CAPITOLO

10

١٠ [numerazione araba]

१० [numerazione devanagari]

十 [numerazione cinese]

LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

ROTOLARE PER MISURARE I tecnici che misurano la lunghezza delle strade usano uno strumento chiamato *rotella misuratrice*. Nei negozi specializzati in carte e atlanti è anche possibile comperare piccole rotelle multiscala da far correre su una carta geografica in modo da convertire in kilometri reali i centimetri rappresentati.

Come funziona una rotella misuratrice?

▶ La risposta a pag. 662

1. LA MISURA DEGLI ANGOLI

Gli angoli e la loro ampiezza

La **trigonometria** ha lo scopo di studiare i procedimenti di calcolo che permettono di determinare, con l'approssimazione che si vuole, la misura degli elementi di un triangolo (lati e angoli), noti alcuni di essi.
Trova applicazione, in particolare, in astronomia, meccanica, navigazione aerea e marittima, topografia.
Lo studio della trigonometria è preceduto da quello della **goniometria**, ossia di quella parte della matematica che si occupa della misura degli angoli e delle relative funzioni. Richiamiamo la definizione di angolo.

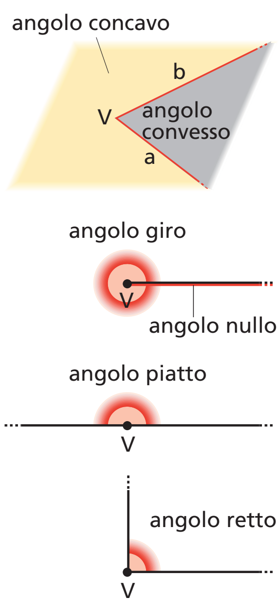
● «Trigonometria» deriva dal greco *trigonos*, che significa «triangolo» e *métron*, ossia «misura».

DEFINIZIONE

Angolo

Un angolo è la parte di piano individuata da due semirette a e b che hanno origine comune V.

● Un angolo si dice **convesso** quando non contiene i prolungamenti dei suoi lati, **concavo** quando li contiene. In genere, quando si parla dell'angolo $a\widehat{V}b$, senza altra indicazione, ci si riferisce all'angolo convesso.



Il punto V si chiama **vertice** dell'angolo e le semirette a e b si chiamano **lati**.
Quando i lati di un angolo sono coincidenti, l'angolo è **nullo** se è formato dalla sola semiretta dei lati, è **giro** se è formato da tutti i punti del piano.
Se i lati di un angolo sono uno il prolungamento dell'altro, l'angolo è **piatto**.
Se due rette incontrandosi formano quattro angoli congruenti, ognuno degli angoli è un angolo **retto**.
Due angoli congruenti hanno la stessa **ampiezza**, che si può misurare rispetto a un'unità di misura assegnata.
È usuale indicare con le lettere greche minuscole α, β, γ, … sia gli angoli sia la misura della loro ampiezza.
Le unità di misura più usate sono:

- il grado sessagesimale;
- il radiante.

La misura in gradi

Nel *sistema sessagesimale*, l'unità di misura degli angoli è il **grado sessagesimale**, definito come la 360ª parte dell'angolo giro.

Il grado sessagesimale viene indicato con un piccolo cerchio in alto a destra della misura:

$$1° = \frac{1}{360} \text{ dell'angolo giro.}$$

Nel sistema sessagesimale, il grado viene suddiviso a sua volta in 60 *primi*, che vengono indicati con un apice ($'$):

$$1° = 60'.$$

Ogni primo viene suddiviso a sua volta in 60 *secondi*, indicati con due apici ($''$):

$$1' = 60''.$$

Queste suddivisioni in 60 parti danno il nome al sistema di misura.

● Un angolo di 32 gradi, 10 primi e 47 secondi viene scritto così:

$32°\, 10'\, 47''$.

Perché la suddivisione in 360 parti?

Pare che la suddivisione del cerchio in 360 parti risalga ai Babilonesi (circa 2000 a.C.), i quali contavano il ciclo delle stagioni, ossia l'anno solare, in 360 giorni.
Per lungo tempo, tuttavia, la misura degli angoli in gradi non venne adottata sistematicamente. Soltanto nel II secolo d.C. Tolomeo d'Alessandria ne fece un uso regolare, introducendo i sottomultipli del grado, in latino *partes minutae primae* e *partes minutae secundae*, che noi oggi chiamiamo «primi» e «secondi».

Il sistema di misura degli angoli con gradi, primi e secondi è il più antico, ma presenta il problema di non basarsi su un sistema decimale e di avere quindi procedimenti di calcolo complicati.

ESEMPIO

Per ottenere:	$30° \, 20' \, 54'' + 2° \, 45' \, 24''$
dobbiamo prima sommare i secondi:	$54'' + 24'' = 78''$,
trasformare il risultato in primi e secondi:	$78'' = 1' \, 18''$,
sommare i primi:	$20' + 45' + 1' = 66'$,
trasformare il risultato in gradi e primi:	$66' = 1° \, 6'$,
sommare i gradi:	$30° + 2° + 1° = 33°$,
e ottenere così il risultato finale:	$33° \, 6' \, 18''$.

La misura in radianti

Per semplificare i calcoli si usa il sistema che ha per unità di misura il radiante.
Per definirlo, consideriamo due circonferenze di raggi r e r' e i due archi l e l', sottesi da angoli al centro della stessa ampiezza α, sulle due circonferenze (figura a lato).

Dalla proporzionalità fra archi e angoli al centro si ricava

$$l : \alpha° = 2\pi r : 360° \quad \text{e} \quad l' : \alpha° = 2\pi r' : 360°,$$

$$l = \frac{\alpha° \pi}{180°} r \quad \text{e} \quad l' = \frac{\alpha° \pi}{180°} r',$$

da cui, dividendo membro a membro, si ottiene

$$l : l' = r : r' \quad \rightarrow \quad l : r = l' : r' \quad \rightarrow \quad \frac{l}{r} = \frac{l'}{r'},$$

cioè gli archi sono proporzionali ai rispettivi raggi e il rapporto $\frac{l}{r}$ non varia al variare della circonferenza, ma dipende solo dall'angolo al centro α.
Se ogni volta che si misura un arco l si usa come unità di misura il raggio della circonferenza cui appartiene, si ottiene un numero che non dipende dalla circonferenza considerata, ma solo dall'angolo α che sottende l'arco.

Il rapporto $\frac{l}{r}$ viene quindi assunto come misura, in radianti, di α:

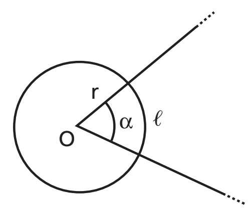
$$\alpha = \frac{l}{r}.$$

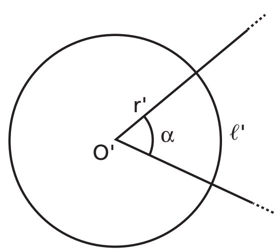
La scelta di dividere in 60 parti può essere giustificata dal fatto che il numero 60 ha molti divisori: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

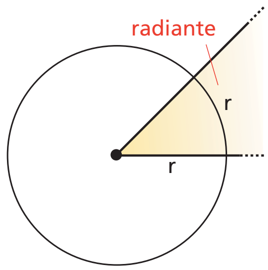
Le calcolatrici scientifiche usano anche il **sistema sessadecimale**, in cui accanto ai gradi si usano decimi, centesimi, millesimi, … di grado. Per esempio, nel sistema sessadecimale, 37,25° significa

$$37° + \left(\frac{2}{10}\right)^{\circ} + \left(\frac{5}{100}\right)^{\circ}.$$

Se invece si suddivide l'angolo retto in cento parti, si ottiene il **sistema centesimale**. Il grado centesimale, definito come la centesima parte dell'angolo retto, si indica con grad o gon.







Come definizione di radiante si può allora dare la seguente.

DEFINIZIONE

Radiante

Data una circonferenza, si chiama radiante l'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.

L'unità di misura viene indicata con rad, ma generalmente, se si esprime un angolo in radianti, si è soliti trascurare l'indicazione dell'unità di misura.

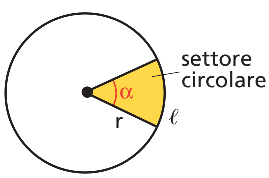
Poiché sottende l'intera circonferenza, l'angolo giro misura $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

L'angolo piatto, che corrisponde a metà circonferenza, misura π, l'angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$ ecc.

Lunghezza di un arco di circonferenza

Dalla relazione $\alpha = \frac{l}{r}$, ricaviamo che, se α è misurato in radianti, la lunghezza di un arco è:

$$l = \alpha r.$$



Area del settore circolare

Esprimiamo anche l'area di un settore circolare.

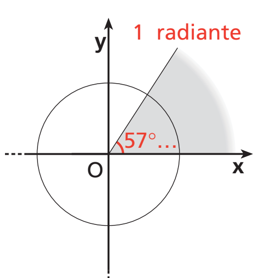
Dalla proporzione: $A_{\text{settore}} : A_{\text{cerchio}} = \alpha : 2\pi,$

ricaviamo: $A_{\text{settore}} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot A_{\text{cerchio}} = \frac{\alpha}{2\cancel{\pi}} \cancel{\pi} r^2 = \frac{1}{2}\alpha r^2,$

o, tenendo conto che $\alpha = \frac{l}{r}$: $A_{\text{settore}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{r} r^2 = \frac{1}{2} lr.$

Nelle calcolatrici si può operare sia con i gradi sia con i radianti. I simboli corrispondenti sono DEG, che sta per *degree*, e RAD. Di solito, è presente anche il sistema centesimale, con il simbolo GRAD.

In particolare, 1 radiante corrisponde a circa 57°. Infatti:
$1 \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3{,}1415\ldots} \simeq 57°.$



Dai gradi ai radianti e viceversa

Date le misure di un angolo α in gradi sessagesimali e in radianti, vale la proporzione

$$\alpha° : \alpha_{\text{rad}} = 360° : 2\pi,$$

da cui ricaviamo le due formule che convertono la misura di un angolo da radianti a gradi e viceversa:

$$\alpha° = \alpha_{\text{rad}} \cdot \frac{180°}{\pi}, \qquad \alpha_{\text{rad}} = \alpha° \cdot \frac{\pi}{180°}.$$

ESEMPIO

1. A $\frac{2}{3}\pi$ radianti corrisponde:

$$\alpha° = \frac{2}{3}\cancel{\pi} \cdot \frac{180°}{\cancel{\pi}} = \frac{2}{\cancel{3}_1} \cdot \cancel{180°}^{60°} = 120°.$$

2. A 60° corrisponde:

$$\alpha_{\text{rad}} = \cancel{60°}^{1} \cdot \frac{\pi}{\cancel{180°}_3} = \frac{\pi}{3}.$$

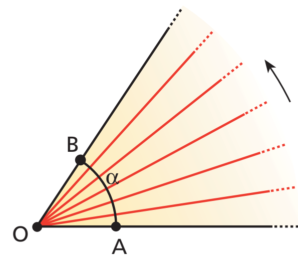
Riportiamo in una tabella le misure in radianti e in gradi di alcuni angoli.

Misure degli angoli

gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

Gli angoli orientati

La definizione di angolo che abbiamo dato non è adatta per descrivere tutte le situazioni. Per esempio, nell'avvitare o svitare una vite si descrive un angolo che può essere maggiore di un angolo giro.
È più utile quindi collegare il concetto di angolo a quello di *rotazione*, cioè al movimento che porta uno dei lati dell'angolo a sovrapporsi all'altro.



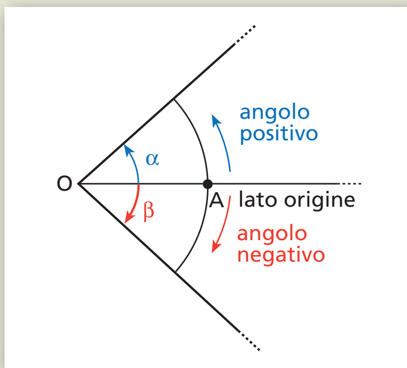
La rotazione è univoca solo quando ne viene specificato il **verso**, **orario** o **antiorario**. Nella figura a lato il senso adottato è quello antiorario.

Consideriamo la semiretta OA che ruota in senso antiorario intorno al vertice O, fino a sovrapporsi alla semiretta OB, generando l'angolo $\alpha = A\widehat{O}B$. La semiretta OA si chiama **lato origine** dell'angolo α, la semiretta OB si chiama **lato termine**.

DEFINIZIONE

Angolo orientato

Un angolo si dice orientato quando sono stati scelti uno dei due lati come lato origine e un senso di rotazione.
Un angolo orientato si dice *positivo* quando è descritto mediante una rotazione in senso antiorario; si dice *negativo* quando la rotazione è in senso orario.

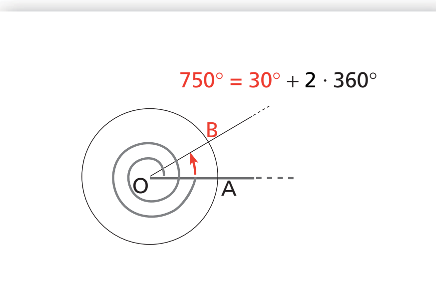


Un angolo orientato può anche essere maggiore di un angolo giro.

