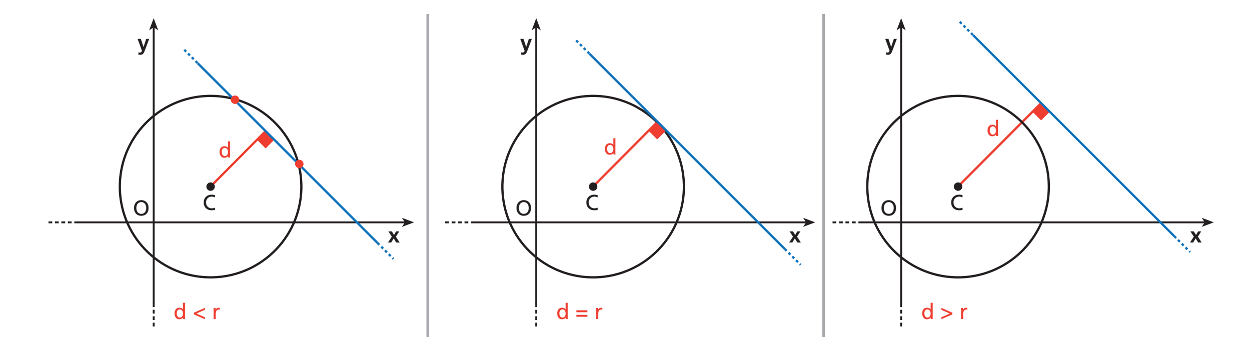
Se:
$a = 0$, il centro appartiene all'asse y;
$b = 0$, il centro appartiene all'asse x;
$c = 0$, la circonferenza passa per l'origine degli assi.

2. RETTA E CIRCONFERENZA

- **Retta secante, retta tangente e retta esterna alla circonferenza**
Dato il sistema formato dalle equazioni della circonferenza e della retta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

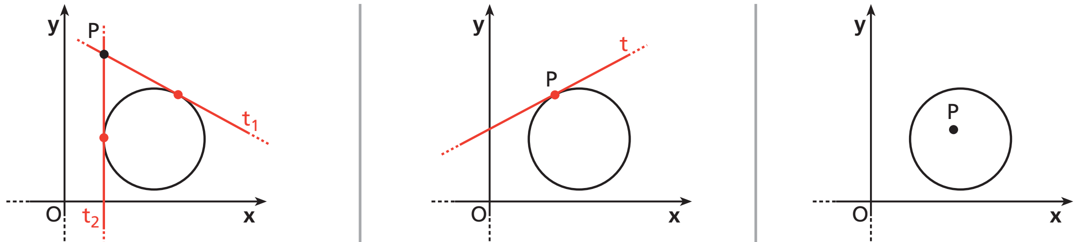
se nell'equazione di secondo grado risolvente abbiamo:
- $\Delta > 0$, la retta è **secante**;
- $\Delta = 0$, la retta è **tangente**;
- $\Delta < 0$, la retta è **esterna**.



a. Retta secante la circonferenza. **b.** Retta tangente alla circonferenza. **c.** Retta esterna alla circonferenza.

3. LE RETTE TANGENTI

- Dati un punto $P(x_0; y_0)$ e una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$,
  - se P è esterno alla circonferenza, le **rette per P tangenti alla circonferenza** sono due;
  - se P appartiene alla circonferenza, la retta tangente è una sola;
  - se P è interno alla circonferenza, non esistono rette tangenti passanti per P.



a. Due distinte tangenti alla circonferenza condotte per *P*.

b. Una sola tangente alla circonferenza.

c. Nessuna retta tangente.

- **Equazioni delle rette tangenti**
  Per determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti, è possibile seguire vari metodi.
  - **Primo metodo**: nell'equazione di secondo grado nella variabile x, risolvente il sistema

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}$$

  si impone $\Delta = 0$.
  - **Secondo metodo**: si impone che la distanza tra il centro C e le rette passanti per P, che hanno equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$, sia uguale al raggio.

  Con entrambi i metodi si ottiene un'equazione di secondo grado in m le cui soluzioni reali sono i coefficienti angolari delle rette tangenti.

  Se ***P* appartiene alla circonferenza**, ci sono ancora altri due metodi.
  - **Terzo metodo**: si determina l'equazione della retta PC e si scrive l'equazione della perpendicolare a questa passante per P.
  - **Quarto metodo**: si ottiene l'equazione della tangente con la **formula di sdoppiamento**:

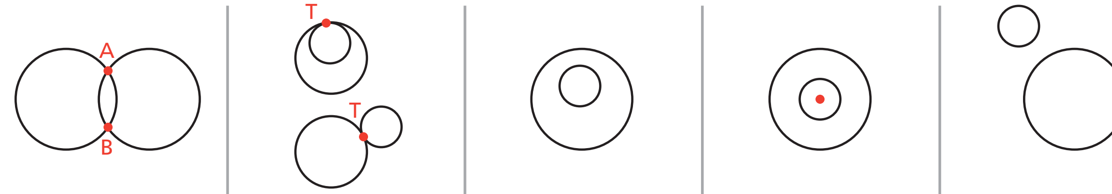
$$x \cdot x_0 + y \cdot y_0 + a \cdot \frac{x + x_0}{2} + b \cdot \frac{y + y_0}{2} + c = 0.$$

4. DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA

- Per determinare l'equazione di una circonferenza sono necessarie **tre condizioni**.
  Per esempio:
  - sono noti le coordinate del centro (due condizioni) e il raggio;
  - sono note le coordinate degli estremi di un diametro;
  - la circonferenza passa per un punto e sono note le coordinate del centro;
  - la circonferenza passa per tre punti non allineati;
  - la circonferenza passa per due punti e il centro appartiene a una retta nota;
  - sono note le coordinate del centro e la circonferenza è tangente a una retta nota.

Bergamini, Trifone, Barozzi **MANUALE BLU 2.0 DI MATEMATICA - Vol.3** © Zanichelli 2012 *Moduli S+L*

5. LA POSIZIONE DI DUE CIRCONFERENZE



a. Circonferenze secanti. **b.** Circonferenze tangenti. **c.** Circonferenze una interna all'altra. **d.** Circonferenze concentriche. **e.** Circonferenze esterne.

- **Asse radicale**

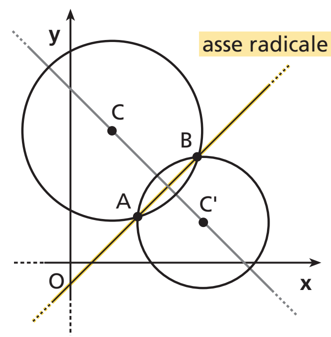
Poniamo a sistema le equazioni delle circonferenze:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Se $a \neq a'$ o $b \neq b'$, sottraendo membro a membro si ottiene l'equazione dell'**asse radicale**:

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0.$$

L'asse è perpendicolare alla retta passante per i centri delle due circonferenze.



- **Punti di intersezione e di tangenza fra circonferenze**

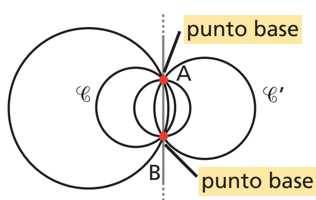
Per determinarli si pone a sistema l'equazione dell'asse radicale con una delle equazioni delle circonferenze.

6. I FASCI DI CIRCONFERENZE

- **Fascio di circonferenze**

Date due circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ di equazioni

$$\mathscr{C}: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$
$$\mathscr{C}': x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0,$$



si chiama **fascio di circonferenze con generatrici** $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ l'insieme della circonferenza $\mathscr{C}'$ e di tutte le circonferenze rappresentate dall'equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

Per $k = -1$, si ottiene l'equazione dell'asse radicale: $(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$.

- **Punti base**: punti per i quali passano tutte le circonferenze del fascio.
- **Asse centrale**: retta perpendicolare all'asse radicale sulla quale si trovano i centri delle circonferenze del fascio.
- Per **studiare un fascio di circonferenze** occorre trovare: centro e raggio; le due generatrici; gli eventuali punti base; l'asse radicale e l'asse centrale; eventuali circonferenze degeneri.

1. LA CIRCONFERENZA E LA SUA EQUAZIONE

Teoria a pag. 242

L'equazione della circonferenza

1 Scrivi il luogo geometrico dei punti del piano che hanno distanza $\sqrt{5}$ dal punto $(-3; 1)$.
$[x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0]$

2 Individua l'equazione della circonferenza con centro l'origine e raggio $\sqrt{\frac{3}{2}}$. $[2x^2 + 2y^2 = 3]$

3 Scrivi l'equazione della circonferenza con centro $C(2; -3)$ e raggio 4. $[x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0]$

4 Determina l'equazione della circonferenza avente centro $C(3; 4)$ e raggio di lunghezza uguale a quella del segmento di estremi $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$ e $\left(1; -\frac{5}{2}\right)$. $[x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0]$

5 Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $C(0; 3)$ e passante per $P(2; -1)$. $[x^2 + y^2 - 6y - 11 = 0]$

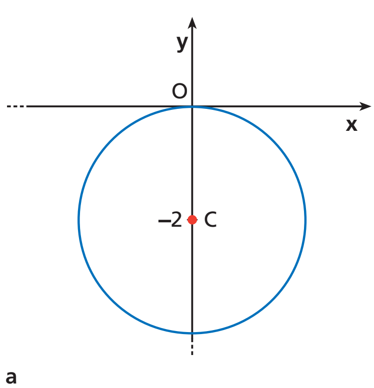
6 Determina l'equazione della circonferenza di centro $C(-1; 1)$ e passante per $A(0; -2)$.
$[x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0]$

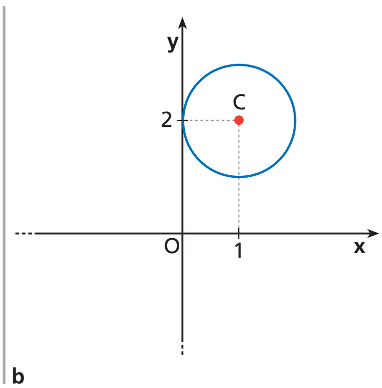
7 Scrivi l'equazione della circonferenza di raggio 3 il cui centro sia il punto $P\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right)$.
$[36x^2 + 36y^2 - 96x + 36y - 251 = 0]$

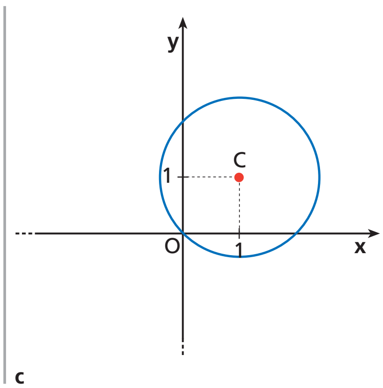
8 Find the equation of the circle that has a diameter with endpoints $(1; 1)$ and $(7; 5)$.
(USA *Southern Illinois University Carbondale,* Final Exam, 2003)
$[x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0]$

9 Trova l'equazione della circonferenza di raggio $2\sqrt{3}$ avente il centro nel punto in cui la retta di equazione $2x + 3y = 5$ interseca la bisettrice del I quadrante. $[x^2 + y^2 - 2x - 2y - 10 = 0]$

10 Scrivi le equazioni delle circonferenze rappresentate nei seguenti grafici.







Dall'equazione al grafico

11 ESERCIZIO GUIDA

Indichiamo quale, fra le seguenti equazioni, è quella di una circonferenza:

a) $x^2 + y^2 - x + y + 5 = 0$; **b)** $2x^2 + 2y^2 - x - 4y + 2 = 0$; **c)** $x^2 - y^2 + 5x = 0$.

a) Poiché la misura del raggio deve essere un numero reale, nella formula $r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ il radicando deve essere positivo.
Sostituendo i valori $a = -1$, $b = 1$, $c = 5$, otteniamo per il radicando:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 5 = -\frac{18}{4} < 0 \quad \rightarrow \quad \text{l'equazione non è quella di una circonferenza.}$$

b) Dividiamo entrambi i membri per 2:

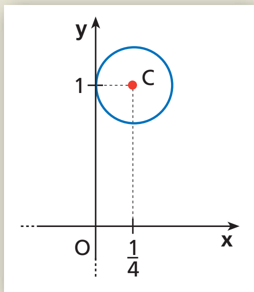
$$x^2 + y^2 - \frac{x}{2} - 2y + 1 = 0.$$

Sostituiamo $a = -\frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 1$ nell'espressione $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c$:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 - 1 = \frac{1}{16} > 0.$$

L'equazione data, quindi, è quella di una circonferenza. Il raggio misura $\frac{1}{4}$.

Le coordinate del centro sono $x_C = -\frac{a}{2} = \frac{1}{4}$ e $y_C = -\frac{b}{2} = 1$ (figura sopra).



c) $x^2 - y^2 + 5x = 0$ non è l'equazione di una circonferenza perché il coefficiente 1 di x^2 non è uguale al coefficiente -1 di y^2.

Indica quali delle seguenti equazioni corrispondono a una circonferenza e in caso affermativo rappresentala graficamente dopo aver determinato le coordinate del centro e il raggio.

12 a) $x^2 + y^2 + 2xy + 3 = 0$; b) $3x^2 - 3y^2 + x + y + 1 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 1 = 0$.

13 a) $x^2 + y^2 + 1 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 1 = 0$; c) $6x^2 + 6y^2 - 2 = 0$.

14 a) $5x^2 + 5y^2 - x - 2y + 2 = 0$; b) $(x-1)^2 + y^2 = 4$; c) $x^2 + (y-2)^2 + 9 = 0$.

15 a) $x^2 + 2y^2 + x + 3y - 5 = 0$; b) $x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

16 a) $x^2 + y^2 + xy = x(4 + y)$; b) $x^2 + y^2 - x = 0$; c) $-2x^2 - 2y^2 = x - 2y$.

17 a) $x^2 + y^2 + x - y = 0$; b) $x^2 + y^2 - 14x + 8y + 16 = 0$; c) $x^2 = y(2 - y)$.

ESERCIZI VARI L'equazione della circonferenza

Trova per quali valori di *k* ognuna delle seguenti equazioni rappresenta una circonferenza.

18 $x^2 + y^2 - 2kx + y - 4 = 0$ $[\forall k \in \mathbb{R}]$

19 $x^2 + y^2 + (k-2)x + ky - 2 = 0$ $[\forall k \in \mathbb{R}]$

20 $x^2 + y^2 + x - 2y + k + 3 = 0$ $\left[k \le -\frac{7}{4}\right]$

21 $kx^2 + ky^2 - 2kx + 4y + 8 + k = 0$ $\left[k \leq \frac{1}{2} \wedge k \neq 0\right]$

22 $(k+1)x^2 + (k+1)y^2 + 2kx + 2y + 4k + 3 = 0$ $\left[-2 \leq k \leq -\frac{1}{3} \wedge k \neq -1\right]$

23 **VERO O FALSO?**

a) L'equazione $-2x^2 - 2y^2 + 1 = 0$ non rappresenta una circonferenza. V F

b) Le due circonferenze $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ e $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$ hanno lo stesso centro. V F

c) La circonferenza $2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y - 5 = 0$ ha raggio $\sqrt{5}$. V F

d) L'equazione $x^2 + y^2 + (k+1)x = 0$ ha il centro di ascissa positiva se $k > -1$. V F

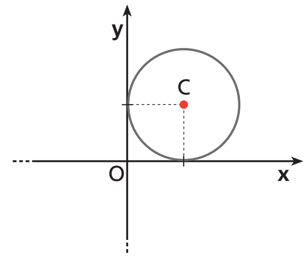
24 **VERO O FALSO?**

Nell'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ della circonferenza rappresentata in figura:

a) a e b sono uguali; V F

b) c è nullo; V F

c) la misura del raggio è uguale ad a. V F



25 Stabilisci se i punti $P\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ e $Q(-1; -1)$ appartengono alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$ ed esegui la rappresentazione grafica. [no; sì]

26 Verifica che i punti $A(3; 1)$ e $B(1; -5)$ non appartengono alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Sono interni o esterni alla circonferenza? Fornisci la risposta senza disegnare la figura. (Suggerimento. Se un punto è interno, la sua distanza dal centro è minore del...) [A interno; B esterno]

27 Stabilisci se i punti $A(1; 0)$, $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$, $D(0; -1)$, $E(-1; 1)$ sono interni, esterni o appartengono alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - x + 2y + 1 = 0$. [$A$ esterno; B interno; D appartenente; E esterno]

28 What is the y-component of the center of the circle which passes through $(-1; 2)$, $(3; 2)$, and $(5; 4)$?

(USA *Lehigh University: High School Math Contest*, 2001)

[6]

Le curve dedotte dalla circonferenza

29 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo graficamente la curva di equazione:

$$x^2 + y^2 - 4|x| - 4 = 0.$$

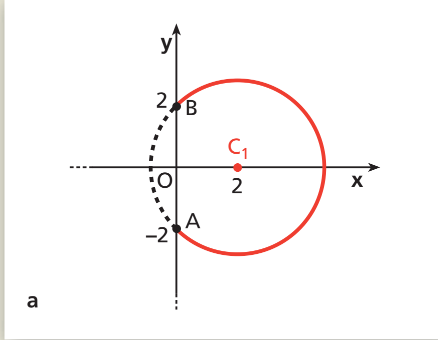
Poiché

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

allora l'equazione data risulta equivalente all'unione delle soluzioni dei due sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0 \end{cases}$$

La rappresentazione delle soluzioni del primo sistema è costituita dai punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ contenuti nel semipiano delle $x \geq 0$.

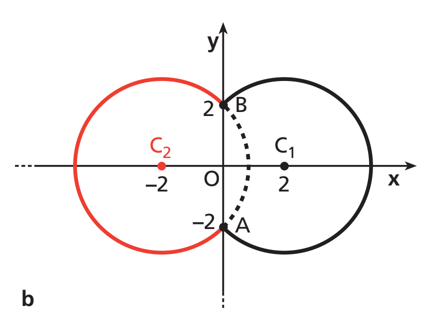


a

La circonferenza ha centro $C_1(2; 0)$ e raggio $r = 2\sqrt{2}$ e passa per i punti $A(0; -2)$ e $B(0; 2)$.
Disegniamo solo l'arco di circonferenza contenuto nel semipiano delle $x \geq 0$ (figura *a*).

La rappresentazione delle soluzioni del secondo sistema è costituita dai punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$ contenuti nel semipiano delle $x < 0$.

Tale circonferenza ha centro $C_2(-2; 0)$ e raggio $r = 2\sqrt{2}$ e passa per i punti $A(0; -2)$ e $B(0; 2)$. Disegniamo solo l'arco di circonferenza contenuto nel semipiano delle $x < 0$ (figura *b*).



b

Rappresenta graficamente le curve descritte dalle seguenti equazioni.

30 $x^2 + y^2 - 2|x| - 4 = 0$

31 $x^2 + y^2 - 2|x| + 2y = 0$

32 $x^2 + y^2 + |2x - 2| + 4y = 0$

33 $x^2 + y^2 + |y + 1| - 9 = 0$

34 $x^2 + y^2 - 2x + 2|y| = 0$

35 $x^2 + y^2 - |4x - 4| + 2y + 4 = 0$

36 $x^2 + y^2 + \sqrt{y^2 - 4y + 4} = 0$

37 $x^2 + y^2 + |2x - 2y - 2| = 0$

38 $x^2 + y^2 - 2|x| + 2|y| = 0$

39 $x^2 + y^2 - 4|x + 1| - 4|y + 1| = 0$

40 $x^2 + y^2 - 4|x + y| = 0$

41 $x^2 + y^2 - 2|x + y| - 2 = 0$

42 $x^2 + y^2 - 2|x - 2y| + 4 = 0$

43 $x^2 + y^2 + 2|x - y| - 4|x + y| = 0$

44 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il dominio e tracciamo il grafico della seguente funzione:

$$y = 2 + \sqrt{4 - x^2}.$$

Per determinare il dominio occorre porre il radicando maggiore o uguale a 0, cioè:

$$4 - x^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

Tracciamo nel piano cartesiano le rette $x = -2$ e $x = 2$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ascissa minore di -2 o maggiore di 2 (figura *a*).

