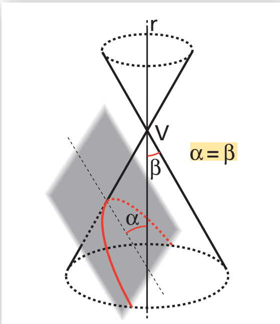
1. LA PARABOLA E LA SUA EQUAZIONE



▲ **Figura 1** Consideriamo un cono di asse *r*, con angolo al vertice 2β. Sezioniamo la superficie del cono con un piano che formi con l'asse del cono un angolo α = β. La figura che si ottiene dall'intersezione è una parabola.

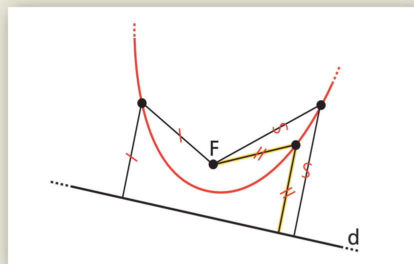
Che cos'è la parabola

In questo capitolo studiamo un'altra conica: la *parabola*.
Definiamola come luogo geometrico e deduciamo poi l'equazione algebrica che la rappresenta nel piano cartesiano.

DEFINIZIONE

Parabola

Assegnati nel piano un punto F e una retta d, si chiama parabola la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da d.



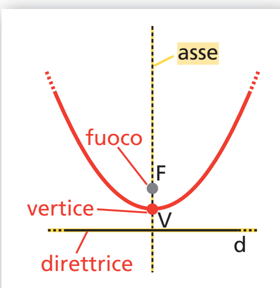
Il punto F e la retta d vengono detti, rispettivamente, **fuoco** e **direttrice** della parabola.

La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama **asse della parabola**.

Il punto V in cui la parabola interseca il suo asse è detto **vertice** della parabola.

Si può dimostrare che l'asse della parabola è anche asse di simmetria della curva, ossia è vero che, preso un punto della parabola, esiste un altro suo punto che è simmetrico del primo dato rispetto all'asse.

Inizialmente, studieremo le parabole del piano cartesiano con asse parallelo all'asse y. Considereremo successivamente anche parabole con asse parallelo all'asse x.

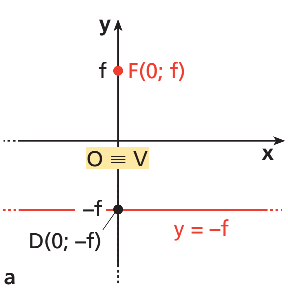


▲ **Figura 2**

L'equazione della parabola con asse coincidente con l'asse *y* e vertice nell'origine

Determiniamo l'equazione della generica parabola con asse coincidente con l'asse y e vertice nell'origine degli assi (figura *a*). Il fuoco è un generico punto dell'asse y che supponiamo distinto da $O(0; 0)$, cioè

$$F(0; f), \qquad \text{con } f \neq 0.$$



a

La direttrice, quindi, è una retta parallela all'asse x e interseca l'asse y in un punto D tale che $\overline{FO} = \overline{OD}$, cioè $D(0; -f)$. L'equazione della direttrice è pertanto:

$$y = -f.$$

Indichiamo con $P(x; y)$ un punto generico della parabola (figura *b*) e imponiamo la condizione:

$$\overline{PF} = \overline{PH}.$$

Poiché $\overline{PF} = \sqrt{x^2 + (y-f)^2}$ e $\overline{PH} = |\, y + f \,|$, si ha:

$$\sqrt{x^2 + (y-f)^2} = |\, y + f \,|.$$

Eleviamo i due membri al quadrato:

$$x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + \cancel{y^2} - 2fy + \cancel{f^2} = \cancel{y^2} + 2fy + \cancel{f^2}$$

$$x^2 - 4fy = 0.$$

Ricavando y, otteniamo l'equazione cercata, ossia:

$$y = \frac{1}{4f}x^2.$$

Posto $a = \frac{1}{4f}$, l'equazione precedente diventa:

$\boxed{y = ax^2}$ **equazione della parabola con vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y.**

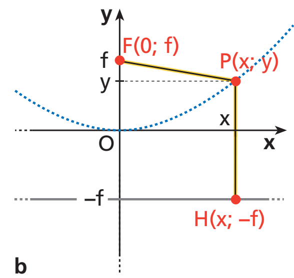
Poiché $f \neq 0$, a risulta definito ed è $a \neq 0$.

Scriviamo ora le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice in funzione di a. Dalla relazione $a = \frac{1}{4f}$ ricaviamo $f = \frac{1}{4a}$, quindi il *fuoco* ha coordinate

$\boxed{F\left(0; \frac{1}{4a}\right)}$ **coordinate del fuoco**

e la direttrice ha equazione

$\boxed{y = -\frac{1}{4a}}$ **equazione della direttrice**.



b

REGOLA

Equazione della parabola con asse coincidente con l'asse y e vertice nell'origine

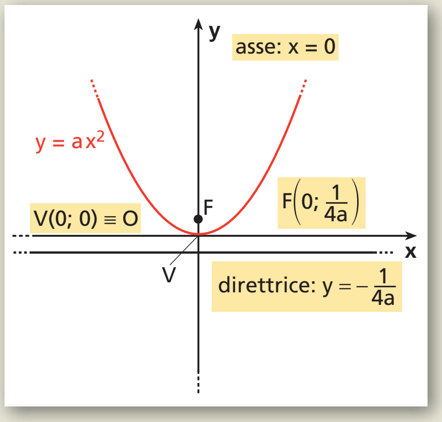
L'equazione di una parabola che ha il vertice nell'origine degli assi e asse coincidente con l'asse y è del tipo $y = ax^2$ (con $a \neq 0$);

il fuoco F ha coordinate $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$;

la direttrice ha equazione

$$y = -\frac{1}{4a};$$

l'asse ha equazione $x = 0$.



Quindi, le coordinate dei punti della parabola verificano l'equazione $y = ax^2$. Viceversa, si può dimostrare che, per i punti $P(x; y)$ del piano le cui coordinate verificano l'equazione $y = ax^2$, si ha $\overline{PF} = \overline{PH}$. Questi punti dunque appartengono alla parabola.

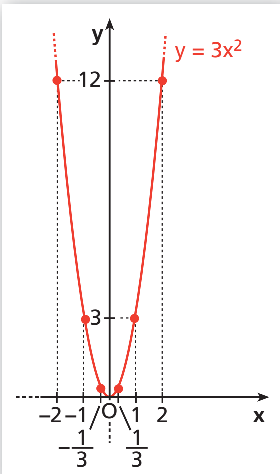
Dall'equazione $y = ax^2$ al grafico

ESEMPIO

Rappresentiamo nel piano cartesiano la parabola di equazione $y = 3x^2$.
Determiniamo le coordinate di alcuni suoi punti e scriviamole in una tabella:

x	0	$\pm\frac{1}{3}$	± 1	± 2
y	0	$\frac{1}{3}$	3	12

Nella tabella notiamo che i punti di ascissa opposta hanno la stessa ordinata.
L'ordinata del fuoco F è $f = \frac{1}{4a} = \frac{1}{12}$, cioè $F\left(0; \frac{1}{12}\right)$; la direttrice ha equazione $y = -\frac{1}{12}$. Otteniamo il grafico della figura 3.



▲ **Figura 3** Grafico della parabola di equazione $y = 3x^2$.

● Il grafico della parabola risulta simmetrico rispetto all'asse y: punti di ascissa opposta hanno la stessa ordinata.

Il segno di a e la concavità della parabola

Nell'equazione della parabola $y = ax^2$, se $a > 0$, si ha $y \geq 0$, quindi i punti della parabola si trovano nel semipiano dei punti con ordinata maggiore o uguale a 0.

● Se $a > 0$, la parabola si trova nel primo e secondo quadrante.

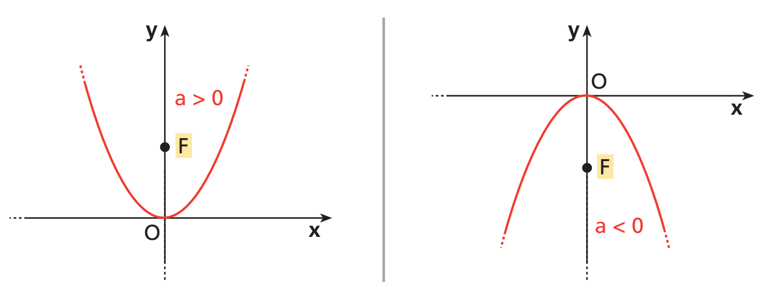
Inoltre, se $a > 0$, anche $f > 0$. Il fuoco si trova, dunque, sul semiasse positivo delle y: diciamo che la parabola *volge la concavità verso l'alto* (figura 4a).