ESEMPIO

Poiché $750° = 30° + 2 \cdot 360°$, l'angolo di 750° si ottiene con la rotazione della semiretta OA di due giri completi e di ulteriori 30°.

750	360
30	2



◀ **Figura 1** L'angolo di 750° si ottiene con una rotazione della semiretta *OA* di 30° e 2 angoli giro.

La forma sintetica
È possibile scrivere in forma sintetica un qualunque angolo α, minore di un angolo giro, e tutti gli infiniti angoli orientati che da α differiscono di un multiplo dell'angolo giro nel seguente modo:

$$\text{in gradi:} \quad \alpha + k360°, \text{ con } k \in \mathbb{Z}; \qquad \text{in radianti:} \quad \alpha + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Quando $k = 0$, otteniamo l'angolo α.

● In seguito, se non daremo altre indicazioni, sarà sempre vero che $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre, per brevità, utilizzeremo il termine «angolo» anche per indicare un angolo maggiore di un angolo giro.

ESEMPIO

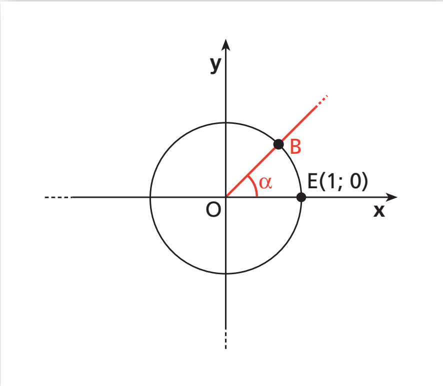
La scrittura $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ indica gli angoli:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \pm 2\pi, \frac{\pi}{4} \pm 4\pi, \frac{\pi}{4} \pm 6\pi, \ldots$$

La circonferenza goniometrica

Nel piano cartesiano, per **circonferenza goniometrica** intendiamo la circonferenza che ha come centro l'origine O degli assi e raggio di lunghezza 1, ossia la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

● Essendo la lunghezza di un arco $l = \alpha r$, poiché il raggio della circonferenza è 1, se l'angolo è misurato in radianti la lunghezza dell'arco $\widehat{EB}$ è uguale alla misura dell'angolo $E\widehat{O}B$.



◀ **Figura 2** La circonferenza goniometrica.

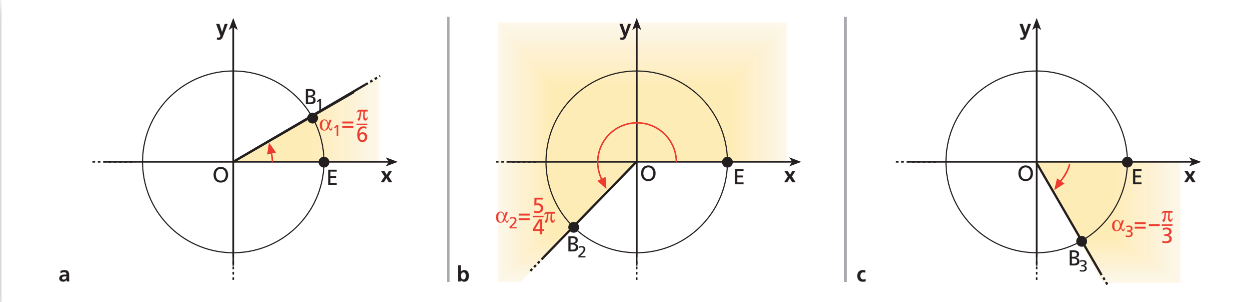
Il punto $E(1; 0)$ si dice **origine degli archi**.
Utilizzando la circonferenza goniometrica, si possono rappresentare gli angoli orientati, prendendo come lato origine l'asse x. In questo modo, a ogni angolo corrisponde un punto di intersezione B fra la circonferenza e il lato termine.

ESEMPIO

Rappresentiamo gli angoli $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$, $\alpha_2 = \frac{5}{4}\pi$, $\alpha_3 = -\frac{\pi}{3}$.

Essi individuano sulla circonferenza i punti B_1, B_2 e B_3 della figura 3.

▼ **Figura 3**



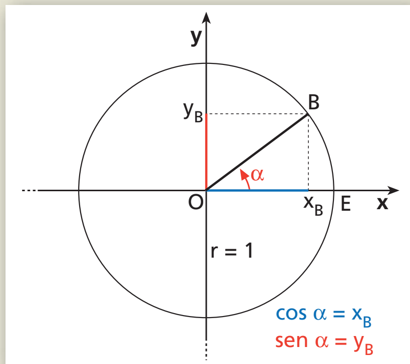
2. LE FUNZIONI SENO E COSENO

Introduciamo alcune **funzioni goniometriche** che alla misura dell'ampiezza di ogni angolo associano un numero reale.

DEFINIZIONE

Seno e coseno

Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato α, e sia B il punto della circonferenza associato ad α.
Definiamo coseno e seno dell'angolo α, e indichiamo con $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$, le funzioni che ad α associano, rispettivamente, il valore dell'ascissa e quello dell'ordinata del punto B:



$$\begin{array}{l}\cos\alpha = x_B \\ \operatorname{sen}\alpha = y_B\end{array} \quad \rightarrow \quad B(\cos\alpha;\ \operatorname{sen}\alpha).$$

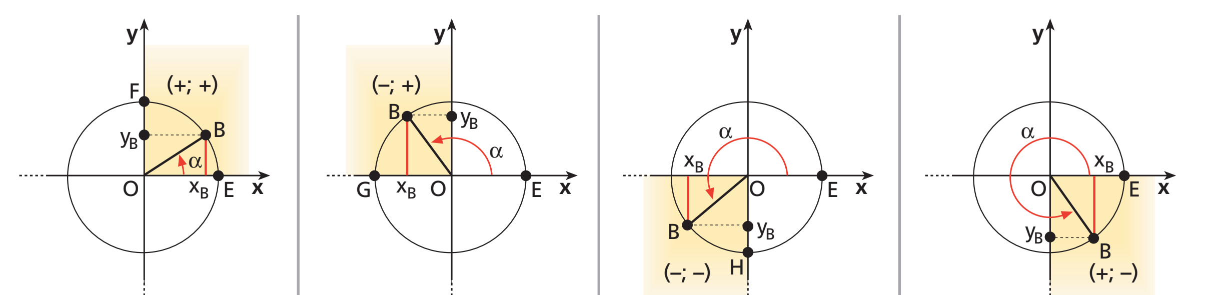
Nel linguaggio scientifico internazionale il seno di α si indica anche con $\sin\alpha$.

Seno e coseno di un angolo α sono funzioni che hanno come **dominio** $\mathbb{R}$, perché per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste uno e un solo punto sulla circonferenza.

Le variazioni delle funzioni seno e coseno

Supponiamo che un punto B percorra l'intera circonferenza goniometrica, a partire da E, in verso antiorario.
Se $\alpha = E\widehat{O}B$, come variano $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ al variare della posizione di B? Basta osservare che cosa succede all'ascissa di B (ossia il coseno) e alla sua ordinata (ossia il seno).

▼ Figura 4



a. Finché B percorre il primo quarto di circonferenza, la sua ascissa x_B e la sua ordinata y_B sono positive. Man mano che B si avvicina al punto F, l'ascissa diminuisce e l'ordinata aumenta. In F, $x_F = 0$, $y_F = 1$.

b. Quando B percorre la circonferenza nel secondo quadrante, la sua ordinata è ancora positiva, mentre l'ascissa diventa negativa. Quando B si avvicina a G, sia l'ascissa sia l'ordinata diminuiscono. In G, $x_G = -1$, $y_G = 0$.

c. Se B si trova nel terzo quadrante, la sua ordinata e la sua ascissa sono negative. Man mano che B si avvicina a H, l'ascissa aumenta e l'ordinata diminuisce. In H, $x_H = 0$, $y_H = -1$.

d. Quando B percorre l'ultimo quarto di circonferenza, la sua ordinata è ancora negativa, mentre l'ascissa è positiva. Avvicinandosi a E, sia l'ascissa sia l'ordinata di B aumentano. In E, $x_E = 1$, $y_E = 0$.

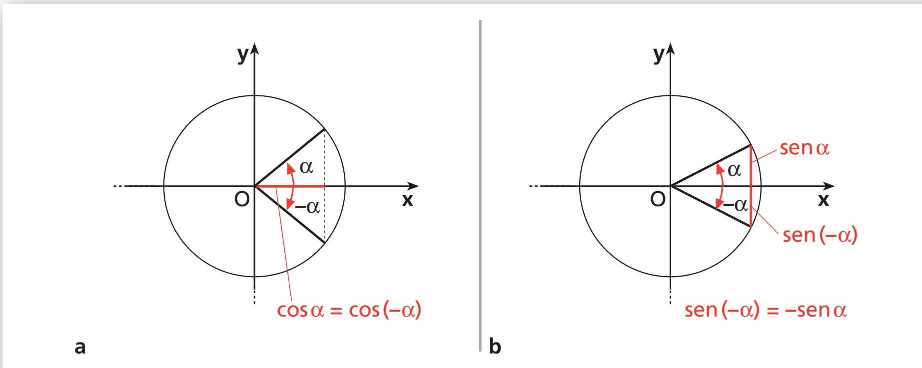
Qualunque sia la posizione di B sulla circonferenza, la sua ordinata e la sua ascissa assumono sempre valori compresi fra -1 e 1, quindi:

$$-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1 \qquad \text{e} \qquad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Il codominio delle funzioni seno e coseno è quindi $[-1; 1]$.

Poiché $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ (figura 5*a*), allora il coseno è una funzione pari, mentre, essendo $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha$ (figura 5*b*), il seno è una funzione dispari.

► Figura 5



I grafici delle funzioni $y = \text{sen}\ x$, $y = \cos x$

Studiando il grafico della funzione nel riferimento cartesiano Oxy, indichiamo l'angolo con x.

Possiamo costruire il grafico della funzione $y = \text{sen}\ x$ in $[0; 2\pi]$ riportando sull'asse x i valori degli angoli e, in corrispondenza, sull'asse y le ordinate dei punti che stanno sulla circonferenza goniometrica (figura 6).

Analogamente, per ottenere il grafico della funzione coseno, riportiamo sulle ordinate di un piano cartesiano le ascisse dei punti della circonferenza goniometrica in corrispondenza degli angoli (figura 7).

▼ Figura 6

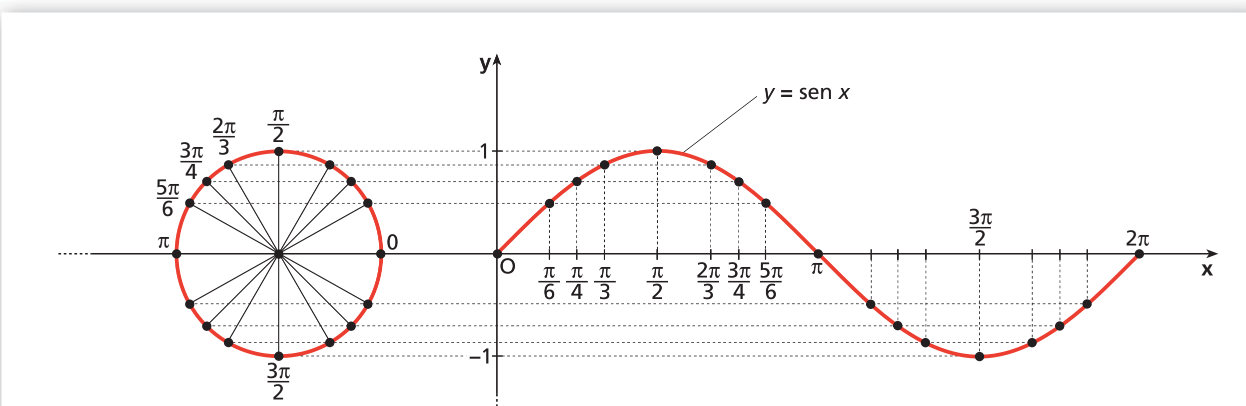


Grafico di $y = \text{sen}\ x$ in $[0; 2\pi]$.