Per rappresentare la funzione isoliamo la radice:

$$y - 2 = \sqrt{4 - x^2}.$$

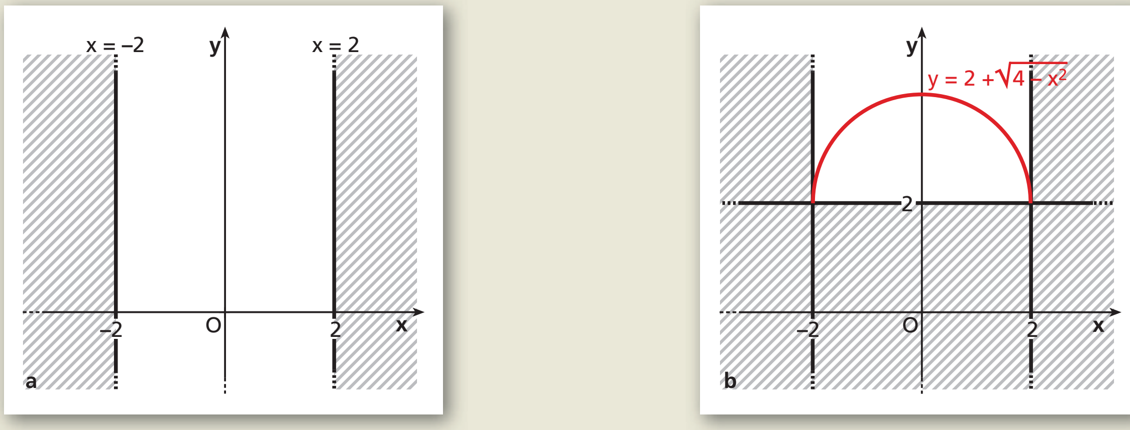
Questa equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y - 2 \geq 0 \\ (y - 2)^2 = 4 - x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ y^2 - 4y + 4 - 4 + x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Tracciamo nel piano cartesiano la retta $y = 2$ ed eliminiamo tutti i punti che hanno ordinata minore di 2.

$x^2 + y^2 - 4y = 0$ è l'equazione di una circonferenza con centro $C(0; 2)$ e raggio $r = 2$.

Tracciamo la semicirconferenza contenuta nella parte di piano che non abbiamo eliminato. Il grafico della funzione è rappresentato dalla linea continua rossa (figura *b*).



Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

45 $y = 2 + \sqrt{9 - x^2}$

46 $y = \sqrt{1 - x^2}$

47 $y = 3 - \sqrt{4 - x^2}$

48 $y = -\sqrt{16 - x^2}$

49 $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$

50 $y = 3 - \sqrt{3 + 2x - x^2}$

51 $y = 1 + \sqrt{2x - x^2}$

52 $y = 5 - \sqrt{12 - 4x - x^2}$

53 $y = 2 - \sqrt{6|x| - x^2}$

54 $y = \sqrt{4|x| - x^2}$

55 $y = \left|-3 + \sqrt{25 - x^2}\right|$

56 $y = 1 - \sqrt{8 + 2|x| - x^2}$

Traccia il grafico delle curve aventi le seguenti equazioni.

57 $x = \sqrt{4 - y^2}$

58 $x = -\sqrt{9 - y^2}$

59 $x = 1 + \sqrt{25 - y^2}$

60 $x = -2 - \sqrt{4y - y^2}$

61 $x = -1 - \sqrt{16 - y^2}$

62 $x = 4 - \sqrt{10y - y^2 - 21}$

63 $\sqrt{2y - y^2} = x + 2$

64 $x = -3 + \sqrt{6|y| - y^2}$

65 $x = \left|-2 + \sqrt{4 - y^2}\right|$

66 $|x| = -2 + \sqrt{8y - y^2}$

67 $\sqrt{|y| - y^2} = x - 1$

68 $x = \sqrt{4|y| - y^2}$

Scrivi in forma esplicita l'equazione della circonferenza assegnata, ricavando *y* in funzione di *x*. Ottieni una funzione?

69 $x^2 + y^2 - 6x = 0$

70 $x^2 + y^2 = 4$

71 $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$

72 $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

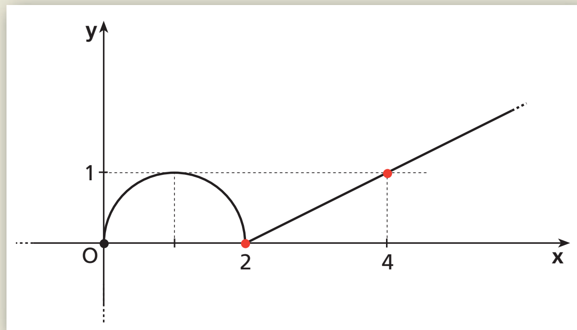
73 $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 1$

74 $x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0$

Dal grafico all'equazione

75 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo l'equazione corrispondente al grafico utilizzando i dati della figura.



Osserviamo che la curva è costituita da una semicirconferenza nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$ e da una semiretta nell'intervallo $x > 2$.
La semicirconferenza è costituita dai punti di ordinata y positiva della circonferenza di centro $C(1; 0)$ e raggio 1, che ha equazione:

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Poiché i punti della semicirconferenza hanno $y \geq 0$, ricaviamo y:

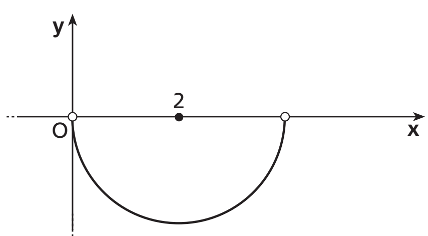
$$y^2 = 2x - x^2 \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{2x - x^2} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{2x - x^2}.$$

La semiretta passa per i punti $(2; 0)$ e $(4; 1)$ per cui ha equazione: $\dfrac{y-0}{1-0} = \dfrac{x-2}{4-2} \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x - 1.$

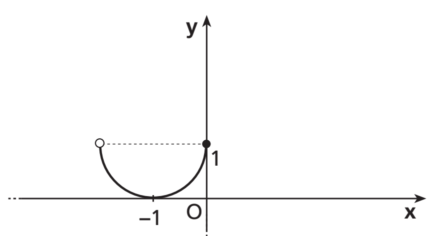
Quindi la curva in figura rappresenta il grafico della funzione: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - x^2} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2}x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Trova le equazioni corrispondenti ai seguenti grafici utilizzando i dati delle figure.

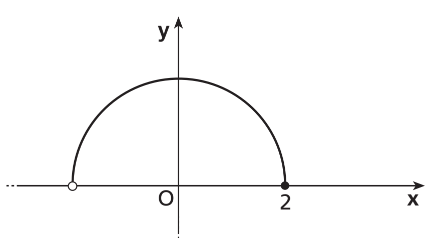
76



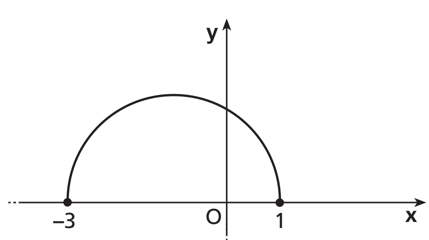
79



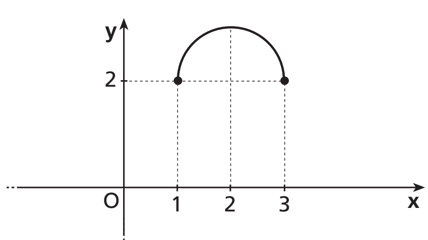
77



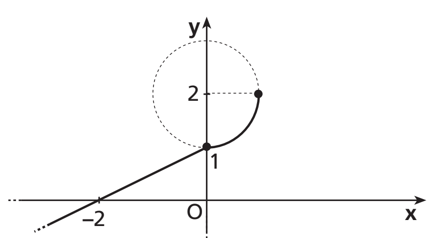
80



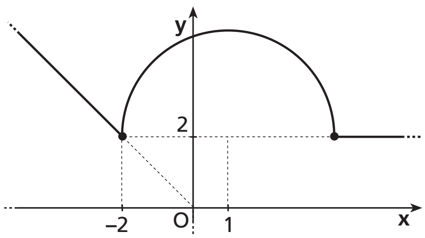
78



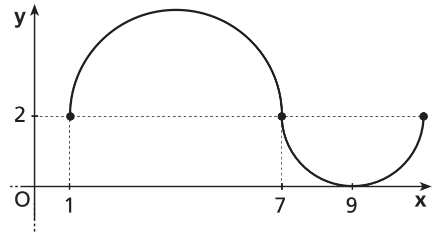
81



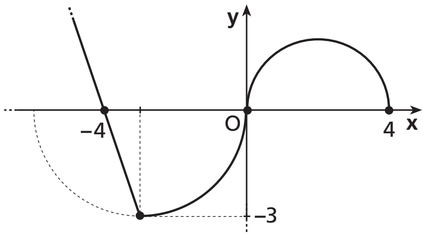
82



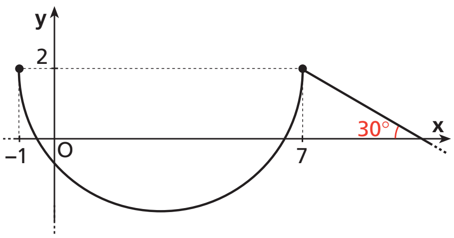
84



83



85



86 Scrivi l'equazione della semicirconferenza che ha diametro OB, con O origine degli assi, $B(0; 4)$, e che si trova nel I quadrante. $\left[x = \sqrt{4y - y^2}\right]$

87 Trova l'equazione della semicirconferenza che ha centro in $C(2; 0)$, raggio $\frac{3}{2}$, e che si trova nel IV quadrante. $\left[y = -\sqrt{-x^2 + 4x - \frac{7}{4}}\right]$

Le disequazioni di secondo grado in due variabili

88 **ESERCIZIO GUIDA**

Rappresentiamo i punti del piano corrispondenti alle soluzioni delle seguenti disequazioni:

a) $x^2 + y^2 < 2x$; **b)** $x^2 + y^2 > 4$.

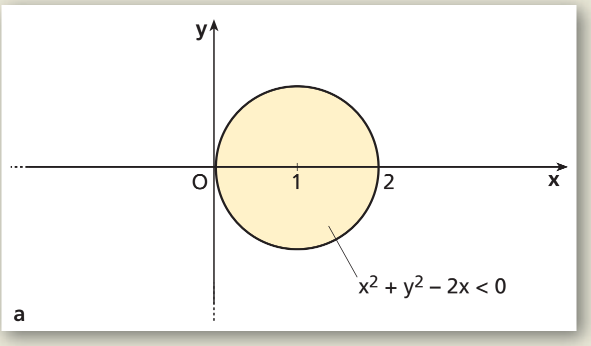
a) $x^2 + y^2 < 2x \quad \to \quad x^2 + y^2 - 2x < 0$.

La curva di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$ è una circonferenza di centro

$$x_C = -\frac{a}{2} = 1, \qquad y_C = -\frac{b}{2} = 0$$

e raggio

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c} = 1.$$



Ricordando che $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, l'equazione della circonferenza è

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

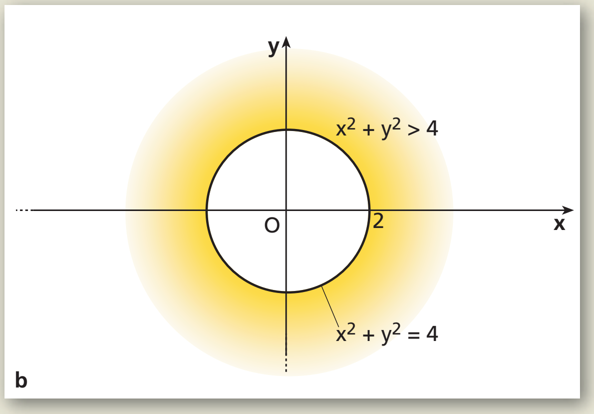
e la corrispondente disequazione è:

$$(x - 1)^2 + y^2 < 1.$$

I punti le cui coordinate soddisfano questa relazione sono tutti quelli che hanno distanza dal centro minore del raggio, cioè tutti i punti interni alla circonferenza.

b) $x^2 + y^2 > 4$.

La curva di equazione $x^2 + y^2 = 4$ è una circonferenza con centro nell'origine e raggio 2.
L'insieme delle soluzioni della disequazione è rappresentato dai punti con distanza dal centro maggiore del raggio, cioè i punti esterni alla circonferenza.



Rappresenta i punti del piano corrispondenti alle soluzioni delle seguenti disequazioni.

89 $x^2 + y^2 > 1$

90 $x^2 + y^2 + 2x - 4y \leq 0$

91 $x^2 + y^2 - 6x > 0$

92 $x^2 + y^2 < 8x$

93 $|x^2 + y^2 + 4x| < 3$

94 $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$

Trova l'area delle regioni individuate dai seguenti sistemi di disequazioni.

95 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$ [8π]

96 $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2x \\ y^2 < 9 - (x-2)^2 \end{cases}$ [8π]

97 $\begin{cases} x^2 + y^2 > 4x \\ x^2 + y^2 - 8x < 0 \end{cases}$ [12π]

2. RETTA E CIRCONFERENZA

Teoria a pag. 246

Nelle seguenti coppie di equazioni, stabilisci la posizione della retta rispetto alla circonferenza e, nei casi in cui la retta non sia esterna, determina le coordinate dei punti di intersezione o quelle del punto di tangenza.

98 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$, $x - 4 = 0$. [secante: $(4; 0)$, $(4; 2)$]

99 $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 25 = 0$, $y + 9 = 0$. [tangente: $(4; -9)$]

100 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$, $x + 3y + 4 = 0$. [secante: $(-4; 0)$, $(-1; -1)$]

101 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$, $x - y - 4 = 0$. [secante: $(3; -1)$, $(6; 2)$]

102 $x^2 + y^2 - 50 = 0$, $3x + 4y + 40 = 0$. [esterna]

103 $x^2 + y^2 - 6x - 16y + 60 = 0$, $3x - 2y - 6 = 0$. [tangente: $(6; 6)$]

104 Determina la lunghezza della corda che la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 37 = 0$ stacca sulla retta di equazione $y = 2x + 4$. $\left[\frac{18}{5}\sqrt{5}\right]$

105 Determina il valore del parametro k affinché la retta di equazione $x = k$ incontri la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$ in due punti A e B tali che $\overline{AB} = 4$. [-6; 2]

106 Scrivi l'equazione della retta parallela all'asse x sulla quale la circonferenza di equazione $x^2+y^2+2x+8y=0$ stacca una corda di lunghezza $4\sqrt{2}$. $[y=-7; y=-1]$

107 Nel fascio di rette di equazione $y=-2x+k$, determina le rette sulle quali la circonferenza di equazione $x^2+y^2-x+y-2=0$ stacca delle corde di lunghezza $\sqrt{5}$. $[k=-2; k=3]$

Trova per quali valori di k la circonferenza assegnata interseca la retta indicata a fianco.

108 $x^2+y^2-2y=0,\qquad y=kx-1.$ $[k\leq-\sqrt{3} \vee k\geq\sqrt{3}]$

109 $x^2+y^2+4x-4y+4=0,\qquad y=kx+4.$ $[k\geq 0]$

110 $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ is the equation of a circle. Two lines, L and M, intersect at $(2;-2)$. The distance from the center of the circle to each line is $2\sqrt{5}$. Find the equation of L and the equation of M.

(IR *Leaving Certificate Examination*, Higher Level, 1995)

$\left[L\colon y=2x-6; M\colon y=\frac{2}{11}x-\frac{26}{11}\right]$

La risoluzione grafica di equazioni e disequazioni irrazionali

111 ESERCIZIO GUIDA

Risolviamo graficamente la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{-x^2+2x+8}+4\geq 2x.$$

Isoliamo la radice a sinistra del segno di disuguaglianza:

$$\sqrt{-x^2+2x+8}\geq 2x-4.$$

Dai due membri della disequazione ottenuta ricaviamo le equazioni di due funzioni:

$$y=\sqrt{-x^2+2x+8},$$
$$y=2x-4.$$

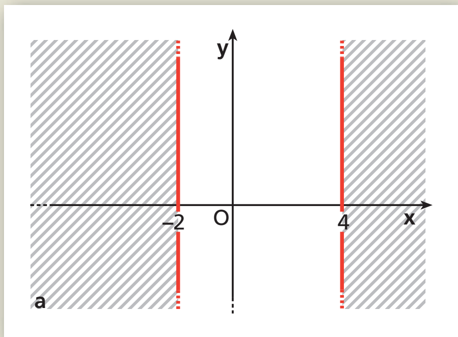
Per disegnare il grafico della prima funzione,

$$y=\sqrt{-x^2+2x+8},$$

determiniamo il suo dominio ponendo il radicando maggiore o uguale a 0:

$$-x^2+2x+8\geq 0 \quad\rightarrow\quad -2\leq x\leq 4.$$

Il dominio della funzione è dunque l'insieme $D=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\leq x\leq 4\}$ (figura a).



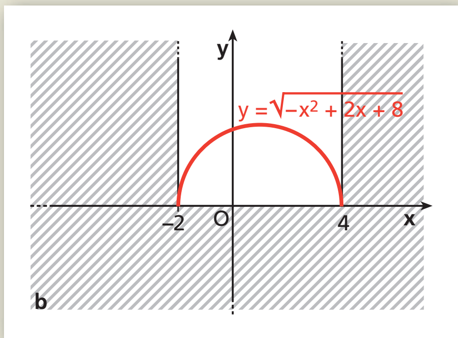
L'equazione della prima funzione,

$$y=\sqrt{-x^2+2x+8},$$

è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} y\geq 0 \\ y^2=-x^2+2x+8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y\geq 0 \\ x^2+y^2-2x-8=0 \end{cases}$$

che rappresenta una semicirconferenza di centro $(1; 0)$ e raggio 3 (figura b).



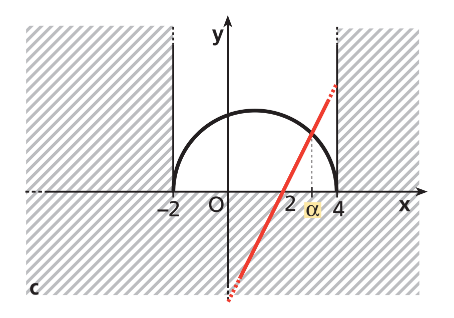
La seconda funzione corrisponde alla retta di equazione

$$y = 2x - 4,$$

che interseca l'asse x in $(2; 0)$ (figura c).

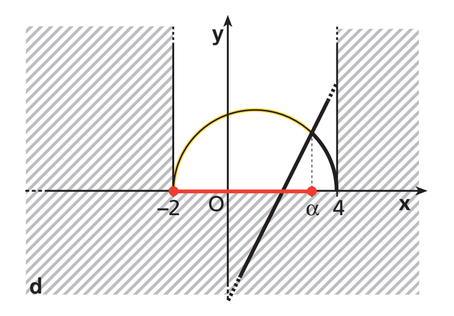
Dal grafico leggiamo, in modo approssimato, l'ascissa α del punto di intersezione tra la retta e la circonferenza, nella parte di piano in cui la disequazione ha significato:

$$\alpha \simeq 3{,}1.$$



Osserviamo nel grafico tracciato che la disequazione $\sqrt{-x^2+2x+8} \geq 2x - 4$ mette a confronto l'ordinata di un punto della circonferenza con l'ordinata di un punto della retta con la stessa ascissa.