Se invece $a < 0$, si ha $y \leq 0$ e i punti della parabola giacciono nel semipiano dei punti con ordinata minore o uguale a 0; inoltre si ha $f < 0$. Il fuoco si trova nel semiasse negativo delle y: la parabola *volge la concavità verso il basso* (figura 4b).

● Se $a < 0$, la parabola si trova nel terzo e quarto quadrante.

● Per $a = 0$ non abbiamo una parabola: l'equazione diventa $y = 0$, ossia quella dell'asse x. In tal caso la parabola è detta *degenere*.

► **Figura 4** La concavità di una parabola.

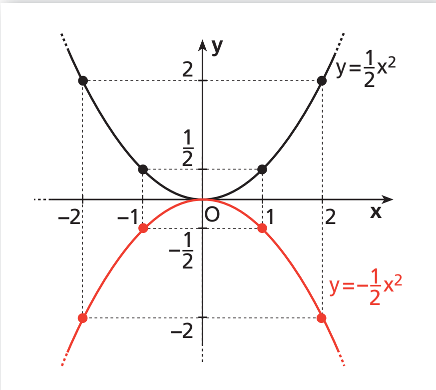


a. Concavità rivolta verso l'alto. **b.** Concavità rivolta verso il basso.

Parabole simmetriche

In due parabole con vertice nell'origine e *con coefficiente a opposto*, i punti che hanno la stessa ascissa hanno ordinata opposta, quindi le parabole si corrispondono in una simmetria rispetto all'asse x e sono *congruenti*.

ESEMPIO



◀ **Figura 5** Le parabole con equazioni $y=\frac{1}{2}x^2$ e $y=-\frac{1}{2}x^2$ sono simmetriche rispetto all'asse x e sono quindi congruenti.

- Le equazioni di una simmetria rispetto all'asse x sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

- In generale, due parabole di equazioni

$$y = ax^2 \text{ e } y = a'x^2$$

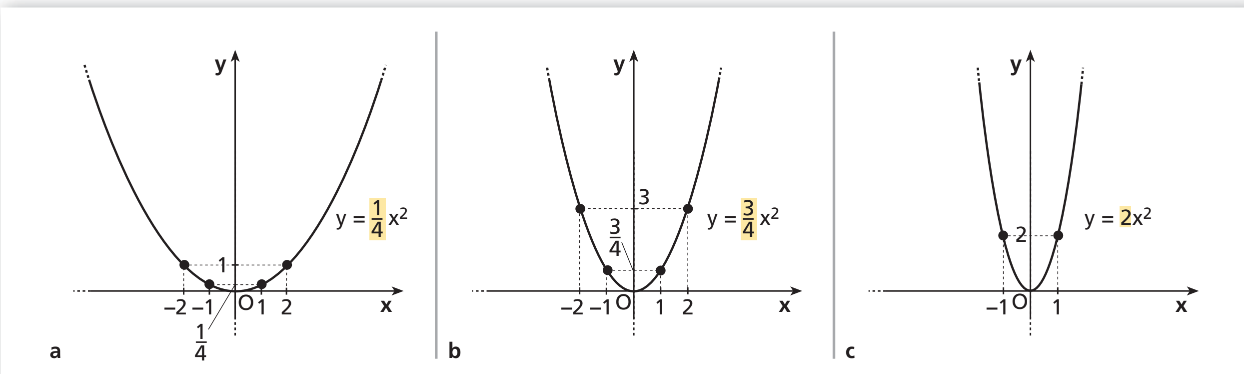
sono congruenti se e solo se

$$|a| = |a'|.$$

Il valore di *a* e l'apertura della parabola

Disegniamo per punti, assegnando a x alcuni valori a piacere, le parabole di equazione: $y = \frac{1}{4}x^2$, $\quad y = \frac{3}{4}x^2$, $\quad y = 2x^2$ (figura 6).

▼ **Figura 6** L'apertura della parabola diminuisce all'aumentare di *a*.

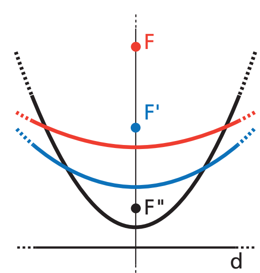


Notiamo che, per $a > 0$, all'aumentare di a diminuisce l'apertura della parabola. Se invece a è negativo, l'apertura diminuisce all'aumentare del valore assoluto di a.

- Ciò che geometricamente influenza l'apertura della parabola è la reciproca distanza tra fuoco e direttrice (figura a lato). Al diminuire della distanza, diminuisce l'apertura. Dal punto di vista analitico questo può essere compreso considerando le coordinate del fuoco $F(0; f)$:

$$f = \frac{1}{4a} \rightarrow a = \frac{1}{4f}.$$

Al diminuire di f aumenta a, quindi diminuisce l'apertura.
Possiamo confrontare anche parabole che hanno coefficienti a di segno opposto: l'apertura diminuisce al crescere di $|a|$. Confronta, per esempio, $y = x^2$ e $y = -5x^2$.

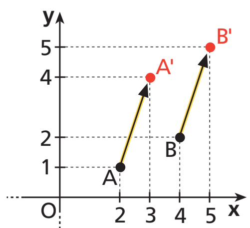


L'equazione della parabola con asse parallelo all'asse *y*

La traslazione

Una **traslazione** è un'isometria di equazioni:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$



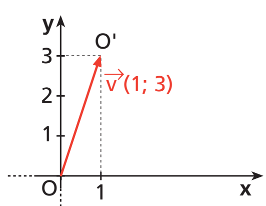
Le equazioni permettono di trovare le coordinate di un punto $P'(x'; y')$ note quelle di $P(x; y)$. Se congiungiamo P con P' otteniamo un **segmento orientato**. Nell'esempio a fianco, consideratii segmenti orientati con primo estremo in un punto e secondo nella sua immagine (per esempio, $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{BB'}$), notiamo che:

- sono *congruenti*;
- appartengono a rette parallele e quindi hanno la *stessa direzione*;
- sono orientati nello *stesso verso*.

Segmenti orientati con queste caratteristiche si dicono **equipollenti** fra loro.
Ognuno dei segmenti orientati equipollenti rappresenta uno stesso **vettore**.
Gli elementi caratteristici di un vettore $\overrightarrow{AA'}$ sono:

- il **modulo**, che è la misura del segmento AA'; lo indichiamo con $|\overrightarrow{AA'}|$;
- la **direzione**, che è la direzione della retta AA';
- il **verso**, da A ad A'.

La relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza. Chiamiamo **vettore** ognuna delle sue classi di equivalenza, ossia l'insieme di tutti i segmenti fra loro equipollenti.

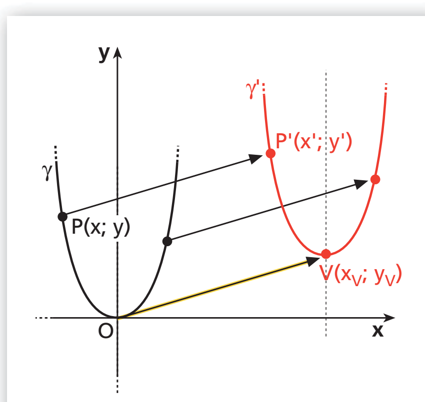


Un vettore può essere rappresentato, oltre che con un segmento orientato, anche con una lettera con sopra una freccia (per esempio, $\vec{v}$).
Se, come nella figura a lato, rappresentiamo un vettore con il particolare segmento orientato che ha come primo estremo il punto $O(0; 0)$, per indicarlo è sufficiente fornire le coordinate del secondo estremo O', che vengono dette **componenti** del vettore.
Nell'esempio possiamo indicare il vettore collegato alla traslazione con $\vec{v}(1; 3)$.
Osserviamo che le componenti del vettore sono proprio i coefficienti a e b delle equazioni della traslazione.
In generale, si può dimostrare che data la traslazione di equazioni

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

a essa è associato il vettore $\vec{v}(a; b)$ e viceversa.

Data una qualsiasi parabola con asse parallelo all'asse y e di vertice noto, determiniamo la sua equazione.
La parabola, che chiamiamo γ', si può ottenere mediante la traslazione dei punti della parabola γ con vertice nell'origine e a essa congruente (figura 7).



► **Figura 7** Ogni punto della parabola γ' si ottiene traslando un punto della parabola γ mediante il vettore $\overrightarrow{OV}$.

