Analizziamo l'urto in due stadi:

- prima imponiamo la conservazione della quantità di moto: siccome la velocità della seconda biglia prima dell'urto è uguale a zero, otteniamo

$$m\vec{v} = m\vec{u} + m\vec{V}.$$

Dividendo i due i membri per m, la relazione precedente porta alla condizione

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{V},$$

cioè la somma vettoriale delle velocità finali delle biglie è uguale alla velocità iniziale della prima di esse **(figura 10)**.

- Essendo un urto elastico, imponiamo ora la conservazione dell'energia cinetica totale:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}mV^2$$

da cui, dividendo entrambi i membri per $\frac{1}{2}m$, si trova:

$$v^2 = u^2 + V^2. \qquad \textbf{(10)}$$

- La formula **(10)** stabilisce che, nel triangolo ABC della **figura 11**, la somma dei quadrati di u e di V è uguale al quadrato di v. Ciò significa che tale triangolo è rettangolo con ipotenusa AC. Ma allora il parallelogramma $ABCD$ è un rettangolo e anche l'angolo $D\widehat{A}B$ è retto. Abbiamo quindi dimostrato che

> dopo un urto in cui una biglia ne colpisce in modo elastico una seconda della stessa massa, inizialmente ferma, le due biglie hanno velocità perpendicolari tra loro.

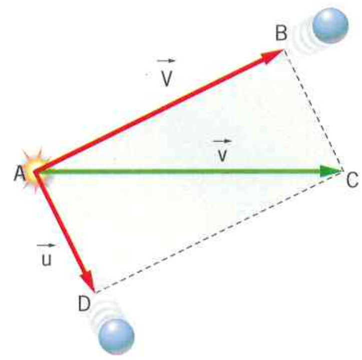


Figura 10 La velocità iniziale $\vec{v}$ della biglia in movimento è uguale alla somma vettoriale delle velocità finali $\vec{u}$ e $\vec{V}$ delle due biglie.

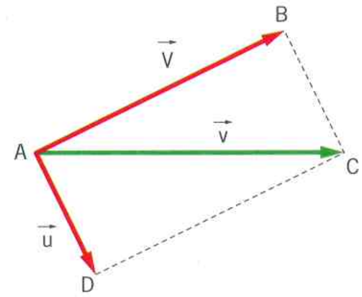


Figura 11 Il triangolo ACB è rettangolo in B.

7 IL CENTRO DI MASSA

Per ogni sistema di punti materiali, che chiamiamo per semplicità «particelle», si può definire un punto geometrico, detto **centro di massa**, che ha proprietà interessanti.

Caso di due particelle su una retta

Per iniziare, consideriamo due particelle di masse m_1 e m_2 che si muovono su una retta. A un certo istante, le due particelle si trovano rispettivamente nei punti di coordinate x_1 e x_2.

Per definizione, l'ascissa x_{cm} del centro di massa del sistema formato dalle due particelle è data dalla formula:

ascissa del centro di massa (m)
posizione 1 (m)
posizione 2 (m)

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad \textbf{(11)}$$

massa 1 (kg)
massa 2 (kg)

Per esempio, se le due particelle hanno la stessa massa m, il centro di massa del sistema si trova nel punto di ascissa

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m x_1 + m x_2}{m + m} = \frac{m(x_1 + x_2)}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

cioè nel punto medio tra le due particelle. Invece, se esse hanno masse diverse il centro di massa risulta più vicino a quella di massa maggiore.

ESEMPIO

Due punti materiali si trovano sull'asse x di un sistema di riferimento. Il primo ha massa $m_1 = 5{,}0$ kg e occupa la posizione $x_1 = 3{,}0$ m; il secondo ha una massa $m_2 = 2{,}0$ kg e occupa la posizione $x_2 = 17$ m.

▶ Determina l'ascissa x_{cm} del centro di massa del sistema formato dai due punti materiali.