Evidenziamo sul grafico la zona in cui i punti della circonferenza hanno ordinate maggiori o uguali rispetto alle ordinate dei punti corrispondenti della retta (figura d).



Le ascisse di questi punti sono le soluzioni della disequazione data:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 3{,}1\}.$$

Osservazione. Se dobbiamo risolvere un'**equazione irrazionale**, per esempio $\sqrt{-x^2+2x+8} + 4 = 2x$, procediamo allo stesso modo, ma terminiamo la risoluzione dopo la determinazione dell'ascissa (o delle ascisse) dei punti di intersezione. (In questo caso la soluzione allora è $x = \alpha \simeq 3{,}1$.)

Risolvi graficamente le seguenti equazioni e disequazioni irrazionali.

112 $\sqrt{-x^2+9} = -x-1$ $[x \simeq -2{,}6]$

113 $\sqrt{4-x^2} \leq -2x+2$ $[-2 \leq x \leq 0]$

114 $\sqrt{-x^2-2x+3} = x+3$ $[x_1 = -3;\ x_2 = -1]$

115 $\sqrt{-x^2+2x} < x$ $[1 < x \leq 2]$

116 $-\sqrt{-(x-2)^2+1} > \frac{2}{3}x$ $[S = \varnothing]$

117 $\sqrt{-x^2+25} \geq x + \frac{1}{2}$ $[-5 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 3{,}3]$

118 $-\sqrt{1-x^2} \leq -\frac{1}{4}x$ $[-1 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 0{,}97]$

119 $-\sqrt{-x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}} < \frac{x-1}{4}$ $\left[\frac{9}{17} < x < 1\right]$

120 $\sqrt{4x-x^2+12} > -2x+5$ $[\alpha < x < 6, \alpha \simeq 0{,}6]$

121 $\sqrt{16-x^2} > 4-x$ $[0 < x < 4]$

122 $\sqrt{4x-x^2} < \sqrt{3}\,(x-2)$ $[3 < x \leq 4]$

123 $x \leq \sqrt{8x-x^2}$ $[0 \leq x \leq 4]$

124 $\sqrt{2-x^2} > |x|$ $[-1 < x < 1]$

125 $-\sqrt{-x^2+8x-12} > -1$ $[2 \leq x < \alpha_1;\ \alpha_2 < x \leq 6,\ \alpha_1 \simeq 2{,}3,\ \alpha_2 \simeq 5{,}7]$

126 $-\sqrt{-x^2-4x} \leq -\frac{x}{2} - 2$ $\left[-4 \leq x \leq -\frac{4}{5}\right]$

127 $\frac{1}{2}\sqrt{1-16x^2} \geq -x$ $\left[\alpha \leq x \leq \frac{1}{4}, \alpha \simeq -0{,}2\right]$

128 $\sqrt{\frac{1}{4}-(x-1)^2} < 3x - \frac{3}{2}$ $\left[\frac{3}{5} < x \leq \frac{3}{2}\right]$

129 $\sqrt{6x-x^2} + 1 \geq x$ $[0 \leq x \leq \alpha, \alpha \simeq 3{,}9]$

Risolvi graficamente i seguenti sistemi.

130 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0 \\ y + x - 2 \geq 0 \end{cases}$

131 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y - 2x + 2 \leq 0 \end{cases}$

132 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 2y \leq 0 \\ y + x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

133 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y \leq 0 \\ y + 2x - 8 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

134 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ 2y + x - 2 \geq 0 \end{cases}$

135 $\begin{cases} x^2 + y^2 < 8x \\ y + x < 4 \\ x \leq 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Trova l'area delle regioni individuata dai seguenti sistemi di disequazioni.

136 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\left[\frac{3}{4}\pi\right]$

137 $\begin{cases} x^2 + y^2 < 2x \\ x + y > 1 \end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

138 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3 < 0 \\ y - 2x + 2 > 0 \end{cases}$ $[2\pi]$

139 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \geq 0 \\ 3y + 4x - 12 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ |y - 1| \leq 1 \end{cases}$ $\left[\frac{9}{2} - \pi\right]$

3. LE RETTE TANGENTI

Teoria a pag. 247

Le rette tangenti da un punto esterno

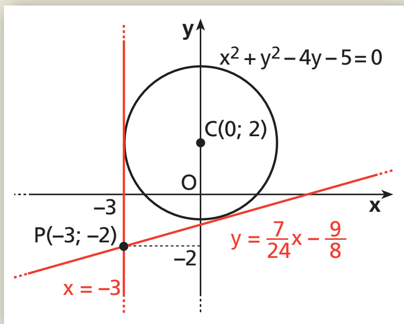
140 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ condotte dal punto $P(-3; -2)$.

Rappresentiamo la circonferenza e il punto P. La circonferenza ha centro $(0; 2)$ e raggio 3. Il punto P è esterno alla circonferenza, quindi le tangenti sono due.

- Utilizziamo il I metodo ($\Delta = 0$). L'equazione di una retta generica per P è $y + 2 = m(x + 3)$ e cioè $y = mx + 3m - 2$ con esclusione della retta $x = -3$ parallela all'asse y.
  Mettiamola a sistema con l'equazione della circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \\ y = mx + 3m - 2 \end{cases}$$



Troviamo l'equazione risolvente e riduciamo a forma normale:

$$x^2(1 + m^2) - 2m(4 - 3m)x + 9m^2 - 24m + 7 = 0.$$

Poniamo la condizione di tangenza $\frac{\Delta}{4} = 0$:

$$m^2(4 - 3m)^2 - (1 + m^2)(9m^2 - 24m + 7) = 0$$

$$\cancel{16m^2} + \cancel{9m^4} - \cancel{24m^3} - \cancel{9m^2} + 24m - 7 - \cancel{9m^4} + \cancel{24m^3} - \cancel{7m^2} = 0$$

$$24m - 7 = 0 \rightarrow m = \frac{7}{24}.$$

Otteniamo **un solo** valore di m a cui corrisponde la retta di equazione:

$$y + 2 = \frac{7}{24}(x + 3) \rightarrow y = \frac{7}{24}x - \frac{9}{8}.$$

L'altra tangente deve essere parallela all'asse y e ha equazione $x = -3$.

- Applichiamo il II metodo (distanza retta-centro uguale al raggio).
  Consideriamo il fascio di rette per P, $mx - y + 3m - 2 = 0$, che esclude la retta $x = -3$, e applichiamo la formula della distanza fra le rette e il centro C:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2 + 3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Poniamo tale distanza uguale al raggio e risolviamo l'equazione rispetto a m:

$$\frac{|3m - 4|}{\sqrt{1 + m^2}} = 3 \quad \rightarrow \quad (3m - 4)^2 = 9(1 + m^2) \quad \rightarrow \quad \cancel{9m^2} + 16 - 24m = 9 + \cancel{9m^2} \quad \rightarrow \quad m = \frac{7}{24}.$$

Otteniamo la retta di equazione:

$$y = \frac{7}{24}x - \frac{9}{8}.$$

Possiamo osservare che con il secondo metodo i calcoli sono meno laboriosi rispetto al primo.

141 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ condotte dal punto $P(9; 0)$. $[y = 0; 3x + 4y - 27 = 0]$

142 Determina le equazioni delle tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x + 16y + 37 = 0$ parallele agli assi cartesiani. $[y = -2; y = -14; x = -3; x = 9]$

143 Conduci dal punto $P\left(\frac{2}{3}; 4\right)$ le tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 18x - 8y + 72 = 0$. $[3x - 4y + 14 = 0; 3x + 4y - 18 = 0]$

144 Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ condotte dal punto $P(-1; 3)$. $\left[x = -1; y = -\frac{5}{12}x + \frac{31}{12}\right]$

145 Conduci dal punto $P(-3; 0)$ le tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ e scrivine le equazioni. $\left[x = -3; y = -\frac{7}{24}(x + 3)\right]$

La retta tangente in un punto della circonferenza

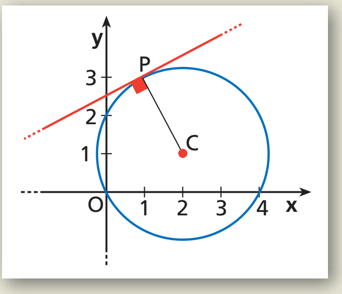
IN PRATICA
▶ Videolezione 15

146 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della retta tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ nel suo punto $P(1; 3)$.

- Applichiamo il III metodo esaminato nella teoria, sfruttando il fatto che il raggio è sempre perpendicolare alla retta tangente nel punto di tangenza.

  Le coordinate del centro sono $C(2; 1)$ e il coefficiente angolare del raggio PC è $m = \frac{3 - 1}{1 - 2} = -2$.



Per la condizione di perpendicolarità la retta tangente ha coefficiente angolare $\frac{1}{2}$:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

- Utilizziamo il IV metodo (formula di sdoppiamento). La formula della tangente è:

$$xx_0 + yy_0 + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0,$$

dove x_0 e y_0 sono le coordinate del punto di tangenza e a, b, c sono i coefficienti dell'equazione della circonferenza. Otteniamo:

$$x + 3y - 4\frac{x+1}{2} - 2\frac{y+3}{2} = 0 \rightarrow x + 3y - 2x - 2 - y - 3 = 0 \rightarrow 2y - x - 5 = 0 \rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}.$$

147 Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$:
1) verifica che è tangente all'asse x;
2) determina l'equazione della tangente alla circonferenza nel suo punto $A(2; -6)$. $[y = -6]$

148 Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$, verifica che il punto $P(2; -3)$ appartiene alla circonferenza e scrivi l'equazione della retta tangente alla circonferenza in P. $[y = -3]$

149 Scrivi le equazioni delle tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$, nei suoi punti di intersezione con l'asse y. $[4x - 3y = 0; 4x + 3y - 18 = 0]$

150 Scrivi e rappresenta nel piano cartesiano le equazioni della circonferenza di centro $C(3; -1)$, passante per $P(4; 3)$, e della sua tangente in P. $\left[x^2 + y^2 - 6x + 2y - 7 = 0,\ y = -\frac{1}{4}x + 4\right]$

ESERCIZI VARI Le rette tangenti

151 Trova le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ condotte dal punto $P(2; 3)$. $[y = 3; 3y - 4x - 1 = 0]$

152 Trova le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 5x - \frac{75}{4} = 0$ condotte dal punto $P\left(\frac{5}{2}; -4\right)$. $\left[x = \frac{5}{2}; y = \frac{9}{40}x - \frac{73}{16}\right]$

153 Determina per quali valori di k la retta $y = k(x - 4)$ è tangente alla circonferenza rappresentata dall'equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$. $\left[k = \pm\frac{2}{5}\sqrt{5}\right]$

154 Scrivi i valori di k per cui la retta $y + 2x + k = 0$ è tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$. $[k = -1 \pm \sqrt{5}]$

155 Trova le tangenti comuni alle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 6x = 0$ e $x^2 + y^2 + 2x = 0$. (Suggerimento. Le distanze delle rette tangenti dai due centri devono essere uguali ai rispettivi raggi.) $\left[y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}; y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}; x = 0\right]$

156 Trova le tangenti comuni alle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. $[y = 0; 2\sqrt{2}x + y - 6\sqrt{2} + 4 = 0; 2\sqrt{2}x - y - 6\sqrt{2} - 4 = 0]$

157 Trova tra le rette del fascio di centro $P(0; 2)$ quelle secanti, tangenti, esterne alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.
$\left[\text{tangenti per } m = 0 \text{ e } m = -\frac{4}{3}\text{; secanti per } -\frac{4}{3} < m < 0\text{; esterne per } m < -\frac{4}{3} \vee m > 0\text{, oltre alla retta } x = 0\right]$

158 Scrivi l'equazione della tangente nell'origine alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.
$\left[y = \frac{2}{3}x\right]$

159 Trova i punti di intersezione tra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ e la retta di equazione $y = x - 2$ e poi determina le equazioni delle rette tangenti in tali punti.
$[(4; 2), (1; -1); 2x + y - 10 = 0; x + 2y + 1 = 0]$

160 Disegna la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$, trova le equazioni delle tangenti nei suoi punti di intersezione A e B con l'asse y e calcola l'area del quadrilatero $CABT$, essendo C il centro della circonferenza e T il punto di intersezione delle due tangenti.
$\left[y = -\frac{1}{3}x + 5; y = \frac{1}{3}x - 1; 30\right]$

161 Determina le coordinate del centro e il raggio della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$. Verifica poi che le tangenti nei suoi punti di ordinata 4 si intersecano nel punto $A(2; 13)$. $[(2; 3), \sqrt{10}]$

4. DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA

▶ Teoria a pag. 251

IN PRATICA ▶ Videolezione 16

L'equazione della circonferenza, noti il centro e un punto

162 Determina l'equazione della circonferenza di centro $C\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ e passante per $P(6; -1)$.
$[x^2 + y^2 + 3x - y - 56 = 0]$

163 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per l'origine e avente il centro nel punto di ordinata 2 della retta di equazione $y = 3x - 4$.
$[x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0]$

164 Scrivi l'equazione della circonferenza concentrica a quella di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ e passante per $A(1; -8)$.
$[x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0]$

165 Determina l'equazione della circonferenza avente come centro il punto di intersezione delle rette r e t, rispettivamente di equazione $x - 2y + 2 = 0$ e $2x + 2y - 5 = 0$, e avente in comune con r un punto dell'asse x.
$[x^2 + y^2 - 2x - 3y - 8 = 0]$

166 Due circonferenze sono concentriche. Una ha equazione $4x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 23 = 0$, l'altra passa per $P\left(\frac{7}{4}; -2\right)$. Determina l'equazione della seconda circonferenza. $[16x^2 + 16y^2 - 24x + 32y - 7 = 0]$

L'equazione della circonferenza, noto il diametro

167 Determina l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi $(-3; 1)$ e $(2; 5)$.
$[x^2 + y^2 + x - 6y - 1 = 0]$

168 Scrivi l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento AB, dove A e B sono i punti di intersezione della retta di equazione $3x + 2y + 1 = 0$ con le rette di equazioni $x + y - 1 = 0$ e $2x + y = 0$.
$[x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0]$

169 Determina l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento ottenuto congiungendo i punti medi dei lati AB e AC del triangolo ABC, essendo $A(3; 5)$, $B(-5; -1)$, $C(4; 3)$.
$[2x^2 + 2y^2 - 5x - 12y + 9 = 0]$

170 Scrivi l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento individuato dagli assi coordinati sulla retta di equazione $5x - y + 6 = 0$. Verifica se la circonferenza passa per l'origine. Questo risultato era prevedibile?
$[5x^2 + 5y^2 + 6x - 30y = 0]$

171 I punti $A(2; 1)$, $B(5; 2)$, $C(3; 0)$ sono tre vertici consecutivi di un parallelogramma $ABCD$. Dopo aver determinato le coordinate del quarto vertice D del parallelogramma, scrivi l'equazione della circonferenza che ha diametro CD.
$[D(0; -1); x^2 + y^2 - 3x + y = 0]$

L'equazione della circonferenza, noti tre punti

L'appartenenza di un punto

172 Determina il valore da attribuire al parametro c affinché la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4cx - y + c - 1 = 0$ passi per il punto $P(-1; 2)$.
$\left[\frac{2}{3}\right]$

173 Trova il valore da attribuire a k affinché il punto $P(k - 1; 2k)$ appartenga alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 10 = 0$.
$\left[\pm\sqrt{\frac{7}{5}}\right]$

174 Dopo aver determinato il valore da attribuire a h affinché il punto $P(6; 8)$ appartenga alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - (h + 3)x + (-3h + 1)y + h - 3 = 0$, rappresenta la curva e trova l'equazione della tangente in P.
$[3; 4y + 3x - 50 = 0]$

L'appartenenza di tre punti

175 Trova l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo rettangolo di vertici $(0; 0)$, $(3; \sqrt{3})$, $(4; 0)$.
$[x^2 + y^2 - 4x = 0]$

176 Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $(3; 4)$, $(0; -5)$ e $(-2; -1)$.
$[x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0]$

177 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $(9; -1)$, $(1; 5)$ e $(10; 2)$.
$[x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0]$

178 Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici $(-3; 4)$, $(1; 1)$, $(-3; 1)$.
$[x^2 + y^2 + 2x - 5y + 1 = 0]$

L'equazione della circonferenza, noti due punti e con il centro su una retta

179 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(1; 2)$ e $B(3; 4)$ e avente centro sulla retta di equazione $x - 3y - 1 = 0$.

Poiché AB è una corda della circonferenza, allora l'asse di AB passa per il centro.

Determiniamo l'equazione dell'asse di AB sapendo che è la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio. Le coordinate del punto medio M di AB sono $(2; 3)$.

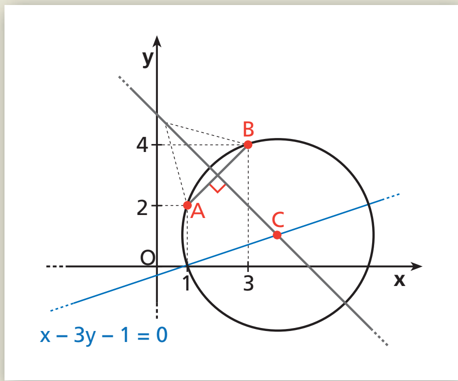
Il coefficiente angolare di AB è $m = 1$, quindi il coefficiente angolare dell'asse è $m_1 = -1$.
L'equazione dell'asse è $y - y_M = m_1(x - x_M)$, ossia:

$$y - 3 = -1(x-2) \rightarrow y + x - 5 = 0.$$

Determiniamo le coordinate del centro intersecando l'asse di AB con la retta data:

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y + 5 \\ -y + 5 - 3y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -y + 5 \\ -4y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$



Il centro è $C(4; 1)$.

Calcoliamo la misura del raggio:

$$r = \overline{CA} = \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

Quindi l'equazione della circonferenza è:

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{10})^2 \rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 10 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$

180 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-1; 2)$ e $B(2; 5)$ e avente il centro sulla retta di equazione $y = 2x - 2$. $[x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0]$

181 Trova l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(-1; 3)$ e $B(3; 1)$ e avente il centro sulla retta di equazione $3x - 2y + 3 = 0$. $[x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0]$

182 Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti di ascissa 2 e 5 appartenenti alla retta di equazione $x + 3y - 11 = 0$ e avente il centro sulla retta di equazione $2x - 5y - 1 = 0$. $[x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0]$

183 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti di intersezione della retta di equazione $y = -3x - 3$ con gli assi cartesiani e avente il centro sulla bisettrice del II e IV quadrante. $[x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0]$

184 Dopo aver determinato i punti A e B in cui la retta di equazione $x - 3y - 10 = 0$ incontra le rette di equazioni $y = -2x - 1$ e $y = -2x + 6$, scrivi l'equazione della circonferenza passante per A e B e avente centro di ordinata uguale a -1. $[x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0]$

L'equazione della circonferenza e la condizione di tangenza

185 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della circonferenza di centro $C(-2; -3)$ e tangente alla retta di equazione $y = 3x - 1$.

Essendo la retta tangente, allora il raggio della circonferenza coincide con la distanza di C dalla retta.