In particolare, V è l'immagine di O, quindi la traslazione è associata al vettore $\overrightarrow{OV} = \vec{v}(x_V; y_V)$. Le equazioni della traslazione sono allora

$$\begin{cases} x' = x + x_V \\ y' = y + y_V \end{cases}$$

da cui ricaviamo x e y:

$$\begin{cases} x = x' - x_V \\ y = y' - y_V \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione $y = ax^2$ della parabola passante per l'origine, si ha

$$y' - y_V = a(x' - x_V)^2,$$

ossia l'equazione che devono soddisfare le coordinate dei punti di γ'.
Gli apici delle variabili x' e y' servono solo a distinguere tali punti da quelli di γ.
Una volta determinata l'equazione, possiamo eliminarli e scrivere:

$$\boldsymbol{y - y_V = a(x - x_V)^2}$$ **equazione della parabola avente vertice $(x_V; y_V)$ e asse parallelo all'asse y.**

● Poiché a proviene dall'equazione della parabola passante per l'origine, deve essere $a \neq 0$.

Esplicitiamo y, svolgiamo i calcoli e ordiniamo:

$$y = ax^2 - 2ax_Vx + ax_V^2 + y_V.$$

Ponendo $-2ax_V = b$ e $ax_V^2 + y_V = c$, si ha l'equazione nella forma:

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$ **equazione della parabola con asse parallelo all'asse y.**

Dalle posizioni ricaviamo:

● Sfruttiamo il fatto che $a \neq 0$.

$$\boldsymbol{x_V = -\frac{b}{2a}}$$ **ascissa del vertice**;

$$y_V = c - ax_V^2 = c - \cancel{a} \cdot \frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\boldsymbol{y_V = -\frac{\Delta}{4a}}$$ **ordinata del vertice**.

● Poniamo, come al solito, $\Delta = b^2 - 4ac$.

ESEMPIO

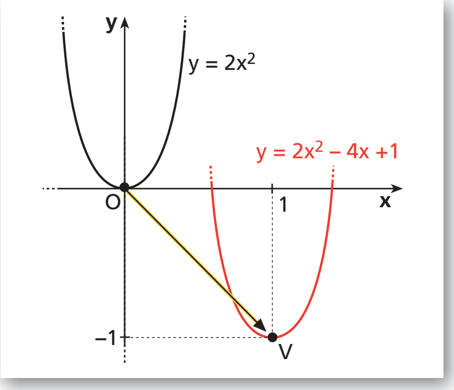
L'equazione della parabola, di vertice $V(1; -1)$, che si ottiene dalla traslazione della parabola di equazione $y = 2x^2$ è:

$$y - (-1) = 2(x - 1)^2$$
$$y + 1 = 2x^2 - 4x + 2$$
$$y = 2x^2 - 4x + 1.$$

Verifichiamo le formule per ricavare le coordinate del vertice:

$$x_V = -\frac{-4}{4} = 1;$$

$$y_V = -\frac{16 - 8}{8} = -1.$$

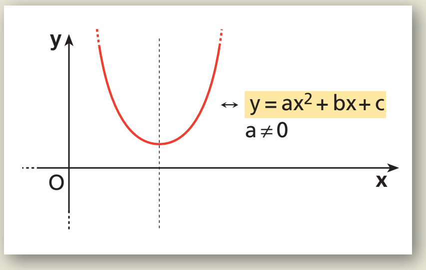


◄ **Figura 8** La parabola di equazione $y = 2x^2 - 4x + 1$ può essere ottenuta da quella di equazione $y = 2x^2$ mediante la traslazione di vettore $\vec{v}(1; -1)$.

Abbiamo dimostrato che una parabola, con l'asse parallelo all'asse y, ha sempre equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$.
Viceversa, è possibile dimostrare che una qualsiasi equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola.
Per la dimostrazione, data l'equazione $y = ax^2 + bx + c$, basta considerare la parabola di equazione $y = ax^2$ e traslarla del vettore $\vec{v}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, ottenendo così proprio l'equazione $y = ax^2 + bx + c$.

In generale, vale il seguente teorema.

TEOREMA
A ogni parabola con asse parallelo all'asse y corrisponde un'equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, e viceversa.



Le caratteristiche di una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$

Abbiamo già visto che una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ ha vertice V di coordinate $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.
L'ascissa del fuoco F è uguale a quella del vertice, quindi:

$$\boldsymbol{x_F = -\frac{b}{2a}}$$ **ascissa del fuoco**.

Per determinare l'ordinata del fuoco sfruttiamo il fatto che F, nella traslazione di vettore $\vec{v}(x_V; y_V)$, è il corrispondente del fuoco della parabola di equazione $y = ax^2$, quindi:

$$y_F = \frac{1}{4a} + y_V = \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a}$$

$$\boldsymbol{y_F = \frac{1-\Delta}{4a}}$$ **ordinata del fuoco**.

Analogamente, per l'equazione della direttrice otteniamo:

$$y = -\frac{1}{4a} + y_V$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{1+\Delta}{4a}}$$ **equazione della direttrice**.

● Poiché ogni parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è congruente alla corrispondente parabola di equazione $y = ax^2$, anche per queste parabole la concavità dipende soltanto dal coefficiente a.

● L'ordinata del fuoco della parabola di equazione $y = ax^2$ è $\frac{1}{4a}$.

● L'equazione della direttrice della parabola di equazione $y = ax^2$ è $y = -\frac{1}{4a}$.

Dall'equazione $y = ax^2 + bx + c$ al grafico

Riassumiamo le regole relative alla parabola con asse parallelo all'asse y.

REGOLA

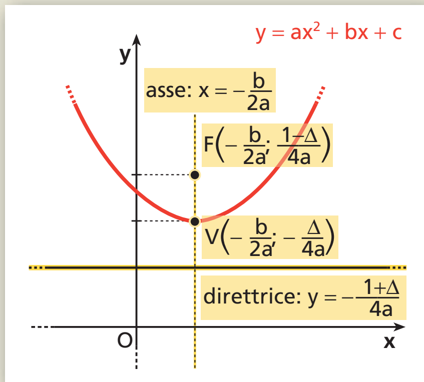
Equazione della parabola con asse parallelo all'asse y

L'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y è del tipo

$$y = ax^2 + bx + c,$$

dove a, b, c sono coefficienti reali e $a \neq 0$. L'asse ha equazione

$$x = -\frac{b}{2a},$$



il vertice è il punto $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, il fuoco è il punto $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ e la direttrice ha equazione $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$.

- L'equazione $y = ax^2 + bx + c$ fa corrispondere a ogni x *uno e un solo* valore di y, quindi una parabola con equazione di questo tipo *è il grafico di una funzione*.
- $\Delta = b^2 - 4ac$.

ESEMPIO

Rappresentiamo nel piano cartesiano la parabola di equazione

$$y = x^2 - 2x - 3$$

e troviamo l'asse di simmetria, il fuoco e la direttrice.

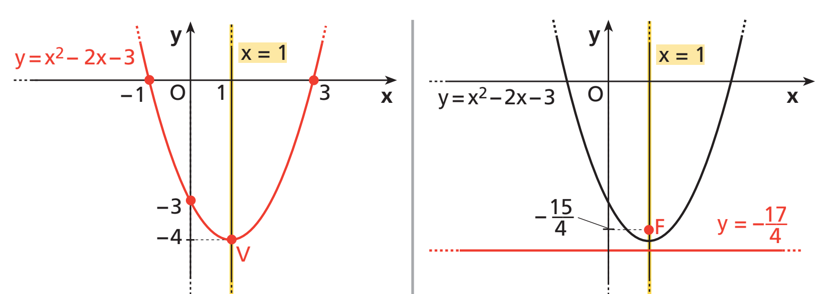
Per rappresentare in modo approssimato la parabola, basta trovare il vertice e alcuni altri punti, per esempio i punti di intersezione con gli assi cartesiani.

Applicando le formule $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ si trovano le coordinate del vertice $V(1; -4)$. Poiché $a = 1$, la parabola rivolge la concavità verso l'alto, quindi interseca sicuramente l'asse x. Ponendo $y = 0$, si ha $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$, e per $x = 0$ si ha $y = -3$. Dunque la parabola interseca gli assi cartesiani nei punti $(-1; 0)$, $(3; 0)$ e $(0; -3)$. Si può ora disegnare approssimativamente il suo grafico (figura 9*a*).

Applicando le formule si ottengono l'equazione dell'asse di simmetria $x = 1$, il fuoco $F\left(1; -\frac{15}{4}\right)$ e l'equazione della direttrice $y = -\frac{17}{4}$.