Bergamini, Trifone, Barozzi **MANUALE BLU 2.0 DI MATEMATICA - Vol.3** © Zanichelli 2012 *Moduli O+Q+Beta*

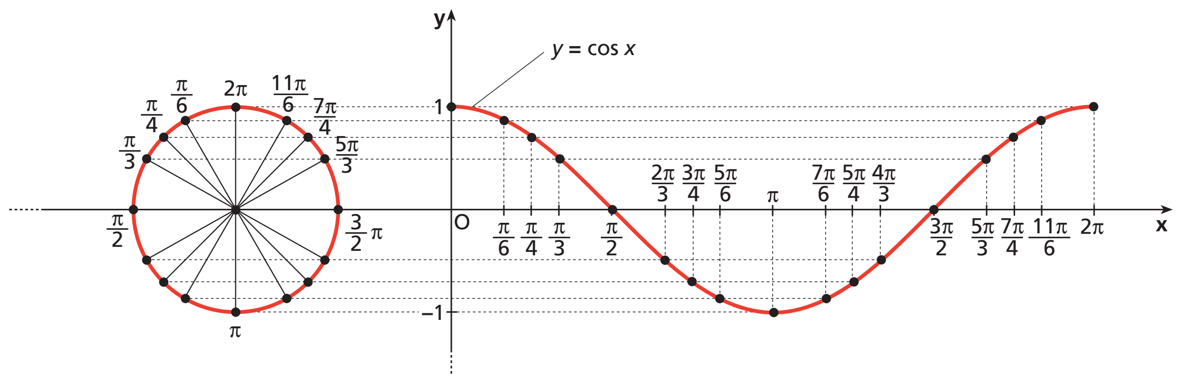


Grafico di $y = \cos x$ in $[0; 2\pi]$.

▲ **Figura 7**

Il periodo delle funzioni seno e coseno

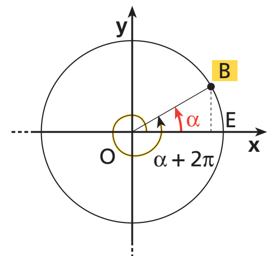
Dopo aver percorso un giro completo, il punto B può ripetere lo stesso movimento quante volte si vuole.

Le funzioni sen α e cos α assumono di nuovo gli stessi valori ottenuti al «primo giro», ossia:

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}(\alpha + 2\pi) = \text{sen}(\alpha + 2 \cdot 2\pi) = \ldots$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 2 \cdot 2\pi) = \ldots$$

Le funzioni seno e coseno sono quindi periodiche di periodo 2π. Possiamo scrivere, in modo sintetico:

$$\text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \text{sen}\,\alpha,$$
$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

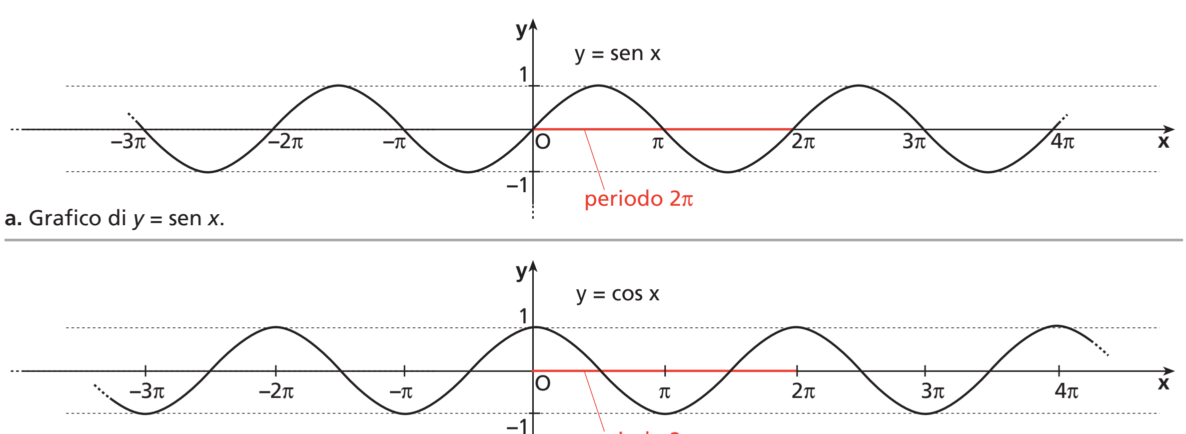


In generale, una funzione $y = f(x)$ è detta **periodica** di periodo p (con $p > 0$) se per ogni x e per qualsiasi numero k intero si ha $\boldsymbol{f(x) = f(x + kp)}$.

La sinusoide e la cosinusoide

Il grafico completo della funzione seno si chiama **sinusoide** (figura 8*a*), quello della funzione coseno **cosinusoide** (figura 8*b*).

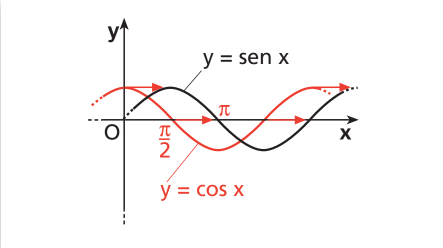
▼ **Figura 8** **Grafici completi di $y = \text{sen}\,x$ e $y = \cos x$. Le funzioni sono periodiche di periodo 2π, quindi i grafici si ottengono ripetendo ogni 2π i grafici relativi all'intervallo $[0; 2\pi]$.**



a. Grafico di $y = \text{sen}\,x$.

b. Grafico di $y = \cos x$.

I grafici delle due funzioni sono sovrapponibili con una traslazione di vettore parallelo all'asse x e di modulo $\frac{\pi}{2}$.



▶ Figura 9

In sintesi

- La funzione $y = \operatorname{sen} x$ ha per dominio $\mathbb{R}$ e per codominio l'intervallo $[-1; 1]$, ossia:

  $$\operatorname{sen} x: \mathbb{R} \to [-1; 1].$$

  Pertanto si ha $|\operatorname{sen} x| \leq 1$.
  È una funzione dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.
- La funzione $y = \cos x$ ha per dominio $\mathbb{R}$ e per codominio $[-1; 1]$, ossia:

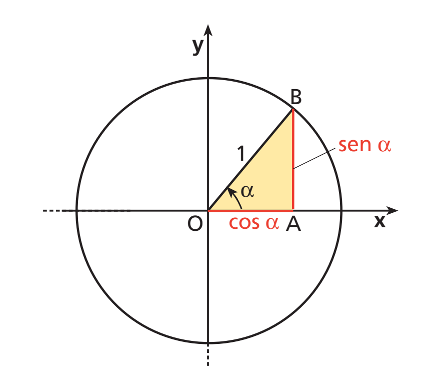
  $$\cos x: \mathbb{R} \to [-1; 1].$$

  Si ha quindi $|\cos x| \leq 1$.
  È una funzione pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

La prima relazione fondamentale

Poiché il punto $B(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$ appartiene alla circonferenza goniometrica, le sue coordinate soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = 1$:

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$ **prima relazione fondamentale della goniometria.**



◀ **Figura 10** $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$. La relazione esprime il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo *OAB*.

Da questa relazione è possibile ricavare $\operatorname{sen}\alpha$ conoscendo $\cos\alpha$ e viceversa.

Infatti, se è noto $\cos\alpha$, si ha: $\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

Viceversa, se si conosce $\operatorname{sen}\alpha$, si ha: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$.

3. LA FUNZIONE TANGENTE

IN PRATICA
▶ Videolezione 32

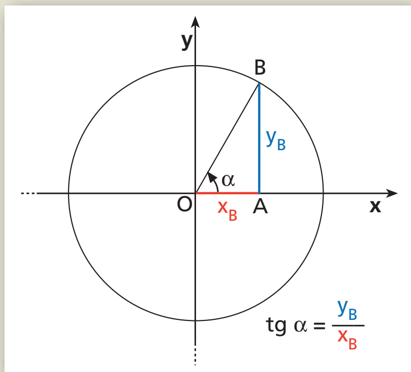
La tangente di un angolo

DEFINIZIONE

Tangente di un angolo

Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica di centro O. Definiamo tangente di α la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ordinata e l'ascissa dal punto B:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y_B}{x_B}.$$



Il rapporto $\frac{y_B}{x_B}$ non esiste quando $x_B = 0$, ossia per $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Il **dominio** della funzione tangente è quindi:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

● Nel linguaggio scientifico internazionale la tangente di α si indica con $\tan\alpha$.

● La tangente di un angolo non esiste quando B si trova sull'asse y, ossia quando l'angolo è uguale a $\frac{\pi}{2}$ o a $\frac{3}{2}\pi$ o a un altro valore che ottieni da $\frac{\pi}{2}$ aggiungendo multipli interi dell'angolo piatto.

Un altro modo di definire la tangente

Consideriamo la circonferenza goniometrica e la retta tangente a essa nel punto E, origine degli archi.

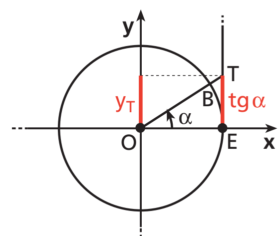
Il prolungamento del lato termine OB interseca la retta tangente nel punto T (figura a lato).

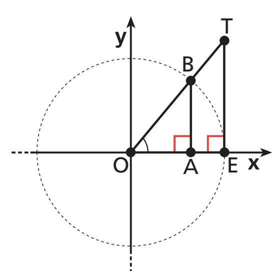
La tangente dell'angolo α può anche essere definita come il valore dell'ordinata del punto T, ossia:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = y_T.$$

Dimostriamo che le due definizioni date sono equivalenti.

● «Tangente» deriva dal latino *tangere*, che significa «toccare».





DIMOSTRAZIONE

Consideriamo i due triangoli rettangoli OAB e OET. Essi sono simili, quindi:

$$\overline{TE} : \overline{BA} = \overline{OE} : \overline{OA} \quad \rightarrow \quad y_T : y_B = 1 : x_B,$$

da cui

$$y_T = \frac{y_B \cdot 1}{x_B}, \quad \text{ossia } y_T = \frac{y_B}{x_B}.$$

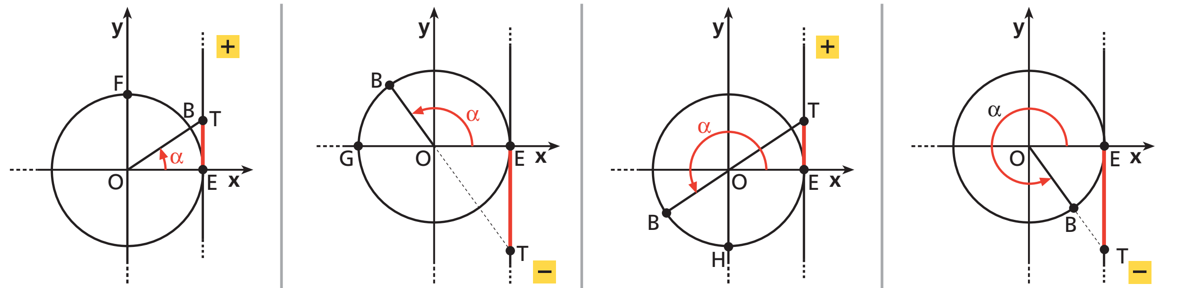
Pertanto:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y_B}{x_B} = y_T.$$

Le variazioni della funzione tangente

Studiamo come varia y_T al variare dell'angolo α.

▼ Figura 11



a. Finché *B* percorre il primo quarto di circonferenza, l'ordinata di *T* è positiva e aumenta man mano che *B* si avvicina al punto *F*. Quando $B \equiv F$, la tangente non esiste.

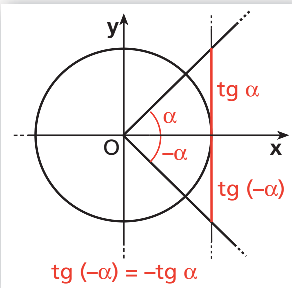
b. Quando *B* percorre la circonferenza nel secondo quadrante, l'ordinata *T* è negativa, e aumenta fino a quando $B \equiv G$, in cui $y_T = 0$.

c. Se *B* si trova nel terzo quadrante, l'ordinata di *T* è di nuovo positiva e va aumentando fino a quando $B \equiv H$ e *T* non esiste più. La tangente di $\frac{3\pi}{2}$ non esiste.

d. Quando *B* percorre l'ultimo quarto di circonferenza, l'ordinata di *T* ritorna negativa e aumenta fino allo 0.

A differenza delle funzioni seno e coseno, la funzione tangente può assumere qualunque valore reale.
Il suo codominio è quindi $\mathbb{R}$, mentre, come abbiamo visto, il suo dominio è: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Essendo $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ (figura 12), la tangente è una funzione dispari.

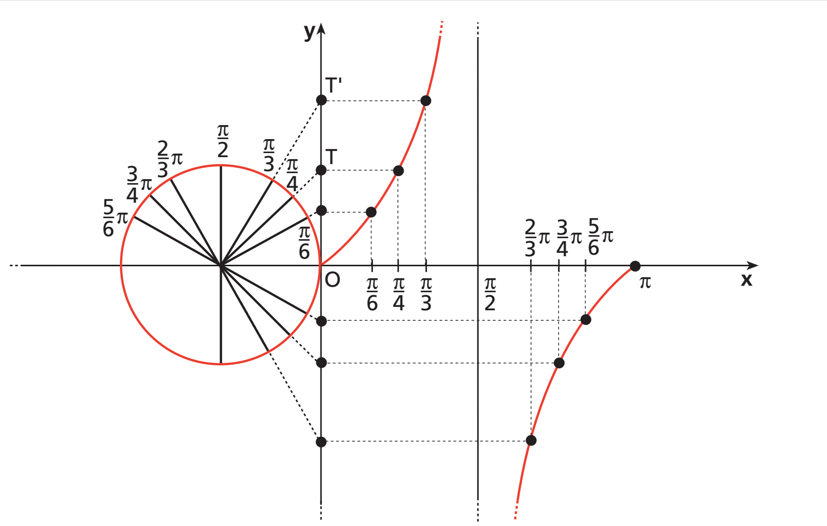


▶ Figura 12

Il grafico della funzione $y = \operatorname{tg} x$

Tracciamo il grafico della funzione $y = \operatorname{tg} x$ nell'intervallo $[0; \pi]$, riportando sull'asse x i valori degli angoli e sull'asse y le ordinate dei punti corrispondenti sulla retta tangente alla circonferenza goniometrica.