Scriviamo l'equazione della retta in forma implicita:

$$-3x + y + 1 = 0.$$

Calcoliamo la distanza di C dalla retta:

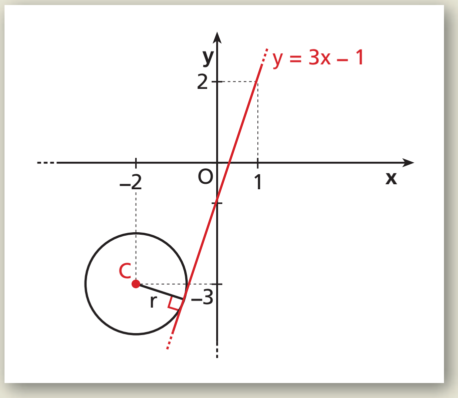
$$r = \frac{|-3\cdot(-2)+1\cdot(-3)+1|}{\sqrt{(-3)^2+1^2}} = \frac{|6-3+1|}{\sqrt{9+1}} = \frac{4}{\sqrt{10}}.$$

Quindi l'equazione della circonferenza è:

$$(x+2)^2+(y+3)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$x^2+4x+4+y^2+6y+9 = \frac{16}{10}$$

$$x^2+y^2+4x+6y+\frac{57}{5} = 0.$$



186 Determina l'equazione della circonferenza con centro $C(-2; -5)$ e tangente all'asse delle x. $[x^2+y^2+4x+10y+4=0]$

187 Determina la circonferenza con centro $C(2; -2)$ e tangente alla retta di equazione $y = 2x + 3$. $\left[x^2+y^2-4x+4y-\frac{41}{5}=0\right]$

188 Trova l'equazione della circonferenza di centro $C(3; 2)$ e tangente alla retta passante per i punti $A(-1; 0)$ e $B(-5; 3)$. $[x^2+y^2-6x-4y-3=0]$

189 Sono date le rette r: $3x+2y+4=0$, s: $x+3y-1=0$, t: $x-y-3=0$.
Determina la circonferenza con centro nel punto di intersezione di r con s e tangente alla retta t. $[x^2+y^2+4x-2y-13=0]$

190 Determina l'equazione della circonferenza situata nel quarto quadrante, tangente agli assi cartesiani e avente raggio 3. $[x^2+y^2-6x+6y+9=0]$

191 Scrivi l'equazione della circonferenza tangente agli assi cartesiani e avente centro $(-5; -5)$. $[x^2+y^2+10x+10y+25=0]$

192 Trova l'equazione della circonferenza situata nel secondo quadrante, tangente agli assi cartesiani e avente il centro sulla retta di equazione $3x-7y+20=0$. $[x^2+y^2+4x-4y+4=0]$

193 Determina le equazioni delle circonferenze tangenti agli assi cartesiani, con il centro sulla retta di equazione $x-5y+12=0$. $[x^2+y^2-6x-6y+9=0;\ x^2+y^2+4x-4y+4=0]$

194 Scrivi l'equazione delle circonferenze tangenti agli assi cartesiani e passanti per il punto $\left(3; \frac{2}{3}\right)$. $[9x^2+9y^2-30x-30y+25=0;\ 9x^2+9y^2-102x-102y+289=0]$

195 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione della circonferenza passante per i punti $P(1; 2)$ e $Q(3; 4)$ e tangente alla retta di equazione $y = -3x + 3$.

Imponiamo alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ il passaggio per i punti P e Q:

$$\begin{cases} a + 2b + c = -5 & \text{passaggio per } P \\ 3a + 4b + c = -25 & \text{passaggio per } Q \end{cases}$$

Ricaviamo due incognite in funzione della terza. Usiamo il metodo di riduzione, sottraendo membro a membro:

$$2a + 2b = -20 \rightarrow a + b = -10.$$

Sostituiamo $b = -a - 10$ nella prima equazione e ricaviamo c in funzione di a:

$$c = a + 15.$$

L'equazione della circonferenza diventa:

$$x^2 + y^2 + ax - (a + 10)y + a + 15 = 0.$$

Ora imponiamo che la retta $y = -3x + 3$ sia tangente alla circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax - (a + 10)y + a + 15 = 0 \\ y = -3x + 3 \end{cases}$$

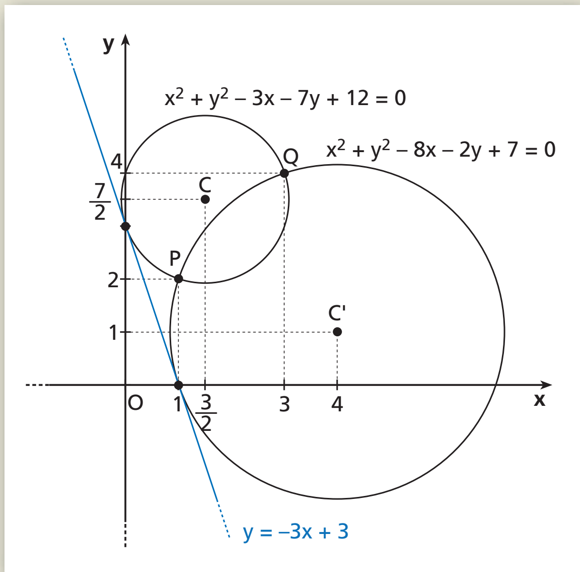
Giungiamo all'equazione risolvente,

$$5x^2 + 2(a + 3)x - (a + 3) = 0,$$

e imponiamo la condizione di tangenza, cioè $\Delta = 0$:

$$(a + 3)^2 + 5(a + 3) = 0,$$

da cui $a = -3$, $a = -8$.



Riprendiamo il sistema

$$\begin{cases} b = -a - 10 \\ c = a + 15 \end{cases}$$

e calcoliamo b e c in corrispondenza dei valori $a = -3$, $a = -8$.

Le circonferenze che soddisfano le condizioni richieste hanno le seguenti equazioni:

$$x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$

In ognuno dei seguenti esercizi sono indicate le coordinate di due punti, P e Q, e l'equazione di una retta r. Determina l'equazione della circonferenza passante per i due punti e tangente alla retta r.

196 $P(5; 1)$; $Q(0; 2)$; $r: 2x - 3y + 6 = 0$. $[x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0]$

197 $P(-5; 1)$; $Q(-1; 3)$; $r: x + 2y + 4 = 0$. $[x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 = 0;\ 4x^2 + 4y^2 + 39x - 46y + 137 = 0]$

198 $P(5; -1)$; $Q(3; 1)$; $r: x - y - 2 = 0$. $[x^2 + y^2 - 8x + 14 = 0]$

199 $P(1; -4)$; $Q(3; 0)$; $r: 2x + y + 3 = 0$. $[x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0;\ 4x^2 + 4y^2 - 46x + 31y + 102 = 0]$

ESERCIZI VARI Determinare l'equazione della circonferenza

200 TEST In quale dei seguenti casi è univocamente determinata la circonferenza che soddisfa le condizioni date? La circonferenza:

A passa per i punti $A(3; 2)$ e $B(1; 3)$.

B ha centro $C(1; 4)$.

C passa per $A(1; 3)$ e ha raggio 8.

D passa per $P(0; 1)$ ed è tangente alla retta di equazione $y = x$.

E ha centro $O(0; 0)$ ed è tangente alla retta di equazione $x - y - 9 = 0$.

201 TEST L'equazione della circonferenza avente centro nel punto $C(-2; 3)$ e tangente alla retta $x - 1 = 0$ è:

A $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 3 = 0$.

B $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 9 = 0$.

C $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 - 9 = 0$.

D $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 9 = 0$.

E $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + 3 = 0$.

202 TEST L'equazione $2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 7 = 0$:

A rappresenta una circonferenza con centro $C(3; -2)$.

B rappresenta una circonferenza con raggio $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

C non rappresenta una circonferenza.

D rappresenta una circonferenza ridotta al solo centro di coordinate $\left(\frac{3}{2}; -1\right)$.

E rappresenta una circonferenza con centro $C(3; -2)$ e raggio $\sqrt{6}$.

203 TEST Consider the circles with radii $4\sqrt{5}$ and which are tangent to the line $x - 2y = 20$ at the point $(6; -7)$. The sum of the x-coordinates of the centers of the circles is

A 12.

B -14.

C 3.

D -5.

E 2.

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2004)

204 Scrivi l'equazione della circonferenza avente il centro di ordinata uguale a 3 e passante per i punti $A(8; 9)$ e $B(12; 1)$. $[x^2 + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0]$

205 Scrivi l'equazione della retta parallela alla retta $x - 3y + 1 = 0$, condotta per il centro della circonferenza passante per i punti $(0; 2)$, $(1; 1)$, $(1; 3)$, e trova l'area del triangolo che questa retta forma con gli assi cartesiani. $\left[x - 3y + 5 = 0; \text{area} = \frac{25}{6}\right]$

206 Trova la misura della corda staccata sulla retta di equazione $x + y - 3 = 0$ dalla circonferenza tangente all'asse y che ha il centro di ordinata 3 appartenente alla retta di equazione $y = 2x - 5$. $[4\sqrt{2}]$

207 Determina le equazioni delle circonferenze che hanno il centro di ascissa -3, il raggio uguale a $3\sqrt{\frac{5}{2}}$ e sono tangenti alla retta di equazione $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

$[2x^2 + 2y^2 + 12x - 32y + 101 = 0; 2x^2 + 2y^2 + 12x + 8y - 19 = 0]$

208 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha il centro sulla retta $2x - y = 5$ e passa per i punti A e B in cui la retta $x - y + 2 = 0$ interseca gli assi cartesiani. $[3x^2 + 3y^2 - 10x + 10y - 32 = 0]$

209 Scrivi l'equazione della circonferenza di centro $O(0; 0)$ e raggio $r = \sqrt{10}$, poi determina le equazioni delle rette a essa tangenti, parallele alla retta $x + 3y + 5 = 0$. $[x^2 + y^2 = 10; x + 3y + 10 = 0; x + 3y - 10 = 0]$

210 Una circonferenza di raggio $\sqrt{5}$, avente il centro sulla retta di equazione $y = 2x - 3$ e passante per $A(3; -1)$, interseca la retta $x + 2y - 4 = 0$. Determina i punti di intersezione. $[(0; 2), (4; 0)]$

211 I punti $A(1; -3)$, $B(3; -5)$ e $C(4; 4)$ sono i vertici di un triangolo. Determina l'equazione della circonferenza di centro C e avente il raggio coincidente con l'altezza relativa al lato AB del triangolo.
$[x^2 + y^2 - 8x - 8y - 18 = 0]$

212 Dopo aver determinato l'equazione della circonferenza di centro $C(-2; -4)$ e passante per il punto $A(1; 2)$, determina per quale valore del parametro k il punto $B(2k + 1; k + 5)$ le appartiene.
$[x^2 + y^2 + 4x + 8y - 25 = 0; k = -3]$

213 Una circonferenza, il cui centro appartiene alla retta di equazione $y = \frac{7}{6}$, interseca l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2. Trova la misura della corda che la circonferenza individua sulla retta di equazione $y = 3x$.
$\left[\frac{6}{5}\sqrt{10}\right]$

214 Determina l'equazione della circonferenza di centro $C(6; -1)$ e passante per $P(9; 3)$ e scrivi l'equazione della retta tangente a essa nel suo punto di ascissa 3 appartenente al I quadrante.
$[x^2 + y^2 - 12x + 2y + 12 = 0; 3x - 4y + 3 = 0]$

215 Dopo aver verificato che il triangolo di vertici $A(14; 2)$, $B(6; -2)$ e $C(10; 10)$ è un triangolo rettangolo, determina l'equazione della circonferenza circoscritta ad ABC. $[x^2 + y^2 - 16x - 8y + 40 = 0]$

216 Una circonferenza taglia l'asse x nei punti di ascissa -1 e 4 e passa per $A(3; 2)$. Determina l'equazione della circonferenza e l'equazione della retta tangente nel punto A. $[x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0; 3x + 4y - 17 = 0]$

217 Determina l'equazione della circonferenza passante per l'origine e per i punti di intersezione della retta di equazione $y = -2x + 2$ con l'asse delle ordinate e con la bisettrice del II e IV quadrante.
$[x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0]$

218 Determina le equazioni delle circonferenze passanti per i punti $A(1; 3)$ e $B(5; -3)$ e aventi raggio $r = \sqrt{26}$.
$[x^2 + y^2 - 12x - 4y + 14 = 0; x^2 + y^2 + 4y - 22 = 0]$

219 Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(0; 10)$ e $B(4; 8)$ e tangente all'asse delle ascisse (il problema ha due soluzioni). $[x^2 + (y - 5)^2 = 25; (x - 40)^2 + (y - 85)^2 = 85^2]$

220 I lati del triangolo ABC si trovano sulle rette di equazione $x = 0$, $\sqrt{3}x - 3y = 0$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6$. Verifica che il triangolo è equilatero e trova le equazioni delle circonferenze inscritta e circoscritta.
$[x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 6y + 9 = 0, x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x - 6y = 0]$

221 Fra le circonferenze di centro $C(-2; 3)$ determina quella:
a) passante per il punto $P(1; 1)$;
b) tangente alla bisettrice del primo e terzo quadrante;
c) avente il raggio lungo 5.
$\left[\text{a) } c = 0; \text{ b) } c = \frac{1}{2}; \text{ c) } c = -12\right]$

222 Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $(-3; 2)$, $(1; -2)$, $(1; 2)$. Trova poi la distanza tra il centro della circonferenza e la retta r passante per il punto $(3; 4)$ e parallela alla retta $y = -x + 1$.
$[x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0; d = 4\sqrt{2}]$

223 Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(4; -2)$ e $B(-2; 1)$ e avente il centro sulla retta $6x - 2y - 7 = 0$. Trova poi l'equazione delle rette tangenti alla circonferenza e parallele ad AB, dopo aver verificato che A e B sono estremi di un diametro. $\left[x^2 + y^2 - 2x + y - 10 = 0; y = -\frac{1}{2}x \pm \frac{15}{4}\right]$

224 Determina le equazioni delle circonferenze di raggio 5, passanti per l'origine degli assi cartesiani e per il punto $P(7; 7)$. Trova le intersezioni A e B, con l'asse x, diverse dall'origine, delle due circonferenze.
Scrivi le equazioni delle tangenti in A e in B alle corrispondenti circonferenze.
$\left[x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0;\ x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0;\ A(6; 0);\ B(8; 0);\ y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2};\ y = \frac{4}{3}x - \frac{32}{3}\right]$

225 Trova per quali valori di k l'equazione
$$x^2 + y^2 - 2(k-3)x + 4ky + 9 = 0$$
rappresenta una circonferenza e poi calcola per quali valori di k la circonferenza:
a) ha centro sulla retta di equazione $y + 4 = 0$;
b) passa per $(2; -1)$;
c) ha raggio uguale a $2\sqrt{2}$;
d) ha centro sulla retta di equazione $y = -x + 1$.
$\left[k \leq 0 \vee k \geq \frac{6}{5};\ \text{a) } k = 2;\ \text{b) } k = \frac{13}{4};\ \text{c) } k = 2 \vee k = -\frac{4}{5};\ \text{d) } k = -4\right]$

226 Scrivi le equazioni delle circonferenze passanti per l'origine degli assi cartesiani, aventi il centro sulla retta di equazione $y = 2x$ e raggio $r = 3\sqrt{5}$. $[x^2 + y^2 - 6x - 12y = 0;\ x^2 + y^2 + 6x + 12y = 0]$

227 Determina le equazioni delle circonferenze che hanno centro sulla retta $y = 2$, passano per $A(5; -2)$ e staccano sull'asse delle x una corda lunga 8. $[x^2 + y^2 - 6x - 4y - 7 = 0;\ x^2 + y^2 - 14x - 4y + 33 = 0]$

228 Scrivi le equazioni delle circonferenze che staccano sull'asse delle y una corda di lunghezza uguale a 6 e hanno per tangente nel suo punto A di ordinata -4 la retta di equazione $x - 3y - 12 = 0$.
$[x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0;\ x^2 + y^2 - 2x + 14y + 40 = 0]$

229 Scrivi l'equazione della circonferenza avente il centro sulla retta di equazione $x - 3y + 10 = 0$ e tangente in O alla retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x$. $[x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0]$

230 Scrivi le equazioni delle rette secanti la circonferenza di centro $C(2; 1)$ e raggio $r = 1$, sapendo che tali rette sono parallele all'asse y e individuano una corda lunga $\sqrt{3}$. $\left[x = \frac{3}{2};\ x = \frac{5}{2}\right]$

5. LA POSIZIONE DI DUE CIRCONFERENZE

Teoria a pag. 252

I punti di intersezione di due circonferenze

231 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo gli eventuali punti di intersezione delle due circonferenze di equazioni:
$$x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$

Troviamo l'equazione dell'asse radicale sottraendo membro a membro le due equazioni:
$$\ominus \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 8x + 4y - 16 = 0 \qquad}$$

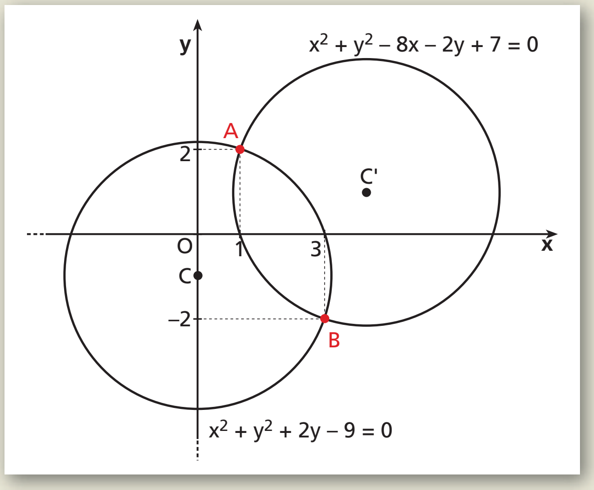
L'asse radicale ha equazione $y = -2x + 4$.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

Le due circonferenze si intersecano nei punti:

$A(1; 2)$ e $B(3; -2)$.



Determina gli eventuali punti di intersezione delle due circonferenze assegnate.

232 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 12 = 0,$ $x^2 + y^2 - 8x + 14y - 20 = 0.$ $[A(2; 2); B(-3; -1)]$

233 $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0,$ $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0.$ [nessuna intersezione]

234 $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 3 = 0,$ $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 3 = 0.$ $\left[A(-1; 0); B\left(-\frac{21}{25}; \frac{3}{25}\right)\right]$

235 $x^2 + y^2 - 2x = 0,$ $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0.$ $[A(2; 0)]$

236 $4x^2 + 4y^2 + 16x - 9y - 43 = 0,$ $3x^2 + 3y^2 + 14x - 79 = 0.$ [nessuna intersezione]

237 Determina l'equazione della circonferenza avente come diametro la corda comune alle circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 6 = 0$ e $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 10 = 0$. $[x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0]$

238 Calcola l'area del triangolo individuato dall'asse delle y, dalla retta dei centri delle circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 + 6x - 1 = 0$ e $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 5 = 0$ e dal loro asse radicale. [15]

239 Determina l'area del quadrilatero i cui vertici sono i centri delle circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 8 = 0$ e $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 16 = 0$ e i loro punti di intersezione. $[6\sqrt{13}]$

240 Verifica che le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$ e $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 35 = 0$ sono tangenti internamente e trova il punto di tangenza. $[(4; -1)]$

241 Verifica che le due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 40 = 0$ e $x^2 + y^2 - 9x + - 18y + 100 = 0$ sono tangenti esternamente e determina il punto di tangenza. $[(4; 8)]$

242 Determina i punti A e B di intersezione delle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 = 25$ e $x^2 + y^2 - 20x + 10y + 25 = 0$ e indica con C il punto di coordinate $(-2; 2)$. Calcola l'area del triangolo ABC. [area = 22]

243 What is the radius of the smallest circle that contains both of the circles $x^2 + y^2 = 1$ and $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$?