Dalla formula **(11)**, l'ascissa del centro di massa è data da

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(5{,}0\ \text{kg}) \times (3{,}0\ \text{m}) + (2{,}0\ \text{kg}) \times (17\ \text{m})}{5{,}0\ \text{kg} + 2{,}0\ \text{kg}} =$$
$$= \frac{15\ \text{kg} \cdot \text{m} + 34\ \text{kg} \cdot \text{m}}{7{,}0\ \text{kg}} = \frac{49\ \text{kg} \cdot \text{m}}{7{,}0\ \text{kg}} = 7{,}0\ \text{m}.$$

Quindi il centro di massa del sistema si trova nel punto di ascissa 7,0 m.

Caso generale

Nel caso in cui ci siano n particelle di masse $m_1, m_2, \ldots, m_n$, che occupano le posizioni $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la formula **(11)** si generalizza come:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \tag{12}$$

Ordinate delle particelle
I simboli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rappresentano le ordinate delle n particelle che compongono il sistema in esame.

Se poi le particelle si muovono nel piano, oltre alla coordinata x del centro di massa occorre fornire anche la coordinata y che, in analogia con la formula **(12)**, risulta

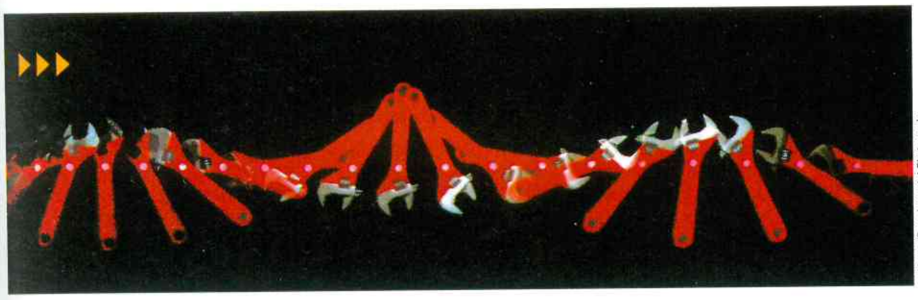
$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \tag{13}$$

Per un moto nello spazio si introduce anche la coordinata z_{cm} del centro di massa, che è data da una formula analoga alla **(12)** o alla **(13)**, con il simbolo z al posto di x o di y.

Centro di massa di un sistema isolato

Esaminiamo ora la prima figura a pagina seguente, che rappresenta un corpo rigido (una chiave inglese) che ha un moto di traslazione e rotazione con attrito trascurabile su un tavolo orizzontale.

La forza totale che agisce sulla chiave è pari a zero, perché la sua forza-peso e la reazione vincolare del tavolo sono uguali e opposte.



R. Megna/Fundamental Photographs

Il movimento della chiave inglese è piuttosto complesso, ma il bollo chiaro mostra che esiste un punto (il centro di massa della chiave, che coincide con il suo baricentro) che con buona approssimazione si sposta di moto rettilineo uniforme. Questo è proprio il moto di un punto materiale su cui agisce una forza totale nulla.

L'esperimento mostra una delle proprietà fondamentali del centro di massa:

il centro di massa di un sistema fisico isolato, per il quale vale la conservazione della quantità di moto, si muove di moto rettilineo uniforme.

ANIMAZIONE

Il centro di massa (1 minuto)

Questa affermazione può essere dimostrata matematicamente, partendo dai princìpi della dinamica, e vale anche in presenza di urti. La **figura 12** mostra due punti materiali che si urtano. Il primo (in colore rosso) ha una massa di 2,0 kg e all'inizio si muove verso destra alla velocità di 5,0 m/s, il secondo ha una massa di 1,0 kg e all'inizio si muove verso sinistra con una velocità di −4,0 m/s.

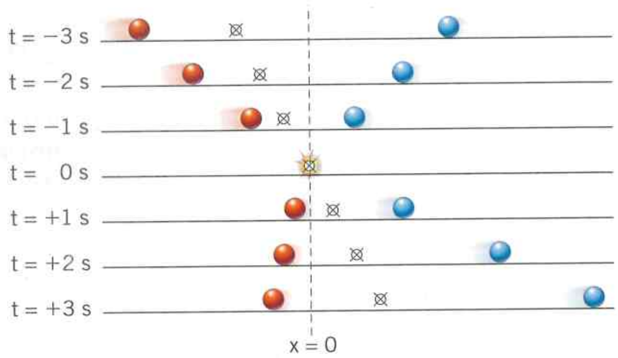


Figura 12 Il centro di massa del sistema (indicato con ⊗) si muove a velocità costante prima e dopo l'urto.

