CAPITOLO 6

La scomposizione in fattori e le frazioni algebriche

1729

Salire su un taxi numero 1729 lascerebbe indifferente la maggior parte delle persone. Ma per il matematico indiano Srinivasa Ramanujan un episodio apparentemente banale fu l'occasione di una celebre scoperta…

…che cosa ha di speciale un numero così?

La risposta a pag. 425

1. La scomposizione in fattori dei polinomi

Scomporre in fattori un polinomio significa scriverlo sotto forma di prodotto di polinomi di grado inferiore.

La scomposizione in fattori viene anche chiamata *fattorizzazione*.

ESEMPIO

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1).$$

$(x^2 - 1)$ può essere scomposto ulteriormente in $(x + 1)(x - 1)$. Quindi:

$$x^4 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1).$$

Invece, $x^2 + 1$ non è scomponibile. Puoi verificarlo applicando il teorema di Ruffini.

Se leggi da destra verso sinistra, ritrovi un prodotto notevole.

DEFINIZIONE

Polinomio riducibile, polinomio irriducibile

Un polinomio in una o più variabili è riducibile quando può essere scomposto nel prodotto di polinomi, tutti di grado minore.

Un polinomio non riducibile si chiama irriducibile.

$x^4 - 1$, scomponibile in fattori, è riducibile, mentre $(x + 1)$, $(x - 1)$, $(x^2 + 1)$ sono irriducibili.

Possiamo fare un'analogia fra i polinomi irriducibili e i numeri primi.
Come la scomposizione di un numero naturale in fattori primi è unica (a meno dell'ordine), così anche la scomposizione di un polinomio in polinomi irriducibili è unica (a meno dell'ordine).

ESEMPIO

Il polinomio $x^2 - 2x + 1$ è riducibile. Infatti:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2.$$

Sono irriducibili i polinomi: $x^2 + 25$, $\quad x + 4$, $\quad 2x^2 + 5$.

I metodi per la scomposizione dei polinomi

Purtroppo non esiste un metodo generale per ottenere la scomposizione di un polinomio riducibile.

Studiamo allora alcuni dei metodi più comuni di fattorizzazione, basati su regole algebriche che conosciamo. I metodi sono:

- raccogliere a fattore comune;
- raccogliere parzialmente;
- individuare prodotti notevoli;
- riconoscere particolari trinomi di secondo grado;
- utilizzare la regola di Ruffini.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V13a

Il raccoglimento a fattore comune

Se in tutti i termini di un polinomio è contenuto uno stesso fattore, che può anche essere un numero, allora è possibile mettere in evidenza tale fattore con un raccoglimento a fattore comune.

Il raccoglimento a fattore comune si basa sulla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

ESEMPIO

$$ab + ac + ad = a(b + c + d);$$

$$5x^4 - 10x^3 - 35x^2 = 5x^2(x^2 - 2x - 7);$$

$$3(a + b) + x(a + b) = (a + b)(3 + x).$$

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Ragionar con lettere

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Che cosa si può dire, rispetto alla divisibilità, della somma tra il quadrato di un numero pari e il doppio di quel numero?

GIORGIA: «Non male come problema! Sicuramente è pari, quindi è divisibile per 2».

ALESSANDRO: «A me sembra divisibile per 4. E forse c'è anche qualche cosa in più...».

▶ Prova con qualche esempio, poi dimostra con il calcolo letterale la congettura che formuli.

Il raccoglimento parziale

Consideriamo il seguente polinomio P:

$$P = ac + bc + ad + bd + ae + be.$$

I primi due termini hanno in comune il fattore c, il terzo e il quarto il fattore d, il quinto e il sesto il fattore e.
Raccogliamo i fattori comuni:

$$P = c(a + b) + d(a + b) + e(a + b).$$

Il polinomio è ora formato da una somma di tre termini, che hanno in comune il fattore $(a + b)$. Raccogliamo $(a + b)$:

$$P = (a + b)(c + d + e).$$

Siamo giunti al prodotto di due fattori. Questo metodo di scomposizione viene detto **raccoglimento parziale**.

ESEMPIO $\underline{5ab} - \underline{10b^2} + \underline{3a^2b} - \underline{6ab^2} =$

$$= \underline{5b}(a - 2b) + \underline{3ab}(a - 2b) = (a - 2b)(5b + 3ab).$$

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V13b

Il metodo che applichiamo percorre in verso contrario i passaggi che utilizziamo nella moltiplicazione di due polinomi.

Il raccoglimento parziale è una scomposizione in fattori che avviene sempre in due fasi.

La scomposizione riconducibile a prodotti notevoli

Riscriviamo le uguaglianze che esprimono le regole dei prodotti notevoli già incontrati, ma scambiamo il primo con il secondo membro:

$$\boldsymbol{A^2 - B^2 = (A - B)(A + B);}$$
$$\boldsymbol{A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2;}$$
$$\boldsymbol{A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2;}$$
$$\boldsymbol{A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A + B + C)^2;}$$
$$\boldsymbol{A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3;}$$
$$\boldsymbol{A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3.}$$

Analogamente, per la differenza o la somma di due cubi abbiamo:

$$\boldsymbol{A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2);}$$
$$\boldsymbol{A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2).}$$

Questo modo di scrivere le uguaglianze fornisce delle regole di scomposizione in fattori. Infatti, nel primo membro di ogni uguaglianza troviamo la somma algebrica di più termini, nel secondo un prodotto di più fattori.

ESEMPIO $9x^2 - y^4 =$

$$= (3x)^2 - (y^2)^2 = (3x - y^2)(3x + y^2).$$

Quindi: $9x^2 - y^4 = (3x - y^2)(3x + y^2)$.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezioni ▶ V14a
▶ V14b
▶ V15a
▶ V15b

Si ha anche
$9x^2 = (-3x)^2$ e
$y^4 = (-y^2)^2$,
perciò possiamo anche scrivere:
$9x^2 - y^4 =$
$= (-3x + y^2)(-3x - y^2)$.

La scomposizione di particolari trinomi di secondo grado

Consideriamo il trinomio di secondo grado:

$$x^2 + 8x + 15.$$

Esso è particolare per due motivi:

- il coefficiente di x^2 è 1;
- i numeri 8 e 15 sono, rispettivamente, la somma e il prodotto di 3 e 5:

$$8 = 3 + 5 \qquad \text{e} \qquad 15 = 3 \cdot 5.$$

Ebbene, se proviamo a moltiplicare i due binomi $(x + 3)$ e $(x + 5)$, otteniamo proprio il trinomio $x^2 + 8x + 15$.
In generale, un trinomio di secondo grado del tipo $x^2 + sx + p$ è scomponibile nel prodotto $(x + a)(x + b)$ se $s = a + b$ e $p = ab$.
In altri termini:

> s è l'iniziale di «somma», p di «prodotto».

$$\boldsymbol{x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b).}$$

Dimostriamo questa uguaglianza mediante i seguenti passaggi:

$$x^2 + sx + p =$$

$$= x^2 + (a + b)x + ab =$$

$$= x^2 + ax + bx + ab =$$

Operiamo un raccoglimento parziale:

$$= x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b).$$

ESEMPIO

$$y^2 \underbrace{-\,3}_{s\,=\,-5+2}y \underbrace{-\,10}_{p\,=\,(-5)(+2)} = (y - 5)(y + 2).$$

La scomposizione mediante il teorema e la regola di Ruffini

> **BRAVI SI DIVENTA**
> Videolezione ▶ V16a

Il teorema di Ruffini permette spesso di scomporre in fattori un polinomio. Sappiamo infatti che se un polinomio $A(x)$ assume il valore 0 quando alla variabile x si sostituisce un valore a, allora il polinomio è divisibile per $x - a$.

Eseguendo la divisione $A(x) : (x - a)$, otteniamo il polinomio quoziente $Q(x)$ e, poiché il resto è zero, scriviamo $A(x)$ come prodotto di due fattori:

$$A(x) = (x - a)\,Q(x).$$

ESEMPIO

$$2x^3 - 5x^2 + 5x - 6$$

assume il valore 0 per $x = 2$, quindi è divisibile per $x - 2$.
Calcoliamo il quoziente applicando la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -5 & 5 & -6 \\ 2 & & 4 & -2 & 6 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 - x + 3$.
$(2x^3 - 5x^2 + 5x - 6) : (x - 2) = 2x^2 - x + 3$.

Quindi: $2x^3 - 5x^2 + 5x - 6 = (x - 2)(2x^2 - x + 3)$.

Il polinomio iniziale è stato scomposto nel prodotto di due fattori.

2 è uno zero del polinomio iniziale.

Dunque, se troviamo uno **zero *a* di un polinomio** $A(x)$, cioè un valore a tale che $A(a) = 0$, sappiamo anche scomporre il polinomio di partenza nel prodotto di due fattori.
Ma come trovare gli zeri di un polinomio? Per farlo può essere utile considerare la seguente regola.

REGOLA

Zeri interi di un polinomio

Se un numero intero annulla un polinomio a coefficienti interi, allora esso è divisore del termine noto.

Dalla regola possiamo dedurre un metodo per la ricerca degli zeri interi di un polinomio: se esistono, essi sono fra i divisori del termine noto.

ESEMPIO Dato il polinomio:

$$A(x) = 5x^2 - x - 4,$$

i divisori di -4 sono: $1, 2, 4, -1, -2, -4$.
Sostituendo a x il valore 1, otteniamo:

$$A(1) = 5 - 1 - 4 = 0,$$

quindi 1 è uno zero di $A(x)$, perciò il polinomio è divisibile per $x - 1$.

Calcoliamo il quoziente applicando la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 5 & -1 & -4 \\ 1 & & 5 & 4 \\ \hline & 5 & 4 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = 5x + 4$.

Pertanto, $5x^2 - x - 4 = (x - 1)(5x + 4)$.

Non è vero che *tutti* i divisori del termine noto sono zeri del polinomio. Per esempio:

$$A(2) = 5 \cdot 4 - 2 - 4 = \\ = 20 - 6 = 14 \neq 0.$$

Nell'esempio precedente tutti i possibili casi sono:

$\pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{4}{5},$

$\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{4}{1}.$

BRAVI SI DIVENTA Videolezione ▶ V17a

Più in generale si ha la seguente regola.

REGOLA

Zeri razionali di un polinomio

Tutti gli zeri razionali di un polinomio a coefficienti interi possono essere cercati tra le frazioni $\pm\frac{m}{n}$, dove m è un divisore del termine noto e n è un divisore del coefficiente del termine di grado massimo.

2. Il M.C.D. e il m.c.m. fra polinomi

DEFINIZIONE

M.C.D. fra polinomi

Si dice massimo comune divisore (M.C.D.) fra due o più polinomi il polinomio di grado massimo che è divisore di tutti i polinomi dati.

ESEMPIO

M.C.D.$[(x-3)(x+1)^3, (x-3)^2(x+1)^2] = (x-3)(x+1)^2$.

DEFINIZIONE

m.c.m. fra polinomi

Si dice minimo comune multiplo (m.c.m.) fra due o più polinomi il polinomio di grado minimo che è divisibile per tutti i polinomi dati.

ESEMPIO

m.c.m.$[(x-3)(x+1)^3, (x-3)^2(x+1)^2] = (x-3)^2(x+1)^3$.

Per calcolare il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo fra polinomi, utilizziamo il procedimento già illustrato per i numeri naturali e per i monomi.
Scomponiamo innanzitutto i polinomi in fattori irriducibili, raccogliendo anche gli eventuali coefficienti numerici in comune.

BRAVI SI DIVENTA Videolezione ▶ V17b

Il calcolo del M.C.D.

Il M.C.D. fra due o più polinomi è il prodotto dei loro **fattori irriducibili comuni**, presi una sola volta, con l'esponente minore.

ESEMPIO Determiniamo il M.C.D. fra i seguenti polinomi:

$$a^2b - b^3, \quad a^3 - b^3, \quad a^3 - 2a^2b + ab^2.$$

Scomponiamo in fattori:

$$a^2b - b^3 = b(a^2 - b^2) = b(a-b)(a+b);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$a^3 - 2a^2b + ab^2 = a(a^2 - 2ab + b^2) = a(a-b)^2.$$

Mettiamo in colonna i fattori:

	b	$a-b$	$a+b$	
		$a-b$		a^2+ab+b^2
a		$(a-b)^2$		

L'unico fattore in comune è $(a-b)$, che prendiamo con l'esponente minore:

M.C.D. $= a - b$.

Il calcolo del m.c.m.

Il m.c.m. fra due o più polinomi è il prodotto dei loro **fattori irriducibili comuni e non comuni**, presi una sola volta, con l'esponente maggiore.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V17c

ESEMPIO

Determiniamo il m.c.m. fra i tre polinomi dell'esempio precedente.

Dopo avere incolonnato i fattori, scegliamo quelli comuni e non comuni, ciascuno preso con l'esponente maggiore.

	b	$a-b$	$a+b$	
		$a-b$		a^2+ab+b^2
a		$(a-b)^2$		

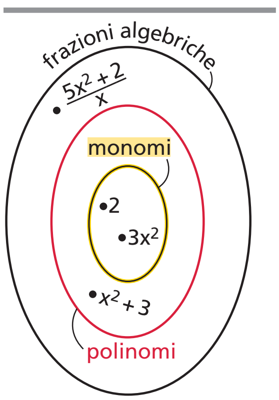
Pertanto: m.c.m. $= a \cdot b \cdot (a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)$.

3. Le frazioni algebriche

Abbiamo già osservato che, nella divisione fra polinomi, non sempre il risultato è un polinomio.

Per esempio, $\frac{x-1}{x}$, $\frac{x}{2x+1}$, $\frac{3x^2}{x^2-1}$ non sono polinomi.

È quindi necessario introdurre un nuovo tipo di espressione letterale, che chiameremo *frazione algebrica*.



▲ **Figura 1** **L'insieme delle frazioni algebriche è un ampliamento dell'insieme dei polinomi.**

DEFINIZIONE

Frazione algebrica

Dati i polinomi A e B, con B diverso dal polinomio nullo,

la frazione $\frac{A}{B}$ viene detta frazione algebrica.

Ogni monomio o polinomio può essere considerato una frazione algebrica il cui denominatore è il monomio 1. Dunque l'insieme delle frazioni algebriche include l'insieme dei polinomi.

Per esempio, $4a + b$ si identifica con la frazione algebrica $\frac{4a+b}{1}$.

Le condizioni di esistenza delle frazioni algebriche

Una frazione algebrica assume valori che dipendono da quelli assegnati alle lettere che vi compaiono, quindi è una funzione rispetto alle variabili contenute nei suoi polinomi.
Essa può perdere significato per particolari valori dati alle lettere. Per esempio, la frazione:

$$\frac{x-3}{x-2}$$

non ha significato per $x = 2$, poiché non può avere denominatore nullo.

Una frazione algebrica perde significato per tutti e soli quei valori delle lettere che annullano il denominatore.

Le **condizioni di esistenza** di una frazione algebrica sono tutte le disuguaglianze che le variabili devono verificare affinché il denominatore non sia nullo.

Indichiamo le condizioni di esistenza con la sigla «C.E.».

ESEMPIO

La frazione $\frac{x-1}{x(x-4)}$ perde significato quando $x = 0$ e $x = 4$.

Scriviamo:

$$\text{C.E.: } x \neq 0 \wedge x \neq 4.$$

Per operare con le frazioni algebriche dobbiamo sempre scrivere le condizioni di esistenza.

4. Il calcolo con le frazioni algebriche

Nel capitolo 2 abbiamo definito *equivalenti* due frazioni numeriche nelle quali risultano uguali i due prodotti «in croce».

Analogamente, diciamo che anche due frazioni algebriche sono equivalenti se sono uguali i due prodotti «in croce».

Per esempio, sono equivalenti le frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{8}{10}$ perché $8 \cdot 5 = 10 \cdot 4$.

EQUIVALENZA

	FRAZIONI NUMERICHE	FRAZIONI ALGEBRICHE
definizione di equivalenza	$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ a, b, c, d rappresentano numeri interi	$\frac{A}{B} \sim \frac{C}{D} \Leftrightarrow AD = BC$ A, B, C, D rappresentano polinomi
esempio	$\frac{3}{5} \sim \frac{21}{35}$, infatti: $3 \cdot 35 = 105$; $5 \cdot 21 = 105$.	$\frac{a-b}{a} \sim \frac{a^2-b^2}{a^2+ab}$, infatti: $(a-b)(a^2+ab) = a^3 + \cancel{a^2b} - \cancel{a^2b} - ab^2 = a^3 - ab^2$; $a(a^2-b^2) = a^3 - ab^2$.

La semplificazione delle frazioni algebriche

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V18a

Se dividiamo il numeratore e il denominatore di una frazione algebrica per lo stesso polinomio (diverso da 0), otteniamo una frazione algebrica equivalente. Vale, cioè, anche per le frazioni algebriche la **proprietà invariantiva**.
La semplificazione di una frazione algebrica si ottiene pertanto dividendo numeratore e denominatore per uno stesso polinomio, con la condizione che esso sia diverso da 0.
La tabella seguente illustra il procedimento, che è lo stesso che si segue per semplificare una frazione numerica.

SEMPLIFICAZIONE		
PROCEDIMENTO	FRAZIONE NUMERICA	FRAZIONE ALGEBRICA
la frazione data è	$\frac{126}{54}$	$\frac{a^3b+2a^2b^2+ab^3}{a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3}$
scomponiamo in fattori numeratore e denominatore e poniamo le C.E.	$\frac{2\cdot 3^2\cdot 7}{2\cdot 3^3}$	$\frac{ab(a^2+2ab+b^2)}{a(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)}=\frac{ab(a+b)^2}{a(a+b)^3}$ C.E.: $a\neq 0$ e $a+b\neq 0$
dividiamo numeratore e denominatore per i fattori comuni	$\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3^2}\cdot 7}{\cancel{2}\cdot 3^{\cancel{3}}}$	$\frac{\cancel{a}b\cancel{(a+b)^2}}{\cancel{a}(a+b)^{\cancel{3}}}$
la frazione semplificata è	$\frac{7}{3}$	$\frac{b}{a+b}$

Nella semplificazione occorre fare attenzione a semplificare solo i fattori, **mai gli addendi**.

Non possiamo semplificare $\frac{\cancel{b}}{a+\cancel{b}}$. SBAGLIATO!
Se hai dei dubbi, prova a sostituire alle lettere dei numeri. Per esempio, se $a=2$ e $b=9$:
$$\frac{9}{2+9}=\frac{9}{11},$$
mentre $\frac{\cancel{9}}{2+\cancel{9}}=$
$$=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

L'addizione e la sottrazione di frazioni algebriche

DEFINIZIONE

Somma algebrica di frazioni algebriche

La somma algebrica di due o più frazioni algebriche, che hanno lo stesso denominatore, è la frazione algebrica che ha per denominatore lo stesso denominatore e per numeratore la somma algebrica dei numeratori:
$$\frac{A}{D}+\frac{B}{D}-\frac{C}{D}=\frac{A+B-C}{D}.$$

ESEMPIO

$$\frac{3a}{a-2}+\frac{5a}{a-2}-\frac{7a}{a-2}=\frac{3a+5a-7a}{a-2}=\frac{a}{a-2}.$$
C.E.: $a\neq 2$.

Per sommare due o più frazioni con denominatore diverso bisogna prima ridurle allo stesso denominatore, poi sommare i numeratori, come avviene per le frazioni numeriche.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V19a

La tabella seguente riassume i vari passaggi, affiancando un esempio numerico a uno algebrico.

SOMMA ALGEBRICA

PROCEDIMENTO	FRAZIONI NUMERICHE	FRAZIONI ALGEBRICHE
la somma data è	$\frac{5}{6}+\frac{3}{28}-\frac{1}{21}$	$\frac{5}{a^2+ab}+\frac{a+b}{a^2b}-\frac{1}{ab+b^2}$
scomponiamo in fattori i denominatori e poniamo le C.E.	$\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{3}{2^2\cdot 7}-\frac{1}{3\cdot 7}$	$\frac{5}{a(a+b)}+\frac{a+b}{a^2b}-\frac{1}{b(a+b)}$ C.E.: $a\neq 0 \wedge b\neq 0 \wedge a+b\neq 0$
riduciamo le frazioni allo stesso denominatore, cioè al m.c.m. fra i denominatori	$\frac{2\cdot 7\cdot 5+3\cdot 3-2^2\cdot 1}{2^2\cdot 3\cdot 7}$	$\frac{5ab+(a+b)(a+b)-a^2}{a^2b(a+b)}$
eseguiamo le moltiplicazioni al numeratore	$\frac{70+9-4}{2^2\cdot 3\cdot 7}$	$\frac{5ab+a^2+2ab+b^2-a^2}{a^2b(a+b)}$
eseguiamo le somme algebriche al numeratore	$\frac{75}{2^2\cdot 3\cdot 7}$	$\frac{7ab+b^2}{a^2b(a+b)}$
scomponiamo in fattori il numeratore, per semplificare la frazione	$\frac{\cancel{3}\cdot 5^2}{2^2\cdot\cancel{3}\cdot 7}$	$\frac{\cancel{b}(7a+b)}{a^2\cancel{b}(a+b)}$
scriviamo il risultato	$\frac{25}{28}$	$\frac{7a+b}{a^2(a+b)}$

La moltiplicazione di frazioni algebriche

DEFINIZIONE

Prodotto di due frazioni algebriche

Il prodotto di due o più frazioni algebriche è una frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}.$$

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V20a

MOLTIPLICAZIONE

PROCEDIMENTO	FRAZIONI NUMERICHE	FRAZIONI ALGEBRICHE
la moltiplicazione data è	$\frac{25}{21}\cdot\frac{14}{40}$	$\frac{a^2+2ab+b^2}{ab-b^2}\cdot\frac{a^2-ab}{a^4+a^3b}$
scomponiamo in fattori i numeratori e i denominatori e poniamo le C.E.	$\frac{5^2}{3\cdot 7}\cdot\frac{2\cdot 7}{2^3\cdot 5}$	$\frac{(a+b)^2}{b(a-b)}\cdot\frac{a(a-b)}{a^3(a+b)}$ C.E.: $a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge a+b\neq 0\wedge a-b\neq 0$
semplifichiamo	$\frac{5^{\cancel{2}}}{3\cdot\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{7}}{2^{\cancel{3}2}\cdot\cancel{5}}$	$\frac{(a+b)^{\cancel{2}}}{b(\cancel{a-b})}\cdot\frac{\cancel{a}(\cancel{a-b})}{a^{\cancel{3}2}(\cancel{a+b})}$
moltiplichiamo numeratori e denominatori	$\frac{5}{12}$	$\frac{a+b}{a^2b}$

ESPLORAZIONE: L'ALGEBRA SINCOPATA

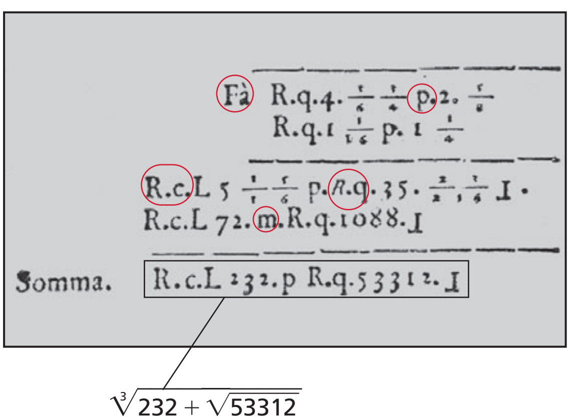
◀ **Jacopo de' Barbari, *Ritratto di Fra Luca Pacioli*, Napoli, Museo e Gallerie Nazionali di Capodimonte.**

La *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* di Luca Pacioli, stampata in Italia nel 1494, dopo l'invenzione di Gutenberg, è un trattato di algebra, aritmetica e geometria.
Qui l'autore fa uso di notazioni abbreviate di algebra, per esempio:

***co* per *cosa* (x),**
***ce* per *censo* (x^2),**
***ae* per *aequalis* (uguale).**

Per descrivere le espressioni algebriche gli antichi utilizzavano unicamente parole e non simboli. Fu soltanto con Diofanto, vissuto ad Alessandria d'Egitto intorno al 250 a.C., che si iniziò a usare simboli al posto delle parole. Ma fu soprattutto in Europa, ad opera in particolare di Luca Pacioli (1445-1514) e di Raffaele Bombelli (1526-1572), che si diffuse l'*algebra sincopata*, con parole abbreviate (*synkóptein* in greco significa *spezzare*) al posto delle variabili e delle operazioni.

▼ **Esempio di scrittura sincopata dall'*Algebra* di Bombelli.**



Nelle righe della figura, tratte dall'*Algebra* di Bombelli, puoi notare l'uso di abbreviazioni.

L ⅃	indica	( )
Fà		$=$
R.q.		$\sqrt{}$
R.c.		$\sqrt[3]{}$
p.		$+$
m.		$-$

Bombelli usò poi una convenzione particolare per indicare l'incognita e le sue potenze. Per esempio, per indicare $3x^2 + 2x - 4x^3$ avrebbe scritto:

$$3\,\overset{2}{\cup}\text{p. } 2 \cup \text{m. } 4\,\overset{3}{\cup}.$$

IN CINQUE SLIDE

Indica come Bombelli avrebbe scritto le seguenti espressioni:

$$5x^2 + 2 - x,\quad \sqrt[3]{9x^3 + 1},\quad \sqrt[2]{127 - \sqrt[3]{x + 31}}\,.$$

Cerca in Internet altri esempi di algebra sincopata e realizza una presentazione multimediale.

Cerca nel web: Diofanto, Bombelli, Pacioli, algebra sincopata, syncopated algebra.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V20b

La divisione di frazioni algebriche

DEFINIZIONE

Quoziente di frazioni algebriche

Il quoziente di due frazioni algebriche è la frazione algebrica che si ottiene moltiplicando la prima frazione per la reciproca della seconda:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}.$$

Le condizioni di esistenza sono $B \neq 0$ e $D \neq 0$ per l'esistenza delle frazioni algebriche, $C \neq 0$ perché sia possibile eseguire la divisione.

ESEMPIO

1. $\frac{6a^2b}{5cd} : \frac{8a^2}{d^2} = \frac{\cancel{6}^{3}\cancel{a^2}b}{5c\cancel{d}} \cdot \frac{d^{\cancel{2}}}{\cancel{8}_{4}\cancel{a^2}} = \frac{3db}{20c}$; C.E.: $c \neq 0 \wedge d \neq 0 \wedge a \neq 0$.

2. $\frac{x+y}{x^2y - xy^2} : \frac{xy}{x^2 - y^2} =$

$$= \frac{x+y}{xy\,(x-y)} : \frac{xy}{(x+y)(x-y)} =$$

C.E.: $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge x \neq y \wedge x \neq -y$,

$$= \frac{x+y}{xy\cancel{(x-y)}} \cdot \frac{(x+y)\cancel{(x-y)}}{xy} = \frac{(x+y)^2}{x^2y^2}.$$

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V20c

La potenza di frazioni algebriche

DEFINIZIONE

Potenza di una frazione algebrica

La potenza di una frazione algebrica è la frazione algebrica che ha per numeratore la potenza del numeratore e per denominatore la potenza del denominatore:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}.$$

ESEMPIO

1. $\left(\frac{a+b^2}{a^2-2b}\right)^3 = \frac{(a+b^2)^3}{(a^2-2b)^3}$.

2. $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^2 = \frac{9a^4}{4b^2}$.

1729

…che cosa ha di speciale un numero così?

Il quesito completo a pag. 413

Il numero 1729 è al centro di un aneddoto che vide protagonisti due matematici del secolo scorso, l'indiano Srinivasa Ramanujan e l'inglese Godfrey Hardy. Un giorno del 1917 Hardy fece visita all'amico, ricoverato per malattia all'ospedale londinese di Putney. Gli raccontò di aver preso il taxi 1729, un numero che suonava piuttosto insulso alle sue orecchie. Era forse di cattivo augurio? Ramanujan tranquillizzò il collega, replicando: «Ma no, Hardy! È un numero molto interessante. È il più piccolo numero intero esprimibile in due modi diversi come somma di due cubi positivi».
Ramanujan faceva riferimento alla seguente uguaglianza:
$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.
Non sappiamo come il matematico l'abbia scoperta, ma noi, al suo posto, avremmo potuto utilizzare la scomposizione della somma di due cubi:

$$x^3 + y^3 = (x + y)\,(x^2 - xy + y^2).$$

Sapendo che gli unici fattori di 1729 sono 7, 13, 19 (ovvero: $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$), il problema si traduce in:

$$\begin{aligned}&1729 = x^3 + y^3 =\\ &= (x + y)(x^2 - xy + y^2) =\\ &= 7 \cdot 13 \cdot 19.\end{aligned}$$

Si tratta di trovare due numeri naturali x e y tali che:
$(x + y)$ sia uguale a 7, 13 o 19
e $(x^2 - xy + y^2)$ al prodotto dei due numeri rimanenti. Le possibili scelte di x e y tali che il primo fattore $(x + y)$ sia uguale al numero 7 sono: $(6 + 1)$, $(5 + 2)$, $(4 + 3)$. Nessuna di queste coppie dà come somma di cubi 1729. Passiamo al numero 13. Le possibilità di esprimere il 13 come somma di due numeri naturali sono: $(12 + 1)$, $(11 + 2)$, $(10 + 3)$, $(9 + 4)$, $(8 + 5)$, $(7 + 6)$. Elevando al cubo e sommando i termini, si può vedere che solo per la coppia 12 e 1 la somma dei cubi è 1729. Ecco la prima soluzione.
Analogamente si procede per il numero 19, scoprendo, dopo un po' di calcoli, che 9 e 10 sono la seconda soluzione del problema.
Ma Ramanujan ha detto qualcosa in più: 1729 è *il più piccolo* numero intero esprimibile come somma di due cubi positivi in due modi diversi. Esiste una dimostrazione di questa affermazione, ma è decisamente laboriosa. E probabilmente il giovane matematico non ne era a conoscenza. Era, infatti, praticamente privo di formazione universitaria. Nato in un piccolo villaggio indiano nel 1887 da una famiglia molto povera, aveva dimostrato fin da bambino uno straordinario talento per i numeri ed era arrivato a «intuire» da autodidatta risultati complessi, pur non possedendo il formalismo per dimostrarli. Grazie all'interessamento del matematico Hardy, che riconobbe le sue intrinseche abilità, Ramanujan riuscì a ottenere la laurea all'Università di Cambridge senza dare alcun esame. La scoperta delle proprietà del numero 1729 è solo un esempio delle sue eccezionali capacità di calcolo. Purtroppo morì molto giovane, stroncato dalla tubercolosi a soli 32 anni.

▲ Srinivasa Ramanujan (al centro) e G.H. Hardy (all'estrema destra), con altri colleghi, al Trinity College, Cambridge.

CITAZIONI FAMOSE

Il numero 1729 compare in diversi episodi della serie televisiva *Futurama*, ideata da Matt Groening, padre dei *Simpson*. In un episodio, per esempio, 1729 è il numero della navicella spaziale *Nimbus*; in un altro, il messaggio di una cartolina natalizia inviata al robot *Bender*. Un riferimento al numero 1729 è presente anche nel film *Proof*, dove Anthony Hopkins interpreta la parte di un genio matematico ai limiti della follia.

LA TEORIA IN SINTESI

La scomposizione in fattori e le frazioni algebriche

1. La scomposizione in fattori dei polinomi

Scomporre un polinomio in fattori significa scriverlo come prodotto di polinomi. Se un polinomio si può scomporre, diciamo che è **riducibile**. Altrimenti è **irriducibile**.
Abbiamo esaminato i seguenti **metodi di scomposizione**.

- Il **raccoglimento a fattore comune**.

ESEMPIO $ab + ac = a(b + c)$.

- Il **raccoglimento parziale**.

ESEMPIO $ax + ay + bx + by =$
$= a(x + y) + b(x + y) =$
$= (x + y)(a + b)$.

- La scomposizione riconducibile a prodotti notevoli:

– la **differenza di due quadrati**:
$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$.

ESEMPIO $9a^2 - 1 = (3a + 1)(3a - 1)$.

– il **quadrato di un binomio**:
$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$.

ESEMPIO $25x^2 - 30x + 9 = (5x - 3)^2$.

– il **quadrato di un trinomio**:
$\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc =}$
$\boldsymbol{= (a + b + c)^2}$.

ESEMPIO $x^2 + 1 + 4y^2 + 2x - 4xy - 4y =$
$= (x + 1 - 2y)^2$.

– il **cubo di un binomio**:
$\boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3}$.

ESEMPIO $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = (a - 2)^3$.

– la **somma** o la **differenza di due cubi**:
$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$;
$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$.

ESEMPIO $27 - y^3 = (3 - y)(9 + 3y + y^2)$.

- La scomposizione di **particolari trinomi di secondo grado**:

$$x^2 + sx + p = (x + x_1)(x + x_2),$$

essendo $s = x_1 + x_2$, $\quad p = x_1 \cdot x_2$.

ESEMPIO $a^2 + 7a + 6 = (a + 1)(a + 6)$.

- La scomposizione mediante **il teorema e la regola di Ruffini**.

ESEMPIO Dato il polinomio

$$P(a) = 3a^2 + a - 2,$$

cerchiamo i suoi zeri fra i divisori del termine noto, ossia $+1, -1, +2, -2$, e fra le frazioni $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$.

$P(1) = 3(1)^2 + 1 - 2 = 2 \neq 0$;
$P(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 2 = 0$.

-1 è uno zero di $P(a)$, quindi $P(a)$ è divisibile per $a + 1$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & +1 & -2 \\ -1 & & -3 & +2 \\ \hline & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

$3a - 2$ è il quoziente della divisione, quindi:

$$3a^2 + a - 2 = (a + 1)(3a - 2).$$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu - 1** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Statistica*

2. Il M.C.D. e il m.c.m. fra polinomi

La ricerca del **M.C.D.** e del **m.c.m.** fra polinomi avviene in modo analogo a quello visto per i monomi. I polinomi devono essere scomposti in fattori irriducibili.