(USA *Lehigh University: High School Math Contest*, 2005)

$\left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right]$

244 **VERO O FALSO?**

a) Le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 4y = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ sono tangenti internamente. V F

b) Le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e $x^2 + y^2 + 6x + 12y = 0$ sono tangenti esternamente. V F

c) Le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ non hanno punti in comune. V F

d) L'asse radicale delle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$ e $2x^2 + 2y^2 + 4x - 1 = 0$ è la retta $2y - 8x + 1 = 0$. V F

6. I FASCI DI CIRCONFERENZE

▶ Teoria a pag. 254

IN PRATICA ▶ Videolezione 17

Come generare un fascio di circonferenze

245 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione del fascio di circonferenze definito dalle circonferenze di equazioni

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 4x = 0;$$

scriviamo l'equazione dell'asse radicale del fascio e della retta dei centri.

Combiniamo linearmente le equazioni delle due circonferenze mediante un parametro reale k:

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 + k(x^2 + y^2 - 4x) = 0.$$

Quella ottenuta è l'equazione del fascio generato dalle due circonferenze, ma poiché abbiamo utilizzato un solo parametro, in questo fascio non è rappresentata la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Riscriviamo l'equazione in forma canonica:

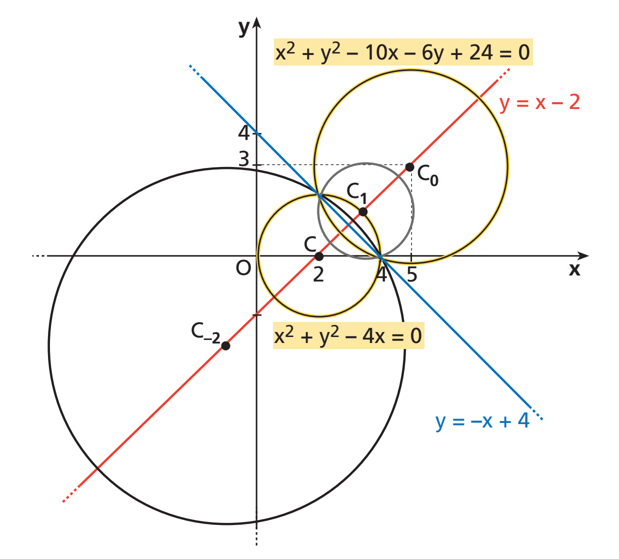
$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 + kx^2 + ky^2 - 4kx = 0 \rightarrow (1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 - (4k + 10)x - 6y + 24 = 0.$$

L'equazione dell'asse radicale si ottiene ponendo $k = -1$:

$$-6x - 6y + 24 = 0 \rightarrow y = -x + 4.$$

La retta dei centri è perpendicolare all'asse radicale, quindi il suo coefficiente angolare è $m = 1$. Il centro della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x = 0$ è $C(2; 0)$. La retta dei centri ha equazione:

$$y = 1 \cdot (x - 2) \rightarrow y = x - 2.$$



Disegniamo alcune circonferenze del fascio, attribuendo alcuni valori a k:

$k = -2 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 6y - 24 = 0,$

$C_{-2}(-1; -3), \quad r_{-2} = \sqrt{34};$

$k = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0,$

$C_0(5; 3), \quad r_0 = \sqrt{10};$

$k = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - 7x - 3y + 12 = 0, \quad C_1\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right), \quad r_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}.$

Per ciascuna delle seguenti coppie di circonferenze scrivi l'equazione del fascio da esse generato. Determina, se esiste, l'asse radicale e rappresenta qualche circonferenza del fascio.

246 $x^2 + y^2 - x - y = 0,$ $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0.$ $[-5x - 3y = 0]$

247 $x^2 + y^2 - 2x = 0,$ $x^2 + y^2 - 42x + y - 8 = 0.$ $[y = 40x + 8]$

248 $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0,$ $x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0.$ $[x = -1]$

249 $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 1 = 0,$ $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 6 = 0.$ [non esiste]

250 Date le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ e $x^2 + y^2 + 2y = 0$, scrivi l'equazione del fascio da esse determinato, quindi trova l'asse radicale e la retta dei centri.
$[(1+k)x^2 + (1+k)y^2 - 2x + (2k-2)y + 1 = 0;\ 2x + 4y - 1 = 0;\ y = 2x - 1]$

251 Nel fascio individuato dalle circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ e $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$, determina:
a) l'equazione dell'asse radicale;
b) l'equazione della retta dei centri;
c) l'equazione della circonferenza passante per il punto $P(-1; 0)$.
[a) $6x - 2y - 3 = 0$; b) $x + 3y + 1 = 0$; c) $9x^2 + 9y^2 - 6x + 8y - 15 = 0$]

252 Due circonferenze con i centri $C_1(2; 3)$ e $C_2\left(\frac{7}{2}; 6\right)$ sono tangenti esternamente. Determina le loro equazioni sapendo che γ_1 passa per il punto $(0; 2)$. Scrivi poi l'equazione del fascio individuato da γ_1 e γ_2 e l'equazione della retta tangente comune.
$[\gamma_1: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0;\ \gamma_2: x^2 + y^2 - 7x - 12y + 47 = 0;\ x + 2y - 13 = 0]$

253 Scrivi l'equazione del fascio individuato dalle due circonferenze γ_1 e γ_2, aventi lo stesso raggio lungo $\sqrt{10}$, sapendo che i loro centri si trovano sulla retta di equazione $y = 2$ e che il centro di γ_1 ha ascissa -3, mentre quello di γ_2 appartiene alla bisettrice del I e III quadrante. Rappresenta γ_1 e γ_2 e determina:
a) l'equazione dell'asse radicale;
b) la circonferenza passante per $(0; 4)$;
c) le circonferenze tangenti all'asse x.
$\left[\text{a) } x = -\frac{1}{2};\ \text{b) } x^2 + y^2 - 4y = 0;\ \text{c) } x^2 + y^2 - 4y = 0 \text{ e } x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0\right]$

254 Dopo aver rappresentato le circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 18 = 0$ e $x^2 + y^2 - 9 = 0$, scrivi l'equazione del fascio da esse individuato. Determina e rappresenta:
a) l'equazione dell'asse radicale;
b) l'equazione della retta dei centri;
c) la circonferenza passante per l'origine. [a) $4x - 2y - 9 = 0$; b) $x + 2y = 0$; c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$]

La determinazione di particolari fasci di circonferenze

Circonferenze secanti

255 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione del fascio di circonferenze passanti per i punti $A(-1; 2)$ e $B(3; 0)$.

Per determinare l'equazione del fascio, occorre combinare linearmente l'equazione di due circonferenze passanti per A e B.

Come prima circonferenza prendiamo quella che ha AB come diametro.

Il centro è il punto medio $M(1;\,1)$ di AB e il raggio è:

$$r = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(3+1)^2+(-2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}.$$

L'equazione della circonferenza è:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{5})^2 \;\rightarrow\; x^2-2x+1+y^2-2y+1-5=0 \;\rightarrow\; x^2+y^2-2x-2y-3=0.$$

Come seconda circonferenza possiamo prendere la retta per A e B, immaginandola come una circonferenza di raggio infinito, cioè la circonferenza degenere che è l'asse radicale.
Determiniamo l'equazione della retta AB utilizzando la formula della retta per due punti:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A} \;\rightarrow\; \frac{y-2}{-2} = \frac{x+1}{4} \;\rightarrow\; 2y=-x+3 \;\rightarrow\; x+2y-3=0.$$

Combiniamo linearmente le equazioni ottenute con un parametro reale k:

$$x^2+y^2-2x-2y-3+k(x+2y-3)=0.$$

L'equazione del fascio è $x^2+y^2+(k-2)x+(2k-2)y-3k-3=0$.

Determina l'equazione del fascio di circonferenze passanti per le seguenti coppie di punti.

256 $A(-2;\,1)$, $B(2;\,1)$. $[x^2+y^2+(k-2)y-k-3=0]$

257 $A(2;\,3)$, $B(2;\,7)$. $[x^2+y^2+(k-4)x-10y-2k+25=0]$

258 $A(0;\,0)$, $B(4;\,4)$. $[x^2+y^2+(k-4)x-(k+4)y=0]$

259 $A(1;\,0)$, $B(3;\,-4)$. $[x^2+y^2+(2k-4)x+(k+4)y-2k+3=0]$

260 Nel fascio di circonferenze passanti per i punti $A(-2;\,-2)$ e $B(2;\,2)$, determina la circonferenza:
a) passante per $P(1;\,2)$;
b) di raggio $\sqrt{10}$.
[a) $x^2+y^2-3x+3y-8=0$; b) $x^2+y^2+2x-2y-8=0$ e $x^2+y^2-2x+2y-8=0$]

261 Fra le circonferenze passanti per i punti $A(-1;\,-2)$ e $B(-1;\,4)$, determina quella:
a) passante per l'origine;
b) passante per $P(-1;\,6)$;
c) tangente alla retta di equazione $x=2$.
[a) $x^2+y^2+9x-2y=0$; b) non esiste; c) $x^2+y^2+2x-2y-7=0$]

262 Nel fascio di circonferenze passanti per i punti $A(-2;\,2)$ e $B(4;\,2)$, determina la circonferenza:
a) passante per il punto $P(-4;\,0)$;
b) di raggio $\sqrt{10}$;
c) tangente all'asse x.
[a) $x^2+y^2-2x+6y-24=0$; b) $x^2+y^2-2x-2y-8=0$ e $x^2+y^2-2x-6y=0$; c) $x^2+y^2-2x-\frac{13}{2}y+1=0$]

263 Fra le circonferenze del fascio avente come punti base $A(1;\,2)$ e $B(3;\,6)$, determina quella:
a) che ha centro in $C(0;\,5)$;
b) tangente alla retta di equazione $y=-3x+5$;
c) di raggio $5\sqrt{2}$.
[a) $x^2+y^2-10y+15=0$; b) $x^2+y^2-8x-6y+15=0$;
c) $x^2+y^2-16x-2y+15=0$ e $x^2+y^2+8x-14y+15=0$]

Circonferenze tangenti

264 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo l'equazione del fascio di circonferenze tangenti nel punto *T* di ascissa 1 alla retta *t* di equazione $3x - y - 2 = 0$.

Per determinare l'equazione del fascio, occorre combinare linearmente le equazioni di due circonferenze tangenti nel punto T alla retta t.

Calcoliamo l'ordinata del punto T:

$$y = 3 \cdot 1 - 2 = 1.$$

Come prima circonferenza prendiamo quella degenere che ha centro $T(1; 1)$ e raggio nullo:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0.$$

Come seconda circonferenza prendiamo la retta t, immaginandola come una circonferenza di raggio infinito.
Combiniamo linearmente le equazioni ottenute con un parametro reale k:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 + k(3x - y - 2) = 0.$$

L'equazione del fascio è:

$$x^2 + y^2 + (3k-2)x - (k+2)y - 2k + 2 = 0.$$

Determina l'equazione del fascio di circonferenze tangenti nel punto assegnato alla retta data.

265 $T(1; 2)$, $y = 2x$. $[x^2 + y^2 + (2k-2)x - (k+4)y + 5 = 0]$

266 $T(0; 3)$, $y = -5x + 3$. $[x^2 + y^2 + 5kx + (k-6)y - 3k + 9 = 0]$

267 $T(1; 4)$, $2x - y + 2 = 0$. $[x^2 + y^2 + (2k-2)x - (k+8)y + 17 + 2k = 0]$

268 $T(-2; 1)$, $2x + 3y + 1 = 0$. $[x^2 + y^2 + (2k+4)x + (3k-2)y + 5 + k = 0]$

269 Fra tutte le circonferenze tangenti nel punto $T(1; 1)$ alla bisettrice del I e III quadrante, determina quelle che sono tangenti alla bisettrice del II e IV quadrante. $[x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0; x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0]$

270 Nel fascio di circonferenze tangenti alla retta di equazione $y = 2$ nel punto di ascissa -1, determina la circonferenza:
a) passante per $P(1; -4)$;
b) con centro di ordinata -5;
c) di raggio uguale a 4.
[a) $3x^2 + 3y^2 + 6x + 8y - 25 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 2x + 10y - 23 = 0$; c) $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 21 = 0$ e $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11 = 0$]

271 Nel fascio di circonferenze tangenti alla retta di equazione $y = x + 3$ nel punto di ascissa nulla, determina la circonferenza:
a) passante per l'origine;
b) con centro di ascissa 4;
c) che stacca sull'asse delle y una corda di lunghezza 3 e non passante per l'origine.
[a) $x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0$; b) $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 15 = 0$; c) $x^2 + y^2 + 3x - 9y + 18 = 0$]

Lo studio di un fascio di circonferenze

272 **ESERCIZIO GUIDA**

Studiamo il fascio di circonferenze di equazione:

$$(1+k)x^2 + (1+k)y^2 + (2-4k)x - 6y - 1 + 2k = 0.$$

Scriviamo l'equazione del fascio di circonferenze in forma canonica, dividendo entrambi i membri per $1+k$ (perché ciò abbia senso, poniamo $1+k \neq 0$, ossia $k \neq -1$):

$$x^2 + y^2 + \frac{2-4k}{k+1}x - \frac{6}{1+k}y + \frac{2k-1}{1+k} = 0.$$

- Le coordinate dei centri, al variare di k, sono:

$$C\left(\frac{2k-1}{1+k}; \frac{3}{1+k}\right).$$

- Determiniamo la misura del raggio, sempre in funzione di k:

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1)^2}{(k+1)^2} + \frac{9}{(1+k)^2} - \frac{2k-1}{1+k}} = \frac{\sqrt{2k^2-5k+11}}{|k+1|}.$$

  Tale espressione è reale quando il radicando è positivo o nullo, cioè quando:

$$2k^2 - 5k + 11 \geq 0.$$

  Dato che $\Delta = 25 - 88 < 0$, il trinomio è positivo $\forall k \in \mathbb{R}$ e non si annulla mai.

- Troviamo le due circonferenze generatrici e gli eventuali punti base del fascio.

  Raccogliamo il parametro k nell'equazione del fascio assegnato:

$$kx^2 + x^2 + ky^2 + y^2 - 4kx + 2x - 6y - 1 + 2k = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 + k(x^2 + y^2 - 4x + 2) = 0.$$

  Le due circonferenze generatrici sono:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0.$$

  Risolviamo il sistema, formato dalle due equazioni, per trovare i punti base:

$$\ominus \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x \qquad + 2 = 0 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad + 6x - 6y - 3 = 0} \rightarrow \quad 2x - 2y - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \\ 2x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2 - 20x + 9 = 0 \\ 2x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \qquad x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{4}$$

  I punti base del fascio sono $A\left(\frac{5+\sqrt{7}}{4}; \frac{3+\sqrt{7}}{4}\right)$ e $B\left(\frac{5-\sqrt{7}}{4}; \frac{3-\sqrt{7}}{4}\right)$.

- $2x - 2y - 1 = 0$ è l'equazione dell'asse radicale e si ottiene anche ponendo $k = -1$ nell'equazione del fascio.

Disegniamo alcune circonferenze del fascio, attribuendo alcuni valori a k:

$k = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$, $C_0(-1; 3)$, $r_0 = \sqrt{11}$ (è la prima circonferenza generatrice);

$k = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - x - 3y + \frac{1}{2} = 0$,

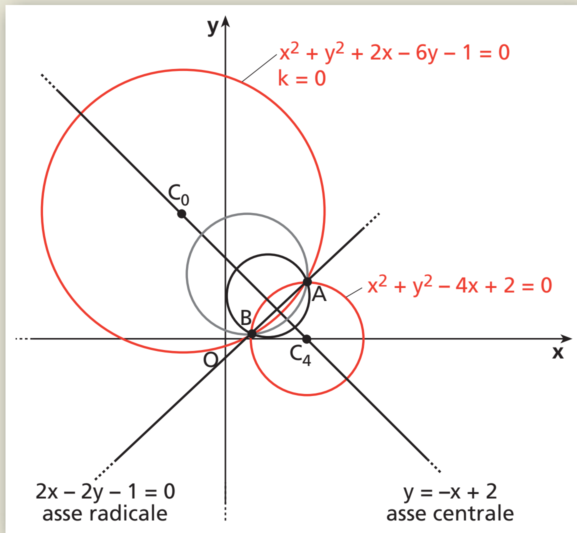
$C_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $r_1 = \sqrt{2}$;

$k = 2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$,

$C_2(1; 1)$, $r_2 = 1$.

La seconda circonferenza generatrice ha centro $C_4(2; 0)$ e raggio $r_4 = \sqrt{2}$.

- L'asse centrale è $y = -x + 2$ (è la retta passante per C_1 e C_2).



Studia i seguenti fasci di circonferenze.

273 $x^2 + y^2 - (4k + 3)y = 0$ [circonferenze tangenti in $O(0; 0)$]

274 $x^2 + y^2 + (2k - 3)x + (2k - 7)y = 0$ [circonferenze secanti in $O(0; 0)$ e $A(-2; 2)$]

275 $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 2k - 1 = 0$ [circonferenze concentriche]

276 $x^2 + y^2 - 4kx + (k - 4)y + 4 - 2k = 0$ [circonferenze tangenti in $T(0; 2)$]

277 $(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 - (k + 9)x - 2(5k - 1)y + 9k + 5 = 0$ [circonferenze secanti in $A(1; 1)$ e $B(4; 3)$]

278 $(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + 2(1 - 4k)x - 2y + 15k = 0$ [circonferenze non secanti]

279 $(1 + k)(x^2 + y^2) - 4ky = 4(y + 3x)$ [circonferenze secanti in $O(0; 0)$ e $A(0; 4)$]

280 $x^2 + y^2 + 2(1 + k)x + (2 - k)y + 2 + k = 0$ [circonferenze tangenti in $T(-1; -1)$]

281 $(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + 2(1 + k)x - 4(1 + k)y - 1 + 2k = 0$ [circonferenze concentriche]

282 $x^2 + y^2 + kx + (k - 2)y - 7 - k = 0$ [circonferenze secanti in $A(2; -1)$ e $B(-2; 3)$]

ESERCIZI VARI I fasci di circonferenze

TEST

283 Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le circonferenze del fascio $(k - 1)x^2 + (k - 1)y^2 - 2kx + ky - 8 = 0$ hanno il centro nel quarto quadrante?

A $k > 0$.
B $k < 0 \vee k > 1$.
C $0 < k < 2$.
D $-1 < k < 0$.
E $-1 < k < 1$.

284 L'asse radicale del fascio di circonferenze generato da $x^2 + y^2 - 2x + y - 3 = 0$ e $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6 = 0$ è la retta di equazione:

A $2x + y - 9 = 0$.
B $y = 6$.
C $2x - 9 = 0$.
D $y = 4x$.
E $y = 6x - 3$.

285 **ASSOCIA** a ogni equazione di fascio di circonferenze la posizione delle circonferenze nel fascio.

1) $kx^2 + ky^2 + x - 2 - 4k = 0$.
2) $(1 + a)x^2 + (1 + a)y^2 - (3 + 3a)x + (1 + a)y - 5a + 1 = 0$.
3) $bx^2 + by^2 + 2bx + y - 3b - 4 = 0$.

a) Circonferenze secanti.
b) Circonferenze concentriche.
c) Circonferenze tangenti.
d) Circonferenze esterne.

286 Studia il fascio di circonferenze individuato dalle due circonferenze di equazioni $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$ e calcola per quale valore del parametro si ha la circonferenza con il centro sulla retta di equazione $y = -8x$. Determina poi il luogo descritto dai centri delle circonferenze del fascio e trova il raggio della circonferenza che ha il centro di ascissa 2.