Dopo l'urto entrambi i corpi invertono il verso del proprio moto: il primo punto materiale con una velocità di −1,0 m/s, il secondo con la velocità di 8,0 m/s. Come istante $t = 0$ s è stato scelto quello in cui avviene l'urto; così, gli istanti di tempo negativi sono quelli che precedono la collisione e quelli positivi sono quelli che la seguono.

A ogni istante è stata calcolata la posizione del centro di massa del sistema, che è indicato con il simbolo ⊗; come si vede, per tutta la durata del fenomeno il centro di massa si muove verso destra con velocità costante.

Sempre partendo dai princìpi della dinamica si dimostra che la velocità $\vec{v}_{cm}$ con cui si muove il centro di massa è data dalla formula

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{p}_{tot}}{m_{tot}}, \tag{14}$$

dove m_{tot} è la massa complessiva del sistema e $\vec{p}_{tot}$ è la quantità di moto *totale*, uguale alla somma vettoriale delle quantità di moto di tutte le particelle del sistema.

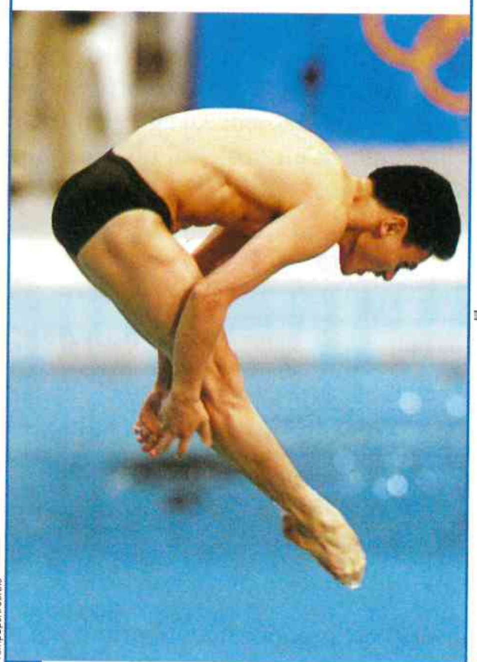
Centro di massa di un sistema non isolato

Se il sistema che stiamo esaminando non è isolato (e, quindi, la sua quantità di moto totale non si conserva), il moto del centro di massa non è rettilineo uniforme. Esso può invece essere dedotto dalla seguente legge:

> il centro di massa di un sistema fisico non isolato si muove come un punto materiale che possiede tutta la massa del sistema e che è soggetto alla stessa forza esterna risultante a cui è sottoposto il sistema.

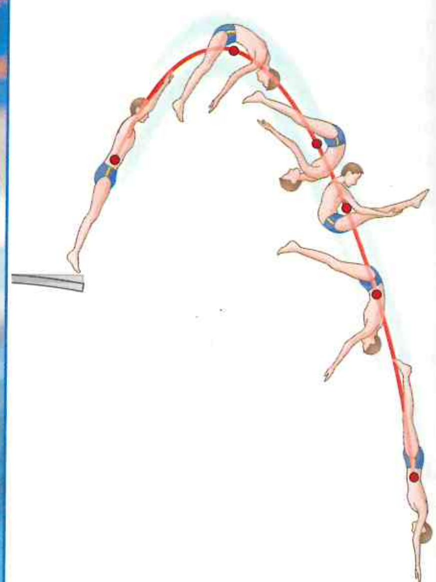
▶ Per esempio, il moto nello spazio di un tuffatore che si lancia da un trampolino con una certa velocità iniziale è molto complicato da descrivere.

▶ Ma la traiettoria del suo centro di massa è una parabola, la stessa che sarebbe descritta da un corpo puntiforme, di uguale velocità iniziale, su cui agisce la forza-peso del tuffatore.



TempSport/Corbis

A



B

Quello che abbiamo appena enunciato non è altro che il teorema dell'impulso, applicato non a un punto materiale ma a un corpo esteso o a un sistema di particelle: infatti le forze interne, uguali e opposte a due a due, non cambiano la quantità di moto totale.