- È possibile calcolare l'ordinata del vertice anche sostituendo la sua ascissa nell'equazione della parabola, perché V è un punto della curva.
- L'ascissa del fuoco è uguale a quella del vertice, ossia $x_F = 1$; l'ordinata del fuoco è:
$$y_F = \frac{1-\Delta}{4a} = -\frac{15}{4}.$$
La direttrice ha equazione:
$$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{17}{4}.$$

▼ **Figura 9**

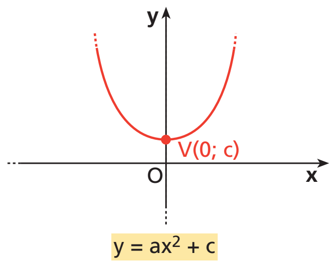
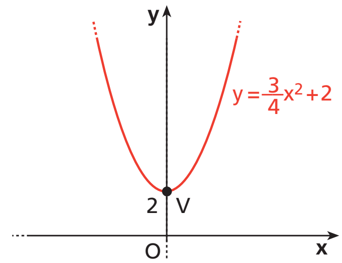
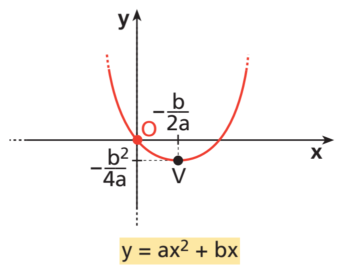
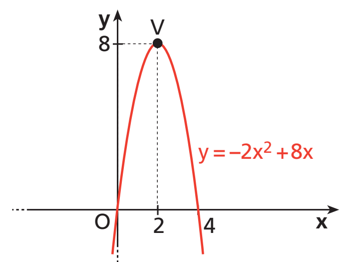
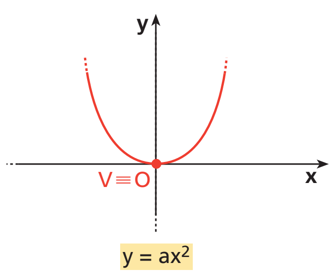
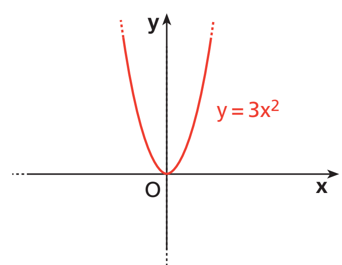


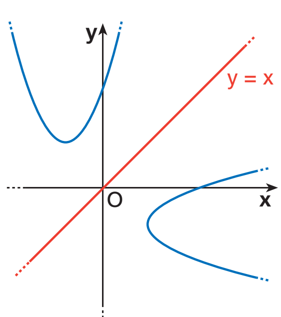
a. Parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$.

b. Direttrice e fuoco della parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$.

- Fuoco e direttrice, pur essendo elementi fondamentali per la definizione della parabola, non sono utili per disegnarla.

Alcuni casi particolari dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$

Caso esaminato	Grafico	Esempio
$b = 0$ L'equazione diventa: $y = ax^2 + c$. La parabola ha vertice $V(0; c)$ e il suo asse di simmetria è l'asse y.		
$c = 0$ L'equazione diventa: $y = ax^2 + bx$. La parabola ha vertice $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right)$ e passa sempre per l'origine O. Infatti le coordinate $(0; 0)$ soddisfano l'equazione.		
$b = 0, c = 0$ L'equazione diventa: $y = ax^2$. Ritroviamo la parabola già studiata con asse coincidente con l'asse y e vertice nell'origine.		



La parabola con asse parallelo all'asse x

Ogni parabola con asse parallelo all'asse x si può ottenere come corrispondente, nella simmetria assiale rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, di una parabola con asse parallelo all'asse y.

Per ricavare la sua equazione, all'equazione generale della parabola con asse parallelo all'asse y,

$$y = ax^2 + bx + c,$$

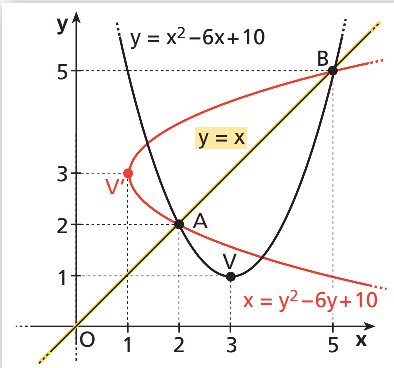
applichiamo le equazioni della simmetria:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Dobbiamo scambiare la variabile x con la variabile y, quindi otteniamo:

$$x = ay^2 + by + c$$ **equazione della parabola con asse parallelo all'asse x.**

ESEMPIO



◀ **Figura 10** Nella simmetria assiale rispetto alla retta di equazione $y = x$, alla parabola di equazione $y = x^2 - 6x + 10$ corrisponde la parabola di equazione $x = y^2 - 6y + 10$.

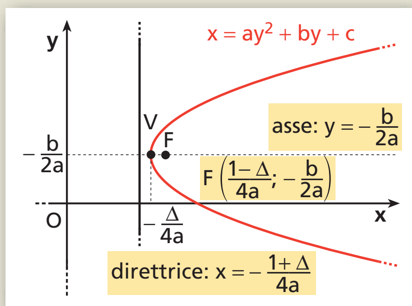
Anche per ottenere le altre caratteristiche della parabola (coordinate del vertice, equazione della direttrice, …) si possono applicare le equazioni della simmetria alle formule per la parabola con asse parallelo all'asse y, ottenendo i risultati che sintetizziamo nella seguente regola.

● Anche in questo caso, rispetto alle formule che conosci, basta scambiare la x con la y.

REGOLA

Equazione della parabola con asse parallelo all'asse x

L'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse x è del tipo $x = ay^2 + by + c$, dove a, b, c sono coefficienti reali e $a \neq 0$. L'asse ha equazione $y = -\dfrac{b}{2a}$; il vertice è il punto $V\left(-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$; il fuoco F ha coordinate $\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right)$ e la direttrice ha equazione $x = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$.



● L'equazione $x = ay^2 + by + c$ **non** fa corrispondere a ogni x uno e un solo valore di y, quindi una parabola con asse parallelo all'asse x **non** rappresenta una funzione da x a y.

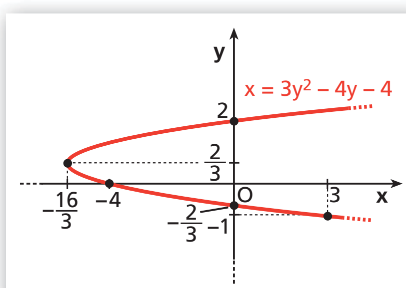
ESEMPIO

Disegniamo la parabola di equazione $x = 3y^2 - 4y - 4$.

Il vertice è $V\left(-\dfrac{16}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$.

Determiniamo le coordinate di alcuni punti della parabola, mediante una tabella, attribuendo valori a y e ricavando quelli di x:

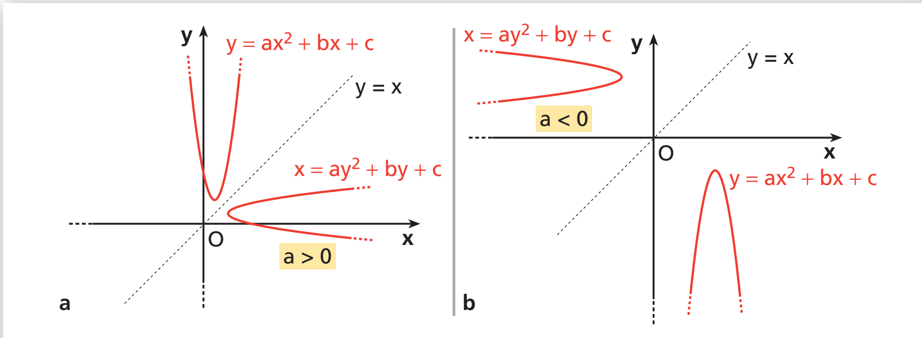
y	x		
$-\dfrac{2}{3}$	0	→	$\left(0; -\dfrac{2}{3}\right)$
0	−4	→	$(-4; 0)$
2	0	→	$(0; 2)$
−1	3	→	$(3; -1)$



◀ **Figura 11**

Il fuoco è $F\left(-\dfrac{21}{4}; \dfrac{2}{3}\right)$, l'equazione della direttrice è $x = -\dfrac{65}{12}$.

Mediante la simmetria possiamo anche comprendere che una parabola con asse parallelo all'asse x ha concavità rivolta verso la direzione positiva delle ascisse se $a > 0$, verso la direzione negativa se $a < 0$ (figura 12).

