STUDIO DI FUNZIONE

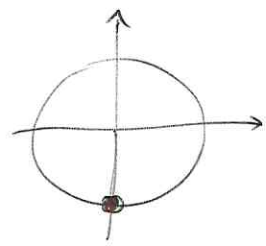
Studiare $y = \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$

DOMINIO Le condizioni di esistenza sono solo

$$1+\sin x \neq 0$$

ovvero $\sin x \neq -1$

$$x \neq \frac{3}{2}\pi$$



Dunque il dominio è l'insieme $[0; \frac{3}{2}\pi[\cup]\frac{3}{2}\pi; 2\pi]$

SIMMETRIE Vista la asimmetria del dominio, la funzione non è né pari né dispari. La funzione è periodica; dato che

$$f(x+2\pi) = \frac{1-\sin(x+2\pi)}{1+\sin(x+2\pi)} = \frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)} = f(x)$$

e che il dominio mostra che non possono esserci periodi più piccoli di 2π, allora il periodo è 2π.

INTERSEZIONI Con $x=0$ si ottiene $y=1$. Risolvendo

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 0$$

si trovano le due intersezioni

$$1-\sin x = 0$$
$$\sin x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}\pi$$

$(0; 1)$ e $(\frac{1}{2}\pi; 0)$

SEGNO Il numeratore è sempre positivo, o nullo. Il denominatore è sempre positivo. Quindi la funzione è sempre positiva, o nulla.

$$1 + \sin x > 0 \qquad\qquad 1 - \sin x \geq 0$$

$$\sin x > -1 \qquad\qquad \sin x \leq 1$$

$$x \neq \tfrac{3}{2}\pi \qquad\qquad \text{sempre}$$

LIMITI In $x = 0$ e $x = 2\pi$ non è necessario fare i limiti, perché la funzione è continua e vale $f(0) = f(2\pi) = 1$.

Dato che $\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} 1 - \sin x = 2$

e che $\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} 1 + \sin x = 0^+$

ASINTOTO VERTICALE $x = \frac{3}{2}\pi$

allora $\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = +\infty$

per il teorema sull'algebra dei limiti.

DERIVATA PRIMA La derivata è $f'(x) = \left[\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right]' =$

$$= \frac{(1 - \sin x)'(1 + \sin x) - (1 - \sin x)(1 + \sin x)'}{(1 + \sin x)^2} =$$

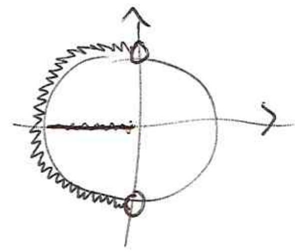
$$= \frac{-\cos x(1 + \sin x) - (1 - \sin x)\cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-2\cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

Dato che $(1+\sin x)^2 > 0$ risulta che $f'(x) > 0$

se $-2\cos x > 0$

$\cos x < 0$

$\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$



Quindi la funzione ha il seguente andamento

	0		$\frac{1}{2}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		2π
f'		$-$		$+$		$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

La funzione ha quindi un massimo locale in $(0;1)$
un minimo assoluto in $(\frac{1}{2}\pi;0)$
un minimo locale in $(2\pi;1)$