▶ Figura 13



Notiamo come, man mano che x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$:

- con valori minori di $\frac{\pi}{2}$, il valore della funzione tende a diventare sempre più grande; diremo che tende a $+\infty$;
- con valori maggiori di $\frac{\pi}{2}$, il valore della funzione, che è negativo, tende a diventare sempre più grande in valore assoluto; diremo che tende a $-\infty$.

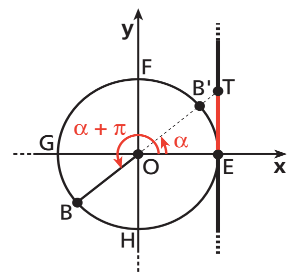
Il grafico della tangente, per valori di x che si approssimano a $\frac{\pi}{2}$, si avvicina sempre più alla retta di equazione $x = \frac{\pi}{2}$, che viene detta **asintoto verticale** del grafico.

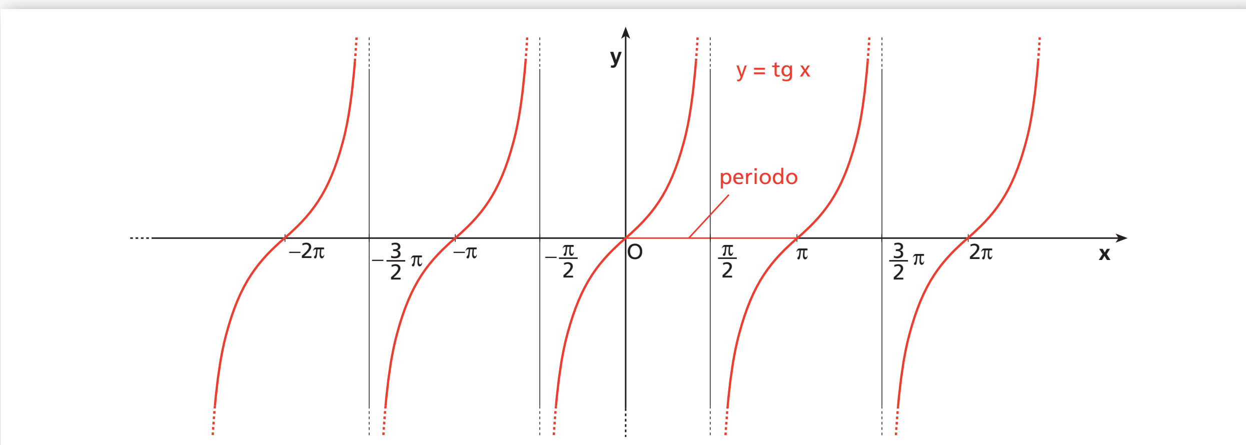
Il periodo della funzione $y = \text{tg}\, x$

La tangente è una funzione periodica di periodo π, cioè qualunque sia l'angolo α, è:

$$\text{tg}\, \alpha = \text{tg}(\alpha + k \cdot \pi), \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Questo si può vedere usando la definizione di tangente (figura a lato).
Il grafico completo della tangente si chiama **tangentoide**.





▲ **Figura 14** Rappresentazione della tangentoide.

In sintesi

La funzione $y = \text{tg}\, x$ ha per dominio $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e codominio $\mathbb{R}$, ossia:

$$\text{tg}\, x: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}.$$

Ha infiniti asintoti verticali di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

È una funzione dispari, quindi è simmetrica rispetto all'origine.

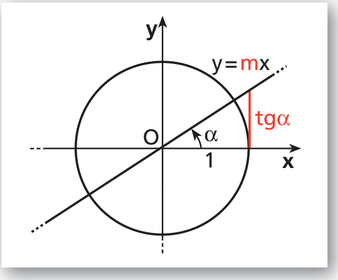
Il significato goniometrico del coefficiente angolare di una retta

Tracciamo la circonferenza goniometrica e la retta di equazione $y = mx$ (figura 15), da cui:

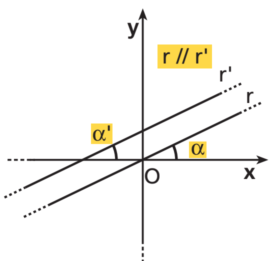
$$m = \frac{y}{x}.$$

In particolare, se $x = 1$, $y = \text{tg}\,\alpha$ e

$$m = \frac{\text{tg}\,\alpha}{1} = \text{tg}\,\alpha.$$



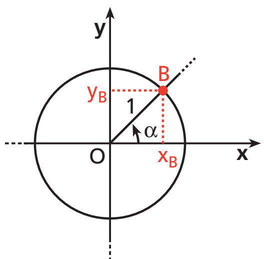
▶ Figura 15



α=α', m=m'=>m'=tg α'

Il coefficiente angolare della retta è uguale alla tangente dell'angolo fra la retta e l'asse x. Dalla geometria analitica sappiamo che due rette sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare e, inoltre, rette parallele formano angoli congruenti con l'asse x. Ciò permette di estendere il risultato ottenuto anche a rette che non passano per l'origine (figura a lato).

La seconda relazione fondamentale



Consideriamo la circonferenza goniometrica. Per definizione:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y_B}{x_B},$$

$$y_B = \text{sen}\,\alpha \quad \text{e} \quad x_B = \cos\alpha.$$

Sostituiamo sen α e cos α nell'espressione della tangente:

$$\boxed{\textbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\textbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}}{\textbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}}.$$

Questa è la **seconda relazione fondamentale** della goniometria: la tangente di un angolo è data dal rapporto, quando esiste, fra il seno e il coseno dello stesso angolo.

4. LE FUNZIONI SECANTE E COSECANTE

DEFINIZIONE

Secante e cosecante di un angolo

Dato un angolo α, si chiama:

- secante di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di cos α, purché cos α sia diverso da 0. Si indica con sec α:

$$\textbf{sec}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\textbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}, \quad \text{con} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

- cosecante di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di sen α, purché sen α sia diverso da 0. Si indica con cosec α:

$$\textbf{cosec}\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{1}}{\textbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}}, \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0 + k\pi.$$

● Secante e cosecante, come seno e coseno, sono funzioni periodiche di periodo 2π.

Un altro modo di definire la secante e la cosecante

Consideriamo la circonferenza goniometrica, l'angolo α e la tangente in B che intersechi gli assi x e y rispettivamente in S e S' (figura 16).

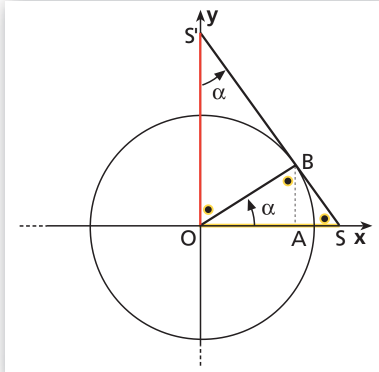
Essendo simili i triangoli OBA e OBS, si ha

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OS} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos\alpha : 1 = 1 : \overline{OS},$$

da cui:

$$\overline{OS} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha.$$



◀ Figura 16

Analogamente, essendo simili i triangoli OAB e OBS', si ha

$$\overline{BA} : \overline{OB} = \overline{OB} : \overline{OS'} \rightarrow \operatorname{sen}\alpha : 1 = 1 : \overline{OS'},$$

da cui:

$$\overline{OS'} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

La secante di α è quindi l'ascissa del punto S, intersezione della retta tangente nel punto B, associato ad α sulla circonferenza goniometrica, con l'asse x.
Analogamente, la cosecante di α è l'ordinata del punto S', intersezione della retta tangente in B con l'asse y.

I grafici della secante e della cosecante

Il grafico del reciproco di una funzione

Dal grafico di una funzione $y = f(x)$ è possibile ricavare l'andamento della funzione:

$$y = g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

1. Se il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x in x_0, ossia se $f(x_0) = 0$, *per valori di x che tendono a x_0*, il valore del reciproco è:
- positivo e con valori sempre più grandi, man mano che ci si avvicina a x_0, se $f(x) > 0$; diremo che $g(x)$ tende a $+\infty$;
- negativo e con valori sempre più grandi in valore assoluto, se $f(x) < 0$; diremo che $g(x)$ tende a $-\infty$.

Avvicinandosi al punto x_0 il grafico della funzione $g(x)$ si avvicina a quello della retta $x = x_0$, che viene detta **asintoto verticale** del grafico di $g(x)$.

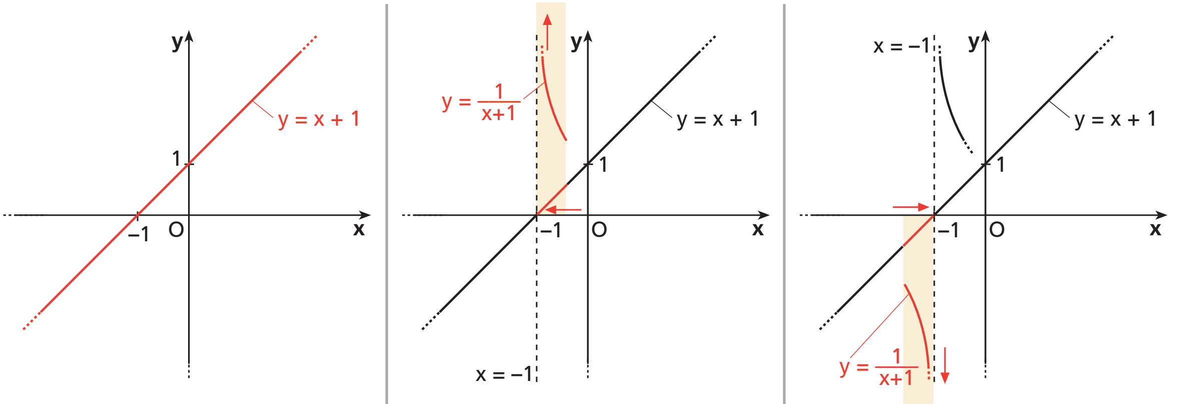
Per esempio, considerata la funzione $y = x + 1$, $f(x_0) = 0$ se $x_0 = -1$.

Il suo reciproco $y = \frac{1}{x+1}$ tende a $+\infty$ quando x tende a -1 e $x > -1$, cioè x è «a destra» di -1, perché $f(x)$ assume valori sempre più grandi. Analogamente, il reciproco tende a $-\infty$ per x che tende a -1 «da sinistra». La retta $x = -1$ è asintoto verticale (figura 17).

2. Quando $f(x)$ tende a $+\infty$ o a $-\infty$, il suo reciproco $g(x)$ si avvicina sempre più a 0, cioè $g(x)$ tende a 0 (figura 18).

3. Se $f(a) = 1$, è vero anche che $g(a) = \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{1} = 1$. a è allora *ascissa di un punto di intersezione* dei grafici della funzione e del suo reciproco.

Analogamente, se $f(b) = -1$, $g(b) = \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{-1} = -1$, cioè *$b$ è ascissa di un punto di intersezione* (figura 19*a*).

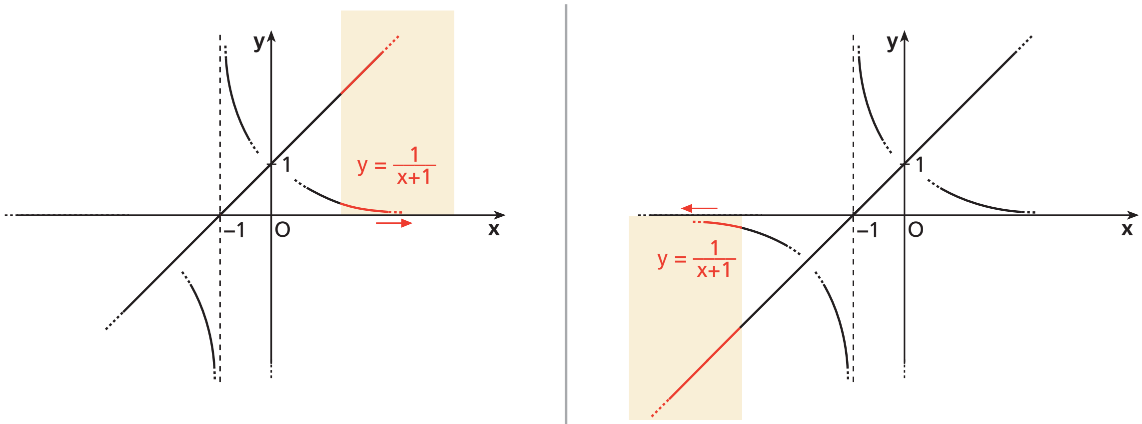


a. Grafico di $y = x + 1$.

b. Tendenza a $+\infty$ di $y = \frac{1}{x+1}$, quando x tende a -1 da destra.

c. Tendenza a $-\infty$ di $y = \frac{1}{x+1}$, quando x tende a -1 da sinistra.