POLINOMI	FATTORI
$a^2 - 1$	$(a+1)(a-1)$
$a^2 + 2a + 1$	$(a+1)^2$
$a^2 + 3a + 2$	$(a+1)(a+2)$

- M.C.D. $= a + 1$;
  è il prodotto di tutti i fattori comuni, presi ciascuno con l'esponente minore.
- m.c.m. $= (a+1)^2(a-1)(a+2)$;
  è il prodotto di tutti i fattori irriducibili, comuni e non comuni, presi ciascuno con l'esponente maggiore.

3. Le frazioni algebriche

Una **frazione algebrica** è una frazione che ha dei polinomi al numeratore e al denominatore. Il polinomio al denominatore non può essere il polinomio nullo. Una frazione algebrica non esiste per quei valori delle lettere che annullano il denominatore.

Le **condizioni di esistenza** (C.E.) sono tutte le disuguaglianze che le variabili devono verificare affinché il denominatore non sia nullo.

ESEMPIO

$\frac{2x+3}{x-5}$ ha come condizione di esistenza

C.E.: $x \neq 5$, perché per $x = 5$: $\frac{2(5)+3}{(5)-5} = \frac{13}{0}$,

e $\frac{13}{0}$ non ha significato.

4. Il calcolo con le frazioni algebriche

È possibile semplificare le espressioni con frazioni algebriche facendo uso di **regole di calcolo** analoghe a quelle delle frazioni numeriche.

ESEMPIO

1. $$\frac{a^2+ab}{ab-b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2} + \frac{b}{a} =$$

Scomponiamo in fattori e semplifichiamo:

$$= \frac{a\cancel{(a+b)}}{b\cancel{(a-b)}} \cdot \frac{\cancel{(a+b)}\cancel{(a-b)}}{\cancel{(a+b)^2}} + \frac{b}{a} =$$

C.E.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b \wedge a \neq -b$.

Moltiplichiamo:

$$= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} =$$

Addizioniamo:

$$= \frac{a^2+b^2}{ab}.$$

2. $$\frac{x+y}{x^2-y^2} : \frac{x^2y-x^2}{x^3-yx^2} - \frac{1}{x} =$$

Scomponiamo in fattori e semplifichiamo:

$$= \frac{\cancel{x+y}}{\cancel{(x+y)}(x-y)} : \frac{\cancel{x^2}(y-1)}{\cancel{x^2}(x-y)} - \frac{1}{x} =$$

C.E.: $x \neq -y \wedge x \neq y \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 1$.

Moltiplichiamo la prima frazione per la reciproca della seconda e semplifichiamo:

$$= \frac{1}{\cancel{x-y}} \cdot \frac{\cancel{x-y}}{y-1} - \frac{1}{x} =$$

Moltiplichiamo:

$$= \frac{1}{y-1} - \frac{1}{x} =$$

Sottraiamo:

$$= \frac{x-y+1}{(y-1)x} = \frac{x-y+1}{xy-x}.$$

1. La scomposizione in fattori dei polinomi

Teoria a pag. 413

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 TEST I seguenti polinomi sono tutti scomposti in fattori, *tranne* uno. Quale?

A $(x+1)(x-1)$

B $ab(x-2)$

C $ax^2(a+2)$

D $a+2b(a-2b)$

E $(a-b)(a+b)$

2 VERO O FALSO?

a) Ogni binomio è scomponibile in fattori. V F

b) Il polinomio $7x+a(x+1)$ è scomposto in fattori. V F

c) La scomposizione in fattori di un polinomio è unica, a meno dell'ordine. V F

d) Tutti i binomi di primo grado sono irriducibili. V F

ESERCIZI

Il raccoglimento a fattore comune

ESERCIZIO GUIDA

3 Quando è possibile, scomponiamo in fattori i seguenti polinomi, raccogliendo a fattore comune:

a) $14a^4-8a^2b^2$; b) $\frac{2}{3}x^2y+\frac{2}{9}y$; c) $a(2a-b)+(2a-b)^2$;

d) $x(a-b)+(b-a)$; e) $b^{2n+1}-b^n$, con $n\in\mathbb{N}$.

a) Scomponiamo $14a^4-8a^2b^2$.

Calcoliamo il M.C.D. fra i termini del polinomio:

$$\text{M.C.D.}(14a^4, 8a^2b^2)=2a^2.$$

Raccogliamo $2a^2$ nel polinomio dato:

$$14a^4-8a^2b^2=2a^2(\ldots\ldots\ \ldots\ldots).$$

Dividiamo il primo termine per il M.C.D.:

$$14a^4 : 2a^2 = 7a^2$$

$$\underline{14a^4}-8a^2b^2=2a^2(\underline{7a^2}\ldots\ldots).$$

Dividiamo il secondo termine per il M.C.D.:

$$-8a^2b^2 : 2a^2 = -4b^2$$

$$14a^4\underline{-8a^2b^2}=2a^2(7a^2\underline{-4b^2}).$$

Dunque si ha:

$$14a^4-8a^2b^2=2a^2(7a^2-4b^2).$$

b) Scomponiamo $\frac{2}{3}x^2y+\frac{2}{9}y$.

$$\text{M.C.D.}\left(\frac{2}{3}x^2y, \frac{2}{9}y\right)=y.$$

Raccogliamo $\frac{2}{3}y$ nel polinomio dato: $\frac{2}{3}x^2y+\frac{2}{9}y=\frac{2}{3}y\left(x^2+\frac{1}{3}\right)$.

Avremmo anche potuto raccogliere $\frac{2}{9}y$, ottenendo: $\frac{2}{3}x^2y+\frac{2}{9}y=\frac{2}{9}y(3x^2+1)$.

c) Scomponiamo $a(2a-b)+(2a-b)^2$. In questo caso non c'è bisogno di calcolare il M.C.D., perché il binomio scritto fra parentesi è già messo in evidenza ed è comune ai due termini del polinomio.

Raccogliamo $(2a-b)$:

$$a(2a-b)+(2a-b)^2=(2a-b)\cdot[a+(2a-b)]=(2a-b)(3a-b).$$

$\boldsymbol{a(2a-b):(2a-b)}$ $\quad$ $\boldsymbol{(2a-b)^2:(2a-b)}$

d) Scomponiamo $x(a-b)+(b-a)$.

I due termini entro parentesi sono $(a-b)$ e $(b-a)$. Essi sono opposti, pertanto possiamo raccogliere in uno dei due, per esempio in $b-a$, il fattore -1 e scrivere $(b-a)=-(a-b)$.

Raccogliamo $(a-b)$:

$$x(a-b)-(a-b)=(a-b)(x-1).$$

$\boldsymbol{x(a-b):(a-b)}$ $\quad$ $\boldsymbol{-(a-b):(a-b)}$

e) Per la prima proprietà delle potenze $(a^n\cdot a^m=a^{n+m})$:

$$b^{2n+1}=b^{2n}\cdot b^1=b^n\cdot b^n\cdot b^1.$$

Si ha, raccogliendo b^n:

$$b^{2n+1}-b^n=b^n\cdot b^n\cdot b^1-b^n=b^n(b^{n+1}-1).$$

COMPLETA

4 $2a^2+8x^2=2(\ldots+\ldots)$; $\quad -5a+25b=-5(\ldots-\ldots)$; $\quad 3x^3-9x^9=3x^3(\ldots-3\ldots)$.

5 $-4ax-4x=-4x(a+\ldots)$; $\quad 5x^2+5y^2=\ldots(x^2+\ldots)$; $\quad -2a+\ldots=-2(\ldots-2b)$.

6 $-y-9y^2=\ldots(\ldots+9y)$; $\quad -10x^2+20xy=-10x(\ldots-\ldots)$; $\quad 9a^2-3ax=\ldots(3a-\ldots)$.

7 $by^2+2b^2y-by=\ldots(\ldots+\ldots-1)$; $\quad -a^2x^4-a^3x^3+2a^4x^2=-a^2x^{\cdots}(x^{\cdots}+\ldots-\ldots)$.

8 $3\ldots+9x^{\cdots}-x^{\cdots}=x(3+9x-x^2)$; $\quad \dfrac{2}{7}xy+\dfrac{4}{21}x^2=\ldots x(\ldots+\ldots)$.

Quando è possibile, scomponi in fattori, raccogliendo a fattore comune (con $n\in\mathbb{N}$).

9 $3x+6y$; $\quad a^3x^2-a^3y$; $\quad x^3+4x$.

10 $8a^4-4a^3+2a^2$; $\quad 3xy+6x^2-9y^2$; $\quad a^2b-ab$.

11 $2ab-4a^2$; $\quad \dfrac{1}{2}a^3+\dfrac{1}{2}a$; $\quad 2ax-4a+2a^2$.

12 $2x^2y+6xy^2+4y^3$; $\quad -3x^2-15x-21$; $\quad a^3x^3-x+ax^2$.

13 $-2a^2-4a-8$; $\quad a^2x+12ax+9ax^2$; $\quad -5y^2+15xy^2-25y$.

14 $x^4+x^7+x^5$; $\quad 2x^2y^2+2x^2y^3-4xy^2$; $\quad \dfrac{1}{4}x^2y-\dfrac{1}{16}x^2$.

15 $5x-10xy+15y;$ $\quad -27a^2+9ay-18a;$ $\quad -6a^3+9a^2b+3a^2.$

16 $-2a^2+4ab-2a^3;$ $\quad cx^2-4cx+c^2x^2;$ $\quad 6xy^2-4x^2+10xy.$

17 $3a+9b-15;$ $\quad 4a^4-2a^3-2a^6;$ $\quad -3a^5+12a^3b-6a^2.$

18 $6ax+2a-4a^2x^2;$ $\quad 125x^2-25x+25xy;$ $\quad 12a^2b^3+30a^3b+6ab.$

19 $\frac{2}{3}a^2y^3+\frac{1}{3}ay^2;$ $\quad 4x-2x^2-2;$ $\quad \frac{2}{5}ax^2+\frac{4}{5}a.$

20 $18a^3y-4a^4y^3+10a^5y^2;$ $\quad 4x^3+3x^2y;$ $\quad \frac{1}{9}y^3-3y^2.$

21 $\frac{1}{3}x^2y-\frac{1}{9}x^3y^2;$ $\quad 5x^3-15x^2y+20x^4;$ $\quad 4x^2y^5-12xy^6-6xy^5.$

22 $\frac{1}{2}a^2bc-\frac{1}{4}a^4bc+\frac{1}{8}a^3b^3;$ $\quad \frac{1}{3}a^4-3a^3;$ $\quad \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}xy^2-\frac{3}{2}xy^4.$

23 $\frac{5}{2}a^2b-\frac{15}{4}ab^2+\frac{3}{4}ab;$ $\quad \frac{4}{9}x^{18}-\frac{2}{3}x^6+x^3;$ $\quad -2a^9+8a^4+2a^3.$

24 $15a^4+6a^2b+3a;$ $\quad 2ac+14ab;$ $\quad \frac{2}{3}a^2b+\frac{10}{9}ab^2.$

25 $3z^2-27y^3z+12y^2z^2;$ $\quad 12x^3y^2+3x^2y^2;$ $\quad a^3-a^2-a+2a^2.$

26 $a(x+y)+b(x+y);$ $\quad 4a(x+2y)-2(x+2y);$ $\quad x(a+b)-(a+b).$

27 $(x+3y)-(x+3y)^2;$ $\quad (a-b)^2-(a-b);$ $\quad (2x-3y^2)^3+(2x-3y^2)^2.$

28 $(a+1)(a+2)+(-a-1)(a+3);$ $\quad 2(x+y)(a+b)+\frac{1}{2}(x+y).$

29 $(a^2-b)^4+2(a^2-b)^3-(a^2-b)^2;$ $\quad (a+b)^2(2b-3)-2(a+b)(2b-3)^2.$

30 $(2a+b)^2-3(b+2a);$ $\quad x(a-1)-y(1-a);$ $\quad 3(a-2x)-2y(2x-a).$

31 $x^{2n}+2x^n-\frac{1}{2}x^{3n+1};$ $\quad -a^n+\frac{1}{3}a^{2+n};$ $\quad \frac{3}{2}x^ny^{2n}+\frac{5}{2}x^{2n}y^n.$

32 $3x^n+6x^{n-2}$, con $n\geq 2$; $\quad x^{n+1}-x^{2n}+x^{n+2};$ $\quad xa^{n+2}-ya^{n+1}+za^n.$

33 $(a+2)^n-(a+2)^{n+1};$ $\quad (x+3)^{2+n}-(x+3)^n.$

34 $(b+1)^{n+3}-b^3(b+1)^n-3b^2(b+1)^n;$ $\quad (a-3)^{2n}-(3-a)^{2n+1}.$

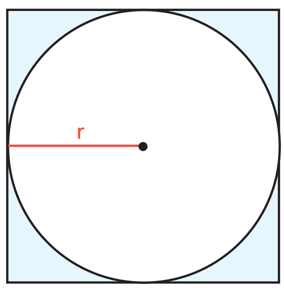
35 TEST Sui due binomi di primo grado $5a - 40$ e $3b + 1$, possiamo affermare che:

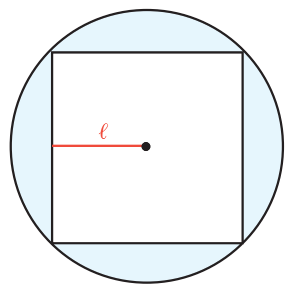
A sono entrambi irriducibili.
B il secondo è riducibile e il primo è irriducibile.
C sono entrambi scomponibili mediante raccoglimento a fattore comune.
D solo il primo è scomponibile mediante raccoglimento a fattore comune.
E solo il secondo è scomponibile mediante raccoglimento a fattore comune.

36 TEST Una delle seguenti uguaglianze è *falsa*. Quale?

A $mx + my = (x + y)m$
B $ax + bx + x = x(a + b + 1)$
C $x^2 + x = x(x + 1)$
D $am + mb + m = m(a + b)$
E $ax^2 + bx^2 = (a + b)x^2$

37 Trova l'area della parte colorata usando il dato inserito nella figura e scrivi il risultato come prodotto di fattori.





38 Considera i due polinomi $2x^n + 3x^2$ e $3x^3 - 2x^n$.
a) Determina per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ è possibile raccogliere sia il fattore x^2 nel primo polinomio sia il fattore x^3 nel secondo e scrivi la scomposizione.
b) Sostituisci nei due polinomi il più piccolo valore di n tra quelli trovati nel punto **a**), esegui la somma e la scomposizione in fattori. [a) $n \geq 3$, $x^2(2x^{n-2} + 3)$, $x^3(3 - 2x^{n-3})$; b) $3x^2(x + 1)$]

39 Per quale valore di $k \in \mathbb{N}$ il polinomio $x^{2k+3} - x^{k+1}$ è scomponibile in $x^4(x^5 - 1)$? [$k = 3$]

Il raccoglimento parziale

ESERCIZIO GUIDA

40 Scomponiamo in fattori i seguenti polinomi:

a) $3bc + 2ab - 2a - 3c$; b) $2bx^3 - 2bx^2 - x^3 + x^2$; c) $3x^{n+1}y^2 + (x - 1)^2 - 3x^n y^2$, con $n \in \mathbb{N}$.

a) Scomponiamo $3bc + 2ab - 2a - 3c$.

Possiamo procedere in due modi alternativi:

1. $3bc + 2ab - 2a - 3c =$

Raccogliamo fra i termini sottolineati rispettivamente in blu e in rosso i monomi $3c$ e $2a$:

$= 3c(b - 1) + 2a(b - 1) =$

Raccogliamo il binomio $(b - 1)$:

$= (b - 1)(3c + 2a)$.

2. $3bc + 2ab - 2a - 3c =$

Raggruppiamo diversamente i termini e raccogliamo b e -1:

$= b(3c + 2a) - 1(3c + 2a) =$

Conviene indicare il fattore 1 per rendere più facile il raccoglimento finale:

$= (3c + 2a)(b - 1)$.

b) Scomponiamo $2bx^3 - 2bx^2 - x^3 + x^2$.
Raccogliamo prima il monomio x^2 nel polinomio dato:

$= x^2(2bx - 2b - x + 1) =$

Nel polinomio tra parentesi raccogliamo poi $2b$ fra i primi due termini e -1 fra gli altri due:

$= x^2[2b(x-1) - 1(x-1)] =$

Raccogliamo il binomio $(x - 1)$:

$= x^2(2b - 1)(x - 1)$.

c) Raccogliamo nel primo e nell'ultimo termine il monomio in comune $3x^n y^2$:

$3x^n y^2(x-1) + (x-1)^2 =$

Raccogliamo tra i due termini il binomio $(x - 1)$:

$= (x-1)(3x^n y^2 + x - 1)$.

COMPLETA

41 $3ab + ax + 3by + xy = a(\ldots + \ldots) + y(\ldots + \ldots) = (3b + \ldots)(\ldots + \ldots)$

42 $x^4 + x^3 + 4x + 4 = x^3(\ldots + \ldots) + \ldots(x+1) = (\ldots + \ldots)(\ldots + \ldots)$

43 $ax - 4x - \ldots a + \ldots = x(a-4) - 5(a-4) = (x - \ldots)(a - \ldots)$

44 $\frac{1}{3}a + ax^2 - \frac{2}{3} - 2x^2 = \frac{1}{3}(\ldots - 2) + x^2(a - \ldots) = (\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots)$

Scomponi in fattori mediante il metodo del raccoglimento parziale (con $m, n \in \mathbb{N}$).

45 $5ay - y - 5a + 1$

46 $x^2y^2 + 1 + x^2 + y^2$

47 $3a^2b - 2a + 12ab - 8$

48 $x^3 + 12x^2 + 6x + 72$

49 $5ax + 2ay + 5bx + 2by$

50 $9ax - 6a + 12bx - 8b$

51 $(a-b)y - b + a$

52 $5ax + ay^2 - y^2 - 5x$

53 $x^3y^2 + 2x^3y - ay - 2a$

54 $3ab - 6ac + b^2 - 2bc$

55 $12a^2 - 21b^3 - 28ab^2 + 9ab$

56 $(a+b)^2 - ax - bx$

57 $\frac{3}{4}xy - \frac{3}{2}yz - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}z$

58 $\frac{4}{3}x^2y + \frac{2}{3}x - 4xy - 2$

59 $\frac{3}{4}xy + \frac{1}{2}y + 3x + \frac{1}{8}y^2$

60 $3(a+b) + x(a-b) - 3(a-b) - x(a+b)$

61 $y^4 - y^3 - 2y + 2$

62 $ax + 6x + ay + 6y$

63 $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}xy - 3a + ay$

64 $x^2 + xy + x + y$

65 $ay - 4a - 3y + 12$

66 $2ax + 4x - 3a - 6$

67 $ax - 4a + x - 4 + xy - 4y$

68 $3ax^2 - 6x^2 + 3a - 6$

69 $x^4 + 4x^2 - x^3y - 4xy$

70 $a^2bx + a^2b + bxy^2 + by^2$

71 $12a^2 - 4a - 3a + 1$

72 $x^3y - x^2y^2 + 2x - 2y$

73 $2a^3b^2 - 12a^2b^4 + 4ab^6 - 24b^8$

74 $2(6a - 15b) - 2a^2 + 5ab$

75 $(5 - x)(5 + x) + (x - 5)^2 + (2x - 10)(x + 3)$

76 $(a + 3b)^2 - 2a^2 - 6ab - 9b - 3a$

BRAVI SI DIVENTA ▶ E15

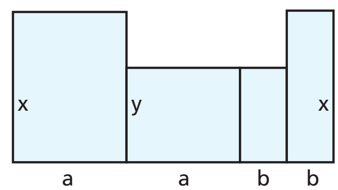
77 $-8x^2y + 4xy^2 + 6ax^2y - 3axy^2$; $\quad (2a + x)^2 - 4x^3 - 8ax^2$.

78 $x^ny^n - y^{2n} + x^n - y^n$; $\quad a^{n+1} - a^n - a + 1$.

79 $x^{2n} - 2x^n + 2x^m - x^{n+m}$; $\quad 2x^{n+1} - 2xy^n + x^ny - y^{n+1}$.

80 $2a^{n+1} + 2a^nb + (a + b)^2$; $\quad 3x^{n+2} + (x^2 - 3 - 9x^n$.

81 Trova l'area della figura ed esprimila come prodotto di fattori.



$[(a + b)(x + y)]$

La scomposizione mediante la differenza di due quadrati

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

ESERCIZIO GUIDA

82 Scomponiamo in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati:

a) $25a^2 - 9$; b) $16a^4 - 1$; c) $5x^3 - 45xy^2$; d) $(5x - 2)^2 - 4x^2$.

quadrato di $5a$ quadrato di 3

a) $25a^2 - 9 = (5a + 3)(5a - 3)$.

quadrato di $4a^2$ quadrato di 1 quadrato di $2a$ quadrato di 1

b) $16a^4 - 1 = (4a^2 + 1)(4a^2 - 1) =$

$= (4a^2 + 1)(2a + 1)(2a - 1)$.

c) $5x^3 - 45xy^2 =$

Raccogliamo $5x$:

$= 5x(x^2 - 9y^2) = 5x(x + 3y)(x - 3y)$.

d) $(5x - 2)^2 - 4x^2 = [(5x - 2) + 2x][(5x - 2) - 2x] =$

$= (5x - 2 + 2x)(5x - 2 - 2x) = (7x - 2)(3x - 2)$.

COMPLETA

83 $81x^2y^4 - 25 = (\dots xy^2)^2 - (\dots)^2$; $\quad x^2 - \dots = (\dots + 2a)(\dots - 2a)$.

84 $16a^2x^6 - 9 = (\dots)^2 - (\dots)^2$; $\quad \dots - \dots = (3a + \dots)\left(\dots - \frac{1}{2}\right)$.

85 $\dots - y^8 = (x^3 - \dots)(\dots + \dots)$; $\quad 4a^6 - \dots = (2a^{\dots} - b^2)(\dots + \dots)$.

Scomponi in fattori, riconoscendo la differenza di due quadrati (con $n \in \mathbb{N}$).

86 $x^2 - 49y^2$; $9 - a^2b^2$.

87 $4x^2 - 9y^2$; $25a^6b^8 - \frac{1}{4}$.

88 $81 - a^2$; $16x^2 - a^4$.

89 $a^4 - 16b^2$; $-y^2 + 64x^6$.

90 $a^2 - (a+b)^2$; $x^6 - 4$.

91 $x^4 - 49$; $9 - 4y^2$.

92 $16a^2 - 1$; $9x^6 - 4$.

93 $\frac{1}{81} - x^2y^4$; $4a^8 - \frac{1}{16}$.

94 $2a^4 - 8$; $3x^3y^2 - 27x$.

95 $121y^8 - 49x^2y^4$; $x^3 - \frac{49}{9}a^2x$.

96 $\frac{5}{4}b - 125b^3$; $\frac{3}{2}x^5y^3 - \frac{27}{8}x^3y^5$.

97 $(ab-1)^2 - 1$; $25(a-b)^2 - 16(a+b)^2$.

98 $(a+3b)^2 - 25b^2$; $25x^6 - \frac{1}{9}x^2y^4$.

99 $(-3x-2)^2 - (-5x+2)^2$; $-\frac{16}{9}x^{10} + 1$.

100 $x^{2n} - 1$; $a^{2n} - b^{6n}$.

101 $9x^{2n} - 4y^{8n}$; $\frac{1}{16}a^{16n} - 25b^{10n}$.

Scomponi in fattori (con $n, m \in \mathbb{N}$).

102 $5z^2 - 5$; $x^3 - 9xy^2$; $25a^5b^3 - a^3b$.

103 $100x^6 - 16x^2y^8$; $12a^4 - 12$; $7x^{12} - 7y^8$.

104 $2(2a^2-3)^2 - 8$; $3xy^2 - 3x^3$; $5b^2(b-3) - b^2 + 9$.

105 $-a^4 - 16b^4 + 16 + a^4b^4$; $1 - x^2 - y^2 + x^2y^2$; $12x^4 + 4x^3 - 3x^2 - x$.

106 $\left(\frac{7}{4} + x\right)^2 + \frac{21}{4} + 3x$; $\frac{1}{2}ax - x - \left(\frac{3}{2}ac - 3c\right)$; $6(x-2)^2 - a(2-x)^2$.

107 $x^4y^4 - 81 + 81x^4 - y^4$; $3(a+2b)^2 - 3a^2$; $(x^2+a) + 4(3x^2+3a)^2$.

108 $6a^2(x+y) - 6a^2(x-y)$; $ax - 2ay + bx - 2by + 2x - 4y$; $75 - 3(a+2y)^2$.

109 $a^2x - b^2x + a^2y - b^2y - a^2 + b^2$; $(3a-x)^3 - 4(3a-x)$; $12(a+b)^3 - 27(a+b)(a-6b)^2$.

110 $16a^4x - 36b^2x$; $(a-3x)^2 + 2(a-3x)(a+3x)$; $b^6 - b^4 + 2b^2 - 2$.

111 $(xy+2)^2 - 4$; $x^7 - 25x^3y^2$; $5ax + 25x - 5a - 25$.

112 $6ab - 16ax$; $2a^3 + 4a^2 - 3a - 6$; $\left(3a - \frac{1}{2}x\right)^2 - 15a + \frac{5}{2}x$.

113 $2(a-1)^2 - 8(x+3)^2$; $4a - 4b - ab^2 + b^3$; $\frac{4}{27}x^3 - \frac{1}{3}x$.

114 $4a^3 - 4a^2 - 4a + 4$; $\frac{x^4}{5} - \frac{16}{5}$; $9b - 18 - (b^2 - 4)$.

115 $x^{15} - 16x^7$; $(2-x)^2 + 4 - x^2 + (10-5x)(2+x)$; $2b^{12} - 32b^8$.

116 $\frac{4}{49}x^3 - \frac{16}{25}xy^2$; $-\frac{8}{125}a^2y^5 + \frac{16}{25}a^2y^4 + \frac{1}{10}y - 1$; $8a^5b^2 - 12a^5 + 48a^3b^2 - 32a^3b^4$.

117 $(x-y^2) + 6(2x-2y^2)^2$; $\frac{3}{5}x^2y - \frac{1}{5}xy^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy$; $a^3 - a^2 - a + 1$.

118 $\left(-\frac{3}{2}a+\frac{3}{4}b\right)^2-\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b\right)^2$; $\quad 27(x+y)^3-12(2x-y)^2(x+y)$; $\quad a-4-ax^4+4x^4$.

119 $x^{2n}y^{3n}-2x^{2n+1}y^n$; $\quad 9x^9y^n+12x^6y^{n+2}$; $\quad a^{2n}b^n-(ab)^n+(a^nb^n)^2$.

120 $x^{2n}-y^{2n+2}$; $\quad -x^6y^2+16x^{2n+6}$; $\quad x^ny^{2n}-x^n-2y^{2n}+2$.

121 $a^{12n}-a^{6n}$; $\quad 3a^{3n+1}-2ab^{6n}-3a^{3n}b+2b^{6n+1}$; $\quad x^{4n+2}y-16x^2y^{2n+3}$.

122 $5a^{2n+1}-20ab^{2n}$; $\quad a^{2n}b^{m+n}-a^nb^m-a^nb^n+1$; $\quad 2^{3n}+6^{2n}-2^n-3^{2n}$.

Polinomio scomponibile nel quadrato di un binomio

$$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$$

ESERCIZIO GUIDA

123 Quando è possibile, scomponiamo in fattori, riconoscendo in modo opportuno il quadrato di un binomio:

a) $25a^2+30ab+9b^2$; b) $x^2y^2-2xy+1$; c) $a^4+2a^2b^2+4b^4$;
d) $6x^2-x^4-9$; e) $(a+b)^2-2c(a+b)+c^2$.

a) Individuiamo i due termini del trinomio che possono essere dei quadrati e ricaviamone le basi:

$$\underbrace{25a^2}_{\text{quadrato di }5a}+30ab+\underbrace{9b^2}_{\text{quadrato di }3b}.$$

Controlliamo che il doppio prodotto delle basi trovate sia uguale all'altro termine del trinomio:

$$2(5a\cdot 3b)=30ab.$$

Allora possiamo scrivere il trinomio come:

$$25a^2+30ab+9b^2=(5a+3b)^2.$$

$$\underbrace{25a^2}_{\text{quadrato di }5a}+\underbrace{30ab}_{\text{doppio prodotto}}+\underbrace{9b^2}_{\text{quadrato di }3b}=(5a+3b)^2$$

b) $x^2y^2-2xy+1=(xy-1)^2$

Nota che avremmo potuto anche scrivere $(1-xy)^2$.

c) $a^4+2a^2b^2+4b^4$ non è il quadrato di un binomio, perché il doppio prodotto di a^2 e $2b^2$ non è $2a^2b^2$, ma $4a^2b^2$.

d) $6x^2-x^4-9$.

È riconducibile a un quadrato di binomio raccogliendo il segno $-$ nel trinomio dato:

$$-(-6x^2+x^4+9)=-(x^2-3)^2.$$

e) $(a+b)^2-2c(a+b)+c^2=$

$=[(a+b)-c]^2=(a+b-c)^2$.

COMPLETA

124 $9x^2-30x+25=(\dots x-\dots)^2$; $\quad a^2+8ay+\dots=(\dots+4y)^2$.

125 $x^4+\dots+9=(\dots+3)^2$; $\quad x^8+2x^4+\dots=(x^{\dots}+\dots)^2$.

126 $\frac{1}{9}x^2+\dots+9=(\dots+3)^2$; $\quad \dots-\dots+4=(x^2-2)^2$.

CACCIA ALL'ERRORE Trova gli errori e spiega perché le uguaglianze sono sbagliate.

127 $x^2 + y^2 = (x + y)^2$

128 $a^2 + 4x^2 + 2ax = (a + 2x)^2$

129 $x^2 - 4y^2 - 4xy = (x - 2y)^2$

130 $x^2 - 4a^2 = (x - 2a)^2$

131 $x^4 + 4x^2y^2 + 4y^2 = (x^2 + 2y^2)^2$

132 $\frac{1}{4}a^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}a - y\right)^2$

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il quadrato di un binomio.

133 $9x^2 + 6x + 1$; $\quad a^2 + 4ab + 4b^2$; $\quad x^2 - 10x + 25$.

134 $y^2 - 6y + 9$; $\quad 4 + 9b^2 - 12b$; $\quad 6ab^3 + b^6 + 9a^2$.

135 $x^2 - 4x + 4$; $\quad 25x^2 - 60x + 36$; $\quad a^2 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}ax$.

136 $4a - 4a^2 - 1$; $\quad 9y^2 + \frac{1}{4} - 3y$; $\quad 25x^2 + 49y^2 - 35xy$.

137 $\frac{4}{25}y^2 - 2y + \frac{25}{4}$; $\quad -x^4 - 16x^2 - 64$; $\quad 25 - 15b + 9b^2$.

138 $\frac{4}{9}a^6 - \frac{4}{3}a^3 + 1$; $\quad 1 + 2(x - 2) + (x - 2)^2$; $\quad (m^2 + 2)^2 - 12(m^2 + 2) + 36$.

139 $\frac{4}{9}b^2 + \frac{9}{4}a^2 - 2ab$; $\quad a^4 + 4a^2x^2 + 4x^4$; $\quad x^2 + 6ax + 9a^2$.

140 $16x^2 - 8x + 1$; $\quad 4a^2 + 9 - 12a$; $\quad x^2 - 6xy + 9y^2$.

141 $a^3 - 8a^2b + 16ab^2$; $\quad 7x^2 + 14xy + 7y^2$; $\quad x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2$.

142 $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$; $\quad a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2$; $\quad 5bc^3 - \frac{25}{4}b^2 - c^6$.

143 $x^3 + 14x^2y + 49xy^2$; $\quad \frac{9}{7}a^2b^2c^2 + \frac{6}{7}a^2b^2c + \frac{1}{7}a^2b^2$.

144 $0,\overline{1}y^4 + 0,\overline{3}xy^2 + 0,25x^2$; $\quad 3x^2y^4 - 12xy^2 + 12$; $\quad (x - 4y)^2 + 6xy^2(x - 4y) + 9x^2y^4$.

145 $(3a + b)^2 + \frac{1}{4}x^2 - x(3a + b)$; $\quad a^{2n}b^6 + 4 - 4a^nb^3$; $\quad x^{2n} + 9 + 6x^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

146 $2^{2n} - 2^{n+2} + 4$; $\quad 4^n + 2^{n+1} + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$.

COMPLETA in modo che il polinomio che si ottiene sia il quadrato di un binomio.

147 $x^2 - 2ax + \dots$; $\quad y^2 + 9 + \dots$; $\quad a^2 - ab + \dots$.

148 $\frac{1}{4}a^2 + 2ax + \dots$; $\quad a^2 - 3ab + \dots$; $\quad x^2 + xy + \dots$.

149 $4x^2y^2 + y^4 + \dots = (2x^2 + \dots)^2$; $\quad 1 + 4x^2 + \dots = (\dots + 2x^2)^2$.

La differenza di quadrati quando almeno un quadrato non è un monomio

ESERCIZIO GUIDA

150 Riconducendoci alla differenza di due quadrati, scomponiamo in fattori i seguenti polinomi:

a) $a^2 + 2ab - c^2 + b^2$; b) $x^2 - y^2 - 1 - 2y$; c) $(a+b)^2 + 4(a+b) + 4 - b^2$.

a) Segniamo i termini che corrispondono al quadrato di un binomio:

$$\underline{a^2} + \underline{2ab} - c^2 + \underline{b^2}.$$

Notiamo una differenza di quadrati:

$$\boxed{(a+b)}^2 - c^2 =$$

$$= (\boxed{a+b} + c)(\boxed{a+b} - c).$$

b) $x^2 - y^2 - 1 - 2y$.