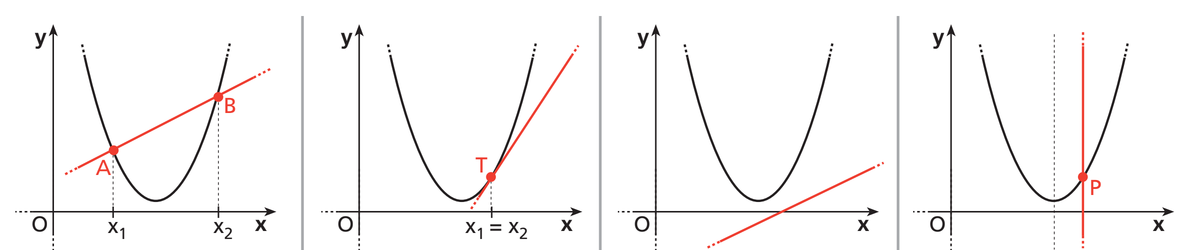


▶ **Figura 12** Da una parabola con concavità rivolta verso l'alto ($a > 0$) otteniamo, per simmetria rispetto a $y = x$, una parabola con concavità rivolta verso la direzione positiva delle ascisse. Da una parabola con concavità verso il basso otteniamo una parabola con concavità verso la direzione negativa delle ascisse.

2. LA POSIZIONE DI UNA RETTA RISPETTO A UNA PARABOLA

Una parabola e una retta possono essere secanti in due punti, essere tangenti in un punto, non intersecarsi in alcun punto oppure, se la retta è parallela all'asse della parabola, intersecarsi in un solo punto.
Considerando una parabola con asse parallelo all'asse y, i casi possibili sono quelli della figura 13.

● Le considerazioni svolte si riferiscono sia a parabole con l'asse parallelo all'asse y, sia a parabole con asse parallelo all'asse x.



a. La retta è secante la parabola. I punti di intersezione sono due.

b. La retta è tangente alla parabola. Il punto di intersezione è unico e si chiama *punto di tangenza*.

c. La retta è esterna alla parabola. Non vi sono punti di intersezione.

d. La retta è parallela all'asse della parabola: c'è un unico punto di intersezione.

▲ **Figura 13**

Supponiamo che la retta non sia parallela all'asse y e che, dunque, la sua equazione possa essere scritta nella forma esplicita $y = mx + q$.

Risolvendo il sistema formato dall'equazione della parabola e dall'equazione della retta

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = mx + q$, ossia

$$ax^2 + (b - m)x + c - q = 0,$$

le cui soluzioni sono le ascisse dei punti di intersezione della parabola con la retta.

Si ha che:

- se $\Delta > 0$, la retta è **secante** la parabola in due punti;
- se $\Delta = 0$, la retta è **tangente** alla parabola in un punto;
- se $\Delta < 0$, la retta è **esterna** alla parabola.

ESEMPIO

Determiniamo gli eventuali punti di intersezione della parabola di equazione

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

con la retta di equazione

$$y = x - 4.$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

Utilizzando il metodo del confronto, otteniamo l'equazione:

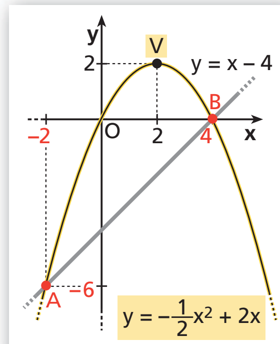
$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Essa ammette due soluzioni reali distinte, $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$, che sono le ascisse dei due punti di intersezione.
Troviamo ora le loro ordinate:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = x - 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = x - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

La retta interseca la parabola nei punti $A(-2; -6)$ e $B(4; 0)$.

Se $\Delta > 0$, l'equazione ammette due soluzioni, x_1 e x_2, reali e distinte, che corrispondono alle ascisse dei due punti di intersezione della retta con la parabola (figura 13*a*).
Se $\Delta = 0$, l'equazione ammette soluzioni reali e coincidenti, $x_1 = x_2$, e la retta è tangente alla parabola (figura 13*b*).
Se $\Delta < 0$, l'equazione non ammette soluzioni reali, pertanto la retta non presenta alcun punto di intersezione con la parabola (figura 13*c*).

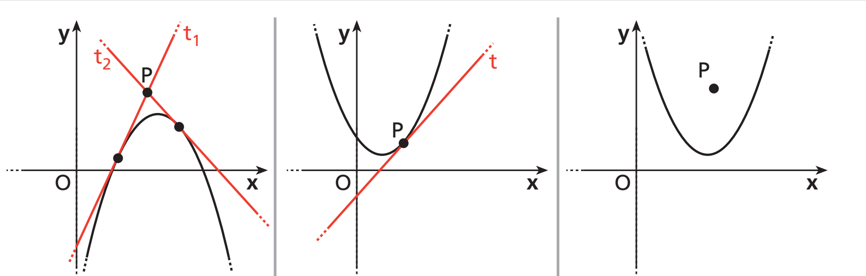


▲ **Figura 14** I punti $A(-2; -6)$ e $B(4; 0)$ sono le intersezioni della parabola $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ con la retta $y = x - 4$.

IN PRATICA
▶ Videolezione 18

3. LE RETTE TANGENTI A UNA PARABOLA

Le rette passanti per un punto P e tangenti a una parabola possono essere due, una o nessuna, a seconda della posizione di P rispetto alla parabola.
Se per un punto P si possono tracciare due rette tangenti, si dice che P è **esterno** alla parabola; se la retta è una sola, P è **sulla** parabola; se da P non è possibile tracciare rette tangenti, allora P si dice **interno** alla parabola.



a. *P* **esterno** alla parabola: due rette tangenti. **b.** *P* **sulla** parabola: una retta tangente. **c.** *P* **interno** alla parabola: non esistono rette tangenti.

◀ **Figura 15**

Per **determinare le equazioni delle eventuali rette tangenti**, si procede nel seguente modo:

- si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0);$$

- si scrive il sistema delle equazioni del fascio di rette e della parabola:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

- si pone la condizione di tangenza, ossia si pone uguale a 0 il discriminante dell'equazione risolvente, cioè $\Delta = \mathbf{0}$ (infatti, se una retta è tangente deve avere due intersezioni coincidenti con la parabola);
- si risolve rispetto a m l'equazione ottenuta e si sostituiscono nell'equazione del fascio gli eventuali valori determinati.

ESEMPIO

Determiniamo le equazioni delle eventuali rette passanti per $P(1; -5)$ e tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 2$.

- Scriviamo l'equazione del fascio di rette passanti per P:

$$y + 5 = m(x - 1).$$

- Scriviamo il sistema formato dalle equazioni del fascio e della parabola:

$$\begin{cases} y + 5 = m(x - 1) \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$

- Per sostituzione otteniamo la seguente equazione risolvente di secondo grado:

$$x^2 - mx + m + 3 = 0.$$

- Calcoliamo Δ:

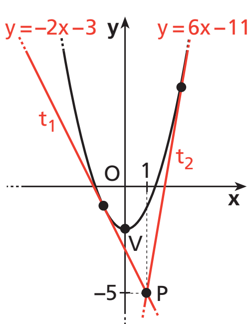
$$\Delta = m^2 - 4m - 12.$$

- Poniamo la condizione di tangenza, ossia $\Delta = 0$:

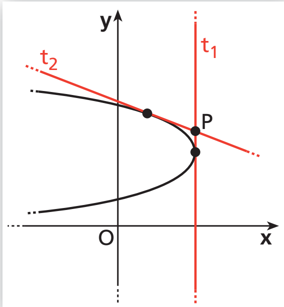
$$m^2 - 4m - 12 = 0.$$

Otteniamo le soluzioni $m_1 = -2$ e $m_2 = 6$ a cui corrispondono le due rette (figura a lato):

$$t_1: \; y = -2x - 3,$$
$$t_2: \; y = 6x - 11.$$



Se la parabola non ha l'asse parallelo all'asse y, può succedere che una delle sue tangenti passanti per P sia parallela all'asse y (figura 16). In questo caso la tangente non ha coefficiente angolare e quindi, nel porre $\Delta = 0$, non si trova il valore del coefficiente angolare relativo a tale retta.