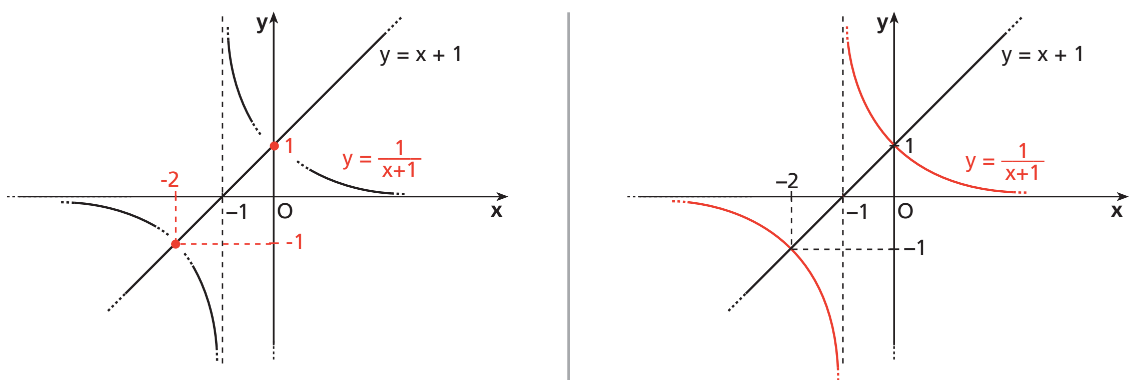
▲ **Figura 17**



a. Tendenza a 0 di $y = \frac{1}{x+1}$, quando $y = x + 1$ tende a $+\infty$.

b. Tendenza a 0 di $y = \frac{1}{x+1}$, quando $y = x + 1$ tende a $-\infty$.

▲ **Figura 18**

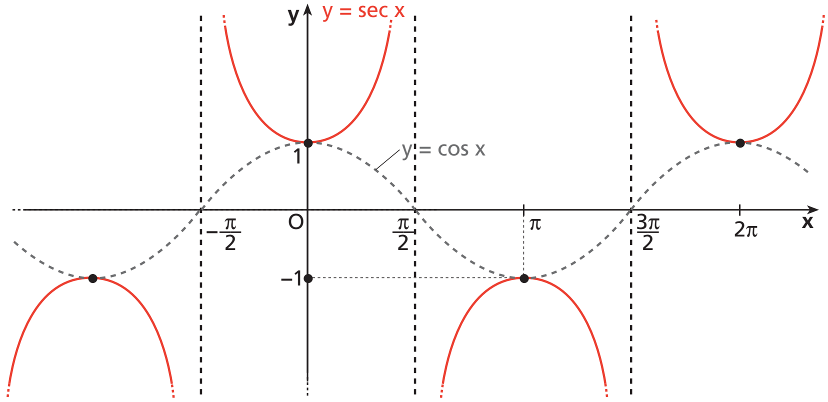


a. La funzione e il suo reciproco hanno in comune i punti (0; 1) e (–2; –1).

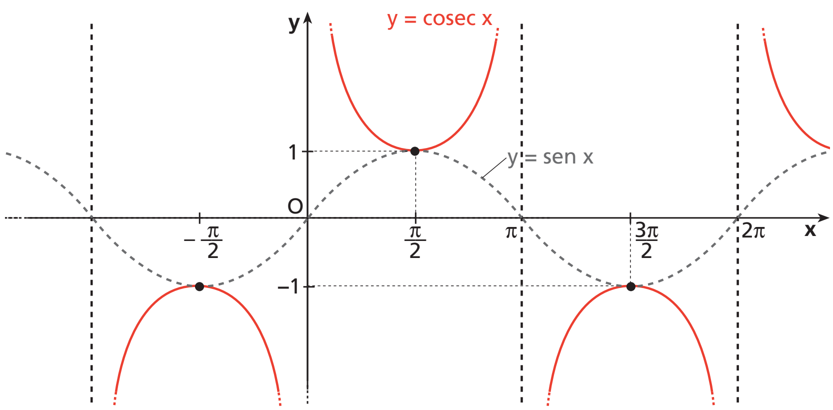
b. Le informazioni raccolte permettono di tracciare il grafico «probabile» di $y = \frac{1}{x+1}$.

▲ **Figura 19**

I grafici delle funzioni secante e cosecante sono rappresentati in figura 20.



a. Grafico della secante.



b. Grafico della cosecante.

◀ **Figura 20** I grafici delle funzioni secante e cosecante.

Il grafico di una funzione si ottiene da quello dell'altra con una traslazione di vettore parallelo all'asse x e modulo $\frac{\pi}{2}$.

I domini delle due funzioni sono deducibili dalla loro definizione. Quindi:

$y = \sec x$ ha dominio $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$y = \operatorname{cosec} x$ ha dominio $\mathbb{R} - \{0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

Dalla figura 20 si deduce che il codominio, sia della funzione secante, sia della funzione cosecante, è $\mathbb{R} -]-1; 1[$.

Sono asintoti verticali le rette di equazione:

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per il grafico della secante;

$x = 0 + k\pi$ per il grafico della cosecante.

Come il coseno, la secante è una funzione pari, mentre la cosecante è una funzione dispari, come il seno.

IN PRATICA
▶ Videolezione 32

5. LA FUNZIONE COTANGENTE

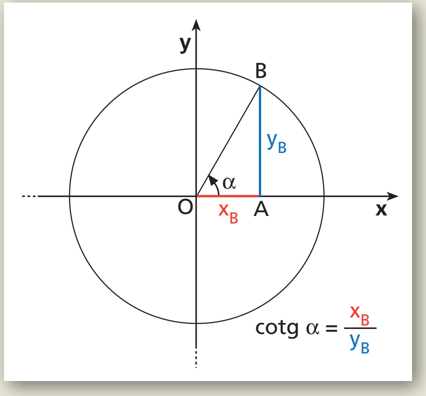
La cotangente di un angolo

DEFINIZIONE

Cotangente di un angolo

Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica. Definiamo cotangente di α la funzione che associa ad α il rapporto, quando esiste, fra l'ascissa e l'ordinata del punto B:

$$\mathbf{cotg}\ \alpha = \frac{x_B}{y_B}.$$



● La cotangente di α si può indicare anche con cotan α.

La cotangente di un angolo **non** esiste quando il punto B si trova sull'asse x, ossia quando l'angolo misura 0, π e tutti i multipli interi di π.

Il **dominio** della funzione cotangente è quindi:

$$\alpha \neq k \cdot \pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Poiché $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B}{x_B}$ e $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{x_B}{y_B}$, risulta $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$, da cui:

$$\boxed{\mathbf{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\mathbf{tg}\ \alpha}}, \text{ con } \alpha \neq k\frac{\pi}{2}.$$

● L'uguaglianza vale in un insieme più ristretto rispetto al dominio della cotangente.

La condizione posta deriva dal fatto che consideriamo $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, quindi occorre scartare gli angoli in cui non esiste $\operatorname{tg} \alpha$, cioè $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, e quelli in cui $\operatorname{tg} \alpha = 0$, cioè $\alpha = 0 + k\pi$, perciò: $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$.

Dalla definizione di cotangente deriva anche che:

$$\boxed{\mathbf{cotg}\ \alpha = \frac{\mathbf{cos}\ \alpha}{\mathbf{sen}\ \alpha}}, \text{ con } \alpha \neq k\pi.$$

● L'uguaglianza vale in tutto il dominio della cotangente, quindi è equivalente alla definizione formulata in precedenza.

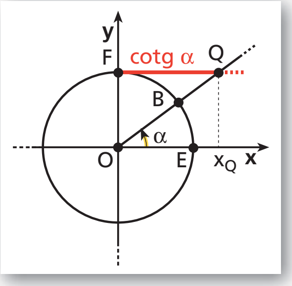
Un altro modo di definire la cotangente

Consideriamo la circonferenza goniometrica e la retta tangente a essa nel punto F.

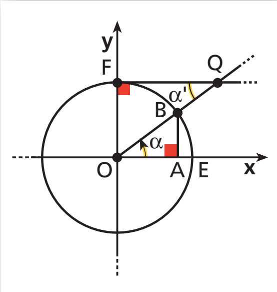
Il prolungamento del lato termine OB interseca la retta tangente nel punto Q.

La cotangente dell'angolo α può anche essere definita come l'ascissa del punto Q, ossia:

$$\operatorname{cotg} \alpha = x_Q.$$



▶ Figura 21



Infatti, i due triangoli rettangoli OAB e OFQ sono simili, essendo $FQ \,//\, OA$ e quindi $\alpha \cong \alpha'$ perché alterni interni di rette parallele tagliate da una trasversale.

◀ **Figura 22**

Scriviamo la proporzione fra le misure dei cateti corrispondenti,

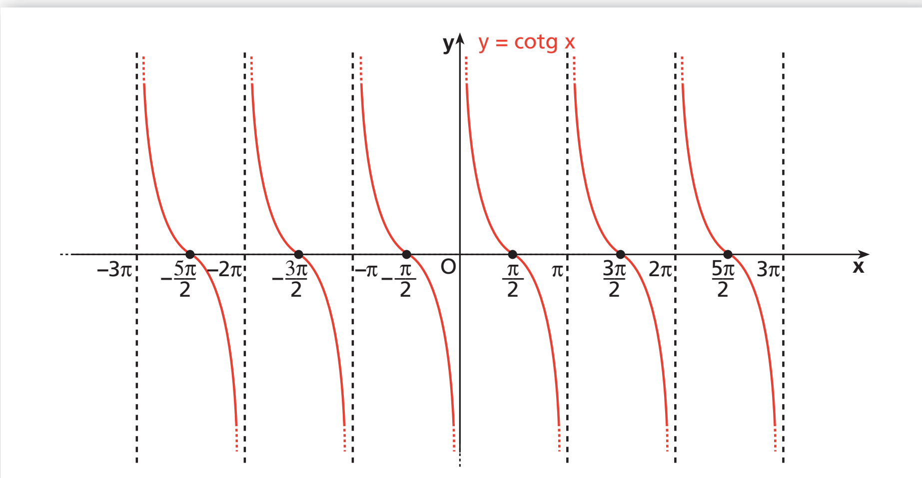
$$\overline{FQ} : \overline{OA} = \overline{FO} : \overline{BA} \quad \rightarrow \quad x_Q : x_B = 1 : y_B \quad \rightarrow \quad x_Q = \frac{x_B}{y_B}.$$

Pertanto:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{x_B}{y_B} = x_Q.$$

Il grafico della funzione $y = \operatorname{cotg} x$

Come la tangente, anche la funzione cotangente può assumere qualunque valore reale. Il codominio della cotangente è quindi $\mathbb{R}$, mentre il suo dominio è: $x \neq k \cdot \pi$. Le rette di equazione $x = k\pi$ sono asintoti verticali del suo grafico.

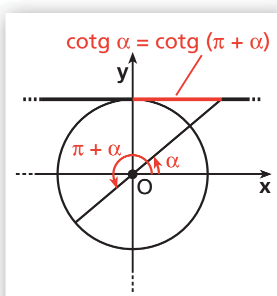


◀ **Figura 23** Il grafico della funzione cotangente.

Il periodo della funzione cotangente

In analogia con la tangente, la funzione cotangente risulta periodica di periodo π:

$$\operatorname{cotg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{cotg} \alpha, \quad \text{con} \;\; k \in \mathbb{Z}.$$



▶ **Figura 24**

6. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI

Mediante le proprietà delle figure geometriche, riusciamo a calcolare il valore delle funzioni goniometriche di alcuni angoli particolari.

- $\frac{\pi}{6}$ radianti $= 30°$;

  $\frac{\pi}{3}$ radianti $= 60°$.

L'angolo $\frac{\pi}{6}$

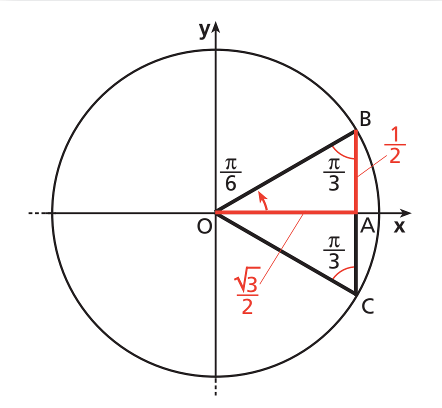
Consideriamo la circonferenza goniometrica e il triangolo OAB, rettangolo in A, con $\alpha = A\widehat{O}B = \frac{\pi}{6}$ e $\overline{OB} = 1$.

Poiché in un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari, $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{3}$.

Prolungando il lato BA, otteniamo sulla circonferenza il punto C.