Raccogliamo un segno $-$ tra gli ultimi tre monomi:

$$x^2 - (y^2 + 1 + 2y) =$$

$$= x^2 - (y+1)^2 = [x - (y+1)][x + (y+1)] =$$

$$= (x - y - 1)(x + y + 1).$$

c) $(a+b)^2 + 4(a+b) + 4 - b^2 =$

$$= [(a+b) + 2]^2 - b^2 =$$

$$= [(a+b) + 2 - b] \cdot [(a+b) + 2 + b] =$$

$$= (a+2)(a+2b+2).$$

Scomponi in fattori mediante la differenza di due quadrati.

151 $4a^2 + 4ab + b^2 - c^2$; $25x^2 - y^2 - 10x + 1$; $a^2 - x^2 + 2xy - y^2$.

152 $x^4 - 4x^2y^2 - 1 - 4xy$; $\frac{1}{4}x^2 + 25y^2 - 5xy - 16$; $1 - a^8 + 16b^4 - 8b^2$.

153 $b^2 + 10b + 25 - a^2$; $9x^2 - a^2 - 4a - 4$; $x^4 + 4x^2 - y^2 + 4$.

154 $x^4y^6 - x^6y^4 + 1 - 2x^2y^3$; $25 + 9a^2b^2 - \frac{81}{4}b^4 - 30ab$; $x^2 + 4y^2 - 4xy - 9z^2$.

155 $(3y-1)^2 + 4(3y-1) + 4 - 9x^2$; $-(a-2b)^2 + 9a^2 + 6ab + b^2$; $9a^2x^2 - 4a^2 - 32ax - 64x^2$.

156 $4a^2b^2 + \frac{1}{16} - ab - b^6$; $\frac{4}{9} - \frac{9}{4}y^4 - 4x^2y^2 - \frac{16}{9}x^4$; $9z^2 - 12yz + 4y^2 - 16(ax-1)^2$.

157 $-y^4 - 16b^4 + 16 + 8y^2b^2$; $x^2 + 2x(x+3y) + (x+3y)^2 - 9$; $a^2 - 2ab + b^2 - (a+b)^4$.

158 $x^{2n} + 2^{n+1}x^n + 2^{2n} - 1$; $4b^2 - 4b^6 + 16b^{2n+2} + 16b^{n+2}$ $(n \in \mathbb{N})$.

RIEPILOGO LA SCOMPOSIZIONE MEDIANTE RACCOGLIMENTO, DIFFERENZA DI DUE QUADRATI E QUADRATO DI BINOMIO

TEST

159 Tra i seguenti polinomi solo uno è lo sviluppo di un quadrato di binomio.
Quale?

- A $x^2 + x + 1$
- B $x^4 - 4x^2 - 4$
- C $y^2 + 1 + 4y$
- D $x^4 + 1 - 2x^2$
- E $y^9 + 1 + 2y^3$

160 Solo una delle seguenti espressioni è la scomposizione in fattori del polinomio $x^2 - x - ax + a$.
Quale?

- A $x(x-1) - a(x-1)$
- B $(x-1)(x+a)$
- C $(x-1)(x-a)$
- D $(x+1)(x-a)$
- E $(x+1)(x+a)$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu - 1** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Statistica*

161 Solo una delle seguenti espressioni è una corretta scomposizione di $16x^6 - 4x^{16}$. Quale?

A $(8x^3 + 2x^8)(8x^3 - 2x^8)$
B $(4x^3 + 2x^4)(4x^3 - 2x^4)$
C $(8x^3 + 2x^4)(8x^3 - 2x^4)$
D $(4x^3 - 2x^8)^2$
E $(4x^3 + 2x^8)(4x^3 - 2x^8)$

162 Solo una delle seguenti uguaglianze è *vera*. Quale?

A $m^4 - n^9 = (m^2 + n^3)(m^2 - n^3)$
B $9a + 9b - ac + bc = (a + b)(9 - c)$
C $1 - x^2 = (x + 1)(1 - x)$
D $m^2n + m - mn + 1 = (mn + 1)(m - 1)$
E $m^4 - 4 = (m^2 - 2)^2$

Scomponi in fattori ($n \in \mathbb{N}$).

163 $(2x + y - 8)^2 - (2x + y)^2$; $\quad 4y^4 - 12y^3 - y^2 + 6y - 9$. $\quad [-16(2x + y - 4); (y - 3)(4y^3 - y + 3)]$

164 $a^2 - 4b - b^2 - 4$; $\quad x^{10} - 6x^7 + 9x^4$. $\quad [(a + b + 2)(a - b - 2); x^4(x^3 - 3)^2]$

165 $9x^2y^2 + 6xy(1 - 2xy) + (1 - 2xy)^2$; $\quad \frac{1}{4}a^4 - \frac{2}{3}a^2b + \frac{4}{9}b^2 - \frac{1}{9}a^6$.

$$\left[(1 + xy)^2; \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a^3\right)\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}a^3\right)\right]$$

166 $b^2 - 2b + 1 - (a + b)^2$; $\quad 32a^4(b + 1)^2 - 2x^4(b^2 + 2b + 1)$.

$[-(a + 1)(a + 2b - 1); 2(b + 1)^2(2a + x)(2a - x)(4a^2 + x^2)]$

167 $5bx - 25by - 2ax^2 + 50ay^2$; $\quad (x + y)(x + 2y) - x(x + y)^2 - x^2 + y^2$.

$[(x - 5y)(5b - 2ax - 10ay); (x + y)(3y - xy - x^2)]$

BRAVI SI DIVENTA ► E16

168 $\frac{2}{3}x^4 + \frac{32}{3}x^2y^2 + \frac{128}{3}y^4$; $\quad (2 - x)^2 - 9$; $\quad (a - 1)^2 + 8a - 8 + 5(a^2 - 1)$.

169 $27a^2x^2y + 90ax^2y + 75x^2y - 6a - 10$; $\quad 20m^3t + 60m^2t^2 + 45mt^3 - 5mt$; $\quad \frac{1 + a^2b^2 - 2ab}{4} + 2 - ab$.

$$\left[(3a + 5)(9ax^2y + 15x^2y - 2); 5mt(2m + 3t + 1)(2m + 3t - 1); \left(\frac{ab - 1}{2} - 1\right)^2\right]$$

170 $x + y - x^2 - 2xy - y^2$; $\quad a^6 - a^2 - 3a^4 + 3$; $\quad a^2 - x^2 - 7(a - x)^2$.

$[(x + y)(1 - x - y); (a^2 - 3)(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1); 2(a - x)(-3a + 4x)]$

171 $b^5 - 5b^4 - b^2 + 10b - 25$; $\quad \frac{a^4}{64} + \frac{a^2}{4} + 1$; $\quad x^2 - 12bx + 36b^2$.

$$\left[(b - 5)(b^4 - b + 5); \left(\frac{a^2}{8} + 1\right)^2; (x - 6b)^2\right]$$

172 $a^4 + 4a^3y + 4a^2y^2$; $\quad x^2 - 4x + 4 - (a + 2)^2$; $\quad 4a + 4b + a^2 + 2ab + b^2$.

$[a^2(a + 2y)^2; (x - a - 4)(x + a); (a + b)(4 + a + b)]$

173 $4x^4 + 9a^2 - 36x^2 - a^2x^2$; $\quad x^9 - x - 3x^8 + 3$; $\quad \frac{1}{4}a^3 - a^2b + ab^2$.

$\left[(2x-a)(2x+a)(x-3)(x+3);\ (x-3)(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1);\ a\left(\frac{1}{2}a-b\right)^2\right]$

174 $-\frac{x^6}{9} - 9a^2 - 2ax^3$; $\quad 2b(a-x)^2 - 2a^2b$; $\quad (x+2c)^2 - (4x+8c)(x+c)$.

$\left[-\frac{1}{9}(x^3+9a)^2;\ -2bx(2a-x);\ (x+2c)(-3x-2c)\right]$

175 $2x^n + 2y^n + x^{2n} + y^{2n} + 2x^ny^n$; $\quad a^nx^{2n} + 2a^nx^n + a^n + x^n + 1$.

$[(x^n+y^n)(2+x^n+y^n);\ (x^n+1)(a^nx^n+a^n+1)]$

176 $16x^{n+2} + 9x^n - 24x^{n+1} + (4x-3)^2$; $\quad x^{2n} + 2x^n + 1 + (x^n+1)^3$. $\quad [(x^n+1)(4x-3)^2;\ (x^n+1)^2(x^n+2)]$

Problemi

177 È dato il polinomio $3x^2 + 3x + ax^{n-2} + a$. **a)** Stabilisci per quale valore di $n \in \mathbb{N}$ esso è scomponibile, mediante raccoglimento parziale. **b)** Scrivi il polinomio scomposto in fattori. [a) $n = 3$; b) $(3x+a)(x+1)$]

178 Determina per quali valori di n il binomio $x^{n+1} - y^4$, con $n \in \mathbb{N}$, è scomponibile come differenza di due quadrati. [$\forall\ n$ dispari]

179 Considera il quadrinomio $x^2a^2 - x^2 - 4a^2 + 4$. **a)** Scomponilo in fattori. **b)** Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ il polinomio può essere scritto nella forma $(2-x)(2+x)$? [a) $(x-2)(x+2)(a-1)(a+1)$; b) $a = 0$]

Polinomio scomponibile nel quadrato di un trinomio

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A+B+C)^2$$

ESERCIZIO GUIDA

180 Scomponiamo in fattori, se possibile, i seguenti polinomi, riconoscendo il quadrato di un trinomio:

a) $9a^2 + 4b^2 + 1 - 12ab + 6a - 4b$; b) $4a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab + 4ac + 4bc$.

a) Individuiamo i tre termini del polinomio che possono essere dei quadrati e ricaviamone le basi:

$$\underbrace{\boxed{9a^2}}_{\text{quadrato di } 3a} + \underbrace{\boxed{4b^2}}_{\text{quadrato di } 2b} + \underbrace{\boxed{1}}_{\text{quadrato di } 1} - 12ab + 6a - 4b.$$

Controlliamo che i valori assoluti dei doppi prodotti corrispondano ai valori assoluti dei termini rimanenti:

$$9a^2 + 4b^2 + 1 - \underbrace{\boxed{12ab}}_{2(3a\cdot 2b)} + \underbrace{\boxed{6a}}_{2(3a\cdot 1)} - \underbrace{\boxed{4b}}_{2(2b\cdot 1)}.$$

Analizziamo allora i segni dei doppi prodotti:

$$9a^2 + 4b^2 + 1 \underbrace{\boxed{-}}_{3a \text{ e } 2b \text{ discordi}} 12ab \underbrace{\boxed{+}}_{3a \text{ e } 1 \text{ concordi}} 6a \underbrace{\boxed{-}}_{2b \text{ e } 1 \text{ discordi}} 4b.$$

Dunque $3a$ e 1 hanno lo stesso segno, mentre $2b$ ha segno opposto. Abbiamo perciò due soluzioni possibili:

$$9a^2 + 4b^2 + 1 - 12ab + 6a - 4b = (3a - 2b + 1)^2$$

oppure

$$9a^2 + 4b^2 + 1 - 12ab + 6a - 4b = \\ = (-3a + 2b - 1)^2.$$

b) $4a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab + 4ac + 4bc$

quadrato di $2a$ quadrato di $2b$ quadrato di c

Controlliamo se i valori assoluti dei doppi prodotti coincidono con i valori assoluti degli altri termini:

$4a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab + 4ac + 4bc.$

$2(2a \cdot 2b) = 8ab \neq 4ab$

Dunque il polinomio non è riconducibile al quadrato di un trinomio.

181 COMPLETA $a^2 + b^2 + 4a + 2ab + 4 + 4b = (a + b + \ldots)^2$; $a^2 + x^2 + 9 - 2ax - 6a + \ldots = (a - x - \ldots)^2$.

182 Aggiungi il termine che manca affinché il polinomio $a^2 + \frac{1}{4}b^2 + 4c^2 - ab - 4ac$ sia il quadrato di un trinomio.

Quando è possibile, scomponi in fattori riconoscendo il quadrato di un trinomio.

183 $a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 6ac - 12bc + 4ab$

184 $x^2 + 4y^2 + 4xy - 4x - 8y + 4$

185 $25x^2 - 9y^2 + 4 - 30xy + 10x - 12y$

186 $4x^2 + 2xy - 8xz + \frac{1}{4}y^2 - 2yz + 4z^2$

187 $4x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{36}y^2 + 12x + y + 9$

188 $x^2 + y^4 + 1 + 2xy^2 - 2x - 2y^2$

189 $x^6 + 4x^8 - 4x^7 + x^3 + \frac{1}{4} - 2x^4$

190 $\frac{9}{16}b^2 + ab - 2bc + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}ac + \frac{16}{9}c^2$

191 $8a - 8 + 8x - 4ax - 2a^2 - 2x^2$

192 $a^8 - 2a^6 - 2a^5 + a^4 + 2a^3 + a^2$

193 $8a^4 + 18a^2b^2 + 2b^4 + 8a^2b^2 - 24a^3b - 12ab^3$

194 $x^{2n+2} + 4x^{4n} - 4x^{3n+1} + x^{n+1} + \frac{1}{4} - 2x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$

195 $x^{2n} + y^{4n} + 1 + 2x^n y^{2n} - 2x^n - 2y^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$

La scomposizione mediante il cubo di un binomio

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

ESERCIZIO GUIDA

196 Scomponiamo in fattori, se possibile, i seguenti polinomi, riconoscendo il cubo di un binomio:

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; b) $8a^3 - 6a^2b + 6ab^2 - b^3$.

a) Individuiamo i due termini del quadrinomio che possono essere dei cubi e ricaviamone le basi:

$$\underbrace{x^3}_{\text{cubo di } x} + 3x^2 + 3x \underbrace{+ 1}_{\text{cubo di } 1}.$$

Verifichiamo la presenza dei relativi tripli prodotti:

$$x^3 + \underbrace{3x^2}_{3 \cdot x^2 \cdot 1} + \underbrace{3x}_{3 \cdot x \cdot 1^2} + 1.$$

Pertanto: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$.

b) Individuiamo i due termini del quadrinomio che possono essere dei cubi e ricaviamone le basi:

$$\underbrace{\boxed{8a^3}}_{\text{cubo di } 2a} - 6a^2b + 6ab^2 \underbrace{\boxed{-b^3}}_{\text{cubo di } -b}.$$

Verifichiamo la presenza dei relativi tripli prodotti:

$$3 \cdot (2a)^2 \cdot (-b) = -12a^2b \neq$$

$$8a^3 - 6a^2b + 6ab^2 - b^3.$$

Dunque il quadrinomio non è riconducibile al cubo di un binomio.

COMPLETA

197 $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = (\ldots + 1)^3$;

$8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1 = (\ldots x^{\cdots} + \ldots)^3$.

198 $y^3 - \ldots + \ldots - 8 = (y-2)^3$;

$27 + 9a + \ldots + \frac{1}{27}a^3 = (\ldots + \ldots)^3$.

199 $8b^3 - \ldots + 6b - \ldots = (\ldots - \ldots)^3$;

$x^3y^3 + \ldots + 3x^5y + x^6 = (\ldots + \ldots)^3$.

200 **CACCIA ALL'ERRORE** Trova gli errori e spiega perché le uguaglianze sono sbagliate.

$a^3 - 8b^3 = (a-2b)^3$;

$a^3 + 3a^2x^2 + x^3 = (a+x)^3$;

$\frac{1}{8}x^3 + 8 + 3x^2 + 3x = \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^3$;

$x^3y^3 - 9x^2y^2 - 27xy - 27 = (xy-3)^3$;

$1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 = (1-2x)^3$;

$a^3 - 1 + 3a^2 + 3a = (a-1)^3$.

Quando è possibile, scomponi in fattori, riconoscendo il cubo di un binomio ($n \in \mathbb{N}$).

201 $27x^3y^3 + 27x^2y^2 + 9xy + 1$; $\quad a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$.

202 $-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$; $\quad \frac{1}{8} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{27}x^3$.

203 $x^6 + 1 + 3x^4 + 3x^2$; $\quad a^3b^3 + 3a^2b^2 + 3ab - 1$.

204 $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$; $\quad -1 - 3a - 3a^2 - a^3$.

205 $6a + 8a^3 - 1 - 12a^2$; $\quad y^3 + y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{27}$.

206 $x^3 - 3x^2y^2 - y^6 + 3xy^4$; $\quad a^6x^9 - 6a^4x^6 + 12a^2x^3 - 8$.

207 $2x^6 + 12x^4 + 24x^2 + 16$; $\quad \frac{1}{5}a^3 - \frac{6}{5}a^2 + \frac{12}{5}a - \frac{8}{5}$.

208 $-27a^3 - 36ab^4 - 54a^2b^2 - 8b^6$; $\quad 81 - 81x + 27x^2 - 3x^3$.

209 $\frac{1}{5}a^3 + \frac{6}{5}a^2 + \frac{12}{5}a + \frac{8}{5}$; $\quad \frac{1}{8}a^6 - \frac{1}{2}a^4x - \frac{8}{27}x^3 + \frac{2}{3}a^2x^2$; $\quad a^3 + \frac{1}{27}b^3 + a^2b + \frac{1}{9}ab^2$.

210 $(x+1)^3 - 3(x+1)^2y + 3(x+1)y^2 - y^3$; $\quad 0{,}6x^2 - 1 - 0{,}12x^4 + 0{,}008x^6$.

211 $x^{3n} - 3x^{2n}y^{n+1} - y^{3n+3} + 3x^ny^{2n+2}$; $\quad a^{3n}x^9 - 6a^{2n}x^6 + 12a^nx^3 - 8$.

212 $-a^6b^{3n} - a^{3n}b^6 - 3a^{4+n}b^{2n+2} - 3a^{2n+2}b^{4+n}$; $\quad a^{3n} - 0{,}125 - 1{,}5a^{2n} + 0{,}75a^n$.

COMPLETA in modo che il polinomio che si ottiene sia il cubo di un binomio ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$).

213 $-a^3 + 3a^2x - \dots + x^3$; $\quad 8a^3 - \dots + 6a - 1$; $\quad 1 + 3x^2 + \dots + x^6$.

214 $\dots + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$; $\quad 1 - 0{,}3a + \dots - 0{,}001a^3$; $\quad \frac{1}{27}x^3 + x^2y + \dots + 27 \dots$.

215 $a^{3n} - \dots + \dots - 1$; $\quad b^{3n+3} - \dots + \dots - b^3$; $\quad x^{6n} - \dots + 3x^{2n}y^{6n} - \dots$.

La scomposizione mediante la somma o la differenza di due cubi

$$A^3 \pm B^3 = (A \pm B) \cdot (A^2 \mp AB + B^2)$$

ESERCIZIO GUIDA

216 Scomponiamo in fattori, riconoscendo la somma o la differenza di due cubi:

a) $8a^3 + b^3$; b) $27x^3 - 1$; c) $(a-b)^3 + (a+b)^3$; d) $27x^{3n} - 8y^{12n+3}$, con $n \in \mathbb{N}$.

a) $8a^3 + b^3$.

Abbiamo i cubi di $A = 2a$, $B = b$:

$$(2a)^3 + b^3 = (2a + b)[(2a)^2 - 2ab + b^2] = (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2).$$

b) $27x^3 - 1$.

Abbiamo i cubi di $A = 3x$, $B = 1$:

$$(3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1).$$

c) $(a - b)^3 + (a + b)^3$.

Abbiamo i cubi dei binomi $A = (a - b)$, $B = (a + b)$:

$$(a - \cancel{b} + a + \cancel{b})[(a-b)^2 - (a-b)(a+b) + (a+b)^2] =$$

$$= 2a(\cancel{a^2} - \cancel{2ab} + b^2 - \cancel{a^2} + b^2 + a^2 + \cancel{2ab} + b^2) = 2a(a^2 + 3b^2).$$

d) $27x^{3n} - 8y^{12n+3}$.

Scriviamo $27x^{3n}$ e $8y^{12n+3}$ come potenze con esponente 3.

$$27x^{3n} = 3^3x^{3n} = (3x^n)^3. \quad 8y^{12n+3} = 2^3y^{3(4n+1)} = (2y^{4n+1})^3.$$

Abbiamo i cubi di $A = 3x^n$ e $B = 2y^{4n+1}$:

$$(3x^n)^3 - (2y^{4n+1})^3 = (3x^n - 2y^{4n+1})[(3x^n)^2 + (3x^n)(2y^{4n+1}) + (2y^{4n+1})^2] =$$
$$= (3x^n - 2y^{4n+1})(9x^{2n} + 6x^ny^{4n+1} + 4y^{8n+2}).$$

Scomponi in fattori, riconoscendo la somma o la differenza di due cubi.

217 $x^3 + 27$; $\quad a^3b^3 + 1$; $\quad 125a^3 + 8b^3$; $\quad \frac{8}{27}a^3 - 1$.

218 $x^3 + 64y^3$; $\quad \frac{1}{8}a^3b^3 + x^3$; $\quad y^9 - 8$; $\quad \frac{1}{27} - b^6y^6$.

219 $x^6 + 64$; $\quad x^6 + a^3$; $\quad 3x^4 + 81x$; $\quad 2a^5 - 250a^2$.

220 $3m^3x^6 - 3$; $\quad 27a^3 + b^6c^9$; $\quad 5y^3 - 40x^6$; $\quad \frac{27}{8}t^9p^6 - 125$.

221 $-a^3b^3 - 27$; $\quad 81a^{10} - 24a$; $\quad 1 + (1 + b)^3$; $\quad 2x + 16x^4$.

222 $\frac{3}{8} + 81y^3$; $\quad \frac{1}{2}b^3 + \frac{27}{16}c^6$; $\quad x^6 + y^3$; $\quad \frac{3}{125}x^8 - \frac{24}{27}x^5$.

223 $(a - 2b)^3 + (a + b)^3$; $\quad 125b^3 - (b - 3)^3$; $\quad 27y^3 - (x - 4y)^3$; $\quad (x + 2y)^3 + x^3$.

224 $27 - a^{3n}$; $\quad a^{6n} - b^{3n}$; $\quad 64x^3 + 27y^{3n+6} \quad (n \in \mathbb{N})$.

225 $8a^{3n}b^6 - 27$; $\quad 8y^{3n+2} - \frac{1}{8}y^2x^3 \quad (n \in \mathbb{N})$.

RIEPILOGO LA SCOMPOSIZIONE MEDIANTE RACCOGLIMENTO E PRODOTTI NOTEVOLI

Nel sito: ▶ 15 esercizi in più ▶ 26 esercizi di recupero

TEST

226 Le seguenti uguaglianze sono ottenute applicando le regole della scomposizione di polinomi riconducibili a prodotti notevoli. Sono tutte errate, *tranne* una. Quale?

A $x^3 + 1 = (x + 1)^3$
B $x^3 + x^2 + x - 1 = (x - 1)^3$
C $x^6 + 8x^3 + 16 = (x^3 + 4)^2$
D $1 + 8h^6 = (1 + 2h^3)(1 + 4h^6 + 2h^3)$
E $1 - c^3 = (1 - c)(1 + 2c + c^3)$

227 Le seguenti affermazioni sono tutte esatte, *tranne* una. Quale?

A $x^2 + x + 1$ non è lo sviluppo di un quadrato perché manca il doppio prodotto.
B $x^6 + 3x^2$ non è la somma di due cubi.
C $x^9 + 3x^3 + 3x^3 + 27$ è lo sviluppo di un cubo di binomio.
D $x^4 + 4x^2 + 16$ è un falso quadrato.
E $m^9 - 9$ non è la differenza di quadrati.

Scomponi in fattori, utilizzando i metodi finora incontrati.

228 $\frac{125}{8}x^6y^3 - 8$

229 $a^6 - 3a^4b + 3a^2b^2 - b^3$

230 $24x^7 - 3x$ $\quad [3x(2x^2-1)(4x^4+2x^2+1)]$

231 $2x^9 + x^6 - 2x^3 - 1$ $\quad [(2x^3+1)(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)]$

232 $-\frac{1}{27}a^3 - y^3$ $\quad \left[\left(-\frac{1}{3}a - y\right)\left(\frac{1}{9}a^2 - \frac{1}{3}ay + y^2\right)\right]$

233 $2a^2 + 2b^2 + 12a + 12b + 4ab + 18$ $\quad [2(a+b+3)^2]$

234 $\frac{2}{27} - 2x^3y^3 - \frac{2}{3}xy + 2x^2y^2$ $\quad \left[2\left(\frac{1}{3} - xy\right)^3\right]$

235 $x^4 + 2x^3 - x - 2$ $\quad [(x-1)(x+2)(x^2+x+1)]$

236 $x^4 + x^2 + a^4 + a^2 + 2a^2x^2 + \frac{1}{4}$ $\quad \left[\left(x^2 + a^2 + \frac{1}{2}\right)^2\right]$

237 $x^{10} - 64x$; $\quad a^5 - 9a^3 + 8a^2 - 72$. $\quad [x(x^3-4)(x^6+4x^3+16); (a+2)(a-3)(a+3)(a^2-2a+4)]$

BRAVI SI DIVENTA ► E17

238 $12x^4y + 16x^2y^3 - 2x^5 - 24x^3y^2$; $\quad \frac{3}{4}a^2x^6 - \frac{81}{4}a^2$; $\quad 4a^2x^2 + 4y^4 + 4a^4 + x^4 + 4x^2y^2 + 8a^2y^2$.

239 $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$; $\quad 5x^4y^4 - 10x^2y^2 + 5$. $\quad [(x+3)(x-3)(x-2); 5(xy+1)^2(xy-1)^2]$

240 $\frac{2}{3}x^2y^2(3x-y)^3(4x+y) + \frac{1}{3}x^2y^2(3x-y)^3(x-5y)$; $\quad 2x(2y-3z)^2 - 8x^3$.
$[x^2y^2(3x-y)^4; 2x(2y-3z+2x)(2y-3z-2x)]$

241 $\frac{1}{64}x^6y^3 - \frac{27}{8}x^3y^6 + \frac{27}{16}x^4y^5 - \frac{9}{32}x^5y^4$ $\quad \left[\frac{1}{8}x^3y^3\left(\frac{1}{2}x - 3y\right)^3\right]$

242 $\frac{25}{4}a^3 + \frac{4}{9}ab^2 + \frac{9}{25}a + 3a^2 - \frac{4}{5}ab - \frac{10}{3}a^2b$ $\quad \left[a\left(\frac{5}{2}a - \frac{2}{3}b + \frac{3}{5}\right)^2\right]$

243 $(x+y)^2 + 4z(x+y) - 6(x+y) + 4z^2 - 12z + 9$ $\quad [(x+y+2z-3)^2]$

Problemi

244 Un quadrato ha area $A = 9x^{2n} + 42x^n + 49$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $x \geq 0$.
a) Qual è la misura del suo lato?
b) Qual è il suo perimetro? $\quad$ [a) $3x^n + 7$; b) $12x^n + 28$]

245 È dato il polinomio $a^{2n}b^{3n} + a^{2n} + 16b^{3n} - 16$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $x \geq 0$.
a) Scomponilo in fattori raccogliendo i due fattori $(b^n + 1)$ e $(a^n - 4)$.
b) Se n è pari, quale dei due fattori risulta sempre scomponibile?
c) E se n è dispari?
d) Per quale valore di $n < 10$ i due fattori sono entrambi scomponibili? Come?
[a) $(b^n+1)(b^{2n}-b^n+1)(a^n-4)(a^n+4)$; b) (a^n-4); c) (b^n+1); d) $n=6$, $(b^2+1)(b^4-b^2+1)$, $(a^3+2)(a^3-2)$]

La scomposizione di trinomi del tipo $x^2 + sx + p$

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

ESERCIZIO GUIDA

246 Scomponiamo in fattori i seguenti trinomi:

a) $x^2 + x - 6$; b) $y^4 - 5y^2 - 6$; c) $a^2 - 7ab + 12b^2$; d) $2x^2 + 5x - 3$.

a) Per scomporre in fattori, cerchiamo due numeri x_1 e x_2 tali che:

$$x_1 + x_2 = +1, \qquad x_1 \cdot x_2 = -6.$$

Le coppie di numeri interi che hanno come somma $+1$ (o qualsiasi altro numero) sono infinite, mentre quelle che hanno come prodotto -6 (o qualsiasi altro numero diverso da 0) sono finite.
Conviene perciò partire dal prodotto, compilando la tabella seguente fino a trovare i valori cercati:

MOLTIPLICAZIONI CON PRODOTTO $p = -6$	SOMMA s DEI FATTORI
$(+1)(-6)$	-5
$(-1)(+6)$	$+5$
$(+2)(-3)$	-1
$(-2)(+3)$	$+1$

Dunque $x_1 = -2$ e $x_2 = +3$, quindi:

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

b) Il trinomio $y^4 - 5y^2 - 6$ è di quarto grado. Cerchiamo di trasformarlo in un trinomio di secondo grado:

$$y^4 - 5y^2 - 6 = (y^2)^2 - 5y^2 - 6.$$

Ponendo $y^2 = t$, otteniamo: $t^2 - 5t - 6$.

Possiamo proseguire come nel caso **a**). Cerchiamo t_1 e t_2 tali che: $t_1 + t_2 = -5$, $\quad t_1 \cdot t_2 = -6$.

Osservando la prima riga della tabella del caso **a**), vediamo che $t_1 = +1$ e $t_2 = -6$. Dunque:

$$t^2 - 5t - 6 = (t + 1)(t - 6).$$

Sostituendo nuovamente $t = y^2$, si ha:

$$y^4 - 5y^2 - 6 = (y^2 + 1)(y^2 - 6).$$

c) Cerchiamo due monomi x_1 e x_2 tali che: $x_1 + x_2 = -7b$ e $x_1 \cdot x_2 = +12b^2$.

Completiamo la seguente tabella:

MOLTIPLICAZIONI CON PRODOTTO $p = 12b^2$	SOMMA s DEI FATTORI
$(+6b)(+2b)$	$+8b$
$(-6b)(-2b)$	$-8b$
$(+3b)(+4b)$	$+7b$
$(-3b)(-4b)$	$-7b$

Dunque $x_1 = -3b$ e $x_2 = -4b$, quindi:

$$a^2 - 7ab - 12b^2 = (a - 3b)(a - 4b).$$

d) Il trinomio $2x^2 + 5x - 3$ ha il coefficiente di x^2 diverso da 1. Per scomporlo occorre trovare due numeri che abbiano come somma il coefficiente di x, cioè $+5$, e come prodotto il prodotto del coefficiente di x^2 con il termine noto, cioè $2 \cdot (-3) = -6$.

Osservando la seconda riga della tabella nel caso **a**), vediamo che $x_1 = -1$ e $x_2 = +6$.

Riscriviamo il polinomio.

Evidenziamo la somma: $2x^2 + 5x - 3 = 2x^2 + (6-1)x - 3 = 2x^2 + 6x - x - 3$.

Raccogliamo parzialmente: $2x(x+3) - (x+3) = (2x-1)(x+3)$.

Dunque otteniamo: $2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$.

247 **COMPLETA** le seguenti tabelle.

POLINOMIO	SCOMPOSIZIONE
$x^2 + 10x + 9$	$(x + \dots)(x + \dots)$
$x^2 - \dots x + 9$	$(x-9)(x-\dots)$
$x^2 + 15x - \dots$	$(x+16)(x-\dots)$

POLINOMIO	SCOMPOSIZIONE
$a^2 - 2a - 15$	$(a - \dots)(a + \dots)$
$y^2 - 15y + \dots$	$(y - \dots)(y-6)$
$b^2 + \dots b - 7$	$(b-1)(b+\dots)$

Scomponi in fattori i seguenti trinomi.

248 $a^2 + 8a + 15$; $\quad a^2 + 4a - 21$; $\quad a^2 - 14a + 48$; $\quad -x^2 + 7x - 12$.

249 $-x^2 + 4x + 5$; $\quad a^2 + a - 20$; $\quad y^2 + 3y - 40$; $\quad b^2 + 2b - 8$.

250 $x^2 + 21x + 80$; $\quad x^2 - 5x - 14$; $\quad a^4 - a^2 - 20$; $\quad x^4 + x^2 - 2$.

251 $x^6 + 5x^3 - 14$; $\quad -y^6 + 7y^3 - 10$; $\quad x^2 - 6ax - 16a^2$; $\quad 2x^2 + 7x + 3$.

252 $z^2 - 7x^3z + 6x^6$; $\quad a^2 - 2ab - 3b^2$; $\quad 3x^2 - 7x + 2$; $\quad 4x^2 + 3x - 1$.

253 $x^2 - 4ax - 12a^2$; $\quad 5x^2 - 13x - 6$; $\quad 2x^8 - x^4 - 1$; $\quad 3x^4 + x^2 - 2$.

La scomposizione mediante il teorema e la regola di Ruffini

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

254 Scomponiamo il polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x - 30$, utilizzando la regola di Ruffini.

Cerchiamo, se ci sono, dei numeri che annullano il polinomio. Tali numeri vanno cercati fra i divisori del termine noto, ossia

$$+1, -1, +2, -2, +3, -3, +5, -5, \dots$$

e fra le frazioni

$$+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, +\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \dots$$

$P(+1) = 2 + 3 - 17 - 30 = -42 \neq 0;$

$P(-1) = -2 + 3 + 17 - 30 = -12 \neq 0;$

$P(+2) = 16 + 12 - 34 - 30 = -36 \neq 0;$

$P(-2) = -16 + 12 + 34 - 30 = 0.$

Il polinomio è divisibile per $x + 2$.

Calcoliamo il quoziente con la regola di Ruffini:

	2	3	-17	-30
-2		-4	$+2$	$+30$
	2	-1	-15	0

$2x^3 + 3x^2 - 17x - 30 =$
$= (x + 2)\,(2x^2 - x - 15).$

Ripetendo il procedimento con il polinomio $2x^2 - x - 15$, troviamo che esso non è divisibile per $x + 2$, mentre lo è per $x - 3$.

Nota che non è necessario ripetere il procedimento per 1 e per -1, perché se $(x - 1)$ e $(x + 1)$ dividessero $2x^2 - x - 15$, dividerebbero anche il polinomio originale, mentre abbiamo già verificato che non succede.