► Figura 16

La formula di sdoppiamento

Data l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$, per ottenere l'equazione della retta tangente nel punto $P(x_0; y_0)$ della parabola, consideriamo l'equazione $y - y_0 = m(x - x_0)$ del fascio di rette passanti per P e la mettiamo a sistema con quella della parabola:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = m(x - x_0) + y_0 \end{cases} \rightarrow ax^2 + (b - m)x + c + mx_0 - y_0 = 0.$$

Per ottenere la tangenza, le soluzioni dell'equazione devono essere entrambe coincidenti con x_0 e quindi avere somma $2x_0$. Per la condizione relativa alla somma delle radici di un'equazione di secondo grado:

$$-\frac{b - m}{a} = 2x_0 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{m = 2ax_0 + b}}.$$

Sostituendo nell'equazione del fascio di rette, otteniamo:

$$y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0),$$

che fornisce la soluzione del problema.
Cerchiamo una forma più facile da ricordare. Svolgiamo i calcoli:

$$y - y_0 = 2ax_0x - 2ax_0^2 + bx - bx_0.$$

Consideriamo poi l'uguaglianza $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$. Moltiplicando entrambi i membri per 2, otteniamo:

$$2y_0 = 2ax_0^2 + 2bx_0 + 2c.$$

Sommiamo membro a membro quest'ultima uguaglianza e l'equazione precedente,

$$y + y_0 = 2ax_0x + bx + bx_0 + 2c,$$

raccogliamo b al secondo membro e dividiamo entrambi i membri per 2:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{y + y_0}{2} = ax_0x + b\frac{x + x_0}{2} + c.}}$$

Questa formula, detta **formula di sdoppiamento**, si può ricordare pensando che si ottiene dall'equazione della parabola sostituendo x con $\frac{x + x_0}{2}$, y con $\frac{y + y_0}{2}$ e x^2 con x_0x:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{y} & = & a\,\boxed{x^2} & + & b\,\boxed{x} + c \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \boxed{\frac{y + y_0}{2}} & & \boxed{x_0x} & & \boxed{\frac{x + x_0}{2}} \end{array}$$

● Il metodo che esaminiamo si può utilizzare soltanto se P appartiene alla parabola.

● Nell'equazione $Ax^2 + Bx + C = 0$, se $\Delta \geq 0$, si ha $-\frac{B}{A} = s$, dove s è la somma delle radici.

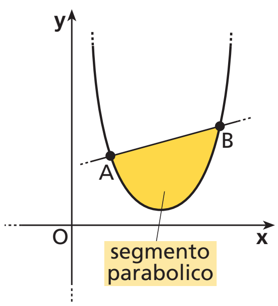
● L'uguaglianza si ottiene sostituendo le coordinate di P nell'equazione della parabola, in quanto P le appartiene.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della tangente alla parabola di equazione $y = x^2 + 3x$ nel suo punto $P(-1; -2)$.

Utilizziamo la formula di sdoppiamento, dove vale $x_0 = -1$ e $y_0 = -2$:

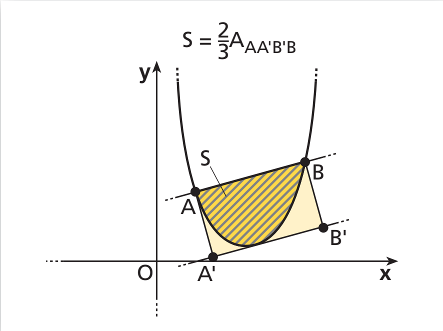
$$y = x^2 + 3x \rightarrow \frac{y - 2}{2} = -x + 3\frac{x - 1}{2} \rightarrow y = x - 1.$$



● La proprietà del segmento parabolico è anche detta **teorema di Archimede**, in quanto è stata dimostrata dal noto matematico e fisico greco vissuto a Siracusa. Archimede (287-212 a.C.) compì studi nel campo della geometria e pose i fondamenti dell'idrostatica. Durante l'assedio di Siracusa, costruì anche una serie di macchine da guerra, organizzando la difesa contro i Romani.

Il segmento parabolico

Se una retta è secante una parabola nei punti A e B, il segmento AB e l'arco di parabola AB delimitano una parte di piano detta **segmento parabolico** (figura a lato nel colonnino).
Tracciamo la retta parallela ad AB e tangente alla parabola, e consideriamo su di essa le proiezioni A' e B' di A e B (figura 17). Si può dimostrare che l'area del segmento parabolico è uguale a $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo $AA'B'B$.



▲ Figura 17

ESEMPIO

Determiniamo l'area S del segmento parabolico individuato dalla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ e dalla retta di equazione $y = x + \frac{1}{2}$.
Dal sistema delle due equazioni si ottengono i punti di intersezione:

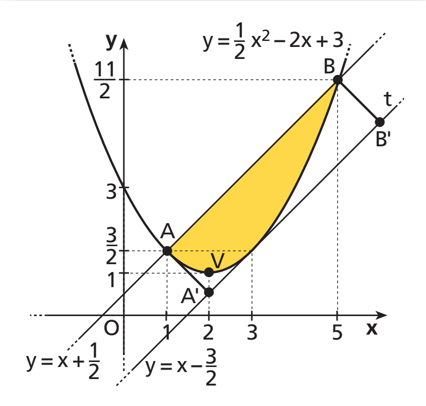
$$A\left(1; \frac{3}{2}\right) \text{ e } B\left(5; \frac{11}{2}\right).$$

Considerando una generica retta parallela ad AB, di equazione $y = x + q$, e imponendo la condizione di tangenza alla parabola, si ottiene la retta tangente t di equazione:

$$y = x - \frac{3}{2}.$$

Calcoliamo la misura di AB con la formula della distanza tra due punti. Otteniamo $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$, mentre la distanza di A dalla retta t vale $\sqrt{2}$.
Quindi l'area del rettangolo $AA'B'B$ è: $4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$.
L'area del segmento parabolico è:

$$S = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}.$$



► Figura 18

4. COME DETERMINARE L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA

IN PRATICA
► Videolezione 19

● D'ora in poi, quando parleremo di parabola senza specificare altro, sottintenderemo che si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse y.

Poiché nell'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

sono presenti tre coefficienti a, b e c, per poterli determinare occorrono tre informazioni sulla parabola, dette *condizioni*. Queste permettono di impostare un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a, b, c.

Forniamo l'elenco di alcune possibili condizioni:

- sono note le coordinate del vertice e del fuoco;
- sono note le coordinate del vertice (o del fuoco) e l'equazione della direttrice;
- la parabola passa per tre punti non allineati;
- la parabola passa per due punti e si conosce l'equazione dell'asse;
- la parabola passa per un punto e sono note le coordinate del vertice (o del fuoco);
- la parabola passa per un punto e sono note le equazioni dell'asse e della direttrice;
- la parabola è tangente a una retta data e passa per due punti.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della parabola passante per i punti $A(-1; 5)$ e $B(4; 0)$ e tangente alla retta di equazione $y = 2x - 9$.

Imponiamo alla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ il passaggio per i due punti A e B:

$5 = a - b + c$ passaggio per $A(-1; 5)$,

$0 = 16a + 4b + c$ passaggio per $B(4; 0)$.

Ora imponiamo che la retta $y = 2x - 9$ sia tangente alla parabola.
Scriviamo il sistema

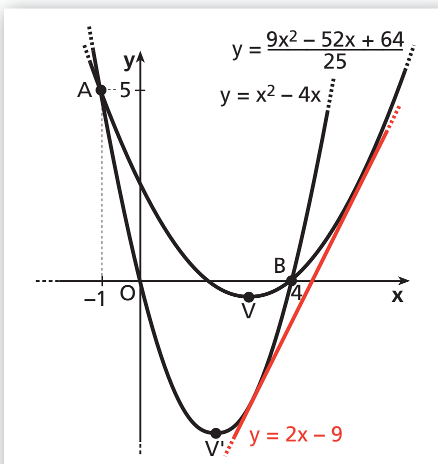
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 2x - 9 \end{cases}$$

e poniamo nell'equazione risolvente $ax^2 + (b - 2)x + c + 9 = 0$ la condizione $\Delta = 0$:

$$\Delta = (b - 2)^2 - 4a \cdot (c + 9) = 0.$$

Dalle tre condizioni otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = 5 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ (b - 2)^2 - 4a(c + 9) = 0 \end{cases}$$



◀ **Figura 19** **La parabola $y = x^2 - 4x$ passa per l'origine e ha il vertice $V'(2; -4)$; la parabola $y = \frac{9x^2 - 52x + 64}{25}$ ha il vertice $V\left(\frac{26}{9}; -\frac{4}{9}\right)$. Entrambe sono tangenti alla retta di equazione $y = 2x - 9$ e passano per A e B.**

Risolvendo il sistema, ricaviamo:

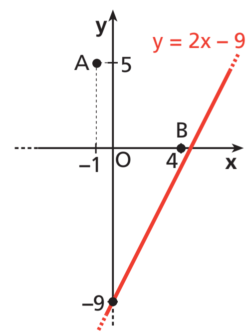
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} a = \dfrac{9}{25} \\ b = -\dfrac{52}{25} \\ c = \dfrac{64}{25} \end{cases}$$

Pertanto, sono due le parabole che soddisfano le condizioni richieste:

$$y = x^2 - 4x, \qquad y = \frac{9x^2 - 52x + 64}{25}.$$

Se la parabola ha l'asse parallelo all'asse x, si fanno considerazioni del tutto analoghe a quelle finora svolte.