Il triangolo OBC è equilatero, poiché ha gli angoli di $\frac{\pi}{3}$, quindi $\overline{BC} = 1$.

AB è la metà di BC, ossia $\overline{AB} = \frac{1}{2}$.



◀ Figura 25

Ricaviamo $\overline{OA}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAB:

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pertanto:

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

- Noto $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, per determinare $\cos\frac{\pi}{6}$ potremmo anche utilizzare direttamente la prima relazione fondamentale:

  $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = 1.$

Ricaviamo la tangente e la cotangente di $\frac{\pi}{6}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

- Possiamo ricavare anche secante e cosecante:

  $\sec\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$

  $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}} = 2.$

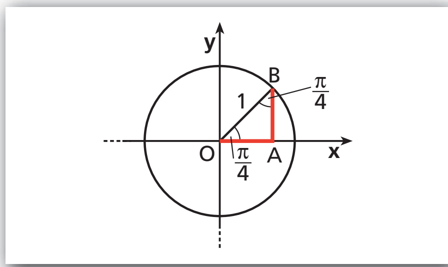
Pertanto:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.}$$

L'angolo $\frac{\pi}{4}$

Consideriamo la circonferenza goniometrica e il triangolo OAB, rettangolo in A, con $\alpha = A\widehat{O}B = \frac{\pi}{4}$ e $\overline{OB} = 1$.

Poiché l'angolo in B è complementare di α, risulta $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{4}$ e il triangolo OAB è anche isoscele.



◄ Figura 26

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo AOB:

$$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2.$$

Poiché $\overline{OA} = \overline{AB}$ e $\overline{OB} = 1$:

$$2\overline{OA}^2 = 1 \;\rightarrow\; \overline{OA}^2 = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \overline{OA} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Calcoliamo tangente e cotangente di $\frac{\pi}{4}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1; \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = 1.$$

Pertanto:

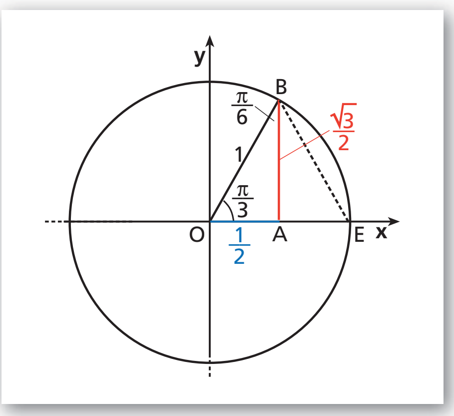
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

L'angolo $\frac{\pi}{3}$

Nel cerchio goniometrico, consideriamo il triangolo OAB, rettangolo in A, con $\alpha = A\widehat{O}B = \frac{\pi}{3}$ e, di conseguenza, $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{6}$.

Congiungendo B con E, otteniamo il triangolo OEB che ha i tre lati congruenti.

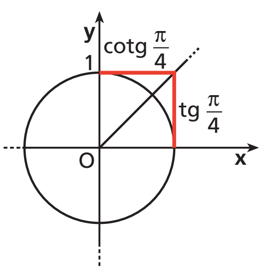
BA è l'altezza del triangolo OEB e OA è la metà di OE, quindi $\overline{OA} = \frac{1}{2}$.



- $\frac{\pi}{4}$ radianti $= 45°$.

- Poiché $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, otteniamo:

$$\sec\frac{\pi}{4} = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$



◄ Figura 27

Ricaviamo $\overline{AB}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAB:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ricaviamo la tangente e la cotangente di $\frac{\pi}{3}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Pertanto:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \text{ e } \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- $\sec\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

  $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}.$

- Per gli angoli di $\frac{\pi}{6}$ e di $\frac{\pi}{3}$ i valori di seno e coseno, di tangente e cotangente e di secante e cosecante sono scambiati. Per esempio:

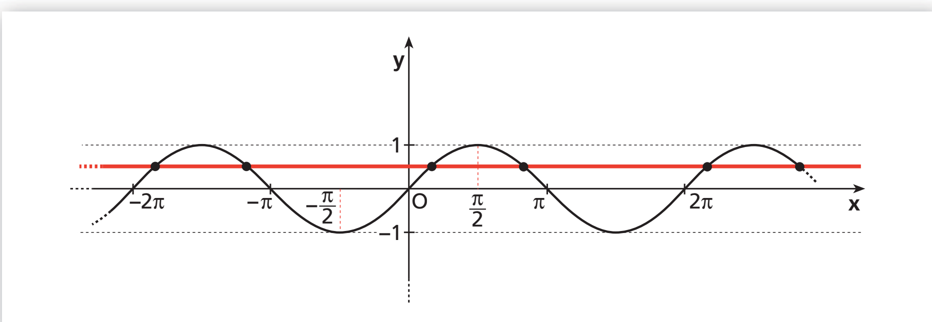
  $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$

7. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

La funzione inversa di $y = \operatorname{sen} x$

Una funzione è invertibile, ossia ammette la funzione inversa, solo se è biiettiva.

La funzione $y = \operatorname{sen} x$ non è biiettiva perché non è iniettiva. Infatti, se consideriamo una retta $y = k$, parallela all'asse x, con $-1 \le k \le 1$, essa interseca il grafico della funzione seno in infiniti punti, quindi ogni valore del codominio $[-1; 1]$ di $y = \operatorname{sen} x$ è immagine di infiniti valori del dominio $\mathbb{R}$.



► **Figura 28** La retta $y = k$, con $-1 \le k \le 1$, interseca il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ in infiniti punti, quindi la funzione seno non è iniettiva.

La restrizione del dominio

Se restringiamo il dominio della funzione seno all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, la funzione $y = \operatorname{sen} x$ risulta biiettiva e dunque invertibile.

La funzione inversa del seno si chiama *arcoseno*.

DEFINIZIONE

Arcoseno

Dati i numeri reali x e y, con

$$-1 \le x \le 1 \text{ e } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2},$$

diciamo che y è l'arcoseno di x se x è il seno di y.

Scriviamo: $y = \text{arcsen}\, x$.

$y = \text{arcsen}\, x$ $\Leftrightarrow$ $x = \text{sen}\, y$

$D = [-1; 1]$

$C = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

- Con D indichiamo il dominio, con C il codominio.

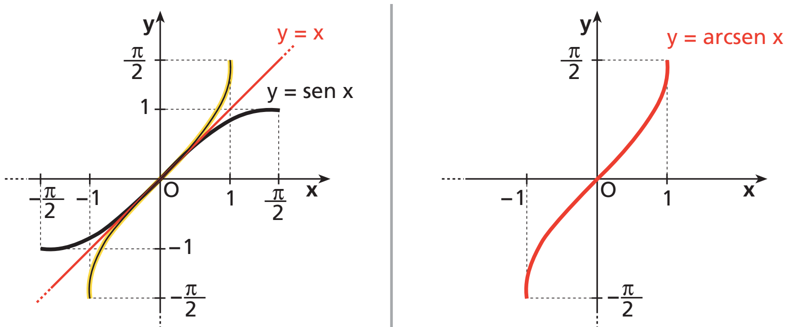
- L'arcoseno di x si può indicare anche con $\text{sen}^{-1} x$ o $\arcsin x$ o $\sin^{-1} x$.

ESEMPIO

$$\text{arcsen}\, 1 = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \text{sen}\, \frac{\pi}{2} = 1; \quad \text{arcsen}\, \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow \text{sen}\, \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Per ottenere il grafico della funzione $y = \text{arcsen}\, x$, basta costruire il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante del grafico della funzione $y = \text{sen}\, x$, considerata nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- Data una qualsiasi funzione f invertibile, il grafico della funzione inversa f^{-1} si ottiene da quello di f per simmetria rispetto alla retta bisettrice del I e III quadrante, che ha equazione $y = x$.



a. Dato il grafico di $y = \text{sen}\, x$ in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, tracciamo il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ottenendo il grafico della funzione inversa.

b. Grafico della funzione $y = \text{arcsen}\, x$.

◀ **Figura 29**

Le considerazioni fatte per la funzione inversa di $y = \text{sen}\, x$ valgono anche per le funzioni inverse delle altre funzioni goniometriche.

La funzione inversa di $y = \cos x$

Se consideriamo $[0; \pi]$ come dominio, la funzione coseno è biiettiva e quindi invertibile.

La funzione inversa del coseno si chiama *arcocoseno*.

DEFINIZIONE

Arcocoseno

Dati i numeri reali x e y, con $-1 \le x \le 1$ e $0 \le y \le \pi$, diciamo che y è l'arcocoseno di x se x è il coseno di y.

Scriviamo: $y = \arccos x$.

$y = \arccos x$ $\Leftrightarrow$ $x = \cos y$

$D = [-1; 1]$

$C = [0; \pi]$

- L'arcocoseno di x si può indicare anche con $\cos^{-1} x$.

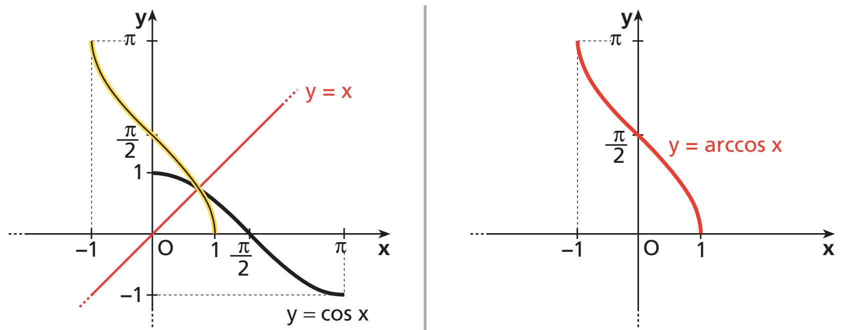
ESEMPIO

$$\arccos(-1) = \pi \leftrightarrow \cos\pi = -1;$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La figura 30 illustra il grafico della funzione arcocoseno.

▶ Figura 30



a. Dato il grafico di $y = \cos x$ in $[0; \pi]$, tracciamo il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, ottenendo il grafico della funzione inversa.

b. Grafico della funzione $y = \arccos x$.

La funzione inversa di $y = \operatorname{tg} x$

Se consideriamo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ come dominio, la funzione tangente è biiettiva e quindi invertibile.

La funzione inversa della tangente si chiama *arcotangente*.

DEFINIZIONE

Arcotangente

Dati i numeri reali x e y, con $x \in \mathbb{R}$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, diciamo che y è l'arcotangente di x se x è la tangente di y.

Scriviamo: $y = \operatorname{arctg} x$.

$y = \operatorname{arctg} x$ $\Updownarrow$ $x = \operatorname{tg} y$

$D = \mathbb{R}$

$C = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

● L'arcotangente di x si può indicare anche con $\operatorname{tg}^{-1} x$ o $\arctan x$ o $\tan^{-1} x$.

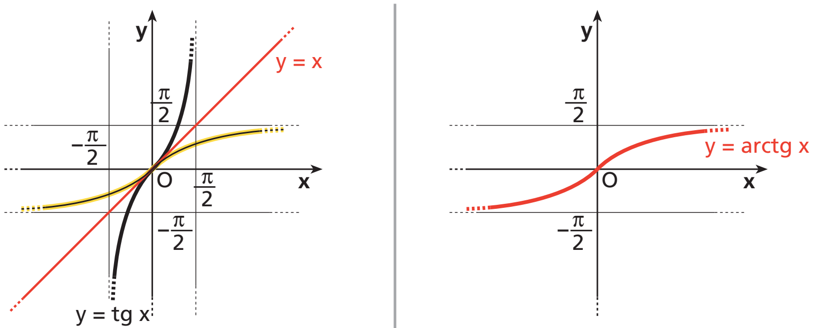
ESEMPIO

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Studiamo il grafico della funzione arcotangente.

◀ Figura 31



a. Dato il grafico di $y = \text{tg}\, x$ in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, tracciamo il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, ottenendo quello della funzione inversa.

b. Grafico della funzione $y = \text{arctg}\, x$.

La funzione inversa di $y = \text{cotg}\, x$

DEFINIZIONE

Arcocotangente

Dati i numeri reali x e y, con $x \in \mathbb{R}$ e $0 < y < \pi$, diciamo che y è l'arcocotangente di x se x è la cotangente di y.
Scriviamo: $y = \text{arccotg}\, x$.

$$y = \text{arccotg}\, x \Leftrightarrow x = \text{cotg}\, y$$

$D = \mathbb{R}$

$C =]0; \pi[$

● L'arcocotangente di x si può indicare anche con $\text{cotg}^{-1} x$ o $\text{arccot}\, x$ o $\text{cotan}^{-1} x$.