Applichiamo di nuovo la regola di Ruffini:

	2	-1	-15
$+3$		$+6$	$+15$
	2	$+5$	0

$2x^2 - x - 15 = (x - 3)(2x + 5).$

La scomposizione richiesta è quindi:

$2x^3 + 3x^2 - 17x - 30 = (x + 2)(2x^2 - x - 15) =$
$= (x + 2)(x - 3)(2x + 5).$

Scomponi in fattori, utilizzando la regola di Ruffini.

255 $5x^2 - 4x - 1$ $[(x - 1)(5x + 1)]$

256 $2x^2 + 3x - 2$ $[(x + 2)(2x - 1)]$

257 $2a^3 - a^2 - 5a - 2$ $[(a + 1)(a - 2)(2a + 1)]$

258 $x^3 - x^2 - 3x - 9$ $[(x - 3)(x^2 + 2x + 3)]$

259 $2b^3 + 5b^2 - 4b - 3$ $[(b - 1)(b + 3)(2b + 1)]$

260 $3b^3 - 4b^2 + 5b - 4$ $[(b - 1)(3b^2 - b + 4)]$

261 $t^3 - 39t + 70$ $[(t - 2)(t - 5)(t + 7)]$

262 $3a^3 - 2a^2 - 5a - 6$ $[(a - 2)(3a^2 + 4a + 3)]$

263 $x^3 - 3x - 2$ $[(x + 1)^2(x - 2)]$

264 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ $[(x - 1)(x + 2)(x - 3)]$

265 $4b + 16 + b^4 - 2b^3 - 10b^2$ $[(b + 2)(b - 4)(b^2 - 2)]$

266 $y^4 - 4y^3 - 2y^2 + 9y - 4$ $[(y - 4)(y - 1)(y^2 + y - 1)]$

267 $a^5 + 32$ $[(a + 2)(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a + 16)]$

BRAVI SI DIVENTA ► E18

268 $x^5 - x^4 - 10x^3 - 8x^2$

269 $6x^4 - 5x^3 - 2x^2 + x$ $[x(x - 1)(2x + 1)(3x - 1)]$

270 $a^3 - a^2b - 3ab^2 - b^3$ $[(a + b)(a^2 - 2ab - b^2)]$

271 $b^3 - 5ab^2 + 7a^2b - 2a^3$ $[(b - 2a)(b^2 - 3ab + a^2)]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu - 1** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Statistica*

RIEPILOGO LA SCOMPOSIZIONE DEI POLINOMI

Guida alla scomposizione

Dato un polinomio da scomporre:

1. Quando è possibile, raccogliamo a fattore comune.
2. Contiamo il numero dei termini e proviamo le strade riassunte nella tabella seguente.

SE IL POLINOMIO HA:	PUÒ ESSERE RICONDUCIBILE A:
due termini	differenza di due quadrati differenza di due cubi somma di due cubi
tre termini	quadrato di binomio trinomio del tipo $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$
quattro termini	cubo di binomio raccoglimento parziale differenza di due quadrati (se tre termini sono il quadrato di un binomio)

3. Applichiamo il teorema e la regola di Ruffini.

272 Determina due numeri razionali la cui somma sia s e il cui prodotto sia p, per i valori di s e p assegnati:

a) $s = 3$ e $p = -4$
b) $s = -5$ e $p = -6$
c) $s = -15$ e $p = 14$

[a) 4 e -1; b) -6 e 1; c) -1 e -14]

CACCIA ALL'ERRORE **Trova l'eventuale errore e spiega perché l'uguaglianza è sbagliata.**

273 $a^4 + a^3 + a^2 = a^2(a^2 + a)$

274 $3a^3 + 9a = 3a(a^2 + 6)$

275 $9a^4 - b^9 = (3a^2 - b^3)(3a^2 + b^3)$

276 $a^3 - 8 = (a-2)(a^2 + 2a + 4) = (a-2)(a+2)^2$

277 $x^2 - 9a - 20 = (a-5)(a-4)$

278 $a^3b^3 + 1 = (ab + 1)(a^2b^2 + ab + 1)$

279 $-x^2 - 4y^2 - 4xy = (-x - 2y)^2$

280 $8a^2b - 5ab^2 + ab = ab(8a - 5b)$

281 $16x^2y^2 + 9z^4 = (4xy + 3z^2)^2$

282 $b^4 - 20b^2 + 25 = (b^2 - 5)^2$

283 $a^2 + 11a - 12 = (a+1)(a-12)$

ASSOCIA **a ogni polinomio la sua scomposizione.**

284

1. $xy + y^2$	A. $y(x+1)$
2. $xy + y$	B. $y(x+y)$
3. $x^2 + xy$	C. $xy(x+1)$
4. $x^2y + xy$	D. $x(y+1)$
5. $xy + x$	E. $x(x+y)$

285

1. $x^3 + 9x + 3x^2$	A. $(x-3)(x+9)$
2. $x^3 - 27$	B. $x(x^2 + 3x + 9)$
3. $x^2 - 6x + 9$	C. $(x-3)^2$
4. $x^2 + 6x - 27$	D. $(x-3)(x^2 + 3x + 9)$
5. $x^2 - 9$	E. $(x-3)(x+3)$
6. $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$	F. $(x-3)(x^2 + 9)$

Calcola mentalmente i seguenti quozienti, utilizzando le scomposizioni in fattori.

286 $(a^2 - b^2) : (a - b)$

287 $(x^3 + 8) : (x + 2)$

288 $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) : (x + 1)$

289 $(a^4 - 25a^2) : (a + 5)$

290 $(x^8 - 2x^4 + 1) : (x^2 + 1)$

291 $(a^{2n} - b^{2n}) : (a^n + b^n) \qquad (n \in \mathbb{N})$

292 $(x^{2n} - 4x^n + 4) : (x^n - 2) \qquad (n \in \mathbb{N})$

Scomponi in fattori.

293 $30a^2b^3 - 25a^3b^2$

294 $25x^2 - 1$

295 $4x^2 + 25 - 20x$

296 $-7x^2y^2 + 14x^5y^6$

297 $8x^3 + 27 + 36x^2 + 54x$

298 $bx - ax + a - b$

299 $27x^3 + 64$

300 $x^2 - 12x - 13$

301 $9y^2 - 4$

302 $9y^2 + 4 + 12y$

303 $8 - 60y - 125y^3 + 150y^2$

304 $16x^2 + \frac{1}{4} + 4x$

305 $\frac{y^3}{8} - 1 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y$

306 $\frac{x^4}{4} + x^2 + 1$

307 $a^2 + b^2 + 4c^2 - 2ab - 4ac + 4bc$

308 $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

309 $x^2 - 2x - 35$

310 $\frac{4}{9} + y^2 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{4}{3}y + 2x - 3xy$

311 $\frac{9}{16}a^2b^2 + \frac{16}{9} + 2ab$

312 $3ax + 3xy + 2a + 2y$

313 $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

314 $(2x - y)^2 - \frac{1}{25}$

315 $\frac{8}{125}x^3 - y^3$

316 $\frac{1}{27}a^3b^3 - \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{9}{4}ab - \frac{27}{8}$

317 $4x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 + 2xy - 4xz - yz$

318 $y^3z^{12} - a^9$

319 $3b^2 + b - 10$

320 $x^2 - 4x - 77$

321 $\frac{1}{4} + t^2 + z^2 - t + z - 2tz$

322 $125a^3 - 27b^9$

323 $2a^2b - 6a$

324 $2a^{45} + 4a^{15}$

325 $2a^4 - 2a^3 - 12a^2$

326 $3a^3 - 2b^2 + 2a^2b - 3ab$ $[(3a + 2b)(a^2 - b)]$

327 $1 - (1 + a)^2$ $[-a(a + 2)]$

328 $10a^2 - 4ab + 15a - 6b$ $[(5a - 2b)(2a + 3)]$

329 $a^2(x + y + z) - a(x + y + z)$ $[a(x + y + z)(a - 1)]$

330 $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ $[(x - 1)(x^2 - x + 3)]$

331 $32x - 12x^2 - 16$ $[-4(x - 2)(3x - 2)]$

332 $\frac{9}{4}abc^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{3}{2}c^2 - 1$ $\left[\left(\frac{3}{2}ab + 1\right)\left(\frac{3}{2}c^2 - 1\right)\right]$

333 $8ab - ax + 2a^2 - 4bx$ $[(4b + a)(2a - x)]$

334 $3x^5 - 81x^2$ $[3x^2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)]$

335 $\frac{1}{4}x^2y^2z^2 + \frac{2}{3}xy - \frac{1}{4}xyz^2 - \frac{2}{3}$ $\left[\left(\frac{1}{4}xyz^2 + \frac{2}{3}\right)(xy - 1)\right]$

336 $y - 2 - x^2y + 2x^2$ $[(x + 1)(1 - x)(y - 2)]$

337 $(a + 1)(a^2 + 1) - (a + 1)(a^2 - 1)$ $[2(a + 1)]$

338 $(2x + y)^2 - (3y - x)^2$ $[(3x - 2y)(x + 4y)]$

339 $\frac{1}{4}(4x - y)(4x + y) + (4x + y)^2$ $\left[(4x + y)\left(5x + \frac{3}{4}y\right)\right]$

340 $9x^2 - (x - 5)^2$ $[(2x + 5)(4x - 5)]$

341 $x^6 - x^4 + x^2 - 1$ $[(x + 1)(x - 1)(x^4 + 1)]$

342 $x^2 - 4x^2y + 4xy^2 - y^2$ $[(x - y)(x + y - 4xy)]$

343 $ax^2 + bx^2 - 4ay^2 - 4by^2$ $[(a + b)(x + 2y)(x - 2y)]$

344 $(4 - a^2)(2 - b) + (2 - a)(4 - b^2)$ $[(4 + a + b)(2 - a)(2 - b)]$

345 $(a + b)3x^2 - (a - b)3x^2$ $[6bx^2]$

346 $3ax - 3bx - 6ay + 6by$ $[3(x - 2y)(a - b)]$

347 $\frac{2}{3}ax - x - \left(\frac{4}{3}ab - 2b\right)$ $\left[(x - 2b)\left(\frac{2}{3}a - 1\right)\right]$

348 $\left(3x + \frac{1}{2}y\right)^2 + 3x + \frac{1}{2}y$ $\left[\left(3x + \frac{1}{2}y\right)\left(3x + \frac{1}{2}y + 1\right)\right]$

349 $x(x - 2y^3)^2 - (2y^3 - x)^2$ $[(x - 2y^3)^2(x - 1)]$

350 $(2b - c)^3 - 9(2b - c)$ $[(2b - c)(2b - c + 3)(2b - c - 3)]$

351 $12(a + b) - 6(a^2 - b^2)$ $[6(a + b)(2 - a + b)]$

352 $24 - 6(x - y)^2$ $[6(2 - x + y)(2 + x - y)]$

353 $x^3 + 4x^2 - 9x - 36$ $[(x + 4)(x - 3)(x + 3)]$

354 $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^6 - x^2y^4$ $[(x + 2y)(x - 2y)(x + y^2)(x - y^2)]$

355 $(a + 2)^2 - 1$ $[(a + 1)(a + 3)]$

356 $3x^4 - 12ax^2 + 12a^2$ $[3(x^2 - 2a)^2]$

357 $-49a^3 - 14a^2b - ab^2$ $[-a(7a + b)^2]$

358 $-2xb^2 - 4xb - 2x$ $[-2x(b + 1)^2]$

359 $x^5 - 10x^4 + 25x^3$ $[x^3(x - 5)^2]$

360 $a^2(x + 1) - 2a(x + 1) + x + 1$ $[(x + 1)(a - 1)^2]$

361 $4a^4 + 4 - 8a^2$ $[4(a + 1)^2(a - 1)^2]$

362 $2x + 2y + x^2 + 2xy + y^2$ $[(x + y)(2 + x + y)]$

363 $a^3 - a^2b - ab - a$ $[a(a + 1)(a - b - 1)]$

364 $(2a + 3b)^2 - (4a + 6b)(a + b)$ $[b(2a + 3b)]$

365 $(a^2 + 2b)(2x - y) - b(b + 2)(2x - y)$ $[(2x - y)(a + b)(a - b)]$

366 $x^2 - y^2 - 3(x-y)^2$ $[2(2y-x)(x-y)]$

367 $x^5 - x - 2x^4 + 2$ $[(x-2)(x^2+1)(x+1)(x-1)]$

368 $a - b - a^2 + 2ab - b^2$ $[(a-b)(1-a+b)]$

369 $a^6 + a^4b^2 - a^2b^4 - b^6$ $[(a^2+b^2)^2(a+b)(a-b)]$

370 $(x-3y)(2x-y)^2 + 27y - 9x$ $[(x-3y)(2x-y+3)(2x-y-3)]$

371 $2a^3 - 2a^3b - 18a + 18ab$ $[2a(1-b)(a+3)(a-3)]$

372 $a^9 - 3a^6 + 3a^3 - 1$ $[(a-1)^3(a^2+a+1)^3]$

373 $2ax^3 - bx^3 - 2ay^3 + by^3$ $[(2a-b)(x-y)(x^2+xy+y^2)]$

374 $x^3y^3 - x^6y^3 - z^3 + x^3z^3$ $[(1-x)(1+x+x^2)(xy-z)(x^2y^2+xyz+z^2)]$

375 $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 2$ $[(x-1)(x-2)(x^2-x-1)]$

376 $\frac{1}{8}a^7 - \frac{3}{2}a^8 + 6a^9 - 8a^{10}$ $\left[a^7\left(\frac{1}{2}-2a\right)^3\right]$

377 $y^2 - (x+2)y + 2x$ $[(y-x)(y-2)]$

378 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}xy + \frac{1}{27}y^2$ $\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}y\right)^2\right]$

379 $16a^2b - \frac{1}{9}b$ $\left[b\left(4a-\frac{1}{3}\right)\left(4a+\frac{1}{3}\right)\right]$

380 $x^6 + 16x^3 + 64$ $[(x+2)^2(x^2-2x+4)^2]$

381 $a^4(x^2+1) - 2a^4$ $[a^4(x+1)(x-1)]$

382 $x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64$ $[(x+2)^3(x-2)^3]$

383 $\frac{3}{8}x^5 - \frac{24}{125}x^2y^3$ $\left[3x^2\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{5}y\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{4}{25}y^2+\frac{xy}{5}\right)\right]$

384 $x^3 + x^2y - x - y$ $[(x-1)(x+1)(x+y)]$

385 $7x^4 - 7$ $[7(x-1)(x+1)(x^2+1)]$

386 $3(a^2+b^2) - 9(a^2+b^2)^2$ $[3(a^2+b^2)(1-3a^2-3b^2)]$

387 $x^4 - 4x^2 + 5x^3 - 20x$ $[x(x-2)(x+2)(x+5)]$

388 $6a^2b^4 - 4ab^2 + 4a^2b - 6a^3b^3$ $[2ab(b-a)(3ab^2-2)]$

389 $a^4 - 5a^2 + 4$ $[(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)]$

390 $\frac{1}{4}a^4 + a^2 + 1 - b^2$ $\left[\left(\frac{1}{2}a^2+1-b\right)\left(\frac{1}{2}a^2+1+b\right)\right]$

391 $a^5 - a - 2 + 2a^4$ $[(a+2)(a^2+1)(a+1)(a-1)]$

392 $a^3 - 6a^2 - a + 30$ $[(a+2)(a-3)(a-5)]$

393 $x^8 + 2x^6 - x^4 - 2x^2$ $[x^2(x^2+1)(x^2+2)(x-1)(x+1)]$

394 $3x^4 - 4x^3 - 17x^2 + 6x$ $[x(x+2)(x-3)(3x-1)]$

395 $x^4 - y^4 + 2x^3y - 2xy^3$ $[(x+y)^3(x-y)]$

396 $x^6 - 9x^3 + 8$ $[(x-2)(x-1)(x^2+2x+4)(x^2+x+1)]$

397 $2t^5 + 4t^4 - 10t^3 - 12t^2$ $[2t^2(t+1)(t+3)(t-2)]$

398 $a^8 - 2a^4 + 1$ $[(a^2+1)^2(a+1)^2(a-1)^2]$

399 $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ $[(x-2)^2(x-3)]$

400 $a^2b - 9ab^2 + 20b^3$ $[b(a-5b)(a-4b)]$

401 $x^2 - 9 + 6a - a^2$ $[(x-a+3)(x+a-3)]$

402 $2ab^4 - 2ab^3c + xb^4 - xb^3c$ $[b^3(b-c)(2a+x)]$

403 $2ax^2(3a-x)^2 - 2a$ $[2a(3ax-x^2+1)(3ax-x^2-1)]$

404 $(2x+1)^2-4(4x^2-1)$ $[(2x+1)(5-6x)]$

405 $36x^4+y^2-9x^2-4x^2y^2$ $[(2x+1)(2x-1)(3x+y)(3x-y)]$

406 $xy^2+\frac{16}{81}xy^6-\frac{8}{9}xy^4$ $\left[xy^2\left(\frac{2}{3}y+1\right)^2\left(\frac{2}{3}y-1\right)^2\right]$

407 $x^2-4x+4-16a^4$ $[(x-2+4a^2)(x-2-4a^2)]$

408 $(2x-y)^2-(x^2+6xy+9y^2)$ $[(3x+2y)(x-4y)]$

409 $a^3-8+3a^2+6a+12$ $[(a^2+2a+4)(a+1)]$

410 $6a^4-24a^2b^2+3a^3-12ab^2$ $[3a(a+2b)(a-2b)(2a+1)]$

411 $2a^2-4ab+2b^2-50x^2$ $[2(a-b+5x)(a-b-5x)]$

412 $16+4x+x^2-(x^3-64)$ $[(x^2+4x+16)(5-x)]$

413 $a^2-a-20+2ax+8x$ $[(a+4)(a-5+2x)]$

414 $(1+x)^2+x^2(1+x)^2+2x(1+2x+x^2)$ $[(1+x)^4]$

415 $(3a-b)^2-(a+b)(3a-b)-9a^2+b^2$ $[-(3a-b)(a+3b)]$

416 $12x^3-14x^4+2x^6$ $[2x^3(x-1)(x-2)(x+3)]$

417 $y^4-z^4+2y^3z-2yz^3$ $[(y+z)^3(y-z)]$

418 $x^2-1-2(x^2+4x+3)$ $[-(x+1)(x+7)]$

419 $3x^3-9x^2-18x+24$ $[3(x-1)(x-4)(x+2)]$

420 $x^4-7x^3+11x^2-7x+10$ $[(x^2+1)(x-5)(x-2)]$

421 $a^2+ab+b^2+a^3-b^3$ $[(a-b+1)(a^2+ab+b^2)]$

422 $a^2-4ax+4x^2-(a-2x)^2y^4$ $[(a-2x)^2(1+y^2)(1-y)(1+y)]$

423 $6y^3-9y^2-9y+6$ $[3(y+1)(2y-1)(y-2)]$

424 $(x-y)^2-3xy^2+3y^3$ $[(x-y)(x-y-3y^2)]$

425 $y^2+(2-a)y-2a$ $[(y+2)(y-a)]$

426 b^4+4 (aggiungi e togli $4b^2$) $[(b^2-2b+2)(b^2+2b+2)]$

427 $a^2+a(5-2b)-10b$ $[(a+5)(a-2b)]$

428 $(x+2y)^3+(x-2y)^3$ $[2x(x^2+12y^2)]$

429 $\frac{4}{9}x^2+\frac{2}{3}x+b-b^2$ $\left[\left(\frac{2}{3}x+b\right)\left(\frac{2}{3}x-b+1\right)\right]$

430 $ax^2+(a-3)ax-3a^2$ $[a(x-3)(x+a)]$

431 b^8+b^4+1 (aggiungi e togli b^4) $[(b^4+1+b^2)(b^4+1-b^2)]$

432 $x^2(y+z)+2ax(y+z)+a^2(y+z)-b^2(y+z)$ $[(x+a+b)(x+a-b)(y+z)]$

433 $(x^2-3)(3-x^2)+2x^4-x^2-15$ $[(x^2-3)(x^2+8)]$

434 $(a^2-a-6)(a-4)-(a-9)(a^2-2a-8)$ $[6(a+2)(a-4)]$

435 $3a^4-4+a^5-a^3-11a^2-12a$ $[(a+1)^3(a+2)(a-2)]$

436 $x^2+y^2+2xy-z^2-x-y+z$ $[(x+y-z)(x+y+z-1)]$

437 $(a-5)^2+25-a^2+(2a-10)(a+3)$ $[2(a-5)(a-2)]$

438 $a^4+a^2b^2+b^4$ (aggiungi e togli a^2b^2) $[(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)]$

439 $x^4-5x^2+4+3x^3-3x$ $[(x+1)(x-1)^2(x+4)]$

440 $x^2+4y^2+25-4xy+10x-20y-y^4$ $[(x-2y+5+y^2)(x-2y+5-y^2)]$

441 $\frac{1}{16}(x+y)^4 - \frac{1}{2}(x+y)^2 + 1$ $\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+1\right)^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-1\right)^2\right]$

442 $x^4y - 3x^3y^2 - 3x^2y^3 + 5xy^4$ $[xy(x-y)(x^2-2xy-5y^2)]$

443 $2(x-2)^2 + x(x-2) + 4 - 3x$ $[(3x-4)(x-3)]$

444 $x^3 - (2y+1)x^2 - x + 2y + 1$ $[(x-2y-1)(x+1)(x-1)]$

445 $2a^n - 4a^{2n-2}$ $\quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ $[2a^n(1-2a^{n-2})]$

446 $x^{6n} + 1$ $\quad (n \in \mathbb{N})$ $[(x^{2n}+1)(x^{4n}-x^{2n}+1)]$

447 $x^{4n+1} - 16x^{4m+1}$ $\quad (m, n \in \mathbb{N})$ $[x(x^n+2x^m)(x^n-2x^m)(x^{2n}+4x^{2m})]$

448 $4a^{n+1} - 2a^{2n+1} - 4b^n + 2a^nb^n$ $\quad (n \in \mathbb{N})$ $[2(2-a^n)(a^{n+1}-b^n)]$

449 $8x^{3n}y + 12x^{2n}y^{n+1} + 6x^ny^{2n+1} + y^{3n+1}$ $\quad (n \in \mathbb{N})$ $[y(2x^n+y^n)^3]$

Calcola rapidamente il valore dei seguenti polinomi per i valori indicati a fianco, usando la scomposizione in fattori.

450 $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3, \quad a = \frac{1}{2}, \ b = 4.$

451 $a^5 + 8a^4 + 16a^3, \quad a = -4.$

452 $\frac{1}{4}a^2 + \frac{2}{3}ab + \frac{4}{9}b^2, \quad a = 2, \ b = \frac{3}{2}.$

453 $9x^2 + y^2 + 4 - 6xy - 12x + 4y, \quad x = -\frac{1}{3}, \ y = -1.$

454 $-x^3 + 9x^2 - 27x + 27, \quad x = 2.$

455 $5a^2 - 25a + 30, \quad a = 5.$

456 $a^2b + 2ab + b - b^3, \quad a = -1, \ b = -\frac{1}{3}.$

Problemi

457 Determina per quale valore di $a \in \mathbb{Z}$ il polinomio $x^3 + ax - 2$ può essere scomposto in $(x+1)^2(x-2)$. Motiva la risposta. $[a = -3]$

458 Trova il più piccolo valore $m \in \mathbb{Q}$, per cui $x^{2m+1} - 9$ è scomponibile nella differenza di quadrati. Dimostra che per tale valore il binomio dato può essere scritto nella forma $(-x-3)(3-x)$. Esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che il binomio dato sia la differenza di quadrati? Motiva la risposta. $\left[m = \frac{1}{2}; \text{non esiste}\right]$

459 Le misure della base e dell'altezza di un rettangolo sono rappresentate da due polinomi a coefficienti interi. L'area del rettangolo vale $3a^2 + 14ab + 8b^2$, con $a, b > 0$.

a) Quanto misurano base e altezza?

b) Qual è la misura del perimetro del rettangolo?

[a) $(3a+2b), (a+4b)$; b) $4(2a+3b)$]

2. Il M.C.D. e il m.c.m. fra polinomi

Teoria a pag. 418

RIFLETTI SULLA TEORIA

460 TEST Il M.C.D. di una coppia di polinomi è x. Quali sono i due polinomi?

A $x^2 + x^3$ e $x^3 - x^2$
B $4x^2 - 4x$ e $2x(x+1)$
C $x^2 + x$ e $3x^2 + 3x$
D $x^3 + 2x^2 - x$ e $4x^2 + 8x$
E $x^3 + 2x^2 + x$ e $x^2 + x$

461 TEST Quale delle seguenti coppie di polinomi ha per M.C.D. il polinomio $x^n - 1$, con $n \in \mathbb{N}$?

A $x^{2n} - 1$ e $2 - 2x^n$
B $x^{2n} - 1$ e $x^{2n} + 2x^n + 1$
C $x^{3n} + 1$ e $x^{2n} - 1$
D $4x^n - 4$ e $8x^n - 8$
E $16x^{2n} - 16$ e $8x^n + 8$

462 Il M.C.D. di polinomi è sempre un polinomio? Il M.C.D. fra due polinomi è sempre divisibile per entrambi i polinomi?

463 Dato il polinomio $9x^2 - 9$, scrivi:
a) due divisori di grado 1;
b) 3 divisori di grado 0;
c) un divisore di grado 2.
[a) $(x-1)$ e $(x+1)$; b) 1, 3 e 9; c) $x^2 - 1$]

464 Dati i polinomi $a^2 + 4a + 4$ e $a^2 - 4$, determina un divisore comune di maggior grado possibile. È univocamente determinato? Coincide con il M.C.D.? [$(a+2)$; sì; sì]

465 TEST Quale dei seguenti polinomi è il M.C.D. dei polinomi A, B, C?

$A(x) = 6a^2x - 3ax^2$,
$B(x) = 16a^2x - 16ax^2 + 4x^3$,
$C(x) = 4a^2 - x^2$

A $3x(2a - x)$.
B $4x(2a - x)$.
C $2a - x$.
D $2a + x$.
E $3x(2a - x)^2$.

466 TEST Il m.c.m. tra due polinomi è $12(x-3)^2$. Quali possono essere i due polinomi?

A $2(x-3)$ e $6(x-3)^2$
B $2x - 6$ e $6x - 18$
C $4(3-x)^2$ e $3x - 9$
D $2(x-3)^2$ e $6x - 18$
E $x^2 + 6x + 9$ e $12(x-3)$

467 TEST Il m.c.m. e il M.C.D. di $3(x+1)^3$ e $9(x+1)^2$ sono:

A $3(x+1)^3$ e $9(x+1)^2$
B $9(x+1)^3$ e $3(x+1)^2$
C $9(x+1)^2$ e $3(x+1)^3$
D $9(x+1)$ e $3(x+1)$
E $9(x+1)^5$ e $3(x+1)$

468 VERO O FALSO?

a) Il m.c.m. fra due polinomi ha sempre grado maggiore di entrambi i polinomi. V F
b) Il m.c.m. di polinomi può essere un monomio. V F
c) Il M.C.D. fra polinomi può essere 1. V F
d) Il M.C.D e il m.c.m. di $3x - 3$ e di $5x - 5$ differiscono per un fattore numerico. V F

469 Dato il polinomio $2y^2 + 6y + 8$, scrivi:
a) un multiplo di grado 3;
b) due multipli di grado 2;
c) un multiplo di grado 1.
[a) per esempio $2(y+1)(y^2 + 3y + 4)$; b) $2y^2 + 6y + 8$ e $3(2y^2 + 6y + 8)$; c) impossibile]

470 Dati i polinomi $3a + 3$ e $5a + 5$, determina un loro multiplo comune di minor grado possibile. È univocamente determinato? [per esempio $30(a+1)$; no]

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

ESERCIZIO GUIDA

471 Determiniamo il M.C.D. e il m.c.m. fra i polinomi: $a^3 + 2a^2 - 3a$; $5a^3 - 5a$; $a^2 - a^3$.

Scomponiamo in fattori i tre polinomi:

1. $a^3 + 2a^2 - 3a = a(a^2 + 2a - 3) =$

Non possiamo fermarci qui, perché il secondo fattore è ancora scomponibile:

$= \underline{a(a-1)(a+3)}$;

2. $5a^3 - 5a = 5a(a^2 - 1) =$

Il secondo fattore è ancora scomponibile:

$= \underline{5a(a+1)(a-1)}$;

3. $a^2 - a^3 = a^2(1 - a) =$

Poiché nelle scomposizioni precedenti abbiamo incontrato il fattore $(a - 1)$, raccogliamo -1 nel secondo fattore:

$= \underline{-a^2(a-1)}$.

Dunque:

M.C.D.$(a^3 + 2a^2 - 3a;\ 5a^3 - 5a;\ a^2 - a^3) =$
$= a(a - 1)$;

m.c.m.$(a^3 + 2a^2 - 3a;\ 5a^3 - 5a;\ a^2 - a^3) =$
$= 5a^2(a - 1)(a + 3)(a + 1)$.

Determina M.C.D. e m.c.m. fra i seguenti polinomi.

472 $3a^2b + 3ab^2$; $6a^3 + 6a^2b$; $2a^2b^2 + 2ab^3$. [M.C.D. $= a(a+b)$; m.c.m. $= 6a^2b^2(a+b)$]

473 $2x - 2$; $x^2 - 1$; $3x + 3$. [M.C.D. $= 1$; m.c.m. $= 6(x-1)(x+1)$]

474 $2x^2 - x$; $4x^2 - 4x + 1$; $6x - 3$. [M.C.D. $= 2x - 1$; m.c.m. $= 3x(2x-1)^2$]

475 $6x^3$; $3x^4 - 27x^2$; $2x^3 + 6x^2$. [M.C.D. $= x^2$; m.c.m. $= 6x^3(x-3)(x+3)$]

476 $x^2 - xy$; $xy - y^2$; $x^2 - y^2$. [M.C.D. $= x - y$; m.c.m. $= xy(x-y)(x+y)$]

477 $2x + 2y$; $x^2 - y^2$; $x^2 + y^2 + 2xy$. [M.C.D. $= x + y$; m.c.m. $= 2(x+y)^2(x-y)$]

478 $x^4 - 2x^2 + 1$; $x^3 + x^2 - x - 1$; $x^2 - 1$. [M.C.D. $= (x+1)(x-1)$; m.c.m. $= (x+1)^2(x-1)^2$]

479 $8 - x^3$; $6x^2 - x^3 - 12x + 8$; $x^2 - 4x + 4$. [M.C.D. $= 2 - x$; m.c.m. $= (2-x)^3(4 + 2x + x^2)$]

480 $a^3b - 2a^2b^2$; $a^3 - 4a^2b + 4ab^2$; $a^2b^2 - 4b^4$. [M.C.D. $= a - 2b$; m.c.m. $= a^2b^2(a-2b)^2(a+2b)$]

BRAVI SI DIVENTA ▶ E19

481 $3x^2 - 3x - 18$; $4x^5 - 16x^3$; $x^2 + 4x + ax + 2a + 4$

482 $3a^3 - 18a^2b + 27ab^2$; $9a^3 - 81ab^2$; $18a^2b - 6a^3$. [M.C.D. $= 3a(a-3b)$; m.c.m. $= 18a^2(a-3b)^2(a+3b)$]

483 $8x^3 - 2x + 1 - 4x^2$; $4x^2 - 4x + 1$; $1 - 4x^2$. [M.C.D. $= 1 - 2x$; m.c.m. $= (1-2x)^2(1+2x)$]

484 $a^2 - ab - 2a + 2b$; $b^2 - 2b - ab + 2a$; $4 - 2a + ab - 2b$. [M.C.D. $= 1$; m.c.m. $= (a-b)(a-2)(b-2)$]

485 $(x^2 - 4)(x^2 + 9)$; $(x^3 + 9x)(x^2 + 4x + 4)$; $x^3 - 4x$. [M.C.D. $= (x+2)$; m.c.m. $= x(x+2)^2(x^2+9)(x-2)$]

486 $6 - x - x^2$; $x^3 - 7x + 6$; $x^2 - 3x + 2$. [M.C.D. $= 2 - x$; m.c.m. $= (x+3)(1-x)(2-x)$]

487 $(x - y)(x^2 - 4y^2)$; $x^2 - 3xy + 2y^2$; $x^2 + xy - 2y^2$. [M.C.D. $= x - y$; m.c.m. $= (x-y)(x-2y)(x+2y)$]

488 $2x^3 - 50x$; $x^4 - 125x$; $x^4 - 2x^3 - 15x^2$. [M.C.D. $= x(x-5)$; m.c.m. $= 2x^2(x-5)(x+5)(x+3)(x^2+5x+25)$]

3. Le frazioni algebriche

Teoria a pag. 419

RIFLETTI SULLA TEORIA

489 VERO O FALSO?

a) I polinomi sono frazioni algebriche. V F

b) Una frazione algebrica con numeratore nullo è uguale a 1. V F

c) L'espressione $2x^{-1}(x+2)$ è una frazione algebrica. V F

d) Le condizioni di esistenza di una frazione algebrica sono tutte le uguaglianze che le variabili devono verificare affinché il denominatore sia nullo. V F

e) Una frazione algebrica con denominatore uguale a un numero è un polinomio. V F

490 La frazione algebrica $\frac{x+2}{x-3}$ perde significato per $x = 3$? E per $x = -2$?

491 VERO O FALSO? La frazione algebrica $\frac{x-1}{4x}$:

a) si annulla per $x = 1$ e per $x = 0$; V F

b) perde significato per $x = -4$; V F

c) assume valore $+\frac{1}{8}$ per $x = 2$; V F

d) assume valori reali per $x \neq 0$. V F

492 VERO O FALSO?

La frazione $\frac{a-4}{a^2-4}$:

a) perde significato per $a = -2$. V F

b) si annulla per $a = 4$. V F

c) ha come C.E.: $a \neq \pm 2$. V F

d) per $a = 1$ assume il valore -1. V F

e) per $a = 0$ vale 1. V F

ESERCIZI

Le condizioni di esistenza delle frazioni algebriche

ESERCIZIO GUIDA

493 Determiniamo le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni algebriche:

a) $\frac{x+y}{2xy}$; b) $\frac{5x-1}{2x+3}$; c) $\frac{2x-5}{x^2-4}$; d) $\frac{4a}{a^2+1}$; e) $\frac{a-4}{a^5-27a^2}$; f) $\frac{3a+2b}{a+b}$.

a) Dobbiamo porre il denominatore diverso da 0: $2xy \neq 0$.