[circonferenze non secanti; $k = -2$; $y = -5x + 3$; $\sqrt{57}$]

287 Studia il fascio di circonferenze di equazione $kx^2 + ky^2 - (2k + 1)x + (2k + 1)y + k + 1 = 0$ indicando gli eventuali punti base, l'asse radicale e l'asse centrale. Trova poi per quale valore di k si ha la circonferenza:

a) che ha il centro sulla retta di equazione $y = -2x + 3$;
b) tangente alla retta $y - x = 0$;
c) che stacca sull'asse x una corda lunga 4.

$\left[\text{circonferenze secanti in } (0; -1) \text{ e } (1; 0);\ \text{a) } k = \frac{1}{4};\ \text{b) } k = -1;\ \text{c) } k = \pm\frac{1}{4}\right]$

288 Considera il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 4kx - (4 + k)y + 4 + 2k = 0$ e studia le sue caratteristiche. Trova per quale valore di k si ha la circonferenza:

a) che ha il centro di ascissa uguale a 4;
b) che interseca l'asse y nel punto di ordinata -1;
c) che stacca sulla retta di equazione $y = 1$ una corda lunga $8\sqrt{2}$.

$\left[\text{circonferenze tangenti in } T(0; 2);\ \text{a) } k = -2;\ \text{b) } k = -3;\ \text{c) } k = -\frac{11}{4}, k = 3\right]$

289 Studia il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2ky - 2 = 0$ e calcola per quale valore di k la circonferenza del fascio:

a) passa per l'origine $O(0; 0)$;
b) passa per il punto $P(-3; 4)$;
c) ha raggio uguale a 6;
d) ha il centro sulla retta di equazione $x - y = 0$.

$\left[\text{circonferenze secanti; a) } k \text{ non esiste; b) } k = -\frac{35}{8};\ \text{c) } k = \pm\sqrt{30};\ \text{d) } k = -2\right]$

290 Sono dati il punto $C(-1; 1)$ e la retta s di equazione $2x + y - 4 = 0$.

a) Determina i punti di intersezione della circonferenza di centro C e raggio $r = \sqrt{10}$ con la retta s e indicali con A e B.
b) Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze passanti per A e B.
c) Trova nel fascio l'equazione della circonferenza passante per C.
d) Determina l'equazione della circonferenza passante per A e B e avente raggio uguale a $\sqrt{50}$.

[a) $A(0; 4)$, $B(2; 0)$; b) $x^2 + y^2 + (2k + 2)x + (k - 2)y - 4k - 8 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$; d) $x^2 + y^2 + 10x + 2y - 24 = 0$ e $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 24 = 0$]

291 Dopo aver studiato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 6x + (k - 2)y + 6 - 2k = 0$, trova per quali valori di k si ha una circonferenza:

a) di raggio uguale a 2;
b) che racchiude un'area uguale a 7π;
c) con il centro che ha distanza dalla retta di equazione $x + 2y - 1 = 0$ minore di $2\sqrt{5}$.

[circonferenze secanti; a) $k = 0$ e $k = -4$; b) $k = -6$ e $k = 2$; c) $-6 < k < 14$]

292 Considera il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$ e studia le sue caratteristiche. Trova poi per quali valori di k si ha una circonferenza che:
a) ha raggio minimo;
b) passa per il punto $P(-2; 1)$;
c) ha raggio uguale a 5;
d) è tangente alla retta di equazione $2x + y - 1 = 0$.

$\left[\text{circonferenze concentriche; a) } k = 5\text{; b) } k = 3\text{; c) } k = -20\text{; d) } k = \frac{24}{5}\right]$

293 Dato il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - 4kx - 2(k-1)y + 2 = 0$, determina:
a) il centro C delle circonferenze del fascio e il luogo descritto dai centri;
b) per quali valori di k si hanno circonferenze di raggio $r = \sqrt{6}$;
c) per quale valore di k il centro C appartiene alla bisettrice del I e III quadrante.

$\left[\text{a) } C(2k; k-1),\ 2y - x + 2 = 0\text{; b) } k = \frac{7}{5},\ k = -1\text{; c) } k = -1\right]$

294 Studia il fascio di circonferenze $x^2 + y^2 - 2x + 4y + k(x + y - 20) = 0$. Quale circonferenza del fascio ha il centro nell'origine degli assi? Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze simmetrico al fascio dato rispetto all'asse x e trova per quali valori di k si hanno nei due fasci le circonferenze con il centro rispettivamente sull'asse y e sull'asse x.

[circonferenze senza punti comuni; nessuna; $x^2 + y^2 - 2x - 4y + k(x - y - 20) = 0$; $k = 2$, $k = -4$]

295 Studia il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 - (2 + k)x + (k - 2)y + 2 = 0$ indicando le sue caratteristiche. Trova poi la circonferenza del fascio:
a) tangente all'asse x;
b) che racchiude un'area 8π;
c) il cui centro appartiene alla retta $y = 2x - 5$;
d) tangente alla retta $y = x - 4$.

$\left[\text{circonferenze tangenti; a) } k = 2(-1 \pm \sqrt{2})\text{; b) } k = \pm 4\text{; c) } k = \frac{8}{3}\text{; d) } k = 2\right]$

296 Considera il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + (2 - k)x + (k - 8)y - 3 + k = 0$ e studia le sue caratteristiche. Trova per quali valori di k si ha la circonferenza:
a) passante per l'origine;
b) di raggio uguale a $\sqrt{3}$;
c) tangente all'asse y;
d) con il centro che ha distanza dall'origine minore di $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

[circonferenze secanti; a) $k = 3$; b) $k = 6 \pm \sqrt{2}$; c) $k = 10 \pm 2\sqrt{6}$; d) $1 < k < 9$]

297 Fra tutte le circonferenze tangenti alla retta t di equazione $2x - y = 0$ nell'origine O del sistema di riferimento, determina quelle tangenti alla retta s di equazione $2x + y - 4 = 0$.
Rappresenta le due circonferenze trovate, determina l'ulteriore tangente comune e calcola l'area del triangolo che si forma con l'intersezione delle tre tangenti.

$\left[x^2 + y^2 - 2x + y = 0;\ x^2 + y^2 + 8x - 4y = 0;\ 2x - 11y - 20 = 0,\ \frac{20}{3}\right]$

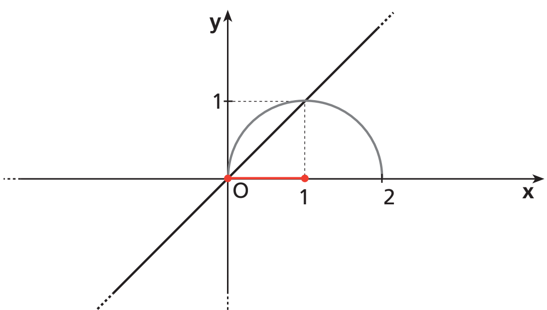
298 Determina l'equazione della circonferenza γ tangente alla retta t passante per $A(0; 3)$ e $B(6; 1)$ e avente centro sull'asse del segmento AB e con ascissa 2. Trova poi il fascio di circonferenze individuato da γ e avente per asse radicale la retta t. Tra le circonferenze del fascio individua quella che stacca sull'asse x una corda lunga 3 e non interseca l'asse y. [$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$; $x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0$]

299 Nel fascio di circonferenze passanti per $A(-2; 1)$ e $B(0; 5)$ determina quelle:
a) aventi raggio minimo;
b) circoscritte al quadrato di lato AB;
c) tangenti all'asse x, indicando il punto di tangenza;
d) aventi centro di ascissa 4.

[a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$; $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 5y = 0$, $T(0; 0)$; $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 25 = 0$, $T(-5; 0)$; d) $x^2 + y^2 - 8x - y - 20 = 0$]

ESERCIZI VARI La circonferenza

300 **TEST** Il grafico illustra le soluzioni di una soltanto delle seguenti disequazioni irrazionali. Quale?



A $\sqrt{2x - x^2} \geq x$.
B $\sqrt{2x - x^2} \geq 2x$.
C $\sqrt{x^2 - 2x} \geq x$.
D $\sqrt{x^2 - 2x} \leq 2x$.
E $\sqrt{x^2 - x} \geq x$.

301 **ASSOCIA** a ciascuna delle seguenti equazioni il luogo geometrico corrispondente.

1) $x^2 + y^2 - 4 = 0$.
2) $x^2 + y^2 + 4 = 0$.
3) $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$.
4) $x^2 + y^2 + 2xy = 0$.
5) $x^2 - 4y^2 = 0$.
6) $x^2 + (|y| - 1)^2 = 0$.

a) Un punto.
b) Due punti.
c) Una retta.
d) Due rette.
e) Una circonferenza.
f) Nessun punto.

302 **TEST** Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy siano γ e γ' le due circonferenze rispettivamente di equazione $x^2 + y^2 = 9$ e $(x + 1)^2 + y^2 = 1$. Quante sono le rette tangenti comuni a γ e γ'?

A Due.
B Infinite.
C Più di due, ma in numero finito.
D Nessuna.
E Una.

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso,* 2007)

303 **TEST** Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, quale delle seguenti è l'equazione di una circonferenza?

A $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$
B $4x^2 - 3x + 4y^2 - 5y - 1 = 0$
C $x^2 + y^2 + 1 = 0$
D $(x - 1)^2 - (y - 2)^2 - 1 = 0$
E $x^4 + y^4 - 1 = 0$

(*CISIA, Facoltà di Ingegneria, Test di ingresso,* 2000)

304 **TEST** In quale dei seguenti casi *non* è possibile determinare l'equazione di una circonferenza che soddisfi le condizioni date? La circonferenza:

A è inscritta nel triangolo di vertici $A(1; 1)$, $B(-1; 3)$ e $O(0; 0)$.
B è tangente alla retta $y = x + 2$, con il centro nell'origine degli assi cartesiani.
C passa per $A(1; 2)$, $B(3; 6)$ ed è tangente alla retta di equazione $y = -3x + 6$.
D è circoscritta al triangolo di vertici $A(1; -3)$, $B(0; 2)$ e $C(1; 1)$.
E passa per $A(1; 2)$ e ha centro nell'origine $O(0; 0)$.

305 **TEST** Sia D il dominio del piano cartesiano determinato dal sistema di disequazioni a fianco. Qual è l'area di D?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 1 \end{cases}$$

A $\sqrt{2}\,\pi$ **B** $\frac{\pi}{2}$ **C** 2 **D** $\sqrt{2}$ **E** $4 - \pi$

(*Olimpiadi di Matematica*, *Giochi di Archimede*, 1996)

306 **TEST** Sia A l'area del sottoinsieme del piano costituito dai punti $(x; y)$ che verificano le due relazioni $x^2 + y^2 \leq 100$, $\pi x + \sqrt{17}\,y \leq 0$. Allora:

A $A < 100$. **B** $100 \leq A < 150$. **C** $150 \leq A < 200$. **D** $200 \leq A < 250$. **E** $A \geq 250$.

(*Olimpiadi di Matematica*, *Gara di 2° livello*, 2000)

307 Ciascuno dei punti $P(4; 1)$, $Q(7; -8)$ e $R(10; 1)$ è il punto medio di un raggio della circonferenza C. Determina la lunghezza del raggio della circonferenza C.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2003)

[10]

308 Una circonferenza di raggio 1 è centrata nell'origine. Due particelle cominciano a muoversi nello stesso istante dal punto $(1; 0)$ e percorrono la circonferenza in direzioni opposte. Una delle particelle si muove in senso antiorario con velocità costante v e l'altra si muove in senso orario con velocità costante $3v$. Dopo aver lasciato il punto $(1; 0)$, le due particelle si incontrano una prima volta nel punto P e continuano a muoversi fino a incontrarsi di nuovo nel punto Q. Determina le coordinate del punto Q.

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge*, 2003)

$[Q(-1; 0)]$

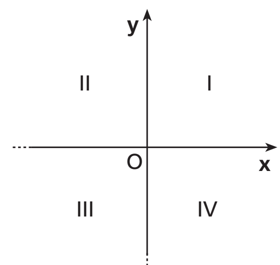
309 **TEST** Determinare l'area della parte di piano definita da:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

A $\frac{2}{3}\pi - 2$ **B** $\pi - \sqrt{3}$ **C** $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ **D** $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ **E** Nessuna delle precedenti.

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello*, 1999)

310 **TEST** Tre circonferenze passano per l'origine. Il centro della prima circonferenza sta nel primo quadrante, il centro della seconda sta nel secondo quadrante, il centro della terza sta nel terzo quadrante. Se P è un punto interno alle tre circonferenze, allora:



A P sta nel secondo quadrante.

B P sta nel primo o nel terzo quadrante.

C P sta nel quarto quadrante.

D non può esistere un punto P siffatto.

E non si può dire nulla.

(*Olimpiadi di Matematica, Gara di 2° livello*, 2003)

311 Disegna il triangolo avente per vertici i punti $A(1; 3)$, $B(-3; 3)$ e il punto C di intersezione della bisettrice del secondo e quarto quadrante con la retta $x - y - 2 = 0$. Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo. Traccia le tangenti alla circonferenza nei punti A, B, C, in modo che, detti D, E i loro punti di intersezione, D sia nel I quadrante. Determina l'area del quadrilatero $BCDE$. Infine sulla diagonale BD trova un punto P tale che $\overline{BP} = 2\overline{PD}$.

$\left[x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0; 16; P\left(1; \frac{5}{3}\right)\right]$

312 Determina l'equazione della circonferenza γ passante per i punti $(-3; 4)$, $(1; 0)$, $(1; 4)$ e quella di γ' che ha per diametro il segmento di estremi $(-4; -2)$ e $(2; 6)$. Dopo aver verificato che γ e γ' sono concentriche, determina l'area della corona circolare.

$[x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0; x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0; \text{area} = 17\pi]$

313 Scrivi l'equazione della circonferenza che ha il centro C sull'asse x e passa per i punti $A(0; 2)$ e $B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Calcola l'ascissa del punto D di intersezione della circonferenza con il semiasse positivo delle ascisse e, dopo aver trovato le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza in A e D, determina le coordinate del loro punto di intersezione P e l'area del quadrilatero $APDC$. Tra le rette parallele alla bisettrice del II e IV quadrante trova quelle su cui la circonferenza, intersecandole, stacca una corda lunga $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

$\left[x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0; D(4; 0); x = 4, y = \frac{3}{4}x + 2; P(4; 5); \text{area} = \frac{25}{2}; y = -x + 4, y = -x - 1\right]$

314 Dato il triangolo di vertici $A(-4; 3)$, $B(-6; -3)$ e $C(0; -5)$, determina:
a) l'equazione della circonferenza circoscritta;
b) le equazioni delle tangenti alla circonferenza perpendicolari alla retta di equazione $x - 2y - 9 = 0$;
c) l'area del parallelogramma individuato dalle tangenti precedenti e dalle rette di equazioni $y = 3$ e $y = -7$.

[a) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$; b) $2x + y + 15 = 0$ e $2x + y - 5 = 0$; c) 100]

315 Determina l'equazione della circonferenza passante per $A(5; 1)$, $B(6; 4)$ e avente il centro C sulla retta di equazione $y = 2x - 5$. Scrivi poi le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti in A e in B alla circonferenza. Indicato con D il punto di intersezione di t_1 e t_2, calcola l'area del quadrilatero $ADBC$.

$[x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0; x - 2y - 3 = 0; 2x + y - 16 = 0; D(7; 2); \text{area} = 5]$

316 Trova l'equazione della circonferenza γ_1, di centro $(2; 1)$ e tangente alla retta di equazione $4x - 3y = 0$, e l'equazione della circonferenza γ_2 passante per l'origine degli assi, per il punto $(\sqrt{3}; 1)$ e con un diametro che si trova sulla retta di equazione $y = x + 2$. Considera poi il punto $P(-1; 3)$ e, indicati con Q e R i punti di intersezione di γ_1 e γ_2, determina l'area del triangolo PQR.

$\left[x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0; x^2 + y^2 - 4y = 0; \frac{14}{5}\right]$

317 Determina le equazioni delle due circonferenze che hanno il centro appartenente alla bisettrice del I e III quadrante, sono tangenti alla retta $y = 3x + 1$ e hanno raggio uguale a $\frac{\sqrt{10}}{20}$. Verifica inoltre che il punto medio del segmento che congiunge i due centri coincide con il punto di intersezione delle rette $y = 2x + \frac{1}{2}$ e $y = 4x + \frac{3}{2}$.

$\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{40}; \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{40}\right]$

318 È dato il triangolo ABC rettangolo in C, con $\overline{AB} = 4\sqrt{10}$ e appartenente alla retta $y = 3x - 14$ e con CB appartenente alla retta $x - 5y + 14 = 0$. Determina l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo sapendo che A ha ordinata negativa.

$[x^2 + y^2 - 8x + 4y - 20 = 0]$

319 a) Disegna il grafico della curva γ di equazione $x^2 + y^2 - 4|x| - 4|y| = 0$.
b) Trova l'area della superficie delimitata da γ.
c) Determina l'equazione della circonferenza circoscritta a γ.

[b) area $= 32 + 16\pi$; c) $x^2 + y^2 = 32$]

320 Considera la circonferenza $x^2 + y^2 - 8x - 20 = 0$ e la sua simmetrica rispetto all'asse y. Inscrivi nella parte di piano intersezione delle due circonferenze un rettangolo con il perimetro uguale a $4(1 + \sqrt{11})$ e trova le coordinate dei suoi vertici.

$[A(1; \sqrt{11}), B(1; -\sqrt{11}), C(-1; \sqrt{11}), D(-1; -\sqrt{11})]$

321 Scrivi le equazioni delle tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 9y - 9 = 0$, condotte dal punto $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$, e verifica che sono perpendicolari. Determina poi le coordinate dei punti di tangenza e la misura della corda che li congiunge.

$\left[2x - 3y + 6 = 0; 6x + 4y - 21 = 0; (-3; 0), \left(\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right); \frac{3\sqrt{26}}{2}\right]$

322 Considera le circonferenze di equazioni γ_1: $x^2 + y^2 = 2$ e γ_2: $x^2 + y^2 = 4$. Verifica che le tangenti a γ_1 mandate da un qualsiasi punto di γ_2 sono sempre perpendicolari tra loro.