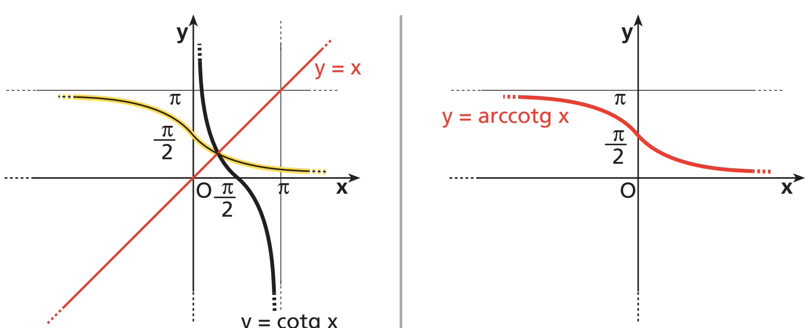
ESEMPIO

$$\text{arccotg}\ 0 = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \text{cotg}\ \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\text{arccotg}\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \text{cotg}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Disegniamo il grafico della funzione arcocotangente.

◀ Figura 32



a. Considerato il grafico di $y = \text{cotg}\, x$ in $]0; \pi[$, per ottenere quello della funzione inversa tracciamo il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

b. Grafico della funzione $y = \text{arccotg}\, x$.

Le funzioni goniometriche e la calcolatrice

Per determinare il valore di una funzione goniometrica di un angolo possiamo impiegare la calcolatrice.
I tasti da utilizzare sono <sin> per la funzione seno, <cos> per il coseno e <tan> per la tangente.
Se la misura dell'angolo è in gradi sul display deve comparire la scritta DEG (dall'inglese *degree*).
È possibile scegliere anche l'opzione RAD per la misura in radianti.
Le funzioni arcoseno, arcocoseno e arcotangente si indicano, rispettivamente, con $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$. Per ottenerle, di solito deve essere premuto prima il tasto relativo alla «seconda funzione», indicato a volte con <INV>, e poi il tasto della funzione seno, coseno o tangente.

IN PRATICA
▶ Videolezione 33

8. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Dai grafici delle funzioni goniometriche si ottengono grafici di altre funzioni mediante traslazioni, simmetrie, dilatazioni e contrazioni. Ne proporremo alcuni negli esercizi, mentre qui ci occupiamo soltanto delle *funzioni sinusoidali*.

Le funzioni sinusoidali

Ricordiamo che il grafico di una funzione del tipo $y = nf\left(\frac{x}{m}\right)$, rispetto a quello di $y = f(x)$, ha:
- contrazione orizzontale se $m < 1$;
- dilatazione orizzontale se $m > 1$;
- contrazione verticale se $n < 1$;
- dilatazione verticale se $n > 1$.

La funzione

$$y = 3 \text{ sen} \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

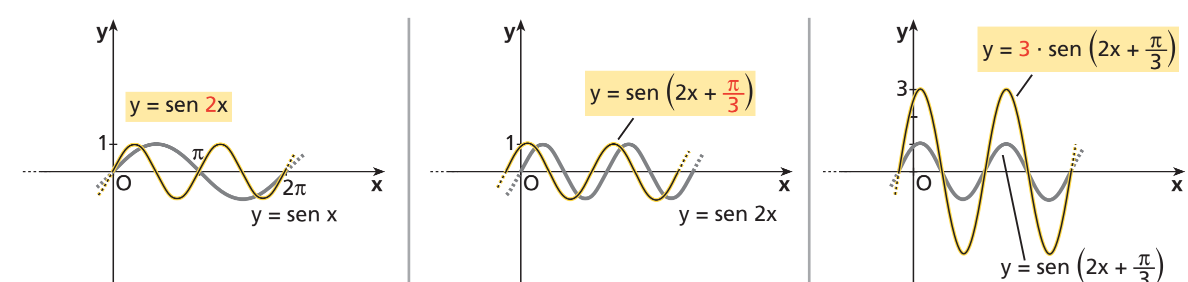
è della forma $y = nf\left(\frac{x}{m}\right)$:

$$\text{con } m = \frac{1}{2} < 1;\ n = 3 > 1.$$

Applichiamo al grafico di $y = \text{sen } x$ le seguenti trasformazioni:
- contrazione orizzontale con $m = \frac{1}{2}$;
- traslazione di vettore $\vec{v}\left(-\frac{\pi}{6}; 0\right)$;
- dilatazione verticale con $n = 3$.

La funzione $y = 3 \text{ sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ è nulla in $2x + \frac{\pi}{3} = 0$, cioè in $x = -\frac{\pi}{6}$.

▼ **Figura 33** Grafico di $y = 3 \text{ sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.



a. Grafico di $y = \text{sen } 2x$.

b. Grafico di $y = \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

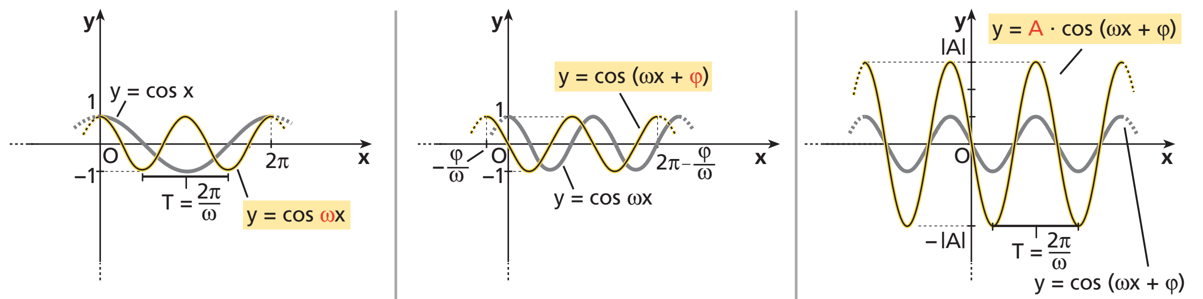
c. Grafico di $y = 3 \text{ sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Una funzione di questo tipo è detta **sinusoidale** e viene applicata molto spesso nello studio di fenomeni fisici.

In generale, sono dette funzioni sinusoidali le funzioni del tipo:

$$y = A\,\mathrm{sen}(\omega x + \varphi), \quad y = A\cos(\omega x + \varphi), \quad \text{con } A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Studiamo il grafico di $y = A\cos(\omega x + \varphi)$.



a. Il cambiamento di ω modifica il periodo della funzione.

b. Il cambiamento di φ produce una traslazione orizzontale.

c. Il cambiamento di |*A*| genera una dilatazione o contrazione verticale.

▲ **Figura 34** Il grafico di una funzione sinusoidale del tipo: $y = A\cos(\omega x + \varphi)$.

Il codominio della funzione è $[-|A|; |A|]$. Il numero $|A|$ è detto **ampiezza** della funzione sinusoidale, il numero ω **pulsazione** e φ **sfasamento** o **fase iniziale**.

Se è $\omega > 0$, il periodo è:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}.$$

● Se $\omega < 0$, è $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

Infatti:

$$f(x) = A\,\mathrm{sen}(\underline{\omega x + \varphi}) = A\,\mathrm{sen}(\underline{\omega x + \varphi} + 2k\pi) = A\,\mathrm{sen}[(\omega x + 2k\pi) + \varphi] =$$

$$= A\,\mathrm{sen}\left[\omega\left(x + \frac{2k\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = f\left(x + k\frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x + kT),$$

● La funzione seno ha periodo 2π e cioè: $\mathrm{sen}\,\underline{\alpha} = \mathrm{sen}(\underline{\alpha} + 2k\pi)$.

quindi, poiché una funzione $f(x)$ è periodica di periodo T quando $f(x) = f(x + kT)$, nel nostro caso si ha $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Il periodo delle funzioni goniometriche

Nella tabella riassumiamo i periodi delle principali funzioni goniometriche che abbiamo studiato.

Funzione	Periodo
sen x, cos x	2π
sen$(\omega x + \varphi)$, cos$(\omega x + \varphi)$	$\frac{2\pi}{\omega}$
tg x, cotg x	π
tg$(\omega x + \varphi)$, cotg$(\omega x + \varphi)$	$\frac{\pi}{\omega}$

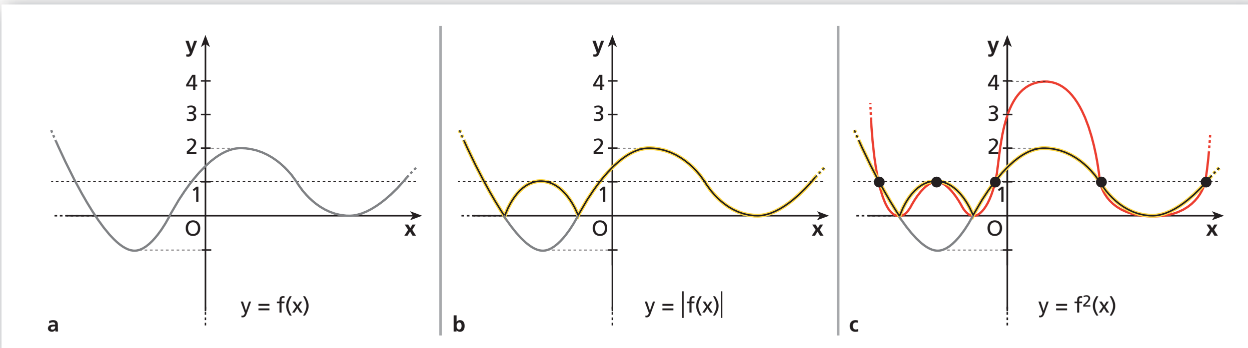
IN PRATICA
▶ Videolezione 34

Il grafico di $y = f^2(x)$

Dato il grafico della funzione $y = f(x)$, cerchiamo di ricavare da esso l'andamento di quello di $y = f^2(x)$.
Tenendo conto che elevando al quadrato un numero, sia positivo sia negativo, si ottiene un numero positivo che non dipende dal segno del numero iniziale ma soltanto dal suo valore assoluto, consideriamo $y = |f(x)|$. Abbiamo le seguenti informazioni:

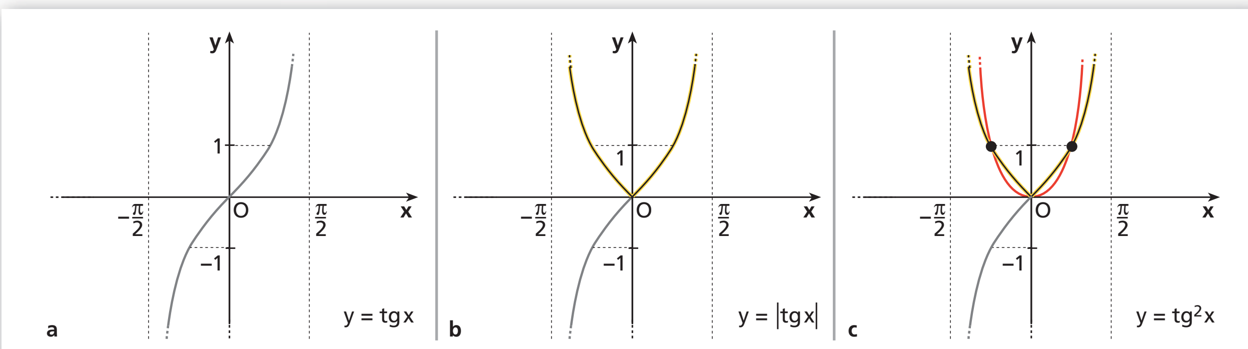
1. se $|f(x)| = 1$, $f^2(x) = 1$;
2. se $f(x) = 0$, $f^2(x) = 0$;
3. se $|f(x)| < 1$, $f^2(x) < |f(x)|$;
4. se $|f(x)| > 1$, $f^2(x) > |f(x)|$.

Esaminiamo un esempio.



▲ **Figura 35**

Ricaviamo anche l'andamento del grafico di $y = \mathrm{tg}^2 x$ in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.



▲ **Figura 36**

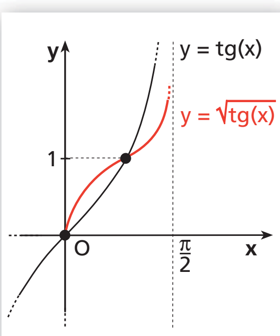
Il grafico di $y = \sqrt{f(x)}$

Dato il grafico della funzione $y = f(x)$, ricaviamo l'andamento di quello di $y = \sqrt{f(x)}$.
Sfruttiamo queste informazioni:

1. se $f(x) < 0$, $\sqrt{f(x)}$ non esiste;
2. se $f(x) = 0$, $\sqrt{f(x)} = 0$;
3. se $f(x) = 1$, $\sqrt{f(x)} = 1$;
4. se $0 < f(x) < 1$, $f(x) < \sqrt{f(x)} < 1$;
5. se $f(x) > 1$, $1 < \sqrt{f(x)} < f(x)$.

A fianco, come esempio, riportiamo il grafico di $y = \sqrt{\mathrm{tg}\, x}$ in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

▼ **Figura 37**

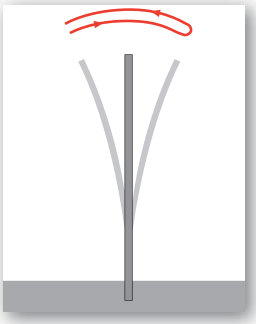


ESPLORAZIONE

Suoni e moti armonici

Il moto oscillatorio armonico

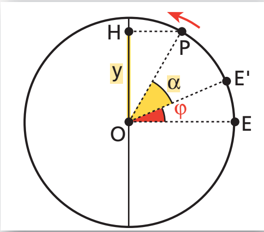
Le vibrazioni di una sorgente sonora e quelle delle particelle di un mezzo di propagazione sono descrivibili come movimenti periodici oscillatori attorno a una posizione di equilibrio.