Per la legge di annullamento del prodotto, nessuno dei fattori deve essere uguale a 0, quindi:

C.E.: $x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

b) $2x + 3 \neq 0 \rightarrow$ C.E.: $x \neq -\frac{3}{2}$.

c) $x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow (x+2)(x-2) \neq 0$.

Per la legge di annullamento del prodotto, il prodotto è 0 se e soltanto se almeno uno dei due fattori è 0, quindi deve essere:

$x + 2 \neq 0$ e $x - 2 \neq 0$, ossia C.E.: $x \neq -2 \wedge x \neq +2$.

In modo equivalente scriviamo:

C.E.: $x \neq \pm 2$.

d) $a^2 + 1 \neq 0$.

Questo è vero per ogni numero reale a, infatti essendo a^2 sempre ≥ 0, la somma $a^2 + 1$ è sempre un numero positivo.

C.E.: $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

e) Scomponiamo in fattori il denominatore:

$$a^5 - 27a^2 = a^2(a^3 - 27) =$$
$$= a^2(a-3)(a^2 + 9 + 3a).$$

Per la legge di annullamento del prodotto, nessuno dei fattori deve essere uguale a 0, quindi:

$$a^2 \neq 0 \wedge a - 3 \neq 0 \wedge a^2 + 9 + 3a \neq 0.$$

Poiché un numero al quadrato è uguale a 0 solo se il numero è 0, allora $a \neq 0$.

Inoltre $a^2 + 9 + 3a$, essendo un falso quadrato, non è nullo per qualsiasi valore di a. In conclusione,

C.E.: $a \neq 0 \wedge a \neq 3$.

f) $a + b \neq 0$, ossia C.E.: $a \neq -b$.

La scrittura $a \neq -b$ significa che i valori di a e di b non devono essere opposti. Per esempio, sono escluse le coppie:

$$\begin{cases} a = +1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -0{,}5 \\ b = +0{,}5 \end{cases} \quad \begin{cases} a = +100 \\ b = -100 \end{cases} \text{ ecc.}$$

Determina le condizioni di esistenza delle seguenti frazioni algebriche.

494 $\frac{5}{a}$; $\frac{1}{x}$; $\frac{a+b}{2a}$; $\frac{2a}{a-1}$; $\frac{3a+x}{x-3}$.

495 $\frac{x+1}{6xy}$; $\frac{3}{2(x-1)}$; $\frac{a+1}{5a^3x}$.

496 $\frac{2}{xy^3t}$; $\frac{4}{9(x+3)}$; $\frac{x}{a^2b^2}$.

497 $\frac{2a}{3x+6}$; $\frac{1}{2x-2}$; $\frac{2x+3}{2x+4}$; $\frac{a^2x}{3x+1}$.

498 $\frac{x+2}{2x-3}$; $\frac{4x^2}{3x+2}$; $\frac{4ab}{2b-1}$; $\frac{2}{a^3x}$.

499 $\frac{2}{(x-1)(x+5)}$; $\frac{x}{a(a+6)}$; $\frac{b}{3x^2}$.

500 $\frac{6}{x^2+x}$; $\frac{1}{ax^2y}$; $\frac{5}{2a^2-4a}$; $\frac{b}{ax+2x}$.

501 $\frac{3}{b+1}$; $\frac{3a+b}{x}$; $\frac{3ax}{x^2+1}$; $\frac{4a^2-3}{4a^2-16}$.

502 $\frac{4a^2}{a+5}$; $\frac{5x}{4x^2+3}$; $\frac{2b-b^2}{9b^2+1}$; $\frac{1}{1-x^2}$.

503 $\frac{3x}{2x+1}$; $\frac{4a+b}{3a^3-75a}$; $\frac{4}{5a}$; $\frac{2a-1}{x^4-81}$.

504 $\frac{5-x}{6x-9}$; $\frac{1-x}{2x^2+1}$; $\frac{1}{y^2-25}$.

505 $\frac{2a}{a^2-1}$; $\frac{a-1}{a^2-6a+9}$; $\frac{6}{5x^2-45}$.

506 $\frac{2}{a^2-a}$; $\frac{3b}{2b-b^2}$; $\frac{2a-1}{(a^2-1)(a+7)}$.

507 $\frac{1}{3x^2-12x+12}$; $\frac{1}{x^2-x-2}$; $\frac{6}{a^3+4a^2}$.

508 $\frac{2}{(x-1)^3}$; $\frac{x}{a(a^2-4)}$; $\frac{a+1}{27x^3}$.

509 $\frac{6ax}{x^2+2x}$; $\frac{1}{y^3+1}$; $\frac{a-3}{(a^2-4)(a^3-a^2)}$.

510 $\frac{2a}{a-b}$; $\frac{1}{x-y}$; $\frac{a+b}{2a+b}$.

511 $\frac{2ax}{x-a}$; $\frac{3x+b}{x^2-b^2}$; $\frac{ax^2+1}{x^2-4a^2}$.

Indica per quali valori di x le seguenti frazioni si annullano e per quali perdono significato.

512 $\frac{x^2+3x}{x+1}$; $\frac{2x}{x^2-4}$; $\frac{x+1}{x^2+1}$; $\frac{x-2}{x^2+9}$; $\frac{7x^3}{1-x}$; $\frac{2x^2+10x}{(x+5)(3x-1)}$.

513 $\frac{x-6}{x^2-6x}$; $\frac{x^2-1}{x^2+3x}$; $\frac{x}{-x^2-4}$; $\frac{8-2x^2}{x+2}$; $\frac{(x^2+1)^3}{3x}$; $\frac{8x^2+1}{2x-1}$.

4. Il calcolo con le frazioni algebriche

Teoria a pag. 420

RIFLETTI SULLA TEORIA

Le frazioni equivalenti

514 Una frazione algebrica può essere equivalente a un polinomio?

515 La frazione $\dfrac{x+2}{2}$ è equivalente a x?

516 Perché il prodotto di una frazione algebrica per la sua reciproca è equivalente a 1?

517 VERO O FALSO?

a) La somma di due frazioni algebriche è una frazione che ha per denominatore la somma dei denominatori. V F

b) La differenza di due frazioni algebriche equivalenti è nulla. V F

c) Il rapporto fra due frazioni equivalenti è uguale a 1. V F

d) La potenza di una frazione algebrica ha le stesse C.E. della frazione base. V F

ESERCIZI

Dalle frazioni con segno − alle frazioni equivalenti con segno +

ESERCIZIO GUIDA

518 Trasformiamo in una frazione equivalente preceduta dal segno + la frazione:

$$-\frac{x+y}{(x-y)(a-1)}.$$

Poiché $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}$, otteniamo:

$$-\frac{x+y}{(x-y)(a-1)} \text{ equivalente a } \frac{-x-y}{(x-y)(a-1)} \text{ oppure a } \frac{x+y}{(-x+y)(a-1)} \text{ oppure a } \frac{x+y}{(x-y)(-a+1)}.$$

Trasforma le seguenti frazioni con segno − in equivalenti frazioni con segno +.

519 $-\dfrac{1}{a-2}$; $\quad -\dfrac{1}{2a+1}$; $\quad -\dfrac{3a}{x-a}$; $\quad -\dfrac{3a-5}{-a^2-b^2}$.

520 $-\dfrac{2x-a^2}{ab-1}$; $\quad -\dfrac{ax+b}{-x-1}$; $\quad -\dfrac{5x-a^2}{3-x^2}$; $\quad -\dfrac{2x-a^2-b^2+1}{3a^2-6a}$.

521 $-\dfrac{+x+y}{2y}$; $\quad -\dfrac{20+27x}{+9x+9}$; $\quad -\dfrac{40x-19}{4ax^2}$; $\quad -\dfrac{2a-c}{(a-1)(a+1)^2}$.

Quali di queste frazioni valgono 1 per ogni valore del campo di esistenza?

522 $\frac{x-2}{2-x}$; $\quad -\frac{(a-1)^2}{-(1-a)^2}$; $\quad -\frac{6+x}{-x-6}$.

523 $-\frac{-a+2b}{2b-a}$; $\quad -\frac{-2a}{2a}$; $\quad \frac{(x-2)^2}{-(2-x)^2}$.

La semplificazione delle frazioni algebriche

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più ▶ 7 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

524 Dopo aver determinato le condizioni di esistenza, semplifichiamo le frazioni algebriche

a) $\frac{15a^3b^5}{3a^4b^2}$, b) $\frac{x^2-4x+4}{3x^2-12}$, c) $\frac{x^3-7x+6}{x^2+x-6}$.

a) Una frazione con denominatore nullo non è definita. Dunque dobbiamo imporre $3a^4b^2 \neq 0$, ottenendo le seguenti condizioni di esistenza:

C.E.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Semplifichiamo i coefficienti numerici: $\frac{\overset{5}{\cancel{15}}a^3b^5}{\underset{1}{\cancel{3}}a^4b^2}$.

Dividiamo per a^3, M.C.D. di a^3 e a^4: $\frac{5\overset{1}{\cancel{a^3}}b^5}{\underset{a^{4-3}}{\cancel{a^4}}b^2}$.

Dividiamo per b^2, M.C.D. di b^2 e b^5: $\frac{5\overset{b^{5-2}}{\cancel{b^5}}}{a\underset{1}{\cancel{b^2}}}$.

In sintesi: $\frac{15a^3b^5}{3a^4b^2} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}}\cancel{a^3}\overset{b^3}{\cancel{b^5}}}{\cancel{3}\underset{a}{\cancel{a^4}}\cancel{b^2}} = \frac{5b^3}{a}$.

b) C.E.: $3x^2-12 \neq 0$.

Scomponiamo $3x^2-12$ raccogliendo 3 fra i termini del polinomio e riconoscendo la differenza di due quadrati:

$$3x^2-12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2).$$

Imponendo $3(x-2)(x+2) \neq 0$ si ottiene:

C.E.: $x \neq 2 \wedge x \neq -2$.

Scomponiamo il numeratore x^2-4x+4:

$$x^2-4x+4 = (x-2)^2.$$

Riscriviamo la frazione data e semplifichiamo:

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-12} = \frac{\overset{(x-2)}{\cancel{(x-2)^2}}}{3\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{x-2}{3(x+2)}.$$

c) C.E.: $x^2+x-6 \neq 0$.

Scomponiamo il trinomio x^2+x-6. Poiché $-2+3=+1$ e $(-2)\cdot(+3)=-6$, si ha:

$$x^2+x-6 = (x-2)(x+3).$$

$$(x-2)(x+3) \neq 0 \quad \begin{cases} x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2 \\ x+3 \neq 0 \rightarrow x \neq -3 \end{cases}$$

C.E.: $x \neq 2 \wedge x \neq -3$.

Inoltre, applicando la regola di Ruffini:

$$x^3-7x+6 = (x-1)(x^2+x-6).$$

Riscriviamo la frazione data e semplifichiamo:

$$\frac{x^3-7x+6}{x^2+x-6} = \frac{(x-1)\overset{1}{\cancel{(x^2+x-6)}}}{\underset{1}{\cancel{x^2+x-6}}} = x-1.$$

Quando è possibile, semplifica le seguenti frazioni algebriche dopo avere determinato le condizioni di esistenza, che per brevità non scriviamo nei risultati (con $n \in \mathbb{N}$).

525 $\frac{a^3b^2c}{ac^2}$; $\frac{5x^2y}{10x^3y}$; $-\frac{9y^4z^5}{12yz^7}$; $\frac{6x^6}{3x^3}$.

526 $-\frac{2abc}{a^2b^3c^4}$; $\frac{7a^2x}{a^2x^2}$; $-\frac{4bx^2}{6b}$; $\frac{12b^2y^2}{6b^2y^4}$.

527 $\frac{6a^5b^4c^6}{12a^4c^6}$; $\frac{26x^2y^2}{13x^3y}$; $-\frac{5ax^2}{125x^2}$; $-\frac{3a^2xy^5}{6ax^3y^7}$.

528 $\frac{2a^6b^4}{4a^6b^3}$; $-\frac{3a^5y^3}{27a^5y^4}$; $-\frac{5x^2y^3}{10x^3y^3}$; $\frac{4a^3b^2}{4a^4}$.

---

529 $\frac{2x-2y}{y-x}$; $\frac{x^2-x}{x-1}$; $\frac{x^2+3x}{3x}$. $\left[-2; x; \frac{x+3}{3}\right]$

530 $\frac{2a-2}{5a-5}$; $\frac{-x-y}{x+y}$; $\frac{4x^2-2x}{4x^2}$. $\left[\frac{2}{5}; -1; \frac{2x-1}{2x}\right]$

531 $\frac{6a-3b}{6a}$; $\frac{2x-2y}{2x+2y}$; $\frac{a+b}{a^2+ab}$. $\left[\frac{2a-b}{2a}; \frac{x-y}{x+y}; \frac{1}{a}\right]$

532 $\frac{a^2-2a}{a-2}$; $\frac{x}{2x^2-x}$; $\frac{x^3-x^2}{4x^2y}$. $\left[a; \frac{1}{2x-1}; \frac{x-1}{4y}\right]$

533 $\frac{y-y^2}{a-ay}$; $\frac{ax}{x^2-ax}$; $\frac{4xy}{2x^2y-2xy}$. $\left[\frac{y}{a}; \frac{a}{x-a}; \frac{2}{x-1}\right]$

534 $\frac{a+ax}{y+xy}$; $\frac{2a^2-10a}{ax-5x}$; $\frac{xy}{x^2-xy}$. $\left[\frac{a}{y}; \frac{2a}{x}; \frac{y}{x-y}\right]$

535 $\frac{6x^2-12x+6}{x^2-1}$; $\frac{xy^2-x}{1-y}$; $\frac{4a^2-4}{2a+2}$. $\left[\frac{6(x-1)}{x+1}; -x(1+y); 2(a-1)\right]$

536 $\frac{6ax-6a^2}{x^2-a^2}$; $\frac{12a-3a^2}{4y-ay}$; $\frac{2x^6+2x^2}{2x^2}$. $\left[\frac{6a}{x+a}; \frac{3a}{y}; x^4+1\right]$

537 $\frac{-24abx}{8ax-12bx}$; $\frac{4a^2-b^2}{b^3-2b^2a}$; $\frac{x^3-y^3}{x^3y^3}$. $\left[\frac{-6ab}{2a-3b}; -\frac{2a+b}{b^2}; \text{non semplif.}\right]$

538 $\frac{a^3-8}{a^2+2a+4}$; $\frac{a^2-5a+6}{2a-6}$; $\frac{3xy+3y^2}{x^2-y^2}$. $\left[a-2; \frac{a-2}{2}; \frac{3y}{x-y}\right]$

539 $\frac{3x^5}{12x+12x^2}$; $\frac{8a^3+4a}{4a^2+1}$; $\frac{b^2+3b+2}{b^2+2b+1}$; $\frac{y^2-2y-3}{y^2-1}$. $\left[\frac{x^4}{4(1+x)}; \text{non semplif.}; \frac{b+2}{b+1}; \frac{y-3}{y-1}\right]$

540 $\frac{x^4+16}{x^4+16-8x^2}$; $\frac{14a-7b}{4a^2-b^2}$; $\frac{4x-4y+(x-y)^2}{(x-y)^2}$. $\left[\text{non semplif.}; \frac{7}{2a+b}; \frac{4+x-y}{x-y}\right]$

541 $\frac{a^4-1}{a^3-1}$; $\frac{ax+2x-a-2}{ax-2x-a+2}$; $\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}$. $\left[\frac{(a+1)(a^2+1)}{a^2+a+1}; \frac{a+2}{a-2}; \frac{a+2}{a-2}\right]$

542 $\frac{9a^2-9}{3a+3}$; $\frac{ay+ax+2y+2x}{4ay+4ax}$; $\frac{9-3y}{3a^2-a^2y}$. $\left[3(a-1); \frac{a+2}{4a}; \frac{3}{a^2}\right]$

543 $\frac{x^2-9}{6a+2ax}$; $\frac{a^2x+2ax+x}{2x+2ax}$; $\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}$. $\left[\frac{x-3}{2a}; \frac{a+1}{2}; \frac{x+1}{x-3}\right]$

544 $\dfrac{4x^2-4x+1}{2ax+2x-a-1}$; $\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$; $\dfrac{a^4-16}{2a^2+8}$. $\left[\dfrac{2x-1}{a+1}; \dfrac{x+2}{x+1}; \dfrac{a^2-4}{2}\right]$

545 $\dfrac{ax-x+3a-3}{x^2+4x+3}$; $\dfrac{y^2-9}{y^3-3y^2}$; $\dfrac{x^3+4x^2+4x}{4-x^2}$. $\left[\dfrac{a-1}{x+1}; \dfrac{y+3}{y^2}; \dfrac{x(x+2)}{2-x}\right]$

546 $\dfrac{x^2y-4y}{-2y-xy}$; $\dfrac{a^2-10a+25}{a^2-25}$; $\dfrac{6x^3-6xy^2}{x^2+xy}$. $\left[2-x; \dfrac{a-5}{a+5}; 6(x-y)\right]$

547 $\dfrac{2a^2-a^2x}{4y-2xy}$; $\dfrac{6x^2y-12xy}{9x^4y-18x^3y}$; $\dfrac{x^3-a^3}{3x-3a}$. $\left[\dfrac{a^2}{2y}; \dfrac{2}{3x^2}; \dfrac{x^2+ax+a^2}{3}\right]$

548 $\dfrac{2a^4-2x^4}{4a^2+4x^2}$; $\dfrac{x^2-2x}{x^2+2x-8}$; $\dfrac{6ax^2-6ay^2}{3x^3-3y^3}$. $\left[\dfrac{a^2-x^2}{2}; \dfrac{x}{x+4}; \dfrac{2a(x+y)}{x^2+xy+y^2}\right]$

549 $\dfrac{4a^3-4a^2}{a^3-2a^2+a}$; $\dfrac{(x-2)^2+2x}{2(x^3+8)}$; $\dfrac{30a^2b^2}{a^2b-ab^2}$. $\left[\dfrac{4a}{a-1}; \dfrac{1}{2(x+2)}; \dfrac{30ab}{a-b}\right]$

550 $\dfrac{x^2-1}{(x+1)(x^2-2x+1)}$; $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$; $\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^3-3x^2+3x-1}$. $\left[\dfrac{1}{x-1}; \dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}; \dfrac{x}{x-1}\right]$

551 $\dfrac{y^2-3y+2}{y^2-y-2}$; $\dfrac{16a^2-24ab+9b^2}{28ab-21b^2}$; $\dfrac{1-4b^2}{1+4b+4b^2}$. $\left[\dfrac{y-1}{y+1}; \dfrac{4a-3b}{7b}; \dfrac{1-2b}{1+2b}\right]$

552 $\dfrac{x^2+10xy+25y^2}{x^4+10x^3y+25x^2y^2}$; $\dfrac{a^5-16a}{a^3-4a}$; $\dfrac{a^2+ab-2b^2}{8a^2-32b^2}$. $\left[\dfrac{1}{x^2}; a^2+4; \dfrac{a-b}{8(a-2b)}\right]$

553 $\dfrac{4x^2+3x}{4x^3-x^2-3x}$; $\dfrac{2x^2+x-10}{(x^2-4)(2x^2+5x)}$; $\dfrac{y^3-9y}{y^3+4y^2+3y}$. $\left[\dfrac{1}{x-1}; \dfrac{1}{x(x+2)}; \dfrac{y-3}{y+1}\right]$

554 $\dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^2-x}$; $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{9x-9y}$. $\left[\dfrac{x^2+5x+6}{x}; \dfrac{x-y}{9}\right]$

555 $\dfrac{2x^2+2x-12}{x^3-7x+6}$; $\dfrac{8y^2-8}{4ay+12y+4a+12}$. $\left[\dfrac{2}{x-1}; \dfrac{2(y-1)}{a+3}\right]$

BRAVI SI DIVENTA ► E20

556 $\dfrac{2x^5+6x^4-36x^3}{2ax^3-x^3-18ax+9x}$; $\dfrac{(x^2+4x^4-4x^3)(2x+1)}{64x^6-1}$.

557 $\dfrac{2x^3+2}{x^3+x^2+x+1}$; $\dfrac{a^3-3a^2+4}{a^2-a-2}$. $\left[\dfrac{2(x^2-x+1)}{x^2+1}; a-2\right]$

558 $\dfrac{3x^{n+2}b^{n+1}}{2x^nb}$; $\dfrac{x^ny}{x^{n-1}}$ $(n \geq 1)$. $\left[\dfrac{3x^2b^n}{2}; xy\right]$

559 $\dfrac{x^{n^2}y}{x^n}$; $\dfrac{4a^{2n}-12a^n+9}{4a^{2n}-9}$. $\left[x^{n^2-n}y; \dfrac{2a^n-3}{2a^n+3}\right]$

560 $\dfrac{x^{2n}-y^{2n}}{x^{2n}+2x^ny^n+y^{2n}}$; $\dfrac{2a^{n+1}+a^{n+2}+a^n}{a^2-1}$. $\left[x^n \neq -y^n, \dfrac{x^n-y^n}{x^n+y^n}; a \neq \pm 1, \dfrac{a^n(a+1)}{a-1}\right]$

561 $\dfrac{24a^{2n}-24}{8a^{4n}-8}$; $\dfrac{x^n+x^{n-1}}{x^{n+1}-x^{n-1}}$ $(n \geq 1)$. $\left[a \neq \pm 1, \dfrac{3}{a^{2n}+1}; x \neq 0 \text{ e } x \neq \pm 1, \dfrac{1}{x-1}\right]$

562 **ASSOCIA** a ogni frazione della prima riga la sua frazione equivalente scelta nella seconda riga, tenendo conto delle condizioni di esistenza.

1. $\dfrac{a-x}{3a^2-3ax}$;
2. $\dfrac{3a+9}{3a}$;
3. $\dfrac{9a-81}{a-9}$;
4. $\dfrac{-9a-9}{27a^2+27a}$.

A. $-\dfrac{1}{3a}$;

B. $\dfrac{a+3}{a}$;

C. $\dfrac{1}{3a}$;

D. 9.

563 **CACCIA ALL'ERRORE**

Trova l'eventuale errore e, nel caso ci sia, spiega perché l'uguaglianza è falsa.

a) $\dfrac{\cancel{x}+y}{\cancel{x}} = y$;

b) $\dfrac{\cancel{x}(1+y)}{\cancel{x}} = 1+y$;

c) $\dfrac{x^{\cancel{3}}-1}{\cancel{x^2}} = x-1$;

d) $\dfrac{4x^2-ax}{x^2} = \dfrac{\cancel{x}(4x-a)}{x^{\cancel{2}}} = \dfrac{4\cancel{x}-a}{\cancel{x}} = 4-a$;

e) $\dfrac{x^{\cancel{4}}y}{\cancel{x^2}} = x^2y$;

f) $\dfrac{x\cancel{(x+y)}-1}{(x+y)^{\cancel{2}}} = \dfrac{x-1}{x+y}$;

g) $\dfrac{\cancel{a^6b^4}}{\cancel{a^3b^2}} = a^2b^2$;

h) $\dfrac{(x-y)^3}{(y-x)^3} = 1$;

i) $\dfrac{\cancel{a}+\cancel{b}}{\cancel{a}-\cancel{b}} = -1$.

Frazioni equivalenti con denominatori opposti

ESERCIZIO GUIDA

564 Trasformiamo la frazione $\dfrac{5x^2-a-2}{1-a^2}$ in una equivalente con il denominatore opposto.

Se cambiamo segno al denominatore per avere una frazione equivalente alla data, dobbiamo cambiare segno anche al numeratore $\left(\dfrac{-N}{-D}\right)$; in alternativa, lasciamo il numeratore invariato e cambiamo segno davanti alla linea di frazione $\left(-\dfrac{N}{-D}\right)$.

Quindi $\dfrac{N}{D} = \dfrac{-N}{-D} = -\dfrac{N}{-D}$.

$$\frac{5x^2-a-2}{1-a^2} = \frac{-5x^2+a+2}{a^2-1} = -\frac{5x^2-a-2}{a^2-1}.$$

Trasforma le seguenti frazioni in frazioni equivalenti con il denominatore opposto.

565 $\frac{1}{2-a}$; $\frac{4-a}{a^2-b^2}$; $\frac{ax^2+b}{-a-b}$;

$\frac{2b+1}{b^2+1}$; $\frac{a^2-b^2}{a^3+1}$; $\frac{bx+5}{2x-b}$.

566 $\frac{3a+b}{b-a}$; $\frac{1}{y^2-xy}$; $\frac{3a-b}{a-b}$;

$\frac{x-3}{x-x^3}$; $\frac{b}{1-b}$; $\frac{x-1}{9x^2-9}$.

567 $\frac{3x^2-1}{1-x^3}$; $\frac{2-2x^2}{x^2+9}$; $\frac{6a-b}{a(a-b)}$;

$\frac{7a^2-12}{b^2(a-2)}$; $\frac{4-2x}{(x+2)(x-2)}$; $\frac{b-a}{a^3-b^3}$.

Equivalenze da completare

ESERCIZIO GUIDA

568 Completiamo la seguente uguaglianza:

$$\frac{3a^2-2b}{a+b}=\frac{?}{ab+b^2}.$$

- Il denominatore $ab+b^2$ si scompone in $b(a+b)$. Ciò significa che la seconda frazione ha il denominatore uguale a quello della prima frazione, moltiplicato per b.
  C.E.: $a \neq -b \wedge b \neq 0$.
- Per ottenere una frazione equivalente dobbiamo moltiplicare per b anche il numeratore:

$$\frac{3a^2-2b}{a+b}=\frac{b(3a^2-2b)}{b(a+b)}=\frac{3a^2b-2b^2}{ab+b^2}.$$

COMPLETA le seguenti uguaglianze.

569 $\frac{2a+3}{4a}=\frac{\ldots}{4a^2}$; $\frac{3x+2}{x-1}=\frac{3x^2+2x}{\ldots}$.

570 $\frac{x-2}{x+4}=\frac{x^2-4}{\ldots}$; $\frac{a-3b}{3b^2}=\frac{\ldots}{3ab^3}$.

571 $\frac{x+y}{4y}=\frac{\ldots}{4xy-4y^2}$; $\frac{3b^3-a^3}{3a+b}=\frac{\ldots}{(3a+b)^2}$.

572 $\frac{b-a}{a+b}=\frac{\ldots}{(a+b)^2}$; $\frac{3x^2+5}{3x^2}=\frac{9x^4+15x^2}{\ldots}$.

573 $\frac{x-1}{x^2+x+1}=\frac{\ldots}{x^3-1}$; $\frac{x-2y}{x+2y}=\frac{4x^2-8xy}{\ldots}$.

574 $\frac{3x}{x+4}=\frac{\ldots}{x^2+3x-4}$; $\frac{xy+1}{1-xy}=\frac{\ldots}{1-x^2y^2}$.

575 $\frac{a+b-c}{3a^2}=\frac{(a+b)^2-c^2}{\ldots}$; $\frac{2a-3}{3a-2}=\frac{\ldots}{27a^3-8}$.

576 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{a^3-b^3}{\ldots}$; $\frac{x+y}{x^2-2xy+y^2}=\frac{\ldots}{(x-y)^3}$.

577 $\frac{x+2}{x-3}=\frac{x^2+5x+6}{\ldots}$; $\frac{2a-9}{a-3}=\frac{\ldots}{2a^3-6a^2}$.

Una delle frazioni non è equivalente alle altre. Trovala.

578 $\frac{a^2}{b^2}$; $\frac{a^3}{b^3}$; $\frac{a^3}{ab^2}$; $\frac{a^4}{a^2b^2}$; $\frac{a^2b^2}{b^4}$.

579 $\frac{2}{a+b}$; $\frac{2a}{a^2+ab}$; $\frac{2a+2b}{(a+b)^2}$;

$\frac{2a-2b}{a^2-b^2}$; $\frac{6a^2}{3a^2+3b}$.

580 $\frac{4x^2+8xy}{4x^2-8xy}$; $\frac{x+2y}{x-2y}$; $\frac{(x+2y)^2}{(x-2y)^2}$;

$\frac{x^2-4y^2}{(x-2y)^2}$; $\frac{(x+2y)^2}{x^2-4y^2}$.

581 $\frac{9x^2-y^2}{3x^2y+xy^2}$; $\frac{6xy^4-2y^5}{2xy^4}$; $\frac{3x-y}{xy}$;

$\frac{3x^3y^3-x^2y^4}{x^3y^4}$; $\frac{(3x-y)^2}{3x^2y-xy^2}$.

582 $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$; $-\frac{y^3-xy^2}{y^3+xy^2}$; $-\frac{xy-x^2}{xy+x^2}$;

$-\frac{xy^2-x^2y}{x^2y-xy^2}$; $-\frac{y^2-x^2}{(y+x)^2}$.

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu - 1** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Statistica*

La riduzione di frazioni algebriche allo stesso denominatore

ESERCIZIO GUIDA

583 Riduciamo allo stesso denominatore le seguenti frazioni algebriche:

$$\frac{a+1}{5ab}, \quad \frac{6a-b}{4b^2}, \quad ax.$$

Le condizioni di esistenza delle frazioni sono C.E.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Riscriviamo le frazioni date, ponendo il numeratore fra parentesi ed esplicitando il denominatore; in questo modo il procedimento risulta più chiaro:

$$\frac{(a+1)}{5ab}, \quad \frac{(6a-b)}{4b^2}, \quad \frac{(ax)}{1}.$$

Il denominatore comune sarà il m.c.m. fra i denominatori. Calcoliamolo:

$$\text{m.c.m.}(5ab, 4b^2, 1) = 20ab^2.$$

Ciascuna frazione è equivalente alla frazione che ha come *denominatore* il m.c.m. appena trovato e come *numeratore* il prodotto fra il suo numeratore e il quoziente fra il m.c.m. e il suo denominatore.

Dunque le tre frazioni, ridotte allo stesso denominatore, sono rispettivamente:

$$\frac{4b(a+1)}{20ab^2}, \quad \frac{5a(6-b)}{20ab^2}, \quad \frac{20ab^2(ax)}{20ab^2}.$$

Riduci allo stesso denominatore le seguenti frazioni algebriche.

584 $\frac{a}{b}$; $\quad b$; $\quad \frac{1}{a}$.

585 $\frac{1}{2x}$; $\quad x$; $\quad \frac{1}{6x^2}$.

586 $\frac{2}{3x^2}$; $\quad \frac{3}{4x^3}$; $\quad x^2$.

587 $\frac{5}{3x}$; $\quad \frac{2}{xy}$; $\quad \frac{1}{2y}$.

588 $\frac{3}{x^2y}$; $\quad \frac{1}{2xy^2}$; $\quad \frac{7}{5x^2y^3}$.

589 $\frac{11}{2ax^2}$; $\quad 1$; $\quad \frac{3}{4a^2x}$.

590 $\frac{1}{a}$; $\quad \frac{1}{a+b}$; $\quad \frac{1}{b}$.

591 $\frac{x}{3x-3y}$; $\quad \frac{y}{2x-2y}$; $\quad \frac{x+4y}{6y-6x}$.

592 $\frac{1}{xy^2-x^3}$; $\quad \frac{1}{x}$; $\quad \frac{1}{y-x}$.

593 $\frac{1}{(a+b)^2}$; $\quad \frac{1}{(a-b)^2}$; $\quad \frac{2}{a^2-b^2}$.

594 $\frac{x-y}{xy+x^2y^2}$; $\quad \frac{5}{xy+1}$; $\quad \frac{3x}{xy}$.

595 $\frac{2}{a^3-ab^2}$; $\quad \frac{1}{(a+b)^2}$; $\quad \frac{5}{a}$.

596 $\frac{a^2-4b^2}{2a-4b}$; $\quad \frac{a}{a+2b}$; $\quad \frac{5a+3b}{8a^2+16ab}$.

597 $\frac{a(a+2)}{a^2+a-2}$; $\quad \frac{2a^2}{a^2-1}$; $\quad \frac{a-1}{a^2-2a+1}$.

598 $\frac{a^2}{2a-6a^2}$; $\quad \frac{1+3a}{9a^2-1}$; $\quad \frac{8a-5}{a^4-3a^5}$.

599 $\frac{x^3-x^2+x-1}{x^4-1}$; $\quad \frac{y-xy}{3x^2y-3y}$; $\quad \frac{6x^2y}{x+1}$.

600 $\frac{x+3}{x^2-7x+10}$; $\quad \frac{x+1}{2x-x^2}$; $\quad \frac{3x}{x^3-5x^2}$.

L'addizione e la sottrazione di frazioni algebriche

ESERCIZIO GUIDA

601 Eseguiamo le seguenti addizioni e sottrazioni di frazioni algebriche:

a) $\frac{2}{a^2b}+\frac{3b}{ab^2}-1$; b) $\frac{a}{a+1}+\frac{a^2-ab+2a}{ab-a+b-1}-\frac{b}{1-b}$.

a) $\frac{2}{a^2b}+\frac{3b}{ab^2}-1=$

Riduciamo le frazioni allo stesso denominatore:

$(a^2b^2 : a^2b)\cdot 2$ $(a^2b^2 : ab^2)\cdot 3b$ $a^2b^2\cdot 1$

$$=\frac{2b+3ab-a^2b^2}{a^2b^2}=$$

m.c.m. fra i denominatori

C.E.: $a\neq 0 \wedge b\neq 0$.