323 Trova l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A(0; -1)$ e $B(-3; 0)$ e ha il centro C sulla retta di equazione $6x - y + 4 = 0$. Traccia per il punto D di intersezione della circonferenza con l'asse x positivo la corda DE parallela all'asse y e trova le equazioni delle tangenti in D e in E alla circonferenza che si intersecano in F. Calcola l'area del quadrilatero $CDFE$ e trova l'equazione della circonferenza ad esso circoscritta. $\left[x^2+y^2-8y-9=0;\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{41}{4};\ y=\frac{3}{4}x-\frac{9}{4};\ \text{area}=\frac{100}{3};\ 3x^2+3y^2-25x-24y+48=0\right]$

324 Trova l'equazione della circonferenza tangente nell'origine alla bisettrice del II e IV quadrante e con il centro sulla retta di equazione $y = 5x - 8$.
Considera poi i due triangoli equilateri OAB e OAC aventi un lato sul diametro OA della circonferenza. Trova le coordinate dei vertici B e C (con $x_B < x_C$), il perimetro e l'area del quadrilatero $OCAB$.
$\left[x^2+y^2-4x-4y=0;\ B(2-2\sqrt{3}; 2+2\sqrt{3}),\ C(2+2\sqrt{3}; 2-2\sqrt{3});\ 16\sqrt{2};\ 16\sqrt{3}\right]$

325 a) Determina le equazioni delle circonferenze γ_1 e γ_2 di centro $A(4; 0)$ e passanti rispettivamente per i punti $B(7; 0)$ e $C(1; -4)$.
b) Individua le equazioni delle tangenti alla circonferenza γ_1 condotte dal punto D di intersezione della circonferenza γ_2 con il semiasse positivo delle ascisse. Siano E e F i punti di tangenza.
c) Calcola l'area del quadrilatero $AFDE$.
$\left[\text{a) } \gamma_1\text{: } x^2+y^2-8x+7=0;\ \gamma_2\text{: } x^2+y^2-8x-9=0;\ \text{b) } y=\pm\frac{3}{4}(x-9);\ \text{c) } 12\right]$

326 Scrivi l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici $A(9; -1)$, $B(1; 5)$ e $C(10; 2)$. Tracciate le tangenti alla circonferenza nei punti A, B, C e detti D ed E i loro punti di intersezione, trova il perimetro e l'area del quadrilatero $ABDE$ formato dalle tangenti e dal segmento AB.
$\left[x^2+y^2-10x-4y+4=0;\ \frac{130}{3},\ \frac{250}{3}\right]$

327 Trova l'equazione della circonferenza tangente all'asse y nel punto $(0; 3)$ e con il centro C sulla retta di equazione $y = x - 1$. Determina poi la misura della corda AB staccata dalla circonferenza sulla retta di equazione $x + y - 3 = 0$ e l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.
$\left[x^2+y^2-8x-6y+9=0;\ 4\sqrt{2};\ x^2+y^2-4x-2y-3=0\right]$

328 a) Nel fascio di circonferenze tangenti alla retta $4x + 3y - 23 = 0$ nel suo punto di ascissa 2 determina le circonferenze γ_1 e γ_2 di raggio 5 e 10, aventi centro rispettivamente nel secondo e primo quadrante.
b) Determina la circonferenza γ_3 simmetrica della circonferenza γ_2 rispetto al punto $(2; 5)$.
c) Calcola l'area della parte di cerchio individuata da γ_3 eliminando il cerchio individuato da γ_1.
[a) γ_1: $x^2+y^2+4x-4y-17=0$; γ_2: $x^2+y^2-20x-22y+121=0$
b) γ_3: $x^2+y^2+12x+2y-63=0$; c) area $= 75\pi$]

329 a) Scrivi l'equazione della circonferenza di raggio 5, con centro C sulla bisettrice del I e III quadrante ($x_C > 0$) e che stacca sull'asse x una corda AB lunga 8 ($x_A < x_B$).
b) Dopo aver calcolato le coordinate dei punti A e B, cerca la tangente alla circonferenza parallela alla retta AC e il relativo punto di tangenza D di ordinata positiva.
c) Calcola l'area del quadrilatero $ACDE$, dove E è il punto di intersezione della retta tangente con l'asse x. Di quale quadrilatero si tratta?
d) Per quali valori di h il punto $P(h - 1; h)$ è interno alla circonferenza?
$\left[\text{a) } x^2+y^2-6x-6y-7=0;\ \text{b) } 4y-3x-28=0,\ D(0; 7);\ \text{c) } \frac{125}{3};\ \text{d) } 0<h<7\right]$

330 Calcola l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo i cui lati giacciono sulle rette di equazioni $y = 3x - 7$, $y = x + 1$ e $y = -2x - 2$. Indicato con A il vertice del triangolo che si trova nel I quadrante e con B quello che si trova sull'asse x, determina sul minore degli archi $\overset{\frown}{AB}$ un punto P in modo che l'area di PBC sia gli $\frac{8}{15}$ dell'area di ABC. $\left[x^2+y^2-8x-9=0;\ P(1; 4)\right]$

331 Dato il triangolo di vertici $A(1; 2)$, $B(-7; 6)$ e $C(-1; 0)$, determina l'equazione della circonferenza circoscritta e quella della circonferenza con centro in C e tangente alla retta AB.

$[x^2 + y^2 + 6x - 8y + 5 = 0; 5x^2 + 5y^2 + 10x - 31 = 0]$

332 Dopo aver verificato che il triangolo di vertici $A(0; 2)$, $B(4; -6)$ e $C(6; 0)$ è un triangolo isoscele, determina l'equazione della circonferenza:

a) circoscritta ad ABC;
b) con centro in C e passante per A e B;
c) con centro in C e tangente ad AB.

$[\text{a) } x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0; \text{ b) } x^2 + y^2 - 12x - 4 = 0; \text{ c) } x^2 + y^2 - 12x + 16 = 0]$

333 Una circonferenza ha il centro nel punto di intersezione delle rette di equazioni $y = -x + 5$ e $2x - y - 7 = 0$ e raggio $r = \sqrt{10}$.
Trova l'area del triangolo ABC, dove A e B sono i punti di intersezione della circonferenza con l'asse x e C è il punto di intersezione delle tangenti alla circonferenza condotte da A e B. [27]

334 Una circonferenza di centro $C(1; 2)$ e diametro $d = 2\sqrt{10}$ interseca l'asse y nei punti P e Q. Trova l'area del quadrilatero $PCQR$, con R punto di intersezione delle tangenti alla circonferenza condotte da P e Q. [30]

335 Sono date le circonferenze γ_1 e γ_2 rispettivamente di centri $C_1(-2; 0)$ e $C_2(2; 0)$ e raggi $r_1 = t$ e $r_2 = 2t$, dove $t > 0$.

a) Determina per quali valori di t le circonferenze sono tangenti esternamente e calcola le equazioni delle tangenti comuni.
b) Trova per quali valori di t le due circonferenze sono secanti ed esprimi in funzione di t la lunghezza della corda che ha per estremi i punti di intersezione.
c) Determina il valore di t affinché la corda misuri $\sqrt{15}$.

$\left[\text{a) } t = \frac{4}{3}, 3x + 2 = 0, \sqrt{2}\,x \pm 4y + 6\sqrt{2} = 0; \text{ b) } \frac{4}{3} < t < 4, \frac{\sqrt{-9t^4 + 160t^2 - 256}}{4}; \text{ c) } t = 2, t = \frac{2}{3}\sqrt{31}\right]$

336 Considera i punti $A(0; 4)$, $B(0; -2)$, $C(5; 0)$ e un punto generico $P(h; k)$, dove $h, k \in \mathbb{R}$; siano A', B' e C' le proiezioni di P rispettivamente sulle rette BC, AC e AB.

a) Calcola l'equazione della circonferenza γ passante per A, B e C.
b) Verifica che il punto P appartiene a γ se e solo se i tre punti A', B' e C' sono allineati.
c) Determina l'area del triangolo ABP quando P appartiene al minore degli archi $\overset{\frown}{AB}$; trova la posizione di P affinché detta area sia massima.

$\left[\text{a) } 5x^2 + 5y^2 - 17x - 10y - 40 = 0; \text{ c) } 3|h|, P\left(\frac{17 - \sqrt{1189}}{10}; 1\right)\right]$

337 Dati i punti $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(4; 0)$, considera il punto $P(0; 2t)$ e indica con D il punto medio del segmento AP, con E il punto di intersezione tra la retta CD e la retta PB.

a) Calcola le equazioni delle circonferenze passanti per le terne di punti P, A, B e C, A, D.
b) Trova il loro ulteriore punto di intersezione Q e determina il luogo descritto dal punto Q al variare di P sull'asse delle ordinate.
c) Determina la posizione del punto P, non coincidente con l'origine degli assi, affinché Q appartenga alla bisettrice del I e del III quadrante.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - 2x - 2ty = 0, x^2 + y^2 - 4x - ty = 0; \text{ b) } Q\left(\frac{6t^2}{t^2 + 4}; \frac{12t}{t^2 + 4}\right), x^2 + y^2 - 6x = 0; \text{ c) } P(0; 4)\right]$

338 Considera i punti $P(0; 3)$, $B(-2; 1)$ e la retta r di equazione $11x - 3y + 25 = 0$.

a) Dopo aver verificato che B appartiene a r, trova l'equazione della circonferenza γ passante per P e tangente in B alla retta r.
b) Trova la retta s tangente a γ nel suo punto D di ascissa 3 e ordinata positiva.
c) Detti C il centro di γ e A il punto di intersezione di r e s, verifica che il quadrilatero $ABCD$ è circoscrivibile e determina l'equazione della circonferenza circoscritta.
d) Calcola l'area di $ABCD$.

$\left[\text{a) } 2x^2 + 2y^2 - 3x - y - 15 = 0; \text{ b) } 9x + 7y - 41 = 0; \text{ c) } 4x^2 + 4y^2 - x - 27y + 5 = 0; \text{ d) } \frac{65}{4}\right]$

339 Considera i punti $A(-2; 2)$ e $B(1; 4)$, la retta r di equazione $x - 2y - 3 = 0$ e un generico punto C su r.
a) Determina il luogo dei centri delle circonferenze passanti per A e B.
b) Trova la posizione di C per cui BC è un diametro e indica con C_1 tale punto.
c) Trova la posizione di C per cui AC è un diametro e indica con C_2 tale punto.
d) Calcola l'area del quadrilatero AC_1C_2B.
$\left[\text{a) } 6x + 4y - 9 = 0\text{; b) } C_1\left(\frac{1}{4}; -\frac{11}{8}\right)\text{; c) } C_2\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{4}\right)\text{; d) } \frac{247}{16}\right]$

340 Considera il punto $P\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}; \frac{2k}{1+k^2}\right)$, con $k \in \mathbb{R}$.
a) Dimostra che al variare di k il punto P descrive la circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine degli assi.
b) Scrivi, in funzione di k, l'equazione della tangente t alla circonferenza in P.
c) Siano A e B i punti in cui la circonferenza incontra rispettivamente il semiasse delle ordinate positive e quello delle ascisse positive, e siano C e D i punti di intersezione di t con l'asse x e l'asse y nel I quadrante. Trova il valore di k affinché il quadrilatero $ABCD$ sia un trapezio.
d) Calcola l'area del trapezio $ABCD$.
$\left[\text{b) } (1-k^2)x + 2ky - (1+k^2) = 0\text{; c) } \sqrt{2} - 1\text{; d) } \frac{1}{2}\right]$

341 Nel piano cartesiano Oxy considera il punto $A(0; 4)$.
a) Scrivi l'equazione del luogo dei punti P che soddisfano la relazione

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 32,$$

verificando che si tratta di una circonferenza, e traccia il suo grafico.
b) Detto T il punto della circonferenza appartenente al I quadrante con la stessa ordinata di A, trova l'equazione della tangente t alla circonferenza in T.
c) Considera il punto B di intersezione di t con l'asse x, trova la misura dell'angolo $B\widehat{T}O$ e determina le coordinate dell'ortocentro del triangolo OBT.
$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - \frac{16}{3}y = 0\text{; b) } y = -\sqrt{3}\,x + 8\text{; c) } 60°\text{; } \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}; \frac{4}{3}\right)\right]$

342 Dati i punti $A(3; 3)$ e $B(1; -1)$, determina:
a) l'equazione della circonferenza γ passante per A e B e con il centro sulla retta di equazione $y = 2x - 3$;
b) l'equazione della retta tangente a γ in A;
c) l'equazione della circonferenza tangente in A a γ che ha centro sulla retta di equazione $4x + y - 18 = 0$;
d) l'equazione della retta PQ, essendo P e Q i vertici del triangolo equilatero APQ inscritto in γ.
[a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$; b) $x + 2y - 9 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 7x - 8y + 27 = 0$; d) $4y + 2x - 3 = 0$]

343 Determina l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A(3; -4)$ e $B(-4; -3)$ e che ha il centro sulla retta di equazione $2x - 3y = 0$.
Considerato poi un punto C sulla semicirconferenza che si trova sopra all'asse x, determina il luogo descritto dal baricentro del triangolo ABC al variare di C.
$\left[x^2 + y^2 = 25\text{; } 9x^2 + 9y^2 + 6x + 42y + 25 = 0\text{, con } y > -\frac{7}{3}\right]$

344 Scrivi l'equazione della circonferenza γ passante per l'origine O e tangente alla retta di equazione $-3x + 2y - 13 = 0$ nel suo punto di ascissa -1.
Detti A e B i punti di intersezione di γ con gli assi cartesiani, determina un punto P sulla semicirconferenza che non contiene l'origine in modo che l'area del quadrilatero $OAPB$ sia uguale a 17.
$\left[x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0\text{; } P_1(5; 1)\text{, } P_2\left(\frac{17}{13}; \frac{85}{13}\right)\right]$

345 a) Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per $A(0; -1)$, ha il centro con ordinata positiva sulla retta di equazione $4x - 2y + 3 = 0$ e ha il raggio lungo $\frac{5}{2}$.

b) Tra le rette del fascio per A determina quelle che staccano sulla circonferenza una corda lunga $2\sqrt{5}$.

c) Dal punto $B\left(\frac{5}{2}; -6\right)$ manda le tangenti alla circonferenza e trova le loro equazioni, i punti di tangenza C e D, il perimetro e l'area del triangolo BCD.

[a) $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$; b) $y = -2x - 1$, $y = 2x - 1$; c) $2x - 5 = 0$, $4x + 3y + 8 = 0$, $C(-2; 0)$, $D\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $15 + \frac{3}{2}\sqrt{10}$, $\frac{135}{8}$]

I sistemi parametrici e la circonferenza

346 **ESERCIZIO GUIDA**

Troviamo graficamente le soluzioni del seguente sistema parametrico, al variare di k in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0 \\ y = kx - 3k - 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta una circonferenza di centro $C(-1; 0)$ e raggio $r = 3$.

La seconda equazione rappresenta un fascio di rette che possiamo scrivere così:

$$y + 1 + k(-x + 3) = 0.$$

Le generatrici del fascio sono le rette $y = -1$ e $x = 3$ e il centro è $P(3; -1)$.

Le soluzioni del sistema sono date dalle coordinate dei punti di intersezione tra le rette del fascio e la semicirconferenza contenuta nel semipiano delle y positive, in quanto il sistema pone la condizione $y \geq 0$.

Determiniamo quindi per quali valori di k le rette del fascio intersecano la semicirconferenza che ha per estremi i punti $A(-4; 0)$ e $B(2; 0)$.

Le rette del fascio che intersecano la semicirconferenza sono comprese fra la retta s passante per il punto A e la retta t tangente alla circonferenza (vedi figura).

- La retta s passante per A corrisponde al parametro k ottenuto sostituendo le coordinate $(-4; 0)$ nell'equazione del fascio:

$$1 + k(4 + 3) = 0 \quad \rightarrow \quad k = -\frac{1}{7}.$$

- La retta t tangente corrisponde al parametro k ottenuto imponendo che la distanza della retta $y = kx - 3k - 1$ dal centro $C(-1; 0)$ della circonferenza sia uguale al raggio $r = 3$. Applicando la formula $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ si ha:

$$\frac{|1 + k + 3k|}{\sqrt{1 + k^2}} = 3,$$

da cui, svolgendo i calcoli:

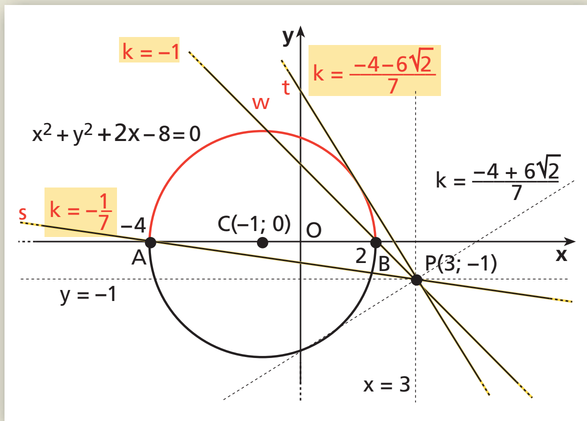
$$(4k + 1)^2 = 9(1 + k^2) \quad \rightarrow \quad 16k^2 + 8k + 1 = 9 + 9k^2 \quad \rightarrow \quad 7k^2 + 8k - 8 = 0$$

$$k = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 56}}{7} = \frac{-4 \pm 6\sqrt{2}}{7}.$$

Esistono due rette tangenti corrispondenti ai due valori di k trovati.

Dalla figura vediamo che la retta t deve avere coefficiente angolare negativo, quindi, poiché k è il coefficiente angolare, scegliamo

$k = \frac{-4-6\sqrt{2}}{7}$.



- Sia w la retta del fascio passante per $B(2; 0)$. Il corrispondente valore di k si trova sostituendo le coordinate di B nell'equazione del fascio:

$1 + k(-2+3) = 0 \rightarrow k = -1$.

Le rette comprese tra t e w intersecano la semicirconferenza in due punti, quindi per $\frac{-4-6\sqrt{2}}{7} \leq k \leq -1$ ci sono due soluzioni.

Le rette comprese tra w e s intersecano la semicirconferenza in un solo punto, quindi per $-1 < k \leq -\frac{1}{7}$ si ha una soluzione.

Al variare di k si hanno i seguenti risultati:

per $k < \frac{-4-6\sqrt{2}}{7}$,	nessuna soluzione;
per $k = \frac{-4-6\sqrt{2}}{7}$,	2 soluzioni coincidenti;
per $\frac{-4-6\sqrt{2}}{7} < k < -1$,	2 soluzioni;
per $k = -1$,	2 soluzioni (di cui una limite: $x = 2$);
per $-1 < k < -\frac{1}{7}$,	1 soluzione;
per $k = -\frac{1}{7}$,	1 soluzione limite: $x = -4$;
per $k > -\frac{1}{7}$,	nessuna soluzione.

In sintesi, il sistema ammette:

2 soluzioni per $\frac{-4-6\sqrt{2}}{7} \leq k \leq -1$;

1 soluzione per $-1 < k \leq -\frac{1}{7}$.

Risolvi graficamente i seguenti sistemi parametrici, al variare di k in $\mathbb{R}$.

347 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y + 2x + k = 0 \\ x \geq 0, \quad y > 0 \end{cases}$ [1 sol. per $-4 \leq k \leq -2$; 2 sol. per $-2\sqrt{5} \leq k < -4$]

348 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ y - x + 2k = 0 \\ x > 0 \end{cases}$ [1 sol. per $-2 < k \leq 0$; 2 sol. per $0 < k \leq \sqrt{2} - 1$]

349 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \\ 3x + y + k = 0 \\ x \geq 0, \quad y > 0 \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } -12 \leq k \leq -2\sqrt{2}; 2 \text{ sol. per } -3(1+\sqrt{10}) \leq k < -12]$

350 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \\ y = kx + 2k + 2 \\ y < 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -2 \leq k < -\frac{2}{7}; 2 \text{ sol. per } \frac{-8-3\sqrt{11}}{7} \leq k < -2\right]$

351 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0 \\ kx - y - 5k + 9 = 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 1 \leq k < 4; 2 \text{ sol. per } k \leq \frac{-6\sqrt{5}}{5} - 2 \vee k \geq 4\right]$

352 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0 \\ (2k-1)x - y + 8k - 1 = 0 \\ 1 \leq x \leq 5, \quad y \geq 0 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{1}{5} \leq k < \frac{1}{3}; 2 \text{ sol. per } \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{-10+\sqrt{390}}{29}\right]$

353 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0 \\ y = kx + k + 6 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -\frac{3}{2} < k \leq 0; 2 \text{ sol. per } -\frac{24}{7} \leq k \leq -\frac{3}{2}\right]$

354 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0 \\ (k+1)x + 8ky - 6k + 2 = 0 \\ x > 0, \quad y \leq 4 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } k \leq -\frac{1}{4} \vee k \geq \frac{1}{3}; 2 \text{ sol. per } \frac{3}{13} \leq k < \frac{1}{3}\right]$

355 $\begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2} \\ x + ky - 4k = 0 \\ -\sqrt{5} \leq x \leq 3 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } -\frac{\sqrt{5}}{2} < k < \frac{3}{4}; 2 \text{ sol. per } -\frac{3}{7}\sqrt{7} \leq k \leq -\frac{\sqrt{5}}{2} \vee \frac{3}{4} \leq k \leq \frac{3}{7}\sqrt{7}\right]$

356 $\begin{cases} y = \sqrt{4x - x^2} \\ x - ky - k + 1 = 0 \\ 0 < x \leq 3 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } 1 \leq k \leq 2(\sqrt{3}-1); 2 \text{ sol. per } \frac{2}{3}\sqrt{6} - 1 \leq k < 1\right]$

357 $\begin{cases} y = \sqrt{16 - x^2} \\ y + 3x = k \\ x \geq 0 \end{cases}$ $[1 \text{ sol. per } 4 \leq k < 12; 2 \text{ sol. per } 12 \leq k \leq 4\sqrt{10}]$

358 $\begin{cases} x = \sqrt{2y - y^2} \\ (k-1)x - y + k - 1 = 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{3}{2} \leq k \leq 3\right]$

359 $\begin{cases} y = 3 - \sqrt{-x^2 + 6x - 5} \\ y + x(k-1) + k - 5 = 0 \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$ $\left[1 \text{ sol. per } \frac{7}{6} \leq k < \frac{3}{2}; 2 \text{ sol. per } \frac{3}{2} \leq k \leq \frac{8+\sqrt{13}}{6}\right]$

REALTÀ E MODELLI

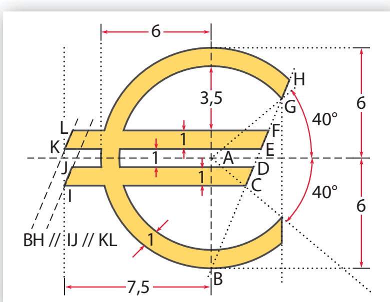
1 **Anelli olimpici**

I cinque anelli e la bandiera olimpica furono presentati ufficialmente da Pierre de Coubertin al Congresso Olimpico di Parigi nel 1914. Gli ideali di universalità e fratellanza simboleggiati dai cinque anelli intrecciati (che nel loro complesso rappresentano i cinque continenti) erano una proposta molto innovativa per l'epoca, l'inizio del XX secolo, in un clima mondiale sempre più teso e segnato da forti nazionalismi.