◀ La vibrazione di una lamina che genera un suono. Ogni corpo che vibra genera compressioni e rarefazioni delle molecole del mezzo di propagazione. Esse si propagano sotto forma di onde di pressione, mettendo in vibrazione le particelle del mezzo.

Se un oggetto in vibrazione viene riportato nella posizione di equilibrio da una forza proporzionale allo spostamento rispetto a quella posizione, si parla di **forza elastica** e di **moto armonico**.
Un'**oscillazione completa**, cioè quella che riporta l'oggetto nella posizione di partenza, viene sempre compiuta nello stesso tempo ***T***, detto **periodo**.

Il moto armonico di una particella



Per descrivere l'andamento di un moto oscillatorio armonico, consideriamo il moto uniforme di un punto P su di una circonferenza di raggio A. Tracciamo il diametro verticale e supponiamo che il moto sia in senso antiorario, partendo dal punto E'. La proiezione H di P sul diametro verticale descrive un moto armonico attorno al centro della circonferenza. La sua distanza y da O è

$$y = A\,\mathrm{sen}\,(\alpha + \varphi) \rightarrow y = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi),$$

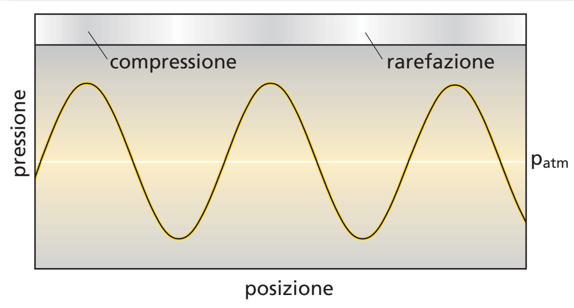
dove $\omega = \frac{\alpha}{t}$ è la velocità angolare costante che è data dalla relazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
Abbiamo così ottenuto che l'equazione che descrive il moto armonico di una sorgente sonora, o di una particella del mezzo di propagazione, è una funzione sinusoidale.
Di solito, per descrivere il moto, si considera anche la **frequenza** $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, che indica il numero di oscillazioni per unità di tempo.

Attività

Onde e suoni

Se esaminiamo la propagazione di un suono nei vari punti del mezzo che circonda la sorgente, troviamo che essa può ancora essere descritta mediante una funzione sinusoidale, come nella figura. Al variare del tempo la funzione sinusoidale si sposta e le rarefazioni e le compressioni delle molecole si propagano nel mezzo.

- Fai una ricerca sul legame fra le caratteristiche dell'onda sinusoidale e i caratteri distintivi del suono.



▲ Grafico che rappresenta la pressione dell'aria in funzione della posizione rispetto alla sorgente sonora.

Cerca nel Web:
suono caratteristiche onda sinusoidale, timbro strumenti musicali

ROTOLARE PER MISURARE

Come funziona una rotella misuratrice?

Il quesito completo a pag. 633

Per le strade

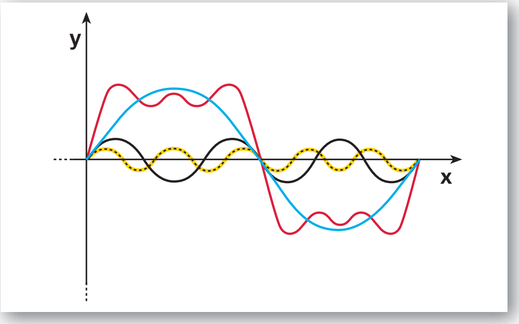
Un tecnico che camminando spinge una rotella misuratrice misura la lunghezza di un tratto di strada.
Lo strumento è composto da una ruota gommata che gira sul terreno e da un contatore che conta i giri, o le parti di giro, che la ruota compie.
In realtà, il tecnico non legge sul contatore il numero di giri compiuti, ma direttamente una lunghezza in metri.
Il funzionamento della rotella si basa sulla proporzionalità tra angoli al centro e lunghezze dei corrispondenti archi. Il contatore misura in radianti gli angoli che la ruota spazza girando e li converte in lunghezze.

Su una carta geografica

Nelle rotelle multiscala per leggere le carte geografiche il funzionamento è lo stesso: il contatore è dato da un ago che si muove man mano che la rotella corre sulla carta.
La rotella in questo caso è molto più piccola per seguire meglio i particolari della mappa. C'è quindi bisogno di un demoltiplicatore di giri che trasformi i numerosi giri della rotellina in frazioni di angolo giro sul quadrante.
Sul disco della rotella sono tracciate circonferenze colorate: ognuna corrisponde a una delle possibili scale in cui sono disegnate le mappe. Su ogni circonferenza sono riportate le misure espresse in kilometri. La circonferenza che corrisponde alla scala della carta che stiamo leggendo indica i kilometri del percorso che ci interessa.
In corrispondenza di un certo movimento della rotella, l'ago spazza lo stesso angolo per tutte le diverse circonferenze, ma ogni arco di circonferenza rappresenta una misura diversa letta nella scala opportuna.

Onde e sinusoidi

La sinusoide è la curva che rappresenta la funzione seno. Questa descrive molti fenomeni ondulatori presenti in natura, come per esempio il suono o le onde generate dalla caduta di un sasso nell'acqua.
Quando si sommano due o più sinusoidi, spesso si trova una curva che non è più una sinusoide, ma che continua a essere periodica.
Nell'esempio della figura, se, punto per punto, sommi algebricamente le ordinate delle tre sinusoidi, ottieni l'onda disegnata in rosso.
Viceversa, si dimostra che è possibile scomporre un'onda periodica complessa in una somma di sinusoidi più semplici da analizzare.



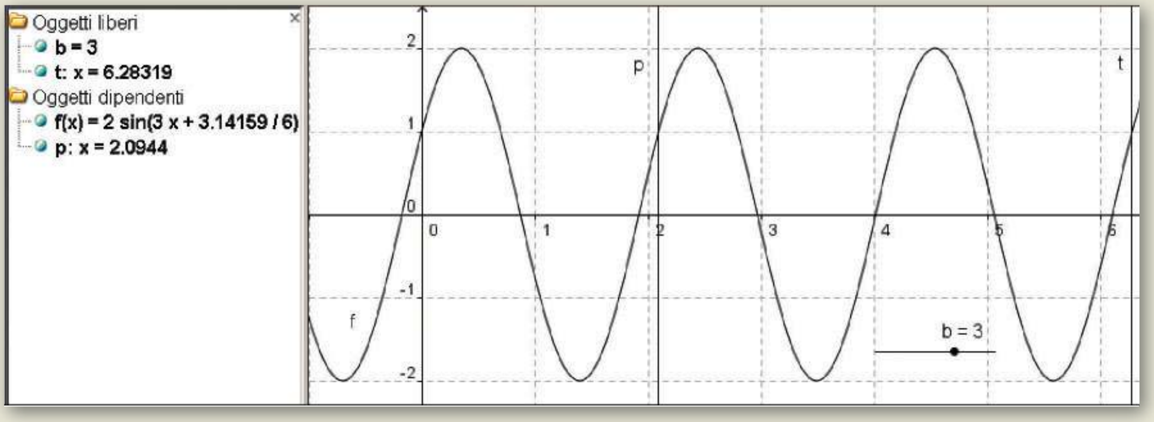
LABORATORIO DI MATEMATICA
LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

ESERCITAZIONE GUIDATA

Per studiare l'influenza che il coefficiente b ha sull'andamento delle funzioni definite dalla legge da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ $f: x \mapsto 2\,\text{sen}\left(bx + \frac{\pi}{6}\right)$, costruiamo un foglio da disegno di GeoGebra che ne mostri i grafici in relazione ai valori assegnati a b.

- Apriamo GeoGebra e attiviamo una *slider*, alla quale diamo il nome b, e stabiliamo l'intervallo di variazione di b da 1 a 4 con incremento 1.
- Nella riga di inserimento digitiamo l'espressione delle funzioni, dipendente dal parametro b: f(x) = 2*sin(b*x + π/6).
- Con INVIO la immettiamo nella finestra algebrica e il sistema contemporaneamente ne mostra il grafico nell'area del disegno (figura 1).
- Per delimitare un periodo della funzione sinusoidale, dato da $T = \frac{2\pi}{b}$, inseriamo la retta p: $x = \frac{2\pi}{b}$. In figura 1 vediamo il caso $b = 3$.
- Per confrontarlo con il periodo fondamentale 2π, immettiamo la retta t: $x = 2\pi$.

▼ Figura 1



- Se spostiamo con il mouse il corsoio della *slider*, vediamo che la funzione sinusoidale forma b periodi all'interno del periodo fondamentale $[0; 2\pi[$.

Nel sito: ▶ 1 esercitazione guidata ▶ 4 esercitazioni in più

Esercitazioni

Con l'aiuto del computer traccia i grafici delle funzioni in relazione ai valori assegnati ai coefficienti letterali.

1 $f(x) = a\cos(bx + c)$

2 $f(x) = (ax + b)\,\text{sen}\,x$

3 $f(x) = a\arccos x - b$

4 $f(x) = a\,\text{sen}\,x + b\cos x$

5 $f(x) = a\,\text{tg}\,(bx + c)$

6 $f(x) = \text{arcsen}\,(ax + b)$

7 $f(x) = a\,\text{arctg}\,x + b$

8 $f(x) = a\,\text{sen}\,x + b\,\text{sen}\,2x$

Bergamini, Trifone, Barozzi MANUALE BLU 2.0 DI MATEMATICA - Vol.3 © Zanichelli 2012 Moduli O+Q+Beta

LA TEORIA IN SINTESI

LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

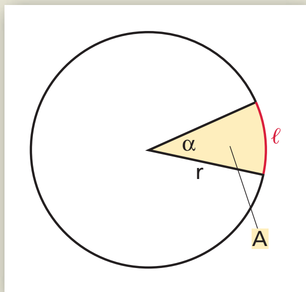
1. LA MISURA DEGLI ANGOLI

- Un angolo può essere misurato in **gradi** oppure in **radianti**.
Un grado è la 360ª parte dell'angolo giro.
Un radiante è l'angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.
Vale la proporzione $\alpha° : \alpha_{rad} = 360° : 2\pi$, che permette di passare da gradi a radianti e viceversa.

ESEMPIO: 30° equivale a $\frac{\pi}{6}$ radianti, perché:

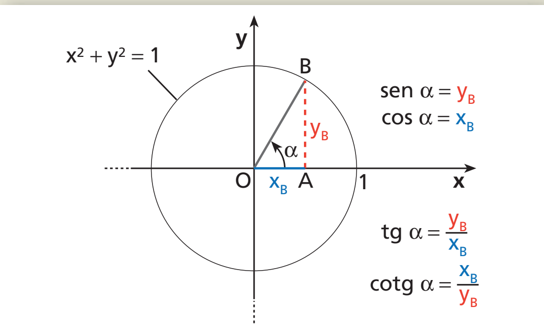
$$30° : \alpha = 360° : 2\pi \rightarrow \alpha = \frac{30° \cdot 2\pi}{360°} = \frac{\pi}{6}.$$

- Se in una circonferenza α è la misura in radianti di un angolo al centro e r la misura del raggio:
  - la **lunghezza dell'arco** è $l = \alpha r$;
  - l'**area del settore circolare** è $A = \frac{1}{2}\alpha r^2 = \frac{1}{2}lr$.



2. 3. 4. 5. LE FUNZIONI SENO, COSENO, TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE, COSECANTE

- Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il suo lato termine e la circonferenza goniometrica. Si dice:
  - **seno di α** (sen α) il valore dell'ordinata di B;
  - **coseno di α** (cos α) il valore dell'ascissa di B;
  - **tangente di α** (tg α) il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa di B; è definita per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;
  - **cotangente di α** (cotg α) il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata di B; è definita per $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.



- **Relazioni fondamentali della goniometria**:

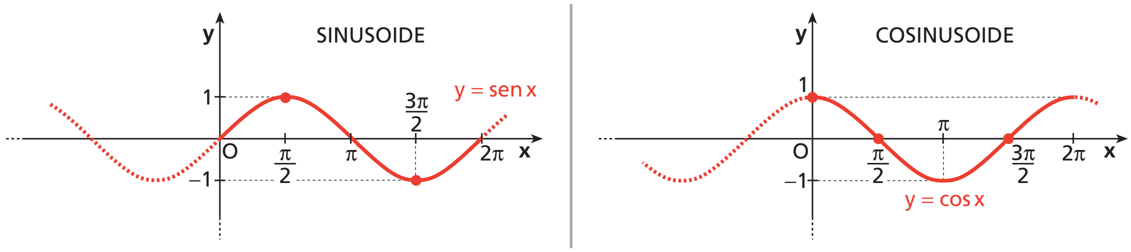
$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \ \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \text{ e } \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}.$$

- **Secante di α**