Scomponiamo in fattori il numeratore:

$$=\frac{\cancel{b}(2+3a-a^2b)}{a^2b^{\cancel{2}}}=$$

Semplifichiamo il risultato:

$$=\frac{2+3a-a^2b}{a^2b}.$$

b) Nella seconda frazione scomponiamo il denominatore mediante raccoglimento parziale (che svolgiamo a parte):

$$ab-a+b-1=a(b-1)+1(b-1)=$$
$$=(b-1)(a+1)$$

Quindi otteniamo:

$$\frac{a}{a+1}+\frac{a^2-ab+2a}{(b-1)(a+1)}-\frac{b}{\underbrace{1-b}_{-(b-1)}}=$$

C.E.: $a\neq -1 \wedge b\neq 1$.

$$=\frac{a}{a+1}+\frac{a^2-ab+2a}{(b-1)(a+1)}+\frac{b}{b-1}=$$

$$=\frac{\cancel{ab}-a+a^2-\cancel{ab}+2a+ab+b}{(b-1)(a+1)}=$$

$$=\frac{a^2+a+ab+b}{(b-1)(a+1)}=\frac{a(a+1)+b(a+1)}{(b-1)(a+1)}=$$

$$=\frac{\cancel{(a+1)}(a+b)}{(b-1)\cancel{(a+1)}}=\frac{a+b}{b-1}.$$

Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni di frazioni algebriche, semplificando il risultato quando è possibile.

602 $-\frac{5}{2a}+\frac{3}{a}-\frac{2}{7a}$; $\frac{1}{6b}-\frac{2}{3b}+\frac{1}{2b}$. $\left[\frac{3}{14a};0\right]$

603 $\frac{1}{6a}+\frac{b}{3a^2}-\frac{5}{2ab}$; $x-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$. $\left[\frac{ab+2b^2-15a}{6a^2b};\frac{x^3-x+2}{x^2}\right]$

604 $\frac{3}{4a}+\frac{1}{2a}-\frac{2}{3a}$; $\frac{4x^2+1}{x^2}-\frac{x-2}{x}-3$. $\left[\frac{7}{12a};\frac{2x+1}{x^2}\right]$

605 $\frac{11}{2a^2x^2}-1-\frac{3}{4a^2x^2}$; $\frac{a+b}{2a}-\frac{2a-b}{3b}-\frac{3b-a}{6a}$. $\left[\frac{19-4a^2x^2}{4a^2x^2};\frac{3b-2a}{3b}\right]$

606 $\frac{x+2y}{2x}+\frac{x-y}{3x}-\frac{x+4y}{6x}$; $\frac{a^2-b^2}{ab}+\frac{2b}{a}+2-\frac{(a+b)^2}{ab}$. $\left[\frac{2}{3};0\right]$

607 $\frac{y^3-x^3}{2x^2y}+\frac{1}{6}-\frac{3y^2+4x^2}{6x^2}$; $\frac{a+1}{ab^2}-\frac{a-1}{a^2b}-\frac{b+a^2}{a^2b^2}$. $\left[-\frac{x+y}{2y};\frac{1-b}{ab^2}\right]$

608 $\dfrac{2}{a+1}-\dfrac{5}{a+1}$; $\quad \dfrac{2x}{3x+1}-\dfrac{1-x}{3x+1}$. $\quad \left[-\dfrac{3}{a+1}; \dfrac{3x-1}{3x+1}\right]$

609 $\dfrac{x-3}{x+5}-\dfrac{2x-7}{x+5}$; $\quad \dfrac{a+9}{a+3}-\dfrac{6-a}{a+3}$. $\quad \left[\dfrac{-x+4}{x+5}; \dfrac{2a+3}{a+3}\right]$

610 $2a-\dfrac{3-4a}{a-2}$; $\quad \dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{y+x}+\dfrac{1}{2}$. $\quad \left[\dfrac{2a^2-3}{a-2}; \dfrac{3}{2}\right]$

611 $x-y-\dfrac{x^2}{x+y}$; $\quad \dfrac{3a-b}{3a+b}-\dfrac{3a+b}{3a-b}$. $\quad \left[-\dfrac{y^2}{x+y}; -\dfrac{12ab}{9a^2-b^2}\right]$

612 $\dfrac{2}{3x+3}-\dfrac{x-1}{9-9x^2}-3$; $\quad \dfrac{2a}{b-a}+\dfrac{5a^2-ab}{a^2-b^2}-\dfrac{3a}{b+a}$. $\quad \left[-\dfrac{27x+20}{9(x+1)}; 0\right]$

613 $\dfrac{x}{3x-3y}+\dfrac{y}{2x-2y}+\dfrac{x+4y}{6y-6x}$; $\quad \dfrac{4y^2+4y+1}{4y-8y^2}-\dfrac{4y^2+1}{4y}+y$. $\quad \left[\dfrac{1}{6}; \dfrac{2y+3}{2-4y}\right]$

614 $\dfrac{a^2}{ab-b^2}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{b^2}{ab+b^2}$; $\quad \dfrac{a+1}{ab^2}-\dfrac{a-1}{a^2b}+\dfrac{a^2b-a^3+a+b}{a^2b^2(a-1)}$. $\quad \left[\dfrac{a}{b}; \dfrac{2}{ab(a-1)}\right]$

615 $\dfrac{a+2}{a^2+a}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{a+1}{-a^2-2a-1}$; $\quad \dfrac{3x}{y+3x}-\dfrac{y^2}{3xy-9x^2}+\dfrac{y^2+9x^2}{y^2-9x^2}$. $\quad \left[\dfrac{1-a}{a(a+1)}; -\dfrac{y}{3x}\right]$

616 $\dfrac{2+x}{x+3}-\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}-\dfrac{x}{x+3}$; $\quad \dfrac{a-1}{1+a}-\dfrac{2a^3+6}{a^3-a^2-a+1}+\dfrac{a^2+2a+1}{a^2-2a+1}$. $\quad \left[\dfrac{1}{2-x}; \dfrac{6}{a^2-1}\right]$

617 $\dfrac{2x-5}{x+7}+\dfrac{2x+4}{x-9}-\dfrac{3x^2+13x-8}{x^2-2x-63}$; $\quad \dfrac{1}{y+5}-\dfrac{y^2-5y}{y^3+125}-\dfrac{5-y}{y^2-5y+25}$. $\quad \left[\dfrac{x-9}{x+7}; \dfrac{y^2}{y^3+125}\right]$

618 $\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{6xy}{x^2-y^2}$; $\quad \dfrac{4a+4a^2+1}{4a-8a^2}+a-\dfrac{4a^2+1}{4a}$. $\quad \left[\dfrac{2xy}{x^2-y^2}; \dfrac{2a+3}{2-4a}\right]$

619 $\dfrac{x+2}{x^2+x-2}+\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{1}{x-1}$; $\quad 2x+\dfrac{x}{x^2-3x+2}-\dfrac{x^2-x}{x-2}$. $\quad \left[\dfrac{x}{x+2}; \dfrac{x(x-2)}{x-1}\right]$

620 $\dfrac{x+3}{x^2-xy}+\dfrac{y-3}{xy-y^2}-\dfrac{2}{x-y}$; $\quad \dfrac{2}{x^2-2x-3}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}-\dfrac{1}{x-3}$. $\quad \left[-\dfrac{3}{xy}; -\dfrac{x}{x^2-1}\right]$

621 $\dfrac{1}{(a-b)(a-x)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-x)}+\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ $\quad [0]$

622 $\dfrac{x^2}{x^2-y^2}+\dfrac{y^2}{y^2-x^2}-\dfrac{xy-y^2}{2xy-x^2-y^2}$ $\quad \left[\dfrac{x}{x-y}\right]$

623 $x^2+2x+1-\dfrac{1}{x^2-2x+1}+\dfrac{2x^2(x-1)}{x^3-3x^2+3x-1}$ $\quad \left[\dfrac{x^4}{(x-1)^2}\right]$

BRAVI SI DIVENTA ► E21

624 $\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{2-4x}{2x^2+5x-3}+\dfrac{1}{-x^2-3x}$

625 $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{9x^2-3x}{3x^2+5x-2}+\dfrac{1}{-x-2}$ $\quad \left[\dfrac{3x+1}{x+2}\right]$

626 $\dfrac{a-1}{(a-2)^2-(a-3)^2}+\dfrac{3a-6}{2a-5}-\dfrac{6a-15}{25+4a^2-20a}$ [2]

627 $\dfrac{a^2+2b^2}{a^3+b^3}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{a+2b}{a^2+b^2-ab}+\dfrac{b^2-4ab}{a^3+ab^2-a^2b}$ $\left[\dfrac{1}{a+b}\right]$

628 $\dfrac{2}{a^n}+\dfrac{3}{a^n-2}$ $(n\in\mathbb{N})$ $\left[\dfrac{5a^n-4}{a^{2n}-2a^n}\right]$

629 $\dfrac{a^{2n}}{a^{2n}+b^{2n}}+\dfrac{b^{2n}}{b^{2n}+a^{2n}}+\dfrac{1}{2}$ $(n\in\mathbb{N})$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

630 $-\dfrac{2a^n}{1-a^{2n}}+\dfrac{1}{1+a^n}+\dfrac{1}{1-a^n}$ $(n\in\mathbb{N})$ $\left[\dfrac{2}{1+a^n}\right]$

631 $\dfrac{bx^n-ax^n}{x^{2n}-1}-\dfrac{b}{x^n-1}+\dfrac{a}{x^n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$ $\left[\dfrac{a+b}{1-x^{2n}}\right]$

632 $\dfrac{x^n+2}{x^{2n}+x^n}-\dfrac{1}{x^n}+\dfrac{x^n+1}{-x^{2n}-2x^n-1}$ $(n\in\mathbb{N})$ $\left[\dfrac{1-x^n}{x^n(1+x^n)}\right]$

633 **TEST** Fra le seguenti frazioni algebriche, solo una è equivalente alla somma di $\dfrac{a+x}{ax}$ e $\dfrac{1-a}{a^2}$. Quale?

A $\dfrac{a^3-ax}{a^3x}$

B $\dfrac{a^2+x}{a^2x}$

C $\dfrac{x+1}{a^3ax}$

D $\dfrac{a^2+2ax+x}{a^2x}$

E $-\dfrac{1}{a}$

634 **TEST** La somma algebrica di due frazioni è $\dfrac{2a+3}{a-2}$. Quali sono le frazioni?

A $\dfrac{a+3}{a-2}$ e $\dfrac{a}{2-a}$

B $\dfrac{a}{a-2}$ e $\dfrac{3-a}{a-2}$

C $\dfrac{a^2+a-6}{(2-a)^2}$ e $\dfrac{a}{2-a}$

D $\dfrac{a}{a-2}$ e $\dfrac{-3-a}{2-a}$

E $\dfrac{a^2+a-6}{(2-a)^2}$ e $\dfrac{a+3}{a-2}$

CACCIA ALL'ERRORE Trova gli errori e spiega perché le uguaglianze sono sbagliate.

635 a) $\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}=\dfrac{2}{a+b}$; b) $\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x^2}$; c) $\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{a-1}{2b}$; d) $1+\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{x}$.

636 a) $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x}=\dfrac{1}{5x}$; b) $\dfrac{2a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{2ab}{a+b}$; c) $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{2}{a-b}$; d) $\dfrac{2a-1}{b^2}-\dfrac{1-2a}{b^2}=0$.

La moltiplicazione di frazioni algebriche

ESERCIZIO GUIDA

637 Eseguiamo le seguenti moltiplicazioni:

a) $\dfrac{a}{3b^3}\cdot\dfrac{9b^9}{2a^2}$; b) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}\cdot\dfrac{2x-x^2}{2x}\cdot\dfrac{x}{2x+x^2}$; c) $\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}\right)\cdot\dfrac{a}{a-1}$.

a) Dividiamo i coefficienti 3 e 9 per il fattore comune 3; dividiamo le parti letterali per i fattori comuni eseguendo la *differenza* degli esponenti:

$$\frac{\cancel{a}}{\cancel{3}\cancel{b^3}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\overset{6}{\cancel{b^9}}}{2a^{\cancel{2}}}=\frac{3b^6}{2a},$$

C.E.: $a\neq 0 \wedge b\neq 0$.

b) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}\cdot\dfrac{2x-x^2}{2x}\cdot\dfrac{x}{2x+x^2}=$

Scomponiamo e semplifichiamo:

$$=\frac{\cancel{(x+2)}^{\cancel{2}}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}\cdot\frac{\cancel{x}(2-x)}{2\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\cancel{(2+x)}}=$$

C.E.: $x\neq 0 \wedge x\neq \pm 2$,

$$=\frac{2-x}{2(x-2)}=-\frac{\cancel{x-2}}{2\cancel{(x-2)}}=-\frac{1}{2}.$$

c) Occorre svolgere prima i calcoli dentro le parentesi tonde e, in ultimo, la moltiplicazione:

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\frac{a}{a-1}=$$

$$=\left(\frac{\overset{1}{\cancel{a-1}}}{a^{\cancel{2}\,1}}\right)\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{a}}}{\underset{1}{\cancel{a-1}}}=\frac{1}{a},$$

C.E.: $a\neq 0 \wedge a\neq 1$.

Esegui le seguenti moltiplicazioni di frazioni algebriche (con $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$).

638 $\dfrac{5a^2b}{3}\cdot\dfrac{6}{10a^3b^2}$; $\quad\dfrac{2a^2x^3}{3xy^2}\cdot\dfrac{12b^4y}{a^5b}$. $\quad\left[\dfrac{1}{ab};\dfrac{8x^2b^3}{a^3y}\right]$

639 $\dfrac{25x^3y}{81y^2}\cdot\left(-\dfrac{54y^2}{75x^4}\right)$; $\quad\dfrac{7x^2y}{8a}\cdot\left(-\dfrac{16a^2b}{28x^3y^3}\right)\cdot\dfrac{6xy^2}{5ab}$. $\quad\left[-\dfrac{2y}{9x};-\dfrac{3}{5}\right]$

640 $\dfrac{0{,}5x^3y^3}{3ab^2}\cdot\dfrac{15a^3y}{7x^4y^2}\cdot\dfrac{x^3}{5a^2y}$; $\quad -9b^3y^2\cdot\dfrac{3ax^2}{2by}\cdot\dfrac{2y}{45a^2x^2}$. $\quad\left[\dfrac{x^2y}{14b^2};-\dfrac{3b^2y^2}{5a}\right]$

641 $\dfrac{12a^2b^4}{-5x^3y^4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2a}\right)\cdot\left(-\dfrac{10x^2y^3}{ab^3}\right)$; $\quad\left(-\dfrac{5b^4}{a^3}\right)\cdot 10a^3b^3\cdot\dfrac{1}{15b^{12}}$. $\quad\left[-\dfrac{12b}{xy};-\dfrac{10}{3b^5}\right]$

642 $\dfrac{3y-3x}{2b-a}\cdot\dfrac{a^2-4b^2}{2x-2y}$; $\quad\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{x^4-y^4}{x+y}$. $\quad\left[\dfrac{3(2b+a)}{2};(x+y)(x-y)^2\right]$

643 $\dfrac{4a^2}{a^2-x^2}\cdot\dfrac{x+a}{2a}$; $\quad\dfrac{x^2-2x+1}{y^2}\cdot\dfrac{3y^3-3xy^3}{(1-x)^3}$. $\quad\left[\dfrac{2a}{a-x};3y\right]$

644 $\dfrac{x-1}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^2+x-6}{3x-3}$; $\quad\dfrac{2a^2+2a}{2a-1}\cdot\dfrac{6-12a}{a^2-a-2}$. $\quad\left[\dfrac{x+3}{3x+6};\dfrac{12a}{2-a}\right]$

645 $3x\cdot\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{2xy-x^2-y^2}{x^2+y^2+2xy}$; $\quad\dfrac{b^3-8}{8+b^3}\cdot\dfrac{b+2}{4+2b+b^2}$. $\quad\left[\dfrac{3x(y-x)}{x+y};\dfrac{b-2}{4-2b+b^2}\right]$

646 $\dfrac{13xy}{32(9a^2-b^2)}\cdot(24ax-8xb)$; $\quad\dfrac{x^2+9y^2-6xy}{xy+y^2}\cdot\dfrac{xy^2+y^3}{3xy-x^2}$. $\quad\left[\dfrac{13x^2y}{4(3a+b)};\dfrac{y(3y-x)}{x}\right]$

647 $\dfrac{b^2-2b-3}{b^2-15+2b}\cdot\dfrac{b^2+4-4b}{b+2}\cdot\dfrac{b^2+10+7b}{b^2-b-2}$; $\quad\dfrac{2x}{1-4x^2}\cdot\dfrac{4x+1+4x^2}{2x-6}$. $\quad\left[b-2;\dfrac{x(1+2x)}{(1-2x)(x-3)}\right]$

648 $\dfrac{5a^{2n}b^n}{3}\cdot\dfrac{6}{10a^{3n}b^{2n}}$; $\quad\dfrac{2a^{2n}x^{3n}}{x^ny^{2n}}\cdot\dfrac{3b^{4n}y^n}{4a^{5n}b^n}$. $\quad\left[\dfrac{1}{a^nb^n};\dfrac{3x^{2n}b^{3n}}{2a^{3n}y^n}\right]$

649 $(-x^{2n})\cdot\dfrac{y}{x^n}\cdot\dfrac{x^{2n+1}}{y^{2n+1}}$; $\quad 7x^ny^{n+2}\cdot\dfrac{3}{14x^{n-1}y^2}\left(-\dfrac{6y^n}{x}\right)$. $\quad\left[-\dfrac{x^{3n+1}}{y^{2n}};-9y^{2n}\right]$

Bergamini, Trifone, Barozzi **Matematica.blu - 1** © Zanichelli 2011 *Algebra, Geometria, Statistica*

Semplifica le seguenti espressioni.

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

650 $\left(\frac{x+2a}{a}+\frac{4a}{x-2a}\right)\cdot\frac{ax-3a^2}{x^3}$; $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)$. $\left[\frac{x-3a}{x(x-2a)};\frac{x}{x-1}\right]$

651 $\left(3a+\frac{3a-1}{2}\right)\cdot\left(3a-\frac{3a}{1-3a}\right)\cdot\frac{6a-2}{9a-1}$; $\left(\frac{1}{3}a-2b+\frac{3b^2}{a}\right)\cdot\frac{12ab}{a-3b}$. $[9a^2; 4b(a-3b)]$

652 $\frac{2a^3}{a+b}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2}{4ab}\cdot\left(-\frac{2b}{b^2-a^2}\right)$; $\left(a-\frac{a-1}{a+3}\right)\cdot\frac{a^2-9}{a+1}$. $\left[\frac{a^2}{a-b};(a+1)(a-3)\right]$

653 $\left(b-\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{2}{b}\right)\cdot\frac{b^2}{b^2+2+3b}$; $\frac{x^2-4y^2}{x}\cdot\left(\frac{1}{x-2y}+\frac{1}{2y+x}\right)$. $[b-1; 2]$

654 $\left(x-\frac{1}{y}\right)\left(x+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{y^2}{x^2y^2+2xy+1}$; $\left(x-2+\frac{6}{x+3}\right)\cdot\frac{x^2+6x+9}{2x+6}\cdot\frac{1}{x+x^2}$. $\left[\frac{xy-1}{xy+1};\frac{1}{2}\right]$

655 $\left(\frac{2a}{a-3}-\frac{12}{a^2-8a+15}\right)\cdot\frac{a-5}{a-6}$; $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{ab}\right)\cdot\frac{a^3b^2}{a^3+b^3}$. $\left[\frac{2(a+1)}{a-3};\frac{a}{a+b}\right]$

656 $\left(1+\frac{2x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\frac{y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$; $\left(\frac{x}{x^2-1}-\frac{x}{1+x^2}\right)\cdot\frac{x^3-x^2+x-1}{3x+1}$.

$\left[\frac{y}{x+y};\frac{2x}{(x+1)(3x+1)}\right]$

657 $\left(\frac{4}{x^3-3x^2}+\frac{1}{x^3+3x^2}\right)\cdot\frac{x^4-9x^2}{25x^2-81}$; $\left(\frac{xy}{x+y}-x\right)\left(\frac{xy}{x+y}-y\right)\left(\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}\right)$. $\left[\frac{1}{5x-9};xy\right]$

658 $(x^4-2x^3)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x}$; $\left(x+\frac{4}{x}+4\right)\left(2x-\frac{x^2+x}{x+2}\right)\cdot\frac{1}{x+3}$. $[x^3-8; (x+2)]$

659 $\left(\frac{4}{b-3}-\frac{3b-5}{b^2-4b+3}\right)\cdot\frac{b^3+3b-4b^2}{b^2+3b}$; $4z^2y\left(1-\frac{z-y}{2z}-\frac{2y}{z+y}\right)\cdot\left(\frac{z^2+3zy}{zy-y^2}-1\right)$.

$\left[\frac{b+1}{b+3};2z(z^2-y^2)\right]$

660 $\left(\frac{a+2}{a^2+a}-\frac{1}{a}-\frac{a+1}{a^2+2a+1}\right)(1+a)$; $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)\left(1-\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)$. $\left[\frac{1-a}{a};\frac{3(x^2-1)^2}{x^2}\right]$

661 $\left(\frac{1}{x-x^2}+\frac{2x}{1-x^2}-\frac{1}{1-x}\right)\cdot\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}\cdot\frac{x}{x+1}$; $1+\frac{2ab}{a^2-ab+b^2}\cdot\frac{a^3+b^3}{a^2+ab}$. $\left[\frac{1}{1-x};1+2b\right]$

662 $\left(x+y-\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)\left(\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{2x^2}\right)$; $\frac{a^4-b^4}{a^3+a^2}\cdot\frac{a}{a^3+ab^2-b^2-a^2}\cdot\frac{1-a^2}{b-a}$. $\left[\frac{x-y}{xy};\frac{a+b}{a}\right]$

663 $\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)\left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)$; $\left[\left(\frac{1}{3}b-2+\frac{3}{b}\right)\cdot\frac{6b}{b-3}\right]\cdot\frac{b-2}{b^2-b-6}$.

$\left[\frac{x^6}{x^2-1};2\cdot\frac{b-2}{b+2}\right]$

664 $\left(\frac{a+1}{2a^2+a-3}+\frac{1}{2a-2}\right)\cdot\frac{8a+12}{a}-\frac{4a+10}{a^2-a}$ $\left[\frac{4}{a-1}\right]$

665 $\left(\dfrac{x^2}{4x^2-7x-2}+\dfrac{x}{4x-8}\right)\cdot\left(\dfrac{-4x}{8x+1}+1\right)-\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{2x+4}$ $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

666 $\left(\dfrac{1}{3a^n}+3a^n\right)\cdot\dfrac{6a^n}{9a^{2n}+1}$; $\left(\dfrac{2}{x^n-3}-\dfrac{2}{3-x^n}\right)\left(\dfrac{x^{2n}+9-6x^n}{8}\right)$ $(n\in\mathbb{N})$. $\left[2; \dfrac{x^n-3}{2}\right]$

667 $\dfrac{3a^n}{b^n+3a^n}-\dfrac{b^{2n}}{3a^nb^n-9a^{2n}}+\dfrac{b^{2n}+9a^{2n}}{b^{2n}-9a^{2n}}$ $(n\in\mathbb{N})$ $\left[\dfrac{-b^n}{3a^n}\right]$

Problemi

668 Sono date le due frazioni algebriche: $\dfrac{a^3-8}{a^2+2a+4}$ e $\dfrac{a^2+4}{a+2}$.

a) Per quale valore di $a\in\mathbb{R}$ la prima frazione è uguale a zero?
b) Esiste un valore di a per cui la seconda frazione è nulla?
c) Quale valore assume la loro somma per $a=2$?
d) E il loro prodotto per $a=-1$? [a) $a=2$; b) no; c) 2; d) -15]

669 Considera le due frazioni algebriche: $\dfrac{b+1}{b+2}$ e $\dfrac{2b}{b+2}$.

a) Per quale valore di $b\in\mathbb{R}$ la loro somma e la loro differenza assumono lo stesso valore?
b) Quali sono i valori di b che rendono nullo il prodotto delle due frazioni?
c) Quale valore assume il prodotto per $b=1$? E per $b=-3$? $\left[\text{a) } b=0;\text{ b) } b=0,\ b=-1;\text{ c) } \dfrac{4}{9}, 12\right]$

670 È data l'addizione $\dfrac{4t}{t^2-1}+k-\dfrac{t+1}{t-1}$.

a) Per quali valori di t l'addizione perde di significato?
b) Quale espressione occorre sostituire a k affinché il risultato sia il polinomio nullo?

$\left[\text{a) } 1, -1;\text{ b) } k=\dfrac{t-1}{t+1}\right]$

671 La base di un triangolo misura $4ax^2$ e la sua altezza $7x^2$, con $a>0$ e $x\neq 0$; se diminuisci la base di $4a$ e aumenti l'altezza di 7, qual è il rapporto fra l'area del triangolo così ottenuto e l'area del triangolo dato? Determina poi, per quale valore di a la differenza tra l'area del triangolo dato e quella del triangolo ottenuto vale 7.

$\left[\dfrac{(x^4-1)}{x^4}; a=\dfrac{1}{2}\right]$

La divisione di frazioni algebriche

ESERCIZIO GUIDA

672 Eseguiamo le seguenti divisioni e determiniamo le condizioni di esistenza:

a) $\dfrac{a^2+3a}{a-3}:\dfrac{a}{a^2-9}$; b) $\dfrac{a^2-b^2}{6ab}:\dfrac{a+b}{12a}:\dfrac{4a^2-8ab+4b^2}{3b^2}$.

a) $\dfrac{a^2+3a}{a-3}:\dfrac{a}{a^2-9}=$

Scomponiamo in fattori numeratori e denominatori:

$$=\frac{a(a+3)}{a-3}:\frac{a}{(a+3)(a-3)}.$$

Le frazioni algebriche hanno le seguenti condizioni di esistenza: C.E.: $a\neq\pm 3$.

Inoltre il numeratore della seconda frazione deve essere diverso da 0:

C.E.: $a\neq\pm 3\wedge a\neq 0$.

Eseguiamo la divisione, cioè moltiplichiamo per il reciproco del divisore e semplifichiamo:

$$\frac{\cancel{a}(a+3)}{\cancel{a-3}}\cdot\frac{(a+3)\cancel{(a-3)}}{\cancel{a}}=(a+3)^2.$$

L'espressione $(a+3)^2$ esiste per ogni valore di a, ma essa è quoziente delle frazioni iniziali solo se:

$a \neq \pm 3 \wedge a \neq 0.$

Per esempio, per $a=5$ il quoziente vale $(5+3)^2=64$, ma per $a=0$, pur essendo $(0+3)^2=9$, il quoziente non esiste. Controlla quanto abbiamo ottenuto, sostituendo ad a rispettivamente i valori 5 e 0 nell'espressione iniziale.

b) Le divisioni devono essere eseguite da sinistra verso destra, come se la prima divisione fosse racchiusa fra parentesi:

$$\left(\frac{a^2-b^2}{6ab}:\frac{a+b}{12a}\right):\frac{4a^2-8ab+4b^2}{3b^2}=$$

$$=\left(\frac{\overset{1}{\cancel{(a+b)}}(a-b)}{\underset{1}{\cancel{6ab}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{12a}}}{\underset{1}{\cancel{a+b}}}\right):\frac{4(a-b)^2}{3b^2}=$$

C.E.: $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b \wedge a \neq b$.

$$=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}\cancel{(a-b)}}{\underset{1}{\cancel{b}}}\cdot\frac{3b^{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}}(a-b)^{\cancel{2}}}=\frac{3b}{2(a-b)}.$$

Se la divisione fosse stata

$$\frac{a^2-b^2}{6ab}:\left(\frac{a+b}{12a}:\frac{4a^2-8ab+4b^2}{3b^2}\right),$$

avremmo dovuto eseguire per primi i calcoli all'interno delle parentesi tonde.

Esegui le seguenti divisioni di frazioni algebriche.

673 $\frac{1}{x}:\frac{3y}{2x}$; $\quad \frac{a+b}{a-5}:\frac{a-b}{2a-10}$. $\quad \left[\frac{2}{3y};\frac{2(a+b)}{a-b}\right]$

674 $\frac{2}{a}:\frac{a-1}{a+1}$; $\quad \frac{5a-5b}{3ab}:\frac{a^2}{a-b}$. $\quad \left[\frac{2(a+1)}{a(a-1)};\frac{5(a-b)^2}{3a^3b}\right]$

675 $\frac{a^4b^2}{3}:\frac{ab^3}{6}$; $\quad \frac{a^3x}{by^2}:\frac{a^4x^2}{b^2y}$. $\quad \left[\frac{2a^3}{b};\frac{b}{axy}\right]$

676 $-12ab:\left(-\frac{2}{3}ab\right)$; $\quad \frac{7bx}{2ay}:\frac{5bx}{4ay}$. $\quad \left[18;\frac{14}{5}\right]$

677 $1:\frac{1}{z-t}$; $\quad \frac{3a^2b^3}{2c^2}:(-2ab^2)$. $\quad \left[z-t;-\frac{3ab}{4c^2}\right]$

678 $\left(-\frac{3x^2y}{2z}\right):\left(\frac{9xy^2}{4z}\right)$; $\quad \frac{x^0}{y^0}:\frac{x}{y}$. $\quad \left[-\frac{2x}{3y};\frac{y}{x}\right]$

679 $\frac{x-2y}{x+2y}:\frac{x-2y}{x+2y}$; $\quad 10x^3y^3:\left(-\frac{5y^4}{x^3}\right)$. $\quad \left[1;-\frac{2x^6}{y}\right]$

680 $\frac{54(b-3)^2}{7(b+3)}:36(b-3)$; $\quad \frac{3x}{2x-2}:\frac{7x}{3x-3}$. $\quad \left[\frac{3(b-3)}{14(b+3)};\frac{9}{14}\right]$

681 $\frac{4x^3y^2}{15ab}:\left(\frac{16x^4y^4}{35a^3y^2}:\frac{8x^2y^2}{49ab}\right)$; $\quad \frac{4x^3y^2}{15ab}:\frac{16x^4y^4}{35a^3y^2}:\frac{8x^2y^2}{49ab}$. $\quad \left[\frac{2axy^2}{21b^2};\frac{343a^3}{96x^3y^2}\right]$

682 $\dfrac{x^2-1}{15x} : \left(\dfrac{x-1}{6x^3} : \dfrac{x^2+x}{12}\right)$; $\quad \dfrac{x^2-1}{15x} : \dfrac{x-1}{6x^3} : \dfrac{x^2+x}{12}$. $\quad \left[\dfrac{x^3(x+1)^2}{30}; \dfrac{24}{5}x\right]$

683 $\dfrac{4x^2y^3}{5x-5} : \dfrac{8x^5y^3}{10x-10} : \dfrac{y}{x^4}$; $\quad \dfrac{4x^2y^3}{5x-5} : \left(\dfrac{8x^5y^3}{10x-10} : \dfrac{y}{x^4}\right)$. $\quad \left[\dfrac{x}{y}; \dfrac{y}{x^7}\right]$

684 $\dfrac{3x}{x-5} : \dfrac{x-1}{2x-10} : \dfrac{6x}{x^2-1}$; $\quad \dfrac{3x}{x-5} : \left(\dfrac{x-1}{2x-10} : \dfrac{6x}{x^2-1}\right)$. $\quad \left[x+1; \dfrac{36x^2}{(x-1)^2(x+1)}\right]$

---

685 $\dfrac{\dfrac{(x+2y^2)^3}{(1-x)^2}}{\dfrac{(2y^2+x)^2}{(x-1)^3}}$ $\quad [(x+2y^2)(x-1)]$

686 $\dfrac{1+\dfrac{2}{x-1}}{\dfrac{x^2+x}{2x-2}}$ $\quad \left[\dfrac{2}{x}\right]$

687 $\dfrac{\dfrac{z}{z^2-a^2}\cdot(z-a)}{\left(1-\dfrac{a}{z}\right)\cdot\dfrac{az}{z^2-a^2}}$ $\quad \left[\dfrac{z}{a}\right]$

688 $\dfrac{\dfrac{x^3+1+3x^2+3x}{x^2+5x}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$ $\quad \left[\dfrac{x^2+x}{x+5}\right]$

689 $\dfrac{x^{n+1}}{y} : \dfrac{x^n}{y^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$ $\quad [xy^n]$

690 $\dfrac{3a^{n+2}}{3b^{n-1}} : \dfrac{4a^3}{9b^2} : \dfrac{a^n}{b^{2n}} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 1)$ $\quad \left[\dfrac{9b^{n+3}}{4a}\right]$

691 $\dfrac{3a^{n+2}}{3b^{n-1}} : \left(\dfrac{4a^3}{9b^2} : \dfrac{a^n}{b^{2n}}\right) \quad (n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 1)$ $\quad \left[\dfrac{9a^{2n-1}}{4b^{3n-3}}\right]$

Espressioni con addizioni, moltiplicazioni e divisioni

TEST

692 Quale fra le seguenti divisioni ha per risultato -1?

A $\dfrac{(a+4)^2}{a+1} : \dfrac{a+1}{(a-4)^2}$

B $\dfrac{a+2}{a-2} : \dfrac{a-2}{a+2}$

C $\dfrac{(a-1)^2}{a+1} : \dfrac{(1-a)^2}{a+1}$

D $\dfrac{(a-2)^2}{1-b} : \dfrac{(2-a)^2}{b-1}$

E $\dfrac{a}{a+b} : \dfrac{a}{a-b}$

693 Sulla divisione $\dfrac{y^2-1}{3y-3} : \dfrac{y^2+3y+2}{3}$ possiamo affermare che è uguale a:

A $y+2, \forall y \neq \pm 1$.

B $\dfrac{1}{y+2}, \forall y \neq \pm 1 \wedge y \neq -2$.

C $\dfrac{1}{y+2}, \forall y \in \mathbb{R}$.

D $\dfrac{1}{y-2}, \forall y \neq -1$.

E $y+2, \forall y \neq \pm 1 \wedge y \neq -2$.

Semplifica le seguenti espressioni.