Così soltanto la forza esterna risultante causa il cambiamento di $\vec{p}_{tot}$:

$$\Delta\vec{p}_{tot} = \vec{F}_{tot}\,\Delta t.$$

Notiamo inoltre, a proposito dell'esempio del tuffatore, che il centro di massa si trova talvolta fuori dalla sua figura. Infatti il centro di massa è un punto geometrico che non deve necessariamente coincidere con uno dei punti fisici del sistema a cui si riferisce.

▶ Calcola il valore della velocità iniziale della prima palla.

[4,6 m/s; 6,5 m/s]

22 ★★ Una molecola di ossigeno con velocità 250 m/s urta elasticamente un'altra molecola di ossigeno inizialmente ferma. Dopo l'urto, la velocità della prima molecola forma un angolo di 30° rispetto alla direzione della sua velocità iniziale.

▶ Quanto valgono le velocità delle due molecole dopo l'urto?

▶ Qual è l'angolo formato dalla velocità della molecola bersaglio dopo l'urto con la direzione iniziale del moto della prima molecola?

[217 m/s; 125 m/s; 60°]

23 ★★★ Una piccola biglia di massa m urta elasticamente al centro una lastra rettangolare disposta con il lato più lungo perpendicolare al piano d'appoggio. La lastra, di massa M, è vincolata a muoversi orizzontalmente appoggiata su un piano orizzontale. L'angolo d'incidenza vale 60° e l'angolo di riflessione è $\varphi = 45°$. La velocità iniziale della biglia è $v = 10{,}0$ m/s e l'impulso trasferito alla lastra è $I = 1{,}36$ kg · m/s.

▶ Calcola il valore della massa m. (Trascura tutti gli attriti.)

[0,10 kg]

7 IL CENTRO DI MASSA

24 ★ Un trenino di massa 0,2 kg si muove verso destra su un binario orizzontale con velocità di 3 m/s. Al tempo $t = 0$ s urta elasticamente un trenino fermo di massa uguale. Scegli come $x = 0$ m il punto in cui avviene l'urto. Considera il sistema 3,0 s prima dell'urto e 2,0 s dopo l'urto.

▶ Calcola la velocità del centro di massa del sistema formato dai due trenini.

[1,5 m/s]

25 ★ La massa del Sole è $2{,}0 \times 10^{30}$ kg e quella della Terra è $6{,}0 \times 10^{24}$ kg. La distanza Terra-Sole vale $1{,}5 \times 10^{8}$ km. Fissa nel centro del Sole l'origine del tuo sistema di coordinate.

▶ Dove si trova il centro di massa del sistema Terra-Sole? (Confrontalo con il raggio del Sole che vale $7{,}0 \times 10^{5}$ km.)

[$r_{cm} = 4{,}5 \times 10^{2}$ km dal centro del Sole]

26 ★★ Un bilanciere da ginnastica è costituito da due dischi omogenei di massa rispettivamente 4 kg e 6 kg. L'asta leggera che li collega è lunga 20 cm.

▶ Determina la posizione del centro di massa del bilanciere. (Trascura la massa dell'asta.)

[a 0,12 m dal disco più leggero]

27 ★★ Tre giocatori di basket di massa 110 kg ciascuno stanno eseguendo uno schema che prevede una formazione a triangolo equilatero di cui ogni giocatore rappresenta un vertice. Il lato del triangolo è 4 m.

▶ Quali sono le coordinate piane del centro di massa del sistema rispetto a due assi cartesiani ortogonali, uno lungo un lato del triangolo e l'altro lungo la relativa altezza?

[(2, 1) m]

28 ★★★ **PROBLEMA SVOLTO**

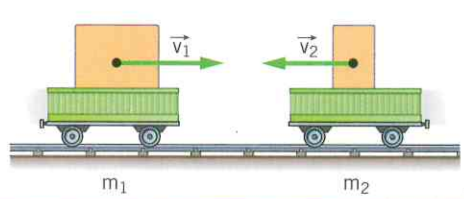
Considera di nuovo i dati del Problema n.18. Scegli come $t = 0$ s l'istante dell'urto e come $x = 0$ m il punto in cui avviene l'urto.

▶ Determina la posizione dei carrelli e quella del loro centro di massa 3,0 s prima dell'urto.