- ▶ Disponi i cinque anelli in un sistema di riferimento cartesiano in modo che il centro della circonferenza nera coincida con l'origine e l'asse x sia tangente alle circonferenze gialle e verdi. Supponi gli anelli di spessore nullo, di raggio unitario e poni uguale a $\frac{1}{4}$ la distanza tra due circonferenze successive della stessa fila (attento, la distanza è data fra due circonferenze, non fra i rispettivi centri).
- ▶ Trova le equazioni delle cinque circonferenze.
- ▶ Partendo dall'anello nero, quali trasformazioni occorre eseguire per ottenere gli altri quattro?

2 **Simbolo dell'euro**

Il simbolo dell'euro (€) è stato presentato al pubblico dalla Commissione europea nel dicembre 1996, che ha motivato così la sua scelta: «la € si ispira all'epsilon greca, e rinvia quindi alla culla della civiltà europea e alla prima lettera di Europa, barrata con due tratti orizzontali paralleli a indicare la stabilità dell'euro».



La figura riporta le misure ufficiali del simbolo dell'euro.

- ▶ Fissato il sistema di riferimento cartesiano con l'origine nel punto A e l'asse delle ascisse orizzontale, scrivi le equazioni dei tratti principali del simbolo: i due archi di circonferenza concentrici e le due barre orizzontali. (Per semplificare i calcoli, anche se non corrisponde alle indicazioni del disegno, supponi che la retta AG e la retta simmetrica formino angoli di 45° anziché di 40°.)

3 **La pista di atletica leggera**

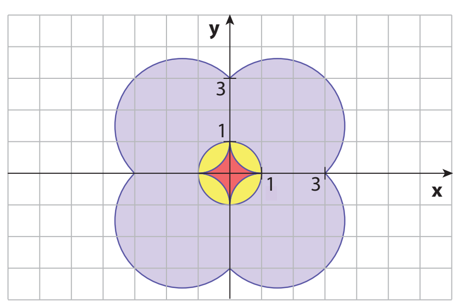
Le corse di atletica leggera si svolgono, nella versione outdoor, su una pista formata da un minimo di sei corsie, otto per le gare internazionali, della larghezza di 1,22 metri ciascuna. Due tratti paralleli delle corsie sono rettilinei e hanno una lunghezza di 100 m ciascuno, mentre le due curve hanno la forma di due semicirconferenze, anch'esse di lunghezza (riferita alla prima corsia) di 100 m. La linea di arrivo si trova al termine di uno dei tratti rettilinei.

- ▶ Fissato un opportuno sistema di riferimento, determina le equazioni delle due semicirconferenze.
- ▶ Di quanto è più lunga la seconda corsia rispetto alla prima?
- ▶ Se un corridore parte dalla sesta corsia, di quanto deve spostarsi in avanti alla partenza, rispetto a un corridore della prima, per percorrere lo stesso tratto in una gara di 400 m?
- ▶ Qual è l'area racchiusa dalla pista?

4 **Il fiore**

Laura vuole preparare dei bigliettini al computer con un disegno stilizzato di un fiore. Ha a disposizione solo un programma di grafica vettoriale molto semplice, e quindi deve dare al computer le equazioni corrette degli archi di curva che compongono il disegno.

- ▶ Quali sono queste equazioni?



VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 L'equazione della circonferenza tangente all'asse delle ordinate e di centro $C(-2; -3)$ è:

A $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 9 = 0$.
B $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 9 = 0$.
C $x^2 + y^2 = 4$.
D $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$.
E $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

2 Le proposizioni seguenti sono tutte vere *tranne una*. Quale?

L'equazione $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ rappresenta una circonferenza:

A passante per l'origine solo se $a = 0$ o $b = 0$.
B per qualsiasi valore di a e di b.
C passante per l'origine.
D di raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.
E di centro $\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$.

3 Considera il punto $P(7; 6)$ e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$.
Per il punto P passano:

A due rette tangenti alla circonferenza.
B solo rette secanti la circonferenza.
C solo una retta tangente e nessuna secante.
D solo rette esterne alla circonferenza.
E solo una tangente e rette secanti.

4 Le circonferenze

$$\gamma_1: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_2: x^2 + y^2 = 16$$

sono:

A secanti.
B esterne.
C tangenti esternamente.
D γ_1 interna a γ_2.
E tangenti internamente.

5 L'equazione

$$x^2 + y^2 + k = 0$$

rappresenta una circonferenza con il centro nell'origine e raggio:

A $\sqrt{k}$ se $k > 0$.
B $\sqrt{-k}$ se $k > 0$.
C $-\sqrt{k}$ se $k > 0$.
D $-\sqrt{k}$ se $k < 0$.
E $\sqrt{-k}$ se $k < 0$.

6 Date le circonferenze di equazioni

$$\gamma_1: x^2 + y^2 - 4x - 8y + 15 = 0,$$
$$\gamma_2: 3x^2 + 3y^2 - 12x - 25y + 50 = 0$$

e i punti $A(4; 3)$, $B(4; 5)$, $C(0; 5)$ e $D(2; 2)$, quale delle seguenti proposizioni è *vera*?

A $D \notin \gamma_1$ ed esiste una circonferenza passante per A, B, C, D.
B D è interno alla circonferenza passante per A, B e C.
C D è esterno alla circonferenza passante per A, B e C.
D γ_1 e γ_2 hanno in comune i punti A, B e D.
E γ_1 e γ_2 hanno lo stesso centro.

7 Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 + y^2 - 3x + y + 5t = 0$ rappresenta un fascio di circonferenze concentriche?

A $t \leq 1$
B $t \geq -2$
C $t \geq -\frac{1}{2}$
D $t \geq 0$
E $t \leq \frac{1}{2}$

8 Data l'equazione $x^2 + y^2 - 2kx + 2ky + 4k - 6 = 0$, quale proposizione è *vera*?

A Per $k \leq -1 \vee k \geq 3$ è un fascio di circonferenze concentriche.
B Il luogo dei centri è la retta $x + y = 0$.
C Per $-1 \leq k \leq 3$ è un fascio di circonferenze esterne.
D Per $k \leq -1 \vee k \geq 3$ è un fascio di circonferenze tangenti.
E Nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

QUESITI

9 a) Considera la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. Siano C il suo centro, A il punto (di ascissa non nulla) di intersezione con l'asse delle ascisse e B quello (con ordinata non nulla) con l'asse delle ordinate. Verifica che A, B e C sono allineati.
b) Dimostra che in ogni circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ la retta che congiunge i suoi punti di intersezione con gli assi, diversi dall'origine, passa per il centro della circonferenza.

10 **La tangente nell'origine**. Dimostra che per ogni circonferenza che passa per l'origine di equazione $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ la tangente in O ha equazione $ax + by = 0$.

11 Date una circonferenza e una retta nel piano cartesiano, indica un procedimento per determinare il punto P della circonferenza di minor distanza dalla retta e poi trova il punto della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ più vicino alla retta $x + 2y - 1 = 0$. $\left[P\left(2 - \frac{\sqrt{5}}{5}; 3 - \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)\right]$

12 Date le due circonferenze di equazioni

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0,$$

indica come devono essere i coefficienti delle due equazioni se le due circonferenze:
a) sono concentriche;
b) hanno lo stesso centro che appartiene alla bisettrice del II e IV quadrante;
c) passano per l'origine;
d) sono tangenti all'asse x nello stesso punto.
[a) $a = a'$, $b = b'$; b) $a = a'$, $b = b'$, $a = -b$; c) $c = c' = 0$; d) $a = a'$, $c = c'$, $a^2 = 4c$]

13 In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali Oxy, è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0,$$

dove k è un parametro reale. Calcola per quali valori di k il luogo è costituito da:
1. un punto; 2. due punti; 3. infiniti punti; 4. nessun punto.
(*Esame di Stato, Liceo Scientifico*, *Corso di ordinamento*, *Sessione straordinaria,* 2003, *quesito* 2)

14 **VERO O FALSO?**
Considera la circonferenza γ di equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

a) Se $a = b$, allora il centro si trova sulla bisettrice del I e III quadrante. V F
b) Se $a = 0$ e $c = 0$, allora γ è tangente all'asse x. V F
c) Se $a < 0$ e $b > 0$, allora il centro di γ appartiene al I quadrante. V F
d) Se $a^2 + b^2 - 4c = 0$, allora γ è costituita da un solo punto. V F
e) Se $a < 0$, $b < 0$ e $c < 0$, allora γ non esiste. V F
f) Se $a = 0$, $b = 0$ e $c < 0$, allora la circonferenza ha il centro nell'origine e raggio $\sqrt{-c}$. V F

PROBLEMI

15 a) Determina l'equazione della circonferenza che ha il centro sulla retta di equazione $x - 2y - 12 = 0$ ed è tangente alla retta di equazione $3y - 2x + 16 = 0$ nel suo punto di ordinata nulla.
b) Considera il fascio di rette di equazione $mx - y - 3 = 0$; determina il suo centro D e le due rette del fascio passanti per i punti A e B della circonferenza di ascissa 3.
c) Determina il quarto vertice C del rombo $ADBC$ e calcolane perimetro e area.
d) Trova l'equazione della circonferenza inscritta nel rombo.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - 12x + 6y + 32 = 0; \text{ b) } D(0; -3),\ 2x - 3y - 9 = 0,\ 2x + 3y + 9 = 0;\right.$
$\left.\text{c) } C(6; -3);\ 2p = 4\sqrt{13}, \text{ area} = 12; \text{ d) } x^2 + y^2 - 6x + 6y + \frac{198}{13} = 0\right]$

16 a) Considera il fascio di circonferenze di equazione $x^2 + y^2 + (k - 10)x + (k - 4)y + 4(6 - k) = 0$ e individua le coordinate dei punti base A e B $(x_A < x_B)$.
b) Dopo aver verificato che il fascio considerato è generato da una circonferenza γ e da una retta r, determina l'equazione della circonferenza γ_1, simmetrica della circonferenza γ rispetto a r.
c) Scrivi le equazioni delle tangenti s e t a γ_1 mandate dal punto P di coordinate $(-3; 4)$.
d) Calcola l'area del triangolo individuato dalle rette s, t e dalla retta congiungente i punti di tangenza.

$\left[\text{a) } A(3; 1), B(4; 0); \text{ b) } x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0; \text{ c) } x + 2y - 5 = 0,\ 2x + y + 2 = 0; \text{ d) } \frac{27}{2}\right]$

17 a) Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro nell'origine e un diametro di estremi A e B, dove A e B sono i punti dell'asse x le cui ascisse $(x_A < x_B)$ sono le soluzioni dell'equazione $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.
b) Sia C il punto dell'asse x (con $x_C < 0$) tale che $\overline{AO} = 3\overline{CO}$, e sia D il suo simmetrico rispetto all'asse y. Scrivi le equazioni delle semicirconferenze aventi diametri AC e AD, situate nel semipiano delle ordinate positive, e quelle delle semicirconferenze aventi diametri DB e CB, situate nel semipiano delle ordinate negative.
c) Calcola l'area della parte di piano delimitata dalle quattro semicirconferenze trovate e dimostra che essa è un terzo di quella del cerchio di diametro AB.

$[\text{a) } x^2 + y^2 = 9; \text{ b) } y = \sqrt{-4x - x^2 - 3},\ y = \sqrt{3 - 2x - x^2},$
$y = -\sqrt{4x - x^2 - 3},\ y = -\sqrt{3 + 2x - x^2}; \text{ c) } 3\pi]$

18 a) Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze avente per punti base le intersezioni con gli assi cartesiani della retta parallela alla bisettrice del I e del III quadrante e formante un triangolo nel IV quadrante di area $\frac{25}{2}$.
b) Determina l'equazione della circonferenza γ_1 del fascio passante per il punto $A(1; 0)$.
c) Scrivi l'equazione del fascio di circonferenze concentriche a γ_1 e determina la circonferenza γ_2 del fascio tangente alla retta $2x - 3y + 11 = 0$.
d) Calcola l'area della corona circolare individuata dalle due circonferenze γ_1 e γ_2.

$[\text{a) } x^2 + y^2 - 25 + k(x - y - 5) = 0; \text{ b) } \gamma_1\text{: } x^2 + y^2 - 6x + 6y + 5 = 0;$
$\text{c) } x^2 + y^2 - 6x + 6y + k = 0,\ \gamma_2\text{: } x^2 + y^2 - 6x + 6y - 34 = 0; \text{ d) } 39\pi]$

19 a) Scrivi e rappresenta graficamente l'equazione della circonferenza γ_1 passante per i punti $A(1; 3)$, $B(5; 5)$ e $C(8; -4)$.
b) Determina e rappresenta graficamente, nello stesso riferimento di γ_1, l'equazione della circonferenza γ_2 avente il centro nel punto $(5; 0)$ e raggio 3.
c) Determina l'area del quadrilatero $ABCD$, dove D è l'intersezione di ascissa minore della circonferenza γ_2 con l'asse delle ascisse.

$[\text{a) } \gamma_1\text{: } x^2 + y^2 - 10x = 0; \text{ b) } \gamma_2\text{: } x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0; \text{ c) } 28]$

20 a) Scrivi l'equazione della circonferenza γ_1 di centro $P(-3; 2)$ e passante per il punto $A(0; 1)$.
b) Scrivi l'equazione della circonferenza γ_2 simmetrica di γ_1 rispetto alla retta $y = x + 1$ e rappresenta graficamente γ_1 e γ_2.
c) Determina le tangenti r e s a γ_1 e γ_2 mandate dal punto $S(-10; -9)$ che non intersecano rispettivamente γ_2 e γ_1. Siano Q e R i rispettivi punti di tangenza.
d) Calcola l'area del trapezio isoscele individuato da PQR e dal centro di γ_2.

[a) γ_1: $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$; b) γ_2: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$; c) r: $3x - y + 21 = 0$, s: $x - 3y - 17 = 0$, $Q(-6; 3)$, $R(2; -5)$; d) 12]

21 a) Scrivi l'equazione della circonferenza che è tangente nel punto $A(0; 2)$ alla retta $3x - 4y + 8 = 0$ e ha il centro sulla retta di equazione $y = -2x + 3$.
b) Tra le rette parallele alla bisettrice del II e IV quadrante trova quelle che, intersecando la circonferenza, determinano una corda lunga $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.
c) Trova il perimetro del rettangolo con i vertici nei punti di intersezione della circonferenza con le rette trovate nel punto b).
d) Dal punto $P(4; -5)$ conduci le tangenti alla circonferenza, trova le loro equazioni, le coordinate dei punti E e F di tangenza e il perimetro del triangolo EFP.

$\left[\text{a) } x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0;\ \text{b) } y = -x + 4,\ y = -x - 1;\ \text{c) } 10\sqrt{2};\ \text{d) } y = -\frac{3}{4}x - 2,\ x = 4,\ E(0; -2),\ F(4; 0),\ 2(5 + \sqrt{5})\right]$

22 a) Nel fascio di circonferenze tangenti alla retta r di equazione $2x + y - 4 = 0$ nel suo punto A di ascissa 2, determina la circonferenza γ_1 passante per il punto $B(8; -2)$.
b) Scrivi l'equazione della circonferenza γ_2 simmetrica alla circonferenza individuata al punto a) rispetto alla retta s di equazione $x - 2y + 8 = 0$.
c) Verifica che anche la circonferenza γ_2 è tangente alla retta r e individuane il punto di tangenza C.
d) Calcola l'area della parte di piano individuata dalle due circonferenze e dalla retta r.

[a) γ_1: $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$; b) γ_2: $x^2 + y^2 - 4x - 20y + 84 = 0$; c) $C(-2; 8)$; d) $10(4 - \pi)$]

23 Dati i punti $A(-1; 0)$, $B\left(\frac{7}{5}; -\frac{9}{5}\right)$ e $C\left(\frac{7}{5}; \frac{16}{5}\right)$:
a) determina le equazioni delle tre circonferenze γ_A, γ_B e γ_C, mutuamente tangenti, di centri A, B, C;
b) indicati con D, E e F i punti in cui le tre circonferenze sono tangenti, calcola l'equazione della circonferenza che passa per i punti di tangenza;
c) calcola le equazioni delle tangenti comuni e verifica che passano per uno stesso punto T.

$\left[\text{a) } \gamma_A: x^2 + y^2 + 2x = 0,\ \gamma_B: 5x^2 + 5y^2 - 14x + 18y + 6 = 0,\ \gamma_C: 5x^2 + 5y^2 - 14x - 32y + 16 = 0;\ \text{b) } 5x^2 + 5y^2 - 4x - 2y - 4 = 0;\ \text{c) } 3x + 4y - 2 = 0,\ 4x - 3y - 1 = 0,\ 5y - 1 = 0,\ T\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)\right]$

24 Sia γ la semicirconferenza di raggio unitario avente centro nell'origine O degli assi cartesiani e posta nel semipiano delle ordinate positive. Indicato con A il punto in cui essa tocca il semiasse delle ascisse negative, traccia per A una retta AP, con P punto generico di γ.
a) Scrivi le coordinate del punto Q di intersezione tra la retta AP e l'asse del segmento OP al variare della retta AP.
b) Determina la posizione di P affinché Q stia sull'asse delle ordinate.
c) In questa posizione trova l'equazione della tangente t in P a γ.
d) Calcola l'area del triangolo OBC, dove B e C sono i punti di intersezione di t con gli assi coordinati.

$\left[\text{a) se } y = h(x+1)\text{: } Q\left(\frac{1 - 3h^2}{2(h^2+1)}; \frac{3 - h^2}{2(h^2+1)}h\right);\ \text{b) } P\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right);\ \text{c) } \sqrt{3}x + 3y - 2\sqrt{3} = 0;\ \text{d) } \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$