694 $\dfrac{3ab-b}{2a} : (9a^2-3a)$; $\quad \dfrac{3x^2-6xy}{2y^4} : \dfrac{x^2-4y^2}{y^3}$. $\quad \left[\dfrac{b}{6a^2}; \dfrac{3x}{2y(x+2y)}\right]$

695 $\dfrac{(x+2y^2)^3}{(1-x)^2} : \dfrac{(2y^2+x)^2}{(x-1)^3}$; $\quad (4x^2-2x) : \dfrac{4x^2+1-4x}{x}$. $\quad \left[(x+2y^2)(x-1); \dfrac{2x^2}{2x-1}\right]$

696 $\frac{x^2-x}{x^2+4x+4}:\frac{2x^2+6x}{x^2-4}$; $\quad \frac{x^3+1+3x^2+3x}{x^2+5x}:\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$. $\quad \left[\frac{(x-1)(x-2)}{2(x+2)(x+3)};\frac{x^2+x}{x+5}\right]$

697 $\left(\frac{3a}{2b}-1\right):\left(\frac{9a^2}{4b^2}-1\right)$; $\quad \left(1+\frac{2}{x-1}\right):\frac{x^2+x}{2x-2}$. $\quad \left[\frac{2b}{3a+2b};\frac{2}{x}\right]$

698 $\frac{a^3-ab^2}{a^2+2ab+b^2}:\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2b-b^3}:ab$; $\quad \frac{a^3-ab^2}{a^2+2ab+b^2}:\left(\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2b-b^3}:ab\right)$. $\quad [1;a^2b^2]$

699 $\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{b-a^2+2ab}{2ab}\right):\left(-\frac{1}{a}\right)$; $\quad \left(1-\frac{x-3y}{x+y}\right):\left(\frac{3x+y}{x-y}-3\right)$. $\quad \left[2a;\frac{x-y}{x+y}\right]$

700 $\left(\frac{2y^2}{1+y}-y+1\right):\frac{y^2+y^4}{4yz^2+4z^2}$; $\quad \left(x-\frac{y^2+x^2}{x}\right):\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$. $\quad \left[\frac{4z^2}{y^2};\frac{y^3}{y-x}\right]$

701 $3:\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}$; $\quad 3:\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)$. $\quad \left[\frac{4(x-y)}{(x+y)};\frac{3(x^2-y^2)}{2(x^2+y^2)}\right]$

702 $\frac{2x^3}{x+y}:\frac{4xy}{x^2+2xy+y^2}:\frac{x^2-y^2}{yx-y^2}$; $\quad \frac{2x^3}{x+y}:\left(\frac{4xy}{x^2+2xy+y^2}:\frac{x^2-y^2}{yx-y^2}\right)$. $\quad \left[\frac{x^2}{2};\frac{x^2(x+y)^2}{2y^2}\right]$

703 $\frac{2}{a}\left(\frac{a+b}{2b}+\frac{b}{a-b}\right):\frac{a^2+b^2}{ab-b^2}$; $\quad \left(1+\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2+x-2}{x^2+x}:(x^2-4)$. $\quad \left[\frac{1}{a};\frac{1}{x(x-2)}\right]$

704 $\frac{z}{z^2-a^2}\cdot(z-a):\left[\left(1-\frac{a}{z}\right)\frac{az}{z^2-a^2}\right]$; $\quad \left(\frac{a+3}{a-3}:\frac{a^2+2a-3}{a^2-2a-3}+1\right):(a-1)$. $\quad \left[\frac{z}{a};\frac{2a}{(a-1)^2}\right]$

705 $\frac{1}{x}:\left(\frac{x-3y}{xy}+\frac{x+y}{x^2}-\frac{y^3-2xy^2}{x^2y^2}\right)$ $\quad \left[\frac{y}{x}\right]$

706 $\left[\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right]:\frac{x+y}{xy}$ $\quad [1]$

707 $\frac{a}{a+1}:\left(\frac{2a-1}{a+3}-\frac{2a-5}{a+1}-\frac{14}{a^2+4a+3}\right)$ $\quad$ [impossibile, perché...]

708 $x(2x-1):\left(2x+\frac{1}{2x-2}+\frac{2x-1}{2x-2}\right)$ $\quad [x-1]$

BRAVI SI DIVENTA ► E22

709 $\left(1-\frac{4}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{x+1}+\frac{4}{x^2-x-2}\right):\frac{x^3-x^4+8-8x}{2-2x}$

710 $\frac{x^2-3x}{x^2-1}:\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2x}{3x-3}+\frac{9-x}{3x^2-3}\right)$ $\quad \left[\frac{3x}{x-3}\right]$

711 $\frac{x^2-3x}{x^2-1}:\frac{x}{x+1}-\frac{2x}{3x-3}+\frac{9-x}{3x^2-3}$ $\quad \left[\frac{x(x-9)}{3(x^2-1)}\right]$

Problemi

712 Verifica che le due espressioni $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x-1}{x-1}\cdot\frac{(x-2)^2}{(2-x)^2}$ e $\left(\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x-1}{x-1}\right)\cdot\frac{(x-2)^2}{(2-x)^2}$ forniscono lo stesso risultato. Puoi affermare in generale che $A+B\cdot C$ e $(A+B)\cdot C$, con A, B e C frazioni algebriche qualsiasi, danno sempre lo stesso risultato? Perché? [in generale no, ma in questo caso sì perché...]

713 È data l'espressione $\left(1+\frac{1}{s}\right)\left(1-\frac{1}{1-s^2}\right)$.

a) Per quali valori di s l'espressione è priva di significato?

b) Può essere nullo il secondo fattore dell'espressione? Perché?

c) Semplifica l'espressione e determina per quale valore di $s\in\mathbb{R}$ il risultato vale 2.

d) Per quale frazione algebrica occorre dividere il risultato dell'espressione, affinché il quoziente sia uguale a 3?

$\left[\text{a) } 0, -1, 1;\ \text{b) no; c) } s=2;\ \text{d) } \frac{s}{3(s-1)}\right]$

714 La base AB di un rettangolo $ABCD$ misura $5a$ e l'altezza BC supera di $(a+3b)$ la base. Detti M un punto della base AB tale che $\overline{AM}=\frac{2}{5}\overline{AB}$ e N il punto di BC tale che $\overline{CN}=2\overline{NB}$, dimostra che $\forall\, a, b\in\mathbb{Q}^+$ sono equivalenti le due espressioni:

$$\frac{\overline{MN}^2-(\overline{NB}-\overline{MB})^2}{\frac{1}{2}\overline{CN}}\quad\text{e}\quad\frac{6}{5}\overline{DC}.$$

La potenza di frazioni algebriche

ESERCIZIO GUIDA

715 Semplifichiamo le seguenti potenze di frazioni algebriche:

a) $\left(-\frac{3ab^5}{2a^2c^3}\right)^2$; b) $\left(-\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}\right)^3$.

a) L'esponente è pari, quindi il risultato è positivo. Eleviamo al quadrato il numeratore e il denominatore, dopo aver semplificato la frazione algebrica:

$$\left(\frac{-3\cancel{a}b^5}{2a^{\cancel{2}}c^3}\right)^2=+\frac{(3b^5)^2}{(2ac^3)^2}=\frac{9b^{10}}{4a^2c^6},$$

C.E.: $a\neq 0\wedge c\neq 0$.

b) L'esponente è dispari, quindi resta il segno della base. Prima di eseguire la potenza, semplifichiamo la frazione algebrica:

$$\left(-\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}\right)^3=\left(-\frac{(a-b)\cancel{(a+b)}}{(a+b)^{\cancel{2}}}\right)^3=$$

$$=-\frac{(a-b)^3}{(a+b)^3},$$

C.E.: $a\neq -b$.

Semplifica le seguenti frazioni algebriche.

716 $\left(\frac{3a^2b^3}{4c^4}\right)^2$; $\left(-\frac{2xy^2}{3z^3}\right)^3$. $\left[\frac{9a^4b^6}{16c^8}; -\frac{8x^3y^6}{27z^9}\right]$

717 $\left(-\frac{27a^4b^5c^8}{9a^2b^6c^5}\right)^2$; $\left(\frac{6x^3y^2z}{12xy^5z^7}\right)^3$. $\left[\frac{9a^4c^6}{b^2}; \frac{x^6}{8y^9z^{18}}\right]$

718 $\left(\dfrac{2a+2b}{a^2+2ab+b^2}\right)^3$; $\left(\dfrac{4a^2-4b^2}{2b-2a}\right)^3$. $\left[\dfrac{8}{(a+b)^3}; -8(a+b)^3\right]$

719 $\left(x-\dfrac{xy}{x+y}\right)^3$; $\left[2pq^3\cdot\left(-\dfrac{1}{2p^2q}\right)\right]^5$. $\left[\dfrac{x^6}{(x+y)^3}; -\dfrac{q^{10}}{p^5}\right]$

720 $\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}\right)^2$; $\left(\dfrac{x^2-10xy+25y^2}{10y-2x}\right)^2$. $\left[(x-y)^2; \dfrac{(x-5y)^2}{4}\right]$

721 $\left(\dfrac{x^3+x^2y}{x^2+2xy+y^2}\right)^3$; $\left(\dfrac{2a^2b^3-2ab^4}{2a^2b^2-2a^3b}\right)^5$. $\left[\dfrac{x^6}{(x+y)^3}; -\dfrac{b^{10}}{a^5}\right]$

722 $\left(\dfrac{a^2+1}{a^2-3a-4}-\dfrac{a+1}{a-4}\right)^2$; $\left(\dfrac{b}{b-1}\right)^2\cdot\left(b-\dfrac{1}{b}\right)^2$. $\left[\dfrac{4a^2}{(a-4)^2(a+1)^2}; (b+1)^2\right]$

723 $\left(\dfrac{a+b}{b}-1:\dfrac{b}{a+b}\right)^0$; $\left(1-\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1}\right)^2$. $\left[\text{impossibile perché...}; \dfrac{1}{(x-1)^4}\right]$

724 $\left(\dfrac{3x^{n+1}}{y^{2n}}\right)^2$; $\left(-\dfrac{2x^{n+3}}{3x^ny^3}\right)^3$ $(n\in\mathbb{N})$. $\left[\dfrac{9x^{2n+2}}{y^{4n}}; -\dfrac{8x^9}{27y^9}\right]$

725 $\left(\dfrac{2ab-6b}{a^2-8a+15}\right)^n:\dfrac{b}{(a-5)^n}$; $\left(\dfrac{a^n}{b^n}-\dfrac{b^n}{a^n}\right)^2:\left(\dfrac{b^n}{a^n}+\dfrac{a^n}{b^n}-2\right)$ $(n\in\mathbb{N})$. $\left[2^nb^{n-1}; \dfrac{(a^n+b^n)^2}{a^nb^n}\right]$

Potenze con esponente intero negativo

ESERCIZIO GUIDA

726 Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\left(\frac{5xy}{a^2}\right)^{-2}.$$

C.E.: $a\neq 0$.

Poiché, per definizione, $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$, possiamo scrivere:

$$\left(\frac{5xy}{a^2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{5xy}{a^2}\right)^2}=\left(\frac{a^2}{5xy}\right)^2.$$

Dobbiamo aggiungere nuove C.E.:

$$x\neq 0\wedge y\neq 0.$$

Dunque:

$$\left(\frac{5xy}{a^2}\right)^{-2}=\frac{a^4}{25x^2y^2}; \text{C.E.: } a\neq 0, x\neq 0, y\neq 0.$$

Semplifica le seguenti espressioni.

727 $\left(-\dfrac{2ac^2}{3b^4}\right)^{-2}$; $\left(\dfrac{a-3}{a^2-4a+3}\right)^{-1}$. $\left[\dfrac{9b^8}{4a^2c^4}; a-1\right]$

728 $\left[-\dfrac{1}{2(a+2b)^3}\right]^{-3}$; $\left[\left(\dfrac{x+3}{x^2-2x-15}\right)^{-1}\right]^{-2}$. $\left[-8(a+2b)^9; \dfrac{1}{(x-5)^2}\right]$

729 $\left(-\dfrac{a^2b^3}{1-2a+a^2}\right)^{-3}$; $\left[\left(\dfrac{a+b}{a^2-b^2}\right)^2\right]^{-1}$. $\left[-\dfrac{(1-a)^6}{a^6b^9}; (a-b)^2\right]$

730 $\left(\frac{x-y}{x+y}-1\right)\left(1+\frac{x+y}{x-y}\right)^{-1}$; $\left[\left(\frac{b^2+3b+9}{b^3-27}\right)^{-2}\right]^3$. $\left[-\frac{y(x-y)}{x(x+y)}; (b-3)^6\right]$

731 $\left(\frac{x^2-y^2}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{x+y}\right)^{-4}$; $\left(\frac{a^3}{a^2-2a+4}\right)^2 \cdot (a^2+2a)^{-3} \cdot \left(\frac{a^3+8}{a}\right)^2$. $\left[\frac{1}{x-y}; \frac{a}{a+2}\right]$

RIEPILOGO LE ESPRESSIONI CON LE FRAZIONI ALGEBRICHE

Nel sito: ▶ 18 esercizi di recupero

TEST

732 Solo una tra le seguenti espressioni è equivalente a $\left(\frac{-1}{a-1}\right)^{-1}$, con $a \neq 1$. Quale?

A $a-1$
B $\frac{1}{a-1}$
C $\frac{1}{1-a}$
D $1-a$
E 1

733 La divisione tra $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-2}$ e $\left(\frac{x+2}{1-x}\right)^3$ ha come quoziente:

A $\frac{x+2}{1-x}$.
B $\frac{x-1}{x+2}$.
C $\frac{1-x}{2+x}$.
D $-\frac{x+1}{x+2}$.
E $-\frac{x+2}{x-1}$.

734 La divisione tra una frazione F e $\frac{x+1}{(x-1)^2}$ dà x^2-1. Qual è la frazione F?

A $\frac{x+1}{x-1}$
B $\frac{(x+1)^2}{x-1}$
C $\frac{(x+1)^2}{1-x}$
D $\frac{(x-1)^2}{x+1}$
E $\frac{x+1}{(x-1)^2}$

735 Data la frazione algebrica $\frac{x^4y^4-2x^3y^3+x^2y^2}{x^2y^2-xy}$, il valore che essa assume per $x=a+1$ e $y=a-1$ è:

A (a^4-1).
B $(a^2-1)^2(a^2+2)$.
C $(a^2-2)(a^2-1)$.
D $a^2(a^2-1)$.
E a^4+2.

Semplifica le seguenti espressioni dopo aver determinato le condizioni di esistenza, che per brevità non scriviamo nei risultati.

736 $\frac{a^3-2}{4a^2y}+\frac{1}{2}-\frac{a}{4y}+\frac{1}{2a^2y}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

737 $\frac{z^3+t^3}{z^2-t^2} : \frac{z^3-z^2t+zt^2}{2z-2t}$ $\left[\frac{2}{z}\right]$

738 $\frac{(a-1)(a+1)}{a^2b^2}-\frac{1+2a^2}{a^2}+\frac{b^2+1}{a^2b^2}$ $\left[\frac{1-2b^2}{b^2}\right]$

739 $1-\frac{1}{x^2}-\frac{x}{3y^2}+\frac{2x^3+y^3}{6x^2y^2}-\frac{y}{6x^2}$ $\left[\frac{x^2-1}{x^2}\right]$

740 $\frac{x^3-4x}{x^2+4x+4} : \frac{x^2-4x+4}{2x^2-8} : 4x^2$ $\left[\frac{1}{2x}\right]$

741 $\frac{(x+y)^2}{2x^2y}+3-\frac{(x-y)^2}{2x^2y}-\frac{1}{x}$ $\left[\frac{1+3x}{x}\right]$

742 $\dfrac{2b+2}{b^4+b^3+8b+8}\cdot\left(\dfrac{4}{b^2}-1\right)\left(b+\dfrac{4}{b-2}\right)$ $\left[-\dfrac{2}{b^2}\right]$

743 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-x}{m}\right)+\dfrac{11}{5x}+\dfrac{5x^2-2m}{10mx}-\dfrac{a}{2m}$ $\left[\dfrac{2}{x}\right]$

744 $\dfrac{a+3b}{2a}-\dfrac{2a-b}{3b}-\dfrac{4a^2+9b^2}{6ab}+\dfrac{a-b}{b}$ $\left[-\dfrac{2a+b}{6b}\right]$

745 $\left(\dfrac{2a+2b}{a}+\dfrac{a^2-b^2}{ab}-\dfrac{(a+b)^2}{ab}\right):\dfrac{a+1}{9-9a^2}$ $[0]$

746 $\dfrac{4b^2+1}{2b^3}-\dfrac{1}{12a^2}+\dfrac{b-36a^4}{12a^2b}-\dfrac{1}{2b^3}$ $\left[\dfrac{2-3a^2}{b}\right]$

747 $\dfrac{x^2-4}{y^3-4y^2-5y}:\dfrac{2y-10-xy+5x}{y+y^2}$ $\left[-\dfrac{x+2}{(y-5)^2}\right]$

748 $\dfrac{(k+x)(k-x)}{5k^2x^2}-\dfrac{2-kx}{7x^2}+\dfrac{4}{35k^2}-\dfrac{k}{7x}$ $\left[-\dfrac{3(k^2+x^2)}{35k^2x^2}\right]$

749 $\dfrac{2a^4-3b^2}{12a^4b^2}-\dfrac{2a^2-3}{12a^2b^2}-\left(\dfrac{3}{6a^2}\right)^2$ $\left[\dfrac{a^2-2b^2}{4a^4b^2}\right]$

750 $\left[\left(\dfrac{z}{t}+\dfrac{m}{y}\right):\dfrac{mt+zy}{t^2y^2}+\dfrac{1}{z}\right]-ty$ $\left[\dfrac{1}{z}\right]$

751 $\left[\dfrac{(a+2)^2}{a^2+2a+4}:\left(\dfrac{a^3-8}{a+2}\right)^{-1}\right]^2$ $[(a^2-4)^2]$

752 $\dfrac{x^2-y^2}{16y^4-(y+1)^2}\cdot\dfrac{4y^2+y+1}{3x-3y}\cdot\dfrac{4y^2-y-1}{x+y}$ $\left[\dfrac{1}{3}\right]$

753 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{a^2+a}{a^2+4a+3}+\dfrac{4a+3}{a^2+3a}$ $\left[\dfrac{a+3}{a}\right]$

754 $\left(1-\dfrac{t-y}{t}\right):\left(\dfrac{t+1}{t^2-ty}+\dfrac{y+1}{y^2-ty}+\dfrac{1}{ty}\right)$ [priva di senso perché...]

755 $\left(1-\dfrac{x^3}{y^3}\right)\cdot\dfrac{y}{y-x}-\dfrac{y^2+2xy+x^2}{y^2}$ $\left[-\dfrac{x}{y}\right]$

756 $\dfrac{8x^3}{x^3-y^3}:\dfrac{4x^2y}{x^2+xy+y^2}:\dfrac{2x}{xy-y^2}$ $[1]$

757 $\dfrac{8x^3}{x^3-y^3}:\left(\dfrac{4x^2y}{x^2+xy+y^2}:\dfrac{2x}{xy-y^2}\right)$ $\left[\dfrac{4x^2}{y^2(x-y)^2}\right]$

758 $\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{b}{a^2-ab}+\dfrac{b^2}{a^3-ab^2}\right):\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{b}{a^2-b^2}\right)$ $\left[\dfrac{a-2b}{a}\right]$

759 $\dfrac{3x}{x^3-x^2-x+1}-\dfrac{3x}{2-2x^2}+\dfrac{x-2}{4x-2x^2-2}$ $\left[\dfrac{x+1}{(x-1)^2}\right]$

760 $\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x}{y}+1\right)\left(\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{x}{y}+1\right)$ $\left[\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{y^4}\right]$

761 $\left[\dfrac{2(x-y)^2}{(x+y)}\cdot\dfrac{28}{3(y-x)}\cdot\left(-\dfrac{x+y}{8}\right)-\dfrac{x-y}{3}\right]:(x-y)$ $[2]$

762 $\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{y^2}{y^3-x^3}$ $\left[\dfrac{y(3x-y)}{x^3-y^3}\right]$

763 $\left(1+\dfrac{1}{a^2+a}\right)\left(1+\dfrac{1}{a^2-a}\right):\left(\dfrac{a+1}{a^2}+1\right):\dfrac{1}{a^2-1}$ $[a^2-a+1]$

764 $\dfrac{5}{a^2-2a+1}-\dfrac{a^2-14a-7}{2a^2-a^4-1}-\dfrac{2}{a^2+2a+1}$ $\left[\dfrac{4}{(a+1)(a-1)}\right]$

765 $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+7x+12}:\dfrac{2x+2}{3x+9}:\dfrac{14x+14y}{9}$ $\left[\dfrac{27}{28(x+y)}\right]$

766 $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+7x+12}:\left(\dfrac{2x+2}{3x+9}:\dfrac{14x+14y}{9}\right)$ $\left[\dfrac{7}{3}(x+y)\right]$

767 $\dfrac{2a}{a^2b-b^3}-\dfrac{a-b}{2a^2b+2ab^2}-\dfrac{a+b}{2a^2b-2ab^2}$ $\left[\dfrac{1}{ab}\right]$

768 $\left(\dfrac{y}{x^2+xy}+\dfrac{x^2+xy}{x^2y-y^3}-\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}\right)$ $\left[\dfrac{1}{y}\right]$

769 $\left(\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{a}{a+2}\right):\dfrac{4}{a^2-a-2}:\dfrac{a^2-1}{a^2+a-2}$ $[a]$

770 $\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{a}{a+2}:\dfrac{4}{a^2-a-2}:\dfrac{a^2-1}{a^2+a-2}$ $\left[\dfrac{a^2(4-a)}{4(a-2)}\right]$

771 $\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}:\dfrac{1+x}{1-x}-\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)$ $\left[\dfrac{3x^3+5x}{(1-x)(1+x)^2}\right]$

772 $\left(\dfrac{4}{2z+1}+\dfrac{2}{1+z-2z^2}\right)\cdot\dfrac{2z^2+3z+1}{3+z-2z^2}$ $\left[\dfrac{2}{1-z}\right]$

773 $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2\right)\left(\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}\right)\cdot\dfrac{b^3-ab^2}{2a+2b}$ $[-b]$

774 $\dfrac{6}{1-m^2}+\dfrac{2}{m^2-3m+2}-\dfrac{6}{m^2-m-2}$ $\left[\dfrac{10}{1-m^2}\right]$

775 $\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-6x^2+12x-8}\cdot\left(\dfrac{4-x}{x-3}+2\right)$ $\left[\dfrac{1}{x-2}\right]$

776 $\dfrac{2a+7}{a^3+2a^2-a-2}-\dfrac{3}{a^2+a-2}+\dfrac{2}{a^2+3a+2}$ $\left[\dfrac{1}{a^2-1}\right]$

777 $\left(\frac{a+1}{a-2}+\frac{3a-5}{a+3}-\frac{3a^2+7}{a^2+a-6}\right)\frac{a^2+4a+3}{a^2-4a-12}$ $\left[\frac{a^2-1}{a^2-4}\right]$

778 $\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2-2ab}:\frac{a^2+ab}{a-b}:\left(a+\frac{b^2}{a}\right)$ $[1]$

779 $\left[\left(\frac{1}{1+b}+\frac{b}{1-b}\right):\left(\frac{1}{1-b}-\frac{b}{1+b}\right)-a\right]:(1-a^2)$ $\left[\frac{1}{1+a}\right]$

780 $\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right):\left[\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\cdot\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\right]$ $\left[\frac{2}{x}\right]$

781 $\left[\left(\frac{a}{b}-1\right):\left(1-\frac{b}{a}\right)\right]:\left[\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right):\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\right]-\frac{a}{b}$ $\left[\frac{b^2-a^2}{ab}\right]$

782 $\left(\frac{6a}{a^2-9}+\frac{a}{a+3}+\frac{3}{3-a}\right)^3:\left(\frac{b}{b-2}+\frac{8}{4-b^2}-\frac{2}{b+2}\right)^4$ $[1]$

783 $\left[\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)(x+y)\right]^2$ $\left[\frac{16x^2y^2}{(x-y)^2}\right]$

784 $\frac{2y+2}{y^2-4}+\frac{3y}{y^2-4y+4}-\frac{4y^2+4y}{y^3-2y^2-4y+8}$ $\left[\frac{1}{y-2}\right]$

785 $\left[ab\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2:\left[b^2\left(1-\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]^2$ $\left[\frac{a^2}{b^2}\right]$

786 $\left(y^2+2y+1-\frac{1}{y^2-2y+1}\right):\left(\frac{y}{y-1}+y\right)$ $\left[\frac{y^2-2}{y-1}\right]$

787 $\frac{y-1}{y+1}+\frac{2y-y^2-1}{1+2y+y^2}+\frac{3+3y+y^2+y^3}{y^3+1+3y^2+3y}$ $[1]$

788 $\left(\frac{1}{2x}-\frac{2x}{y^2}\right):\left(1+\frac{y^2+4x^2+2xy}{2xy}\right):\left(1-\frac{2x}{y}\right)$ $\left[\frac{1}{2x+y}\right]$

789 $\frac{x^2}{1-x^3}+\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}+\frac{x^3+x^2}{x^4+x^3-x-1}$ $\left[\frac{1}{1-x^2}\right]$

790 $\left(\frac{x+5}{x^2+5x+6}+\frac{2}{x+3}-\frac{2}{x+2}\right)^2:\left(\frac{1}{x+2}\right)^3$ $[x+2]$

791 $\left(y^2+2y+1-\frac{1}{y^2-2y+1}\right):\left(\frac{y}{y-1}+y\right)$ $\left[\frac{y^2-2}{y-1}\right]$

792 $\left(\frac{2x^2+2xy}{4y^2-4xy}\cdot\frac{24y^3-8xy^2}{6x^3+6x^2y}\right):\left(\frac{y}{2x-2y}+\frac{x}{3x-3y}-\frac{4x+3y}{6y-6x}-\frac{x+y}{x-y}\right)$ [impossibile]

793 $\left[\left(1-\frac{x}{x+1}\right)^2-\left(1-\frac{x}{x-1}\right)^2-4(x^2-1)^{-2}\right]:\left(\frac{2x}{x-1}-1\right)^2$ $\left[-\frac{4}{(x+1)^3}\right]$

794 $\left(\frac{t^2+p^2}{2tp}+1\right)\cdot\frac{tp}{t^2+p^2}\cdot\left(\frac{t+p}{t-p}+\frac{t-p}{t+p}\right)$ $\left[\frac{t+p}{t-p}\right]$

795 $\frac{x+2y}{2x-4y}+\frac{2y-x}{4y+2x}+\frac{8y^2}{x^2-4y^2}:\frac{8y}{x-2y}$ $\left[\frac{y(5x-2y)}{x^2-4y^2}\right]$

796 $\left(\frac{x+2y}{2x-4y}+\frac{2y-x}{4y+2x}+\frac{8y^2}{x^2-4y^2}\right):\frac{8y}{x-2y}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

797 $\left(\frac{x-8}{x^2+5x-6}-\frac{2}{x+6}+\frac{2}{x-1}\right):\frac{1}{x^2-1}$ $[x+1]$

798 $\left[\left(\frac{2a-b}{a^2-b^2}-\frac{2}{a+b}\right)^2:\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}-1\right)^2\right]^2$ $\left[\frac{1}{b^4}\right]$

799 $\left[\left(\frac{x}{y}+1\right)^2:\left(\frac{x}{y}-1\right)\right]\cdot\left(\frac{x}{y}-1\right)^2:\left(\frac{x}{y}+1\right)+2+\frac{2x}{y}$ $\left[\left(\frac{x+y}{y}\right)^2\right]$

800 $\left[\left(x+\frac{1}{x+2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x+2}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)$ $\left[\frac{4}{x^2}\right]$

801 $\left(\frac{a-4}{a^2-5a+6}-\frac{a+2}{a^2+a-12}\right):\frac{12}{a^2+2a-8}$ $\left[-\frac{1}{a-3}\right]$

802 $\left(1+\frac{2y}{x-y}\right)\cdot\left[\left(1-\frac{2xy}{x^2+xy+y^2}\right):\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\right]^2$ $\left[\frac{x-y}{x+y}\right]$

803 $\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2:\left(\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\right)^2$ $[1]$

804 $\left[\left(\frac{a}{2}-\frac{2a}{b^2}\right)^{-2}:\left(\frac{a}{2}-\frac{2a}{b^2}\right)^{-1}\right]:\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{b^2-4}\right)$ $[2b]$

805 $\left[\frac{4(x+2y)^2}{2xy-x^2}+\frac{4x}{x-2y}-\frac{8y}{x}\right]^{-1}:\left(\frac{24y}{2y-x}\right)^{-3}$ $\left[\frac{576y^2}{(2y-x)^2}\right]$

806 $\left\{\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{a+b}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\right]^2-\frac{2}{(a+b)^2}\right\}^3$ $\left[-\frac{1}{(a+b)^6}\right]$

807 $\left[\left(\frac{x-2y}{x^2-y^2}-\frac{2}{x+y}\right):\left(\frac{x}{x+y}-1\right)\right]^2:\left(1+\frac{y}{x-y}\right)$ $\left[\frac{x}{(x-y)y^2}\right]$

808 $\left(\frac{2xy}{x^2+y^2+2xy}-1\right)\cdot\left[\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)+1\right]^{-1}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

809 $\left[\left(\frac{2a}{2a-b}-\frac{b}{2a+b}\right)\cdot\frac{4a^2-2ab}{16a^4-b^4}\cdot\left(1+\frac{b}{2a}\right)\right]:\frac{1}{2ab-b^2}-1$ $\left[-\frac{2a}{2a+b}\right]$

810 $\left[\left(\frac{3x^2-2}{x-1}+\frac{6x-2}{x-3}\cdot\frac{9-x^2}{3x-1}\right)\cdot\frac{1}{x-2}+1\right]^2\cdot\left(1+\frac{x-2}{x-1}\right)^{-3}$ $\left[\frac{x-1}{2x-3}\right]$

811 $\left(\frac{1}{a-3}+\frac{1}{2a^2-3a-9}\right)\cdot\frac{2a+3}{a^2+2a}+\left(\frac{1}{a^2-9}-\frac{1}{a^2-3a}\right):\frac{1}{a+3}$ $\left[\frac{-1}{a(a-3)}\right]$

812 $\left[\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{3-x}\right):\frac{5-2x}{x^2+3-4x}+\left(\frac{x-2}{1-x}\right)^{-2}\right]:\left[\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2-\frac{x-1}{4+x^2-4x}\right]$ $\left[\frac{1}{x-2}\right]$

813 $\left\{\left[\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{1-x}\right)(x^2-4x+3)-\frac{4}{3x-1}\right]\cdot\frac{1}{6}\right\}^2:\frac{x^2-2x+1}{3x^2-4x+1}$ $\left[\frac{x-1}{3x-1}\right]$

814 $\left\{\left[\left(1-\frac{1}{a}\right)^2:\left(1+\frac{1}{a}\right)\right]\left(1+\frac{1}{a}\right)^2:\left(1-\frac{1}{a}\right)+\frac{2}{a^2}-\frac{2}{a}\right\}:\left[\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\right)-\frac{3(a-1)}{a^2}\right]$ $\left[\frac{a}{a-1}\right]$

815 $\left(a+\frac{a}{a+3}+\frac{4}{a+3}\right)\cdot\left[\left(\frac{2}{a+1}-1+a\right)^2:\left(\frac{2+3a+a^2}{a^2+2a-3}\right)^2\right]:\left(\frac{2}{a+1}+a-1\right)^2$ $\left[\frac{(a+3)(a-1)^2}{(a+1)^2}\right]$

816 $\left[\frac{1}{x+2y}-\frac{1}{x^2+4y^2+4xy}\left(x-\frac{12y^2-2x^2-2xy}{x-2y}\right)\right]:\left(\frac{1}{2y-x}+\frac{6y-x}{x^2-4y^2}\right)$ $[1]$

817 $\left(\frac{8a^2}{1+2a}-2a\right)\left(2a+\frac{1+4a-8a^3}{4a^2-1}\right)\left(\frac{2}{2a-1}+\frac{4}{2a+1}-2\right)^{-1}:\left(a-\frac{2a}{2a+1}\right)$ $\left[\frac{2a+1}{2a(3-2a)}\right]$

818 $\left(\frac{2x+y}{x-y}-\frac{x^2+5xy}{x^2-y^2}\right)^3:\frac{x^6+y^6-2x^3y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}+\frac{y-x}{(x^2+xy+y^2)^2}$ $[0]$

819 $\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}+4\right)\cdot\left(\frac{a^3-2a^2b+4ab^2}{a^3-8b^3}:\frac{a^3+8b^3}{a^3+2a^2b+4ab^2}\right)\cdot\frac{b}{a}$ $\left[\frac{a+2b}{a-2b}\right]$

820 $\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3+3\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+3\left(\frac{a+b}{a-b}\right)+1\right]:\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3+1+3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\right]$ $\left[\frac{(a+b)^3}{(a-b)^3}\right]$

821 $\left[\frac{2a^2+ab-3b^2}{a^2-ab-2b^2}:\left(\frac{2a^2+3ab}{3a^2-3ab-6b^2}\cdot\frac{a^2-2ab+b^2}{3a}\right)\right]^{-2}$ $\left[\frac{(a-b)^2}{81}\right]$

822 $\left\{\left[(2b-1)^3-\frac{1}{2b-1}\right]:\frac{8b^2-8b}{2b-1}-b^2\right\}\cdot\left(1-\frac{b^2-2b}{b^2-2b+1}\right)$ $[1]$

823 $1-\left\{\left[\left(\frac{2y^3+y^2-2y-1}{1+y-2y^2}+3\right)^3-6y\left(y-\frac{1}{y}\right)\right]:\frac{12y-14+y^3}{y^3-1}\right\}$ $[y^3]$

824 $\left(\frac{2x}{x+y}+\frac{4y}{x-y}-\frac{4y^2}{x^2-y^2}\right):\left[\left(2-\frac{y}{x+y}\right)\cdot\frac{(2+x-2y)(x+y)}{x(2x+y)}\right]$ $\left[\frac{2x^2}{(x-y)(2+x-2y)}\right]$

825 $\frac{a^{2n}}{a^nb^n-b^{2n}}-\frac{a^{2n}+b^{2n}}{a^{2n}-b^{2n}}-\frac{b^{2n}}{a^nb^n+b^{2n}}$ $(n\in\mathbb{N})$ $\left[\frac{a^n}{b^n}\right]$

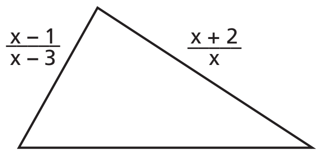
826 $\left(\frac{x^{2n}+y^{2n}}{2x^ny^n}+1\right)\left(\frac{x^n+y^n}{x^n-y^n}+\frac{x^n-y^n}{x^n+y^n}\right):\frac{x^{2n}+y^{2n}}{x^{n-1}y^n}(x^{n+1}-xy^n)-2x^n$ $(n\in\mathbb{N}$ e $n>1)$ $[y^n-x^n]$

827 $\left(\frac{y^n}{y^n-2}+\frac{2}{y^n+2}-\frac{8}{4-y^{2n}}\right)\cdot\frac{y^n-2}{y^n+2}$ $(n\in\mathbb{N})$ $[1]$

Problemi

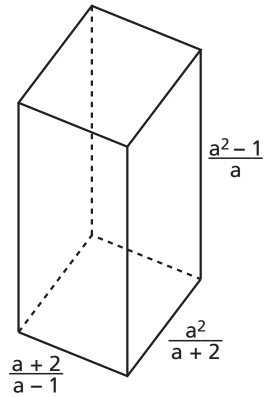
828 Il perimetro del triangolo in figura è $\frac{2(x-1)}{x-3}$.