▶ Determina le stesse grandezze 2,0 s dopo l'urto.

▶ Dai dati ottenuti, calcola la velocità del centro di massa.

$m_1 = 2{,}0$ kg $v_1 = 5{,}0$ m/s $x_1 = ?$ $x_{cm} = ?$
$m_2 = 1{,}0$ kg $v_2 = 4{,}0$ m/s $x_2 = ?$ $v_{cm} = ?$
$t_p = 3{,}0$ s $t_d = 2{,}0$ s $X_1 = ?$ $X_{cm} = ?$
$X_2 = ?$



Strategia e soluzione

- Per risolvere il problema bisogna considerare i carrelli come particelle. Immaginiamo quindi di segnare un punto di riferimento sulla parte anteriore di entrambi e di considerare la posizione di questi due punti.

- Le posizioni dei carrelli 3,0 s prima dell'urto (cioè all'istante $t_p = -3{,}0$ s) sono:

$$x_1 = v_1 t_p = \left(5{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \times (-3{,}0\ \text{s}) = -15\ \text{m}$$

$$x_2 = v_2 t_p = \left(-4{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \times (-3{,}0\ \text{s}) = 12\ \text{m};$$

la corrispondente posizione del baricentro è

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2{,}0\ \text{kg}) \times (-15\ \text{m}) + (1{,}0\ \text{kg})(12\ \text{m})}{(2{,}0 + 1{,}0)\text{kg}} = \frac{-18\ \text{kg} \cdot \text{m}}{3{,}0\ \text{kg}} = -6{,}0\ \text{m}.$$

- Allo stesso modo, le posizioni dei carrelli 2,0 s dopo l'urto (cioè all'istante $t_d = 2{,}0$ s) sono:

$$X_1 = V_1 t_d = \left(-1{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \times (2{,}0\ \text{s}) = -2{,}0\ \text{m}$$

$$X_2 = V_2 t_d = \left(8{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \times (2{,}0\ \text{s}) = 16\ \text{m};$$

la corrispondente posizione del baricentro è

$$X_{cm} = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2{,}0\ \text{kg}) \times (-2{,}0\ \text{m}) + (1{,}0\ \text{kg})(16\ \text{m})}{(2{,}0 + 1{,}0)\text{kg}} = \frac{12\ \text{kg} \cdot \text{m}}{3{,}0\ \text{kg}} = 4{,}0\ \text{m}.$$

- Tra gli istanti t_p e t_d il centro di massa ha percorso la distanza

$$\Delta s = X_{cm} - x_{cm} = [4{,}0 - (-6{,}0)]\ \text{m} = 10{,}0\ \text{m};$$

l'intervallo di tempo impiegato è

$$\Delta t = t_d - t_p = [2{,}0 - (-3{,}0)]\ \text{s} = 5{,}0\ \text{s}.$$

Quindi la velocità del centro di massa risulta

$$v_{cm} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10{,}0\ \text{m}}{5{,}0}\ \text{s} = 2{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Discussione

Prima dell'urto, il valore della quantità di moto totale è

$$p_{tot} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (2{,}0\ \text{kg}) \times (5{,}0\ \text{m/s}) + (1{,}0\ \text{kg}) \times (-4{,}0\ \text{m/s}) = 6{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m/s},$$

che è uguale al valore $m_1 V_1 + m_2 V_2$ dopo l'urto. La massa totale del sistema è

$$m_{tot} = m_1 + m_2 = (2{,}0 + 1{,}0)\ \text{kg} = 3{,}0\ \text{kg}.$$

Possiamo quindi calcolare il secondo membro della formula **(14)**, che risulta

$$\frac{p_{tot}}{m_{tot}} = \frac{6{,}0\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{3{,}0\ \text{kg}} = 2{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Questo valore è proprio quello calcolato, con un altro metodo, nell'ultimo punto del problema. In questo caso è quindi verificata la validità della formula **(14)**.

29 ★★★ Una leggera barca lunga $L = 8{,}0$ m di massa $M = 210$ kg è in quiete sull'acqua, con un estremo a contatto con la parete del molo ma senza esservi ancorata. Un uomo di massa $m = 70$ kg si trova sulla barca all'estremo opposto rispetto al molo e comincia a camminare portando con sé un piccolo ponticello di massa trascurabile e lungo $l = 1{,}0$ m che possa consentire all'uomo di portarsi sulla banchina. Quando l'uomo è arrivato all'estremo vicino al molo la barca si è spostata.