DERIVATA SECONDA La derivata seconda è

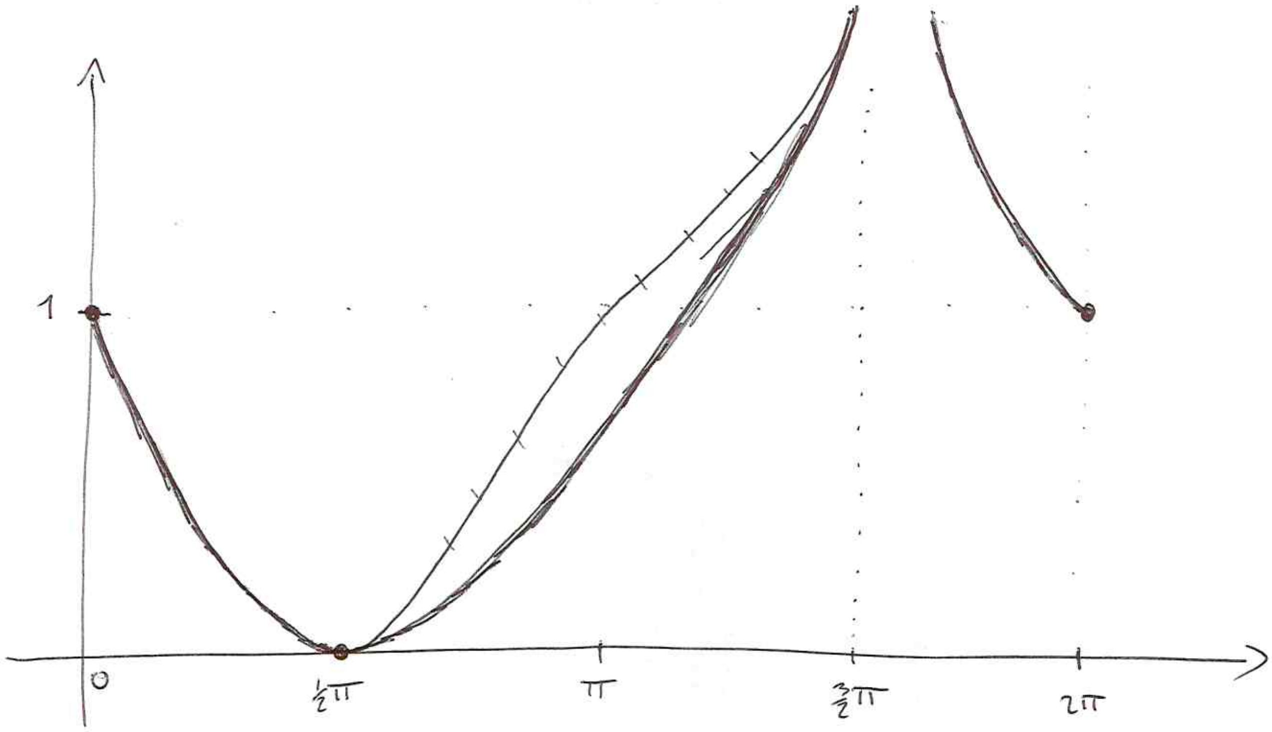
$$f''(x) = \left[\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}\right]' = \frac{(-2\cos x)'(1+\sin x)^2 - (-2\cos x)\left[(1+\sin x)^2\right]'}{(1+\sin x)^4} =$$

$$= \frac{2\sin x(1+\sin x)^2 + 2\cos x \cdot 2 \cdot (1+\sin x)\cdot \cos x}{(1+\sin x)^4} =$$

$$= \frac{2\sin x + 2\sin^2 x + 4\cos^2 x}{(1+\sin x)^3} = \frac{2 + 2\sin x + 2\cos^2 x}{(1+\sin x)^3}$$

Che è sempre positiva perché il numeratore $2\left[(1+\sin x) + \cos^2 x\right]$ è la somma di due funzioni positive, così come $1+\sin x$ è sempre positiva.

GRAFICO



INTEGRALI IMMEDIATI

$$\int \left(x + \frac{2}{x^2}\right)^2 dx = \int x^2 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^4}\, dx = \frac{1}{3}x^3 + 4\ln|x| - \frac{4}{3x^3} + c$$

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\, dx = 2\sin(\sqrt{x}) + c$$

INTEGRALI PER SOSTITUZIONE

$$\int \frac{e^x \sin e^x}{\cos e^x}\, dx = \int \frac{\sin e^x}{\cos e^x}\, e^x dx =$$

$$e^x = t$$
$$e^x\, dx = dt$$

$$= \int \frac{\sin t}{\cos t}\, dt = -\ln|\cos t| + c = -\ln|\cos e^x| + c$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx = \qquad\qquad 1+\sin x = t \qquad \cos x\,dx = dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{t} + c = 2\sqrt{1+\sin x} + c$$

INTEGRALI PER PARTI

$$\int 4x\, e^{-2x}\,dx = \int \underset{F}{-2x}\cdot \underset{g}{\left(-2e^{-2x}\right)}\,dx = \underset{F}{-2x}\,\underset{G}{e^{-2x}} - \int \underset{f}{-2}\,\underset{G}{e^{-2x}}\,dx =$$

$$= -2x e^{-2x} - e^{-2x} + c$$

$$\int 2x \cos 2x \, dx = \int \underset{F}{x}\cdot \underset{g}{2\cos(2x)}\,dx = \underset{F}{x}\,\underset{G}{\sin(2x)} - \int \underset{f}{1}\cdot \sin(2x)\,dx =$$

$$= x\sin(2x) + \frac{1}{2}\int -2\sin(2x)\,dx = x\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + c$$

INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI

$$\int \frac{6x}{4+x^2}\,dx = 3\int \frac{2x}{4+x^2}\,dx = 3\ln|4+x^2| + c$$

$$\int \frac{2x+1}{4x^2-12x+9}\,dx = \int \frac{2x+1}{(2x-3)^2}\,dx =$$

$$\frac{A}{2x-3} + \frac{B}{(2x-3)^2} = \frac{A(2x-3)+B}{(2x-3)^2} = \frac{2Ax-3A+B}{(2x-3)^2}$$

$$\downarrow \quad A = 1 \quad B = 4$$

$$= \int \frac{1}{2x-3} + \frac{4}{(2x-3)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-3}\,dx - 2\int \frac{-2}{(2x-3)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x-3| - \frac{2}{2x-3} + c$$