Trova il lato mancante.



$\left[\frac{6}{x(x-3)}\right]$

829 Trova il volume del parallelepipedo utilizzando i dati della figura.
Se a è un numero razionale positivo, quali sono i valori che non può assumere affinché esista il volume?



[$a(a+1)$; se $0 < a \le 1$, il volume non esiste]

---

830 È data l'espressione $1 - \frac{1}{1+\frac{1}{A}}$.

a) Per quali valori di A l'espressione perde di significato?

b) Determina il valore che assume l'espressione per $A = b - 1$.

c) Per $A = b - 1$, quale valore devi attribuire a $b \in \mathbb{R}$ affinché l'espressione valga $\frac{1}{2}$?

d) Per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ l'espressione perde significato?

$\left[\text{a) } A = 0 \vee A = -1; \text{ b) } \frac{1}{b}; \text{ c) } b = 2; \text{ d) } b = 0 \vee b = 1\right]$

831 Considera le due frazioni algebriche $\frac{k+1}{k}$ e $\frac{1-k}{k^2-1}$.

a) Per quali valori di k esse perdono significato?

b) Determina il valore di $k \in \mathbb{Q}$ tale che il prodotto delle due frazioni sia uguale a 4.

c) Esiste un valore di k per il quale il prodotto delle due frazioni è uguale a 1?

$\left[\text{a) } 0, \pm 1; \text{ b) } -\frac{1}{4}; \text{ c) } k = -1 \text{ non accettabile}\right]$

832 È data l'espressione $\left(\frac{2y}{y^2-1} - F\right) + \frac{y}{1+y}$.

a) Determina la frazione F da sostituire nell'espressione affinché il risultato sia 1.

b) Per quale valore di $y \in \mathbb{R}$ la frazione F trovata perde significato?

c) Per quale valore di $y \in \mathbb{R}$ F si annulla?

$\left[\text{a) } F = \frac{1}{y-1}; \text{ b) } y = 1; \text{ c) } \nexists\, y \in \mathbb{R}\right]$

833 La base di un rettangolo è lunga $\frac{a}{b}$, con $a, b > 1$, mentre l'altezza supera la base di 1.

a) Qual è l'area del rettangolo?
b) Qual è il suo perimetro?

Un secondo rettangolo, con la base sempre uguale ad $\frac{a}{b}$, con $a, b > 1$, ha l'altezza la cui misura si ottiene dalla base aumentando di 1 sia a sia b.

c) Trova area e perimetro di questo secondo rettangolo.
d) Quale dei due rettangoli ha area maggiore?

$\left[\text{a) } \frac{a(a+b)}{b^2}; \text{ b) } \frac{2(2a+b)}{b}; \text{ c) } \frac{a(a+1)}{b(b+1)}, \frac{2(2ab+a+b)}{b(b+1)}; \text{ d) il primo}\right]$

LABORATORIO DI MATEMATICA

Le frazioni algebriche con Derive

ESERCITAZIONE GUIDATA

Con Derive determiniamo la somma delle frazioni algebriche:

$$\frac{a+1}{a^3-3a^2+2a} \text{ e } \frac{3}{a^2-a-2}.$$

Per verifica sostituiamo il valore $-\frac{3}{2}$ alla lettera a nelle due frazioni e nella somma, operiamo le semplificazioni e confrontiamo i risultati.

- Attiviamo Derive, assegniamo un nome alle due frazioni e le immettiamo nella zona algebrica (figura 1).
- Impostiamo ed eseguiamo la loro somma.
- Determiniamo i valori della prima frazione e della seconda frazione per $a = -\frac{3}{2}$ (figura 2).
- Operiamo la somma di tali valori.
- Nella frazione somma che si trova in #4 sostituiamo $-\frac{3}{2}$ ad a e semplifichiamo, ottenendo il medesimo risultato.

Le frazioni algebriche con Derive

#1: $\mathrm{FR1}(a) := \dfrac{a+1}{a^3-3\cdot a^2+2\cdot a}$

#2: $\mathrm{FR2}(a) := \dfrac{3}{a^2-a-2}$

#3: $\mathrm{FR1}(a) + \mathrm{FR2}(a)$

#4: $\dfrac{4\cdot a^2-a+1}{a\cdot(a-1)\cdot(a^2-a-2)}$

◄ **Figura 1**

#5: $\mathrm{FR1}\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

#6: $\dfrac{4}{105}$

#7: $\mathrm{FR2}\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

#8: $\dfrac{12}{7}$

#9: $\dfrac{4}{105}+\dfrac{12}{7}$

#10: $\dfrac{184}{105}$

#11: $\dfrac{184}{105}$

▲ **Figura 2**

Nel sito: ► **1 esercitazione guidata con Derive** ► **10 esercitazioni in più**

Esercitazioni

Assegna un nome alle seguenti frazioni algebriche, effettua su di esse le operazioni indicate, svolgi una verifica con una sostituzione numerica scelta da te. Determina quali condizioni devono soddisfare i numeri da sostituire alle lettere affinché le frazioni esistano.

1 $\dfrac{a}{a-2}, \quad \dfrac{a-3}{a^3-3a^2+2a}.$

a) Somma il quadrato della prima con la seconda.
b) Sottrai dal cubo della prima il quoziente della seconda per la prima.
c) Somma il cubo della prima con la reciproca della seconda.

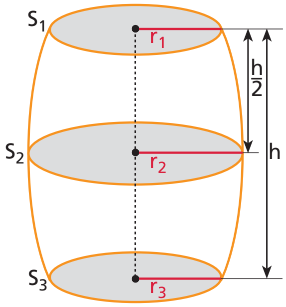
2 $\dfrac{k^3-k^2+k-1}{k^2-4}, \quad \dfrac{k^3-1}{k^4-4k^2}, \quad \dfrac{k-2}{k}.$

a) Somma i quozienti della prima per la seconda e della prima per la terza.
b) Sottrai al prodotto della prima per la seconda il quadrato della terza.
c) Dividi la somma della seconda e della terza per la prima.

Matematica per il cittadino

LA BOTTE DI VINO

Non è facile calcolare esattamente il volume di una botte di vino. Probabilmente il primo che ci provò, volendo quantificare il vino presente nella sua cantina, fu l'astronomo tedesco Johannes Kepler (1571-1630), che nel 1615 scrisse il libro *Nova stereometria doliorum vinariorum*, in cui presentò alcune formule utili per determinare il volume delle botti.



Una formula sufficientemente approssimata considera le superfici S_1, S_2 e S_3, dove S_1 e S_3 sono le superfici delle basi della botte e S_2 è quella del cerchio massimo (solitamente a metà dell'altezza della botte), e l'altezza h.
Il volume V della botte è dato dalla relazione:

$$V = \frac{1}{6}h(S_1 + 4S_2 + S_3).$$

1. Considerando che le superfici S_1, S_2 e S_3 sono cerchi la cui area è data dalla relazione $S = \pi r^2$, dove il raggio r è metà del diametro d, $r = \frac{d}{2}$, quale delle seguenti non è una formula equivalente a quella del volume V sopra citata?

A $V = \frac{1}{6}\pi h \cdot \left(\frac{d_1^2}{4} + d_2^2 + \frac{d_3^2}{4}\right)$

B $V = \frac{1}{24}\pi h \cdot \left(\frac{d_1^2}{4} + d_2^2 + \frac{d_3^2}{4}\right)$

C $V = \frac{1}{6}\pi h \cdot (r_1^2 + 4 \cdot r_2^2 + r_3^2)$

D $V = \frac{\pi h}{24} \cdot (d_1^2 + 4 \cdot d_2^2 + d_3^2)$

2. Una botte di altezza h ha le due basi identiche di raggio r, mentre il cerchio massimo è di raggio R.
Scrivi la formula più semplice che permette di calcolare il volume della botte, una volta noti i valori r, R, h.

3. Una botte realizzata da un costruttore abruzzese ha le due basi identiche di diametro d, mentre il cerchio massimo ha diametro $D = \frac{5}{4}d$. Il volume di questa botte è dato dalla formula $V = K\pi hd^2$, dove il numero K è una frazione che si può determinare in base alle formule precedentemente considerate. Determina il valore di K e scrivi la formula del volume valida in questo caso.

4. Un costruttore di botti realizza solo recipienti di uguali basi, il cui cerchio massimo ha diametro D pari a $\frac{6}{5}$ del diametro d delle basi.
Applicando le formule precedenti, scopre che il volume delle sue botti può essere determinato con l'espressione $V = \frac{97}{300}\pi hd^2$, o con la formula approssimata $V = 1{,}016 \cdot hd^2$.
Posto che l'altezza sia $h = \frac{3}{2}d$, quali devono essere, rispettivamente, i diametri delle basi, se si vogliono realizzare botti di volume $V_1 = 80\ \text{dm}^3$, $V_2 = 120\ \text{dm}^3$, $V_3 = 160\ \text{dm}^3$?

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 30 test interattivi in più

1 Uno soltanto dei seguenti polinomi è irriducibile. Quale?

A $4b^2x^2 + 6ax$
B $4b^2x^2 - x^2$
C $4b^2x^2 + y^2$
D $4b^2x^2 + 8b^2$
E $4b^2x^2 + 4bx$

2 Considera i polinomi

a) $3x - 3y$, b) $x - y$, c) $bx + by$.

Sono riducibili:

A soltanto a) e b).
B soltanto a) e c).
C tutti e tre.
D nessuno dei tre.
E soltanto b) e c).

3 Se -2 e $+1$ sono zeri del polinomio $P(x)$, allora nella scomposizione di $P(x)$ si hanno i fattori:

A $x-2$ e $x+1$.
B $x+2$ e $x-1$.
C $x-2$ e $x-1$.
D $x+2$ e $x+1$.
E $2-x$ e $1-x$.

4 Nel polinomio $2x^2y^3 - 8x^2y^4$ si può raccogliere a fattore comune al più:

A 2.
B xy.
C $2x^2y^3$.
D $8x^2y^4$.
E $2x^2y^2$.

5 L'espressione

$$\frac{4}{3}ab\left(a^2b - \frac{1}{2}xy^2\right)$$

è una possibile scomposizione di uno dei polinomi seguenti. Quale?

A $\frac{4}{3}a^2b^2 - \frac{1}{2}xy^2$
B $\frac{4}{3}a^2b - \frac{1}{2}abxy^2$
C $a^2b - \frac{2}{3}xy^2$
D $\frac{4}{3}a^3b^2 - \frac{2}{3}abxy^2$
E $\frac{4}{3}a^3b^2 + \frac{2}{3}abxy^2$

6 Utilizzando il raccoglimento parziale, è possibile scomporre il polinomio $2x + 6y - 5ax - 15ay$ in uno solo dei seguenti modi. Quale?

A $(x+3y)(2+5a)$
B $(x+3y)(2-5a)$
C $(x-3y)(2+5a)$
D $(x-3y)(2-5a)$
E $(x+3y)(5a-2)$

7 La scomposizione in fattori del binomio $4x^2 - \frac{9}{25}a^2$ è:

A $\left(2x - \frac{3}{5}a\right)^2$.
B $\left(\frac{3}{5}a - 2x\right)^2$.
C $\left(2x - \frac{3}{5}a\right)\left(2x + \frac{3}{5}a\right)$.
D $\left(\frac{3}{5}a + 2x\right)\left(\frac{3}{5}a - 2x\right)$.
E $\left(\frac{6}{5}xa\right)^2$.

8 La scomposizione in fattori del trinomio $4x^2 - 8xy + 4y^2$ è:

A $(4x+4y)^2$.
B $4(x-y)^2$.
C $4(x^2+y^2) - 8xy$.
D $(2x+2y)^2$.
E $2(x-y)^2$.

9 Quale dei seguenti trinomi *non* è il quadrato di un binomio?

A $4x^2 + 9a^2 + 12ax$
B $a^4 + 16x^4 + 4a^2x^2$
C $4a^2 + x^2 - 4ax$
D $25 + 20a + 4a^2$
E $9x^2 + 4 + 12x$

10 Il binomio

$$27a^3x^3 - 8a^3$$

è scomponibile in uno solo dei seguenti modi. Quale?

A $(3ax - 2a)^3$
B $(-3ax + 2a)^3$
C $(3ax - 2a)\cdot(9a^2x^2 + 4a^2)$
D $(3ax - 2a)\cdot(9a^2x^2 - 12a^2x + 4a^2)$
E $a^3(3x-2)\cdot(9x^2 + 6x + 4)$

11 $(x+1)$ è un fattore del polinomio

$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x + k$

se k è uguale a:

A 0. B -1. C 1. D -2. E 2.

12 La condizione di esistenza della frazione algebrica $\frac{b+1}{2b-3}$ è:

A $b \neq \frac{3}{2}$.
B $b \neq 2$.
C $b \neq -1$.
D $b \neq -\frac{3}{2}$.
E $b \neq 3$.

13 La divisione $\frac{5a+b}{a^2} : \frac{5a^2+a+5ab+b}{a-b}$ è eseguibile se:

A $a \neq 0$.
B $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.
C $a \neq 0 \wedge a \neq \pm b \wedge a \neq -\frac{1}{5}$.
D $a \neq 0 \wedge a \neq b$.
E $a \neq 0 \wedge a \neq -b$.

14 Il risultato della divisione

$$\frac{3x+yx}{x+2} : \frac{x-xy^2}{x+2+xy+2y}$$

(con $x \neq -2 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq \pm 1$) è:

A $\frac{3+y}{x+2}$.
B $\frac{1-y}{3+y}$.
C $\frac{1-y^2}{y+2}$.
D $\frac{3+y}{1-y}$.
E $\frac{1-y}{x+2}$.

15 La somma delle frazioni $\frac{1}{a+b} + \frac{2b}{a^2-b^2}$ (con $a \neq \pm b$) è:

A $\frac{2b+1}{a^2-b^2}$.
B $\frac{1}{a-b}$.
C $\frac{a^2-b^2+2b}{(a+b)(a^2-b^2)}$.
D $\frac{a+b}{a-b}$.
E $\frac{1+2b}{(a+b)(a^2-b^2)}$.

16 La somma di due frazioni è:

$\frac{2x-3b}{bx}$, con $b \neq 0 \wedge x \neq 0$.

Le frazioni sono:

A $\frac{2}{b}$ e $-\frac{3}{x}$.
B $\frac{2x}{b}$ e $-\frac{3b}{x}$.
C $\frac{2b}{x}$ e $\frac{3x}{b}$.
D $\frac{2}{b}$ e $\frac{3}{x}$.
E $\frac{2x}{b}$ e $\frac{3b}{x}$.

17 Il prodotto di due frazioni è:

$\frac{a-1}{ax}$, con $a \neq 0 \wedge x \neq 0$.

Le frazioni sono:

A $\frac{a-1}{a}$ e x.
B $\frac{a-1}{x}$ e $\frac{1}{a}$.
C $\frac{1}{x}$ e $\frac{a}{x}$.
D $\frac{a}{x}$ e $-\frac{1}{a}$.
E $\frac{3a-3}{a}$ e $\frac{x}{3a}$.

SPIEGA PERCHÉ

18 Esiste un valore di a per cui $x^2 + a^2x + a^2$ si può scomporre in fattori come quadrato di binomio?

19 Se al quadrato di un numero naturale aggiungiamo 1 e il doppio del numero stesso, troviamo il quadrato del suo successivo. Spiega perché.

20 Considera l'uguaglianza $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = (x+a)(x+b)(x+c)$. Che relazione esiste tra i valori di D e a, b, c? Come deve essere A? Spiega perché.

21 I polinomi $x^4 + 3x^2 - 28$ e $x^2 + 7x + 10$ hanno un binomio fattore comune. Quale?

22 La frazione algebrica $\frac{a+1}{a^2+1}$ ha significato $\forall\, a \in \mathbb{R}$. Perché?

23 Perché il polinomio $4x^2 - 3x + 2$ può essere visto come una frazione algebrica?

24 Il risultato della divisione $(x^2 - 3x - 4) : (x+1)$ è una frazione algebrica? Perché?

25 Sono equivalenti due frazioni algebriche se non hanno le stesse C.E.? Motiva la risposta.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

Scomponi in fattori i seguenti polinomi.

26 $\frac{1}{25}a^2b^2 - \frac{25}{4}$; $\quad b^2 - 7b + 10$; $\quad 8x^3 + y^6$.

27 $\frac{1}{4}x^4y^4 - \frac{4}{9}$; $\quad 4a^2b + a^4 + 4b^2$; $\quad x^2 + 4z^2 + y^2 + 2xy - 4xz - 4zy$.

28 $\frac{1}{8} + \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x^2 + x^3$; $\quad \frac{1}{4}a^2 + 9b^2 - 3ab$; $\quad \frac{2}{3}a^2b^2 + \frac{1}{9}a^4 + b^4$.

29 $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$; $\quad \frac{1}{729}y^6 - x^6z^6$; $\quad x^2 - 2x - 15$.

30 $2a^5x^4 - 32a$; $\quad x^3 + x^2 - 17x + 15$; $\quad x^3 - 4xy^2 + 3x^2 - 12y^2$.
$[2a(ax-2)(ax+2)(a^2x^2+4); (x-1)(x-3)(x+5); (x+3)(x-2y)(x+2y)]$

31 $2x^2y + 16xy + 32y$; $\quad 2x + 6y + ax + 3ay$; $\quad x^3(x+1) - y^3(x+1)$.
$[2y(x+4)^2; (2+a)(x+3y); (x+1)(x-y)(x^2+xy+y^2)]$

32 $8ax^2 + 2ay^2 + 8axy$; $\quad 3a^2b^4 - 12$; $\quad 2ax - 4ay + bx - 2by$.
$[2a(2x+y)^2; 3(ab^2-2)(ab^2+2); (2a+b)(x-2y)]$

33 $2a^2b - 4ab + 8ab^2$; $\quad (x+2y)(2x-y) + (x+2y)(2y-3x)$; $\quad 3ax + 6bx + 2ay + 4by$.
$[2ab(a-2+4b); (x+2y)(y-x); (a+2b)(3x+2y)]$

34 $3x^2y + 18xy^2 + 27y^3$; $\quad 8a^3 + \frac{1}{27}a^3b^3 + 4a^3b + \frac{2}{3}a^3b^2$; $\quad x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$.
$\left[3y(x+3y)^2; a^3\left(2+\frac{1}{3}b\right)^3; (x+y)^3(x-y)^3\right]$

35 $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$; $\quad 2x^4 - 20x^2 - 2x^3 + 20x$; $\quad 5a^3 + 10a^2 - 25a + 10$.
$[(x-2)(x+2)(x+3); 2x(x-1)(x^2-10); 5(a-1)(a^2+3a-2)]$

36 $\frac{1}{3}x^4y^2 - \frac{1}{27}$; $\quad x^6y^6 - \frac{1}{16}x^2y^2$; $\quad a^3 + 2a^2 - 9a - 18$.
$\left[\frac{1}{3}\left(x^2y - \frac{1}{3}\right)\left(x^2y + \frac{1}{3}\right); x^2y^2\left(x^2y^2 + \frac{1}{4}\right)\left(xy - \frac{1}{2}\right)\left(xy + \frac{1}{2}\right); (a-3)(a+3)(a+2)\right]$

37 $2x^4 + 54x$; $\quad a^3 + 6a^2 - 7a$; $\quad 4a^3 + ax^2 + 4a^2x$. $\quad [2x(x+3)(x^2-3x+9); a(a-1)(a+7); a(2a+x)^2]$

38 $\frac{3}{4}b^3 - 3bx^2$; $\quad 3b^3 - 3b^2 - 27b + 27$; $\quad 2x^2 + 2x - 40$.
$\left[3b\left(\frac{1}{2}b - x\right)\left(\frac{1}{2}b + x\right); 3(b-3)(b+3)(b-1); 2(x+5)(x-4)\right]$

39 $4x^2 - 4x - 8$; $\quad 2x^5 + 16x^3 + 32x$; $\quad 1250a^2 - 2a^2x^4$.
$[4(x+1)(x-2); 2x(x^2+4)^2; 2a^2(5+x)(5-x)(25+x^2)]$

40 $a^3 - 5a^2 - 24a$; $\quad -2x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 16x$; $\quad (x^2+4)^2 - 16x^2$.
$[a(a+3)(a-8); 2x(2-x)^3; (x-2)^2(x+2)^2]$

41 $a^4 + b^4 - 2a^2b^2 - c^4 + a^2 - b^2 + c^2$; $\quad 4x^2 + 12x - 4y^2 - 12y$; $\quad x^8 + 64$.
$[(a^2-b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2+1); 4(x-y)(x+y+3); (x^4-4x^2+8)(x^4+4x^2+8)]$

42 $t^4 + t^2y + y^2 + t^6 - y^3$; $\quad 3c^2 - 27d^2 - 6c + 12$; $\quad a^2 + 2ax - a + x^2 - x$.

$[(t^4 + t^2y + y^2)(t^2 - y + 1); 3(c + 3d - 2)(c - 3d - 2); (a + x)(a + x - 1)]$

43 $a^2 - b^2 + b - \frac{1}{4}$; $\quad 3a^2 - 3b^2 + a^2x - 2abx + b^2x$; $\quad 3by^2 + 27b - 18by$.

$\left[\left(a - b + \frac{1}{2}\right)\left(a + b - \frac{1}{2}\right); (a - b)(3a + 3b + ax - bx); 3b(y - 3)^2\right]$

44 $x^4 + 2x^3 + 27x + 54$; $\quad (2x + ab)^2 + (bx - 2a)^2$; $\quad a^6 - 2a^4 + a^2$.

$[(x + 2)(x + 3)(x^2 - 3x + 9); (a^2 + x^2)(b^2 + 4); a^2(a - 1)^2(a + 1)^2]$

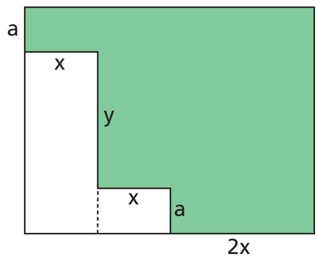
45 $4a^3 - 4ax^2 + 8a^2 + 8ax$; $\quad (a^2 - 2)^2 - a^4$; $\quad a^2b - 9b - a - 3$.

$[4a(a + x)(a - x + 2); -4(a - 1)(a + 1); (a + 3)(ab - 3b - 1)]$

46 $27x^3 + 9x^2 - 3xy^2 - y^2$; $\quad x^3 - 4x^2 - 19x - 14$; $\quad 3x^2y - 6xy^3 - 9xy$.

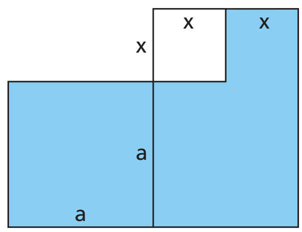
$[(3x + 1)(3x - y)(3x + y); (x + 1)(x + 2)(x - 7); 3xy(x - 2y^2 - 3)]$

47 Esprimi l'area della figura colorata mediante il prodotto di due fattori.



$[3x(2a + y)]$

48 Determina il lato del quadrato che ha l'area equivalente a quella della figura colorata.



$[x + a]$

Semplifica le seguenti frazioni algebriche dopo aver determinato le condizioni di esistenza.

49 $\frac{30a^2x}{5ax^2}$; $\quad \frac{2x^2 + x}{2ax + a}$; $\quad \frac{6b^3}{3ab^2 - 3b^3}$. $\quad \left[\frac{6a}{x}; \frac{x}{a}; \frac{2b}{a - b}\right]$

50 $\frac{x^2 - x}{ax - a}$; $\quad \frac{4a^2b^2}{2a^2b^2 - 2ab}$; $\quad \frac{y^2 - 4}{y^2 + 4y + 4}$. $\quad \left[\frac{x}{a}; \frac{2ab}{ab - 1}; \frac{y - 2}{y + 2}\right]$

51 $\frac{16x^2 - 9y^2}{8x^2 - 6xy}$; $\quad \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 + 4a + 3}$; $\quad \frac{a^2b + 9b - 6ab}{a^2b - 9b}$. $\quad \left[\frac{4x + 3y}{2x}; \frac{a + 1}{a + 3}; \frac{a - 3}{a + 3}\right]$

52 $\frac{a^2 - a - 6}{a^2 - 2a - 8}$; $\quad \frac{a^2 - 4ay + ax}{-4xy + x^2 + ax}$; $\quad \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 8x + 15}$. $\quad \left[\frac{a - 3}{a - 4}; \frac{a}{x}; \frac{x - 5}{x - 3}\right]$

53 $\frac{36x^2 - 4}{36x^3 - 24x^2 + 4x}$; $\quad \frac{x^2 + a^2 + 1 + 2ax + 2x + 2a}{x^2 - a^2 - 2a - 1}$. $\quad \left[\frac{3x + 1}{x(3x - 1)}; \frac{x + a + 1}{x - a - 1}\right]$

54 $\frac{x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2}$; $\quad \frac{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}{9x - x^3}$. $\quad \left[\frac{x + 1}{x - 1}; \frac{(x + 3)^2}{x(3 - x)}\right]$

55 $\dfrac{y^5+xy^4-x^4y-x^5}{y^3-xy^2+x^2y-x^3}$; $\dfrac{x^2-7x+12}{x^3-27}$; $\dfrac{x^2-(x-y)^2}{4x^2y^3-4xy^4+y^5}$. $\left[(x+y)^2; \dfrac{x-4}{x^2+3x+9}; \dfrac{1}{y^2(2x-y)}\right]$

56 $\dfrac{m^2-m+mn-n}{3m^2+3mn}$; $\dfrac{a^3+8}{a^2+4a+4}$; $\dfrac{x^2y-8xy+16y}{x^2y-16y}$. $\left[\dfrac{m-1}{3m}; \dfrac{a^2-2a+4}{a+2}; \dfrac{x-4}{x+4}\right]$

57 $\dfrac{a^2+7a+10}{a^2+4a+4}$; $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{yx-y+2x-2}$; $\dfrac{x^3-x^2-5x+21}{xy+3y}$. $\left[\dfrac{a+5}{a+2}; \dfrac{x^2-2x+1}{y+2}; \dfrac{x^2-4x+7}{y}\right]$

58 $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}$; $\dfrac{1-3x+3x^2-x^3}{x^3-1}$. $\left[\dfrac{1}{x-a}; -\dfrac{(1-x)^2}{x^2+x+1}\right]$

Semplifica le seguenti espressioni dopo aver determinato le condizioni di esistenza.

59 $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{b}{ab-a^2}$ $\left[\dfrac{1}{a}; \text{C.E.: } a \neq b \wedge a \neq 0\right]$

60 $\dfrac{b}{b+2x}+\dfrac{4bx}{b^2-4x^2}+\dfrac{2x}{b-2x}$ $\left[\dfrac{b+2x}{b-2x}; \text{C.E.: } b \neq \pm 2x\right]$

61 $\dfrac{x+1}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1-x}{x^2+x}$ $\left[\dfrac{3}{x^2-1}; \text{C.E.: } x \neq \pm 1 \wedge x \neq 0\right]$

62 $\dfrac{a^2-6a+9}{a^2-9}\cdot\dfrac{1}{3a-a^2}:\dfrac{3a}{3a+a^2}$ $\left[-\dfrac{1}{3a}; \text{C.E.: } a \neq 0 \wedge a \neq \pm 3\right]$

63 $(a+b)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\cdot\dfrac{a^2b^2}{a^3+b^3}$ $\left[\dfrac{a^2b^2}{b-a}; \text{C.E.: } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq \pm b\right]$

64 $\left(\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{2a^2}{a^2-1}-\dfrac{a+1}{1-a}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{a^2}\right):\left(1+\dfrac{a}{2-a}\right)$ $\left[\dfrac{2-a}{a^2}\right]$

65 $\dfrac{1}{x^2+2xy+y^2}-\dfrac{1}{x^2-y^2}+\dfrac{2y}{(x+y)^2(x-y)}$ $[0]$

66 $\dfrac{2}{b^2-b-2}+\dfrac{1}{b^2+3b+2}+\dfrac{1}{b^3+b^2-4b-4}$ $\left[\dfrac{3}{b^2-4}\right]$

67 $\left(\dfrac{a^2}{4a^2+4ab+b^2}-\dfrac{a-b}{6a+3b}\right):\dfrac{a^3-b^3}{12a+6b}$ $\left[\dfrac{2}{(a-b)(2a+b)}\right]$

68 $\left(\dfrac{2}{a-2}-\dfrac{2}{a+3}-\dfrac{5a}{a^2+a-6}\right)\cdot\left(1+\dfrac{3}{a}\right)$ $\left[-\dfrac{5}{a}\right]$

69 $\left(\dfrac{2+xy}{3x+y+3x^2+xy}-\dfrac{x}{x+1}\right)\cdot\dfrac{3x+y}{6x^2-4}:\left(\dfrac{y}{2}+1\right)$ $\left[-\dfrac{1}{(x+1)(y+2)}\right]$

Problemi

70 Un rettangolo ha l'altezza lunga $x-2$, con $x>2$. Qual è la misura della base, se l'area del rettangolo è uguale a $2x^2+(3a-4)x-6a$? $[2x+3a]$

71 Per quali valori di $k \in \mathbb{Z}$ il trinomio x^2-kx-7 è scomponibile in fattori di primo grado? $[k=\pm 6]$

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 11 esercizi in più

72 Utilizzando i polinomi, dimostra che:

a) la somma di due numeri pari è un numero pari;
b) la somma di un numero pari e un numero dispari è un numero dispari;
c) la somma di due numeri dispari è un numero pari.

73 Considera i due trinomi $x^2 + kx + 12$ e $x^2 + hx + 15$ con $h, k \in \mathbb{Z}$. Indica con A l'insieme dei valori di k che rendono scomponibile il primo trinomio e con B l'insieme dei valori di h che rendono scomponibile il secondo trinomio, poi determina $A \cup B$ e $A \cap B$.

[$A \cup B = \{\pm 7, \pm 8, \pm 13, \pm 16\}$; $A \cap B = \{\pm 8\}$]

74 Dimostra che per ogni numero naturale n, il numero $n^3 - n$ è divisibile per 6.
(Suggerimento. Osserva che nella successione dei naturali, ogni tre numeri consecutivi uno è sempre multiplo di 3; poi scomponi in fattori…)

75 Verifica le seguenti uguaglianze numeriche:

$$3 = \frac{2^2 + 2}{2}; \quad 4 = \frac{3^2 + 3}{3}; \quad 5 = \frac{4^2 + 4}{4},$$

poi scrivi la frazione algebrica corrispondente al numero naturale $n + 1$ e dimostra che l'uguaglianza ottenuta è vera per qualunque n naturale maggiore di 0.

$$\left[n + 1 = \frac{n^2 + n}{n}\right]$$

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 5 esercizi in più

76 Factor completely:

a) $x^2 - 11xy + 30y^2$
b) $4x^5 - 12x^4 - 40x^3$
c) $x^2 - 2x + 5x - 10$

(CAN *John Abbott College*, Final Exam, 2000)

[$(x - 6y)(x - 5y)$; $4x^3(x - 5)(x + 2)$; $(x + 5)(x - 2)$]

77 TEST Which is a factor of $5x^4 - 135xy^3$?

A $x^2 + 6xy + 9y^2$
B $x^2 - 6xy - 9y^2$
C $x^2 - 3xy + 9y^2$
D $x^2 + 3xy + 9y^2$
E $x^2 - 6xy + 9y^2$

(USA *Tennessee Mathematics Teachers Association: 39th Annual Mathematics Contest*, 1995)

78 Factor completely

$$x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16.$$

(USA *Southeast Missouri State University: Math Field Day*, 2005)

[$(x - 2)^2(x - 1)(x^2 + 4)$]

79 Simplify: $\left(\dfrac{25x^{-9}y^8z^3}{5x^{-3}y^{-8}z^3}\right)^{-2}$.

(Write your answer without negative exponents.)

(USA *Southeast Missouri State University: Math Field Day*, 2005)

$$\left[\frac{1}{25}\frac{x^{12}}{y^{32}}\right]$$

80 Let

$f(x) = (x^5 - 1)(x^3 + 1)$ and
$g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$.

If $h(x)$ is a polynomial such that $f(x) = g(x)h(x)$, then what is the value of $h(1)$?

(USA *Lehigh University: High School Math Contest*, 2001)

[5]

81 TEST Let $\dfrac{2x - 11}{x^2 - 5x - 14} = \dfrac{B}{x - 7} + \dfrac{C}{x + 2}$ be an identity in x. The value of $B + C$ is:

A 4 B -2 C 5 D 2 E -4

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

GLOSSARY

to factor: scomporre in fattori
identity: identità
polynomial: polinomio
such that: tale che