▶ Di quanto si è spostata la barca? (Trascura tutti gli attriti.)

▶ La lunghezza del ponticello è sufficiente?

[2,0 m: no]

8 IL MOMENTO ANGOLARE

30 ★ La pallina di una roulette di raggio 30 cm ha massa 2,0 g. Il croupier lancia la pallina facendola ruotare alla velocità di 25 cm/s in senso antiorario.

▶ Quali sono la direzione, il verso e il modulo del suo momento angolare calcolato rispetto al centro della roulette?

[$1{,}5 \times 10^{-4}$ kg · m²/s, direzione perpendicolare al tavolo, verso l'alto]

31 ★ Un corridore di massa 80 kg si allena su una pista circolare di raggio 30 m con una velocità di intensità 5,0 m/s.

▶ Quanto vale il suo momento angolare?

[$1{,}2 \times 10^{4}$ kg · m²/s]

32 ★★ La massa di Marte è 10 volte più piccola di quella della Terra e Marte dista 1,5 volte di più dal Sole. Inoltre la velocità di rivoluzione di Marte attorno al Sole è 0,82 volte quella della Terra.

▶ Quanto vale il rapporto fra il modulo del momento angolare di rivoluzione della Terra e quello di Marte?

[8,1]

33 ★★ Una giostra è formata da un braccio lungo 3,0 m con un seggiolino a ogni estremità. Sui seggiolini siedono due bambini di massa rispettivamente 30 kg e 45 kg. La giostra ruota alla velocità di 2,5 m/s.

▶ Quanto vale l'intensità del momento angolare del sistema calcolato rispetto al centro della giostra?

[$2{,}8 \times 10^{2}$ kg · m²/s]

9 CONSERVAZIONE E VARIAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

34 ★ Durante l'orbita intorno al Sole, la cometa di Halley passa da una distanza massima dal Sole di $5{,}2 \times 10^{12}$ m a una distanza minima di $8{,}8 \times 10^{10}$ m. La sua velocità nel punto più lontano dal Sole vale $9{,}1 \times 10^{2}$ m/s.

▶ Quanto vale la velocità della cometa nel punto più vicino al Sole, se il momento angolare della cometa si conserva?

[$5{,}4 \times 10^{4}$ m/s]

35 ★ Le caratteristiche del moto della Terra intorno al Sole sono: all'afelio, la sua velocità di rivoluzione è $v_A = 2{,}93 \times 10^{4}$ m/s, la distanza dal Sole è $r_A = 1{,}52 \times 10^{11}$ m; al perielio la velocità di rivoluzione è $v_P = 3{,}03 \times 10^{4}$ m/s, la distanza dal Sole è $r_P = 1{,}47 \times 10^{11}$ m. La massa della Terra è $5{,}98 \times 10^{24}$ kg.

▶ Verifica che il moto di rivoluzione della Terra soddisfa la legge di conservazione del momento angolare.

36 ★★ Un lanciatore di martello scaglia il suo attrezzo dopo averlo fatto accelerare per 2,0 s applicandogli una forza media di 35 N tangente alla traiettoria. Il martello pesa 2,5 kg e la catena a cui è attaccato è lunga 90 cm.

▶ Quanto vale il momento angolare del martello al momento del lancio?

[63 kg · m²/s]

37 ★★ Un papà spinge il figlio di 14 kg seduto su un seggiolino di una giostra circolare per 0,90 s. La giostra ha un diametro di 2,6 m. Dopo la spinta il bimbo ruota compiendo 1 giro in 6,0 s.

▶ Qual è stata la forza media esercitata dal papà sul figlio? (Trascura la massa della giostra.)

[21 N]

38 ★★★ Agli estremi di un'asticella lunga $2l$ e di massa trascurabile sono saldate due sferette di massa m. Il sistema è poggiato su un piano orizzontale privo d'attrito. Le due sfere ruotano intorno a un asse perpendicolare al centro dell'asticella. La ve-