● Le coordinate note di un punto della parabola corrispondono a *una* condizione, perché permettono di scrivere un'equazione in a, b e c; le coordinate note del fuoco (o del vertice) corrispondono a *due* condizioni, perché possiamo scrivere due equazioni, utilizzando le formule relative all'ascissa e all'ordinata; l'asse noto della parabola, la direttrice nota o una tangente nota corrispondono a *una* condizione.



ESPLORAZIONE

Le coniche di Apollonio

Il Grande Geometra

Apollonio nacque a Perge, in Panfilia, attorno al 262 a.C. e studiò ad Alessandria, centro degli studi matematici del mondo occidentale dell'epoca. Visse per un breve periodo a Pergamo, sede della biblioteca che, per grandezza e importanza, era seconda solo a quella di Alessandria, la quale conteneva circa 500 000 volumi. Tra le mura delle due Accademie di matematica più attive e stimolanti del tempo, Apollonio scrisse la sua grande opera, per la quale è considerato uno dei più brillanti matematici del periodo ellenistico, tanto da essere chiamato «Grande Geometra».
L'opera che rese famoso Apollonio è *Τά Κωνικά* o, in latino, *Conicorum Libri*, ovvero *Il libro delle coniche*.

È una delle poche opere giunte fino a noi ed è quindi estremamente preziosa, anche se incompleta. Originariamente, il trattato era composto da otto libri. Il libro VIII è andato perduto. I libri dal V al VII, i più innovativi di tutta l'opera, ci sono pervenuti solo nella traduzione araba. Nel libro I, Apollonio racconta di aver scritto in fretta una prima versione delle *Coniche*, subito dopo aver ricevuto, ad Alessandria, la visita dello studioso Neucrate, che lo aveva convinto della necessità di pubblicare i suoi risultati. I libri IV e VII si aprono con una dedica al re di Pergamo, città in cui il matematico ebbe modo di rivedere e perfezionare gli otto volumi.

Un punto di vista innovativo

L'argomento «coniche» non era affatto nuovo all'epoca di Apollonio. Le sezioni di un cono si studiavano già da circa un secolo e mezzo.
I matematici erano a conoscenza del fatto che i tre tipi fondamentali di coniche (parabola, ellisse e iperbole) potevano essere ottenuti tagliando un cono con un piano. Però, prima di Apollonio, per ottenere ciascuna conica si considerava un diverso tipo di cono.
Apollonio dimostrò per la prima volta che da un unico cono era possibile ottenere tutti i tipi di coniche, variando l'inclinazione del piano di intersezione.
Eliminò inoltre la restrizione a considerare solo coni retti, dimostrando che le sezioni coniche si possono ottenere da un generico cono circolare, anche obliquo.

◀ **Nike di Samotracia (Louvre, Parigi). Il periodo ellenistico è compreso tra la morte di Alessandro Magno (323 a.C.) e la battaglia di Azio (31 a.C.), che segnò il passaggio del predominio dai Greci ai Romani. Questo periodo, di cui la Nike ben rappresenta il fermento artistico, fu straordinariamente fecondo anche per la scienza. In particolare, per la matematica, insieme con Apollonio troviamo Euclide (365-300 a.C.) e Archimede (287-212 a.C.).**

Attività

Le coniche al museo

Le coniche sono un argomento che appassiona i curatori di alcuni musei di matematica italiani.

- Fai una ricerca in Internet relativa a come viene presentato l'argomento.

@ **Cerca nel Web:**
Laboratorio di macchine matematiche, Il Giardino di Archimede, MateFitness

5. I FASCI DI PARABOLE

IN PRATICA
▶ Videolezione 20

Consideriamo le seguenti parabole, γ e γ', con asse parallelo all'asse delle ordinate:

$$\gamma\colon\ y = -2x^2 + 10x - 7,$$
$$\gamma'\colon\ y = x^2 - 2x + 2.$$

Scriviamo le equazioni in forma implicita:

$$y + 2x^2 - 10x + 7 = 0,$$
$$y - x^2 + 2x - 2 = 0.$$

Ora formiamo tutte le possibili *combinazioni lineari* di tali equazioni:

$$p(y + 2x^2 - 10x + 7) + q(y - x^2 + 2x - 2) = 0,$$

con $p, q \in \mathbb{R}$ e non entrambi nulli.

Una **combinazione lineare** di due equazioni $A(x; y) = 0$ e $B(x; y) = 0$ è un'equazione del tipo $p \cdot A(x; y) + q \cdot B(x; y) = 0$, con $p, q \in \mathbb{R}$ e non entrambi nulli.

Tale equazione rappresenta infinite parabole al variare di p e q. In particolare:

- se $p = 0$ e $q \neq 0$, si ha la parabola γ';
- se $q = 0$ e $p \neq 0$, si ha la parabola γ.

Poiché p e q non sono entrambi nulli supponiamo, per esempio, $p \neq 0$ e dividiamo entrambi i membri per p per ottenere un'equazione con un solo parametro $k = \frac{q}{p}$:

$$y + 2x^2 - 10x + 7 + k(y - x^2 + 2x - 2) = 0.$$

L'uso di un solo parametro facilita lo studio dell'equazione, ma impedisce di ottenere dal fascio l'equazione della parabola γ.

Scriviamo l'equazione in una forma equivalente raccogliendo i termini simili:

$$(1 + k)y + (2 - k)x^2 + 2(k - 5)x + 7 - 2k = 0.$$

A ogni valore di $k \in \mathbb{R}$ corrisponde una parabola particolare.
L'insieme delle parabole individuate da tale relazione si chiama **fascio di parabole** definito da γ e γ'.

- Se $k = -1$, l'equazione contiene soltanto la variabile x:

  $$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \rightarrow$$
  $$\rightarrow \quad (x - 1)(x - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 = 0 \vee x - 3 = 0.$$

  Essa rappresenta la **parabola degenere** costituita dall'insieme delle due rette $x - 1 = 0$ e $x - 3 = 0$.
- Se $k \neq -1$, possiamo dividere per $1 + k$ e scrivere il fascio in forma esplicita:

  $$y = \frac{k-2}{1+k} \cdot x^2 + \frac{2(5-k)}{1+k} \cdot x + \frac{2k-7}{1+k}.$$

  L'equazione scritta in questo modo rappresenta una parabola generica di cui è possibile studiare più facilmente le caratteristiche, come la concavità o il vertice.
- Se nell'equazione $y + 2x^2 - 10x + 7 + k(y - x^2 + 2x - 2) = 0$ poniamo $k = 0$, otteniamo la parabola γ. Non esiste invece un valore di k a cui corrisponda la parabola γ'.

Le parabole γ e γ' sono dette **generatrici** del fascio.

In questo esempio le parabole si intersecano nei due punti $P(1;\ 1)$, $Q(3;\ 5)$. Le coordinate di questi due punti soddisfano le equazioni di entrambe le parabole e anche quella di ogni parabola del fascio. Infatti, sostituendo nelle equazioni implicite delle parabole γ e γ' le coordinate di Q, otteniamo

$$5 + 2(3)^2 - 10 \cdot 3 + 7 = 0, \qquad 5 - (3)^2 + 2 \cdot (3) - 2 = 0,$$

e quindi, indipendentemente dal valore dato a k, anche

$$5 + 2(3)^2 - 10 \cdot 3 + 7 + k[5 - (3)^2 + 2 \cdot 3 - 2] = 0 + k \cdot 0 = 0.$$

Si ottiene lo stesso risultato sostituendo le coordinate di P.

Per i punti P e Q passano quindi tutte le parabole del fascio. Questi punti sono detti **punti base** del fascio.
Consideriamo nuovamente l'equazione del fascio in forma esplicita.
Se $k = 2$, si annulla il coefficiente di x^2 e l'equazione diventa $y = 2x - 1$, ossia l'equazione della retta passante per P e Q, che può quindi essere considerata come una *parabola degenere* del fascio. Tracciamo il grafico del fascio (figura 20).

Si può dimostrare che si ottiene lo stesso fascio se a γ e γ' si sostituiscono altre due parabole del fascio, dove una delle due può anche essere la retta passante per i punti base.

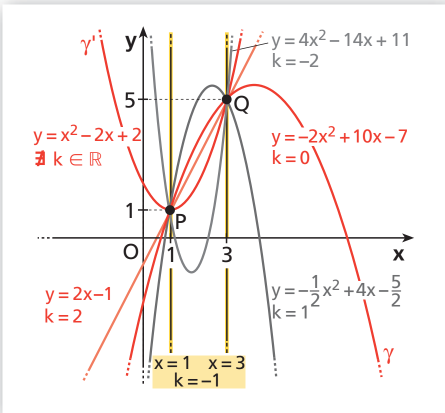


Figura 20 Il fascio di parabole di equazione $(1 + k)y + (2 - k)x^2 + 2(k - 5)x + 7 - 2k = 0$ per $k = -2; -1; 0; 1; 2$.

DEFINIZIONE

Fascio di parabole

Date due parabole γ e γ' di equazioni scritte in forma implicita

$$y - ax^2 - bx - c = 0, \qquad y - a'x^2 - b'x - c' = 0,$$

con a e a' non entrambi nulli, si chiama fascio di parabole generato da γ e γ' l'insieme di parabola γ' e di tutte le parabole rappresentate dall'equazione:

$$y - ax^2 - bx - c + k(y - a'x^2 - b'x - c') = 0, \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

γ e γ' si dicono *generatrici del fascio*.
L'equazione del fascio può essere scritta anche nella forma

$$(1 + k)y - (a + ka')x^2 - (b + kb')x - (c + kc') = 0,$$

e, se $k \neq -1$, si ha:

$$y = \frac{a + ka'}{1 + k}x^2 + \frac{b + kb'}{1 + k}x + \frac{c + kc'}{1 + k}.$$

Se $k \neq \frac{-a}{a'}$, l'equazione scritta rappresenta, al variare di k, l'equazione di infinite parabole appartenenti al fascio di generatrici γ e γ'.
Per esempio, $y = kx^2 + (1 - k)x + k$ rappresenta, per $k \neq 0$, un fascio di parabole.

La generatrice γ si ottiene per $k = 0$, mentre γ' non si può ottenere per nessun valore di k, o, come abbiamo visto per i fasci di rette e di circonferenze, diciamo che γ' si ottiene per $k \to \infty$.

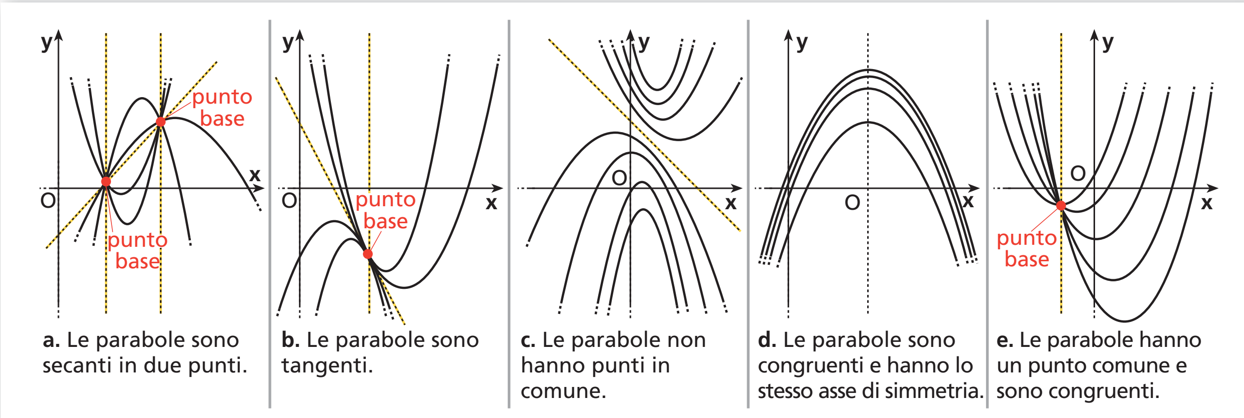
Quindi, spesso, scriveremo l'equazione del fascio nella forma:

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

dove almeno uno dei coefficienti A, B, C è funzione di k.

Lo studio di un fascio di parabole

Studiare un fascio di parabole vuol dire descriverne le caratteristiche, in particolare, determinare le generatrici, gli eventuali punti base, le parabole degeneri.
I casi possibili sono mostrati nella figura 21.



▲ **Figura 21** I casi possibili di fasci di parabole.

Esaminiamo in modo sintetico il procedimento relativo ai diversi elementi.

Generatrici
Si riscrive in forma implicita l'equazione del fascio e si raccoglie rispetto al parametro k.
Le equazioni delle due generatrici si ottengono una per $k = 0$ e l'altra uguagliando a 0 l'espressione che è moltiplicata per k.

Punti base
Si risolve il sistema delle equazioni delle due generatrici. I punti base possono essere due distinti (parabole secanti), due coincidenti (parabole tangenti), uno (parabole congruenti e con diverso asse di simmetria) o nessuno. Se non ci sono punti base, le parabole non hanno punti in comune e possono essere congruenti e con lo stesso asse di simmetria.

Parabole degeneri
Le parabole degeneri sono rette che devono passare per gli eventuali punti base. Esse si ottengono:

a) se il coefficiente di y non dipende dal parametro, uguagliando a 0 il coefficiente di x^2 (se dipende dal parametro); la retta che si ottiene è parallela all'asse x o non è parallela agli assi cartesiani;
b) se il coefficiente di y dipende dal parametro, uguagliando a 0 tale coefficiente; si può ottenere una retta o una coppia di rette parallele all'asse y.

● Nella figura 21, nei diversi casi, abbiamo segnato in giallo le rette che sono parabole degeneri del fascio. Nel caso *a* le parabole degeneri sono due: una è la retta che passa per i punti base, l'altra è costituita dalla coppia di rette parallele all'asse *y* passanti per i punti base.

ESEMPIO

Consideriamo il fascio di parabole di equazione:

$$y = (k - 2)x^2 + (1 - k)x + k.$$

Raccogliamo i termini rispetto a k e scriviamo l'equazione nella variabile k:

$$k(x^2 - x + 1) + (-2x^2 + x - y) = 0.$$

Le due generatrici si ottengono per $k = 0$ e $k \to \infty$, cioè:

$$\gamma: -2x^2 + x - y = 0 \quad \rightarrow \quad y = -2x^2 + x,$$

$$\gamma': x^2 - x + 1 = 0.$$

Per determinare eventuali punti base scriviamo il sistema delle equazioni delle generatrici:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ 2x^2 - x + y = 0 \end{cases}$$

Il discriminante della prima equazione è negativo, quindi il sistema non ammette soluzioni reali. Le parabole non hanno punti in comune, come nelle figure 21*c* o 21*d*; poiché nell'equazione del fascio il coefficiente $k - 2$ di x^2 varia con k, le parabole non sono congruenti.
Osserviamo poi che, posto uguale a 0 il coefficiente di x^2 nell'equazione iniziale del fascio, otteniamo, per $k = 2$, la retta $y = -x + 2$, che è una parabola degenere del fascio.

● I fasci di parabole con assi paralleli all'asse delle ascisse si trattano in modo simile a quelli discussi in questo paragrafo. Negli esercizi troverai anche tale tipo di fasci.

Come trovare l'equazione di un fascio di parabole

Per determinare l'equazione di un fascio di parabole si deve scrivere la combinazione lineare delle equazioni di due parabole qualsiasi del fascio (che possono anche essere quelle degeneri), prese come generatrici.

ESEMPIO

Scriviamo l'equazione del fascio di parabole passanti per $A(2; 1)$ e $B(4; 2)$.
A e B sono i punti base del fascio. Scriviamo le equazioni delle parabole degeneri γ e γ_1, cioè la retta AB e la coppia di rette parallele all'asse y passanti per A e per B:

$$\gamma: \frac{y-1}{2-1} = \frac{x-2}{4-2} \rightarrow y - 1 = \frac{x-2}{2} \rightarrow 2y - x = 0;$$

$$\gamma_1: (x-2)(x-4) = 0.$$

Il fascio ha allora equazione:

$$2y - x + k(x-2)(x-4) = 0.$$

In generale, possiamo distinguere i seguenti casi.

Fasci di parabole per due punti distinti

Dati i punti distinti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ e indicata con $y = mx + q$ l'equazione della retta AB, si può dimostrare che l'equazione

$$y = mx + q + k(x - x_A)(x - x_B)$$

rappresenta un fascio di parabole passanti per A e B.

● Verifica che con la formula ottieni l'equazione del fascio $y = kx^2 - (2k+3)x + 2$ con punti base $A(0; 2)$, $B(2; -4)$.

Fasci di parabole tangenti in un punto a una retta data

Dato il punto $T(x_T; y_T)$ appartenente alla retta r di equazione $y = mx + q$, si può dimostrare che l'equazione

$$y = mx + q + k(x - x_T)^2$$

rappresenta un fascio di parabole tangenti in T alla retta r.

● Verifica che il fascio delle parabole tangenti alla retta $y = x$ in $T(1; 1)$ ha equazione $y = kx^2 + (1-2k)x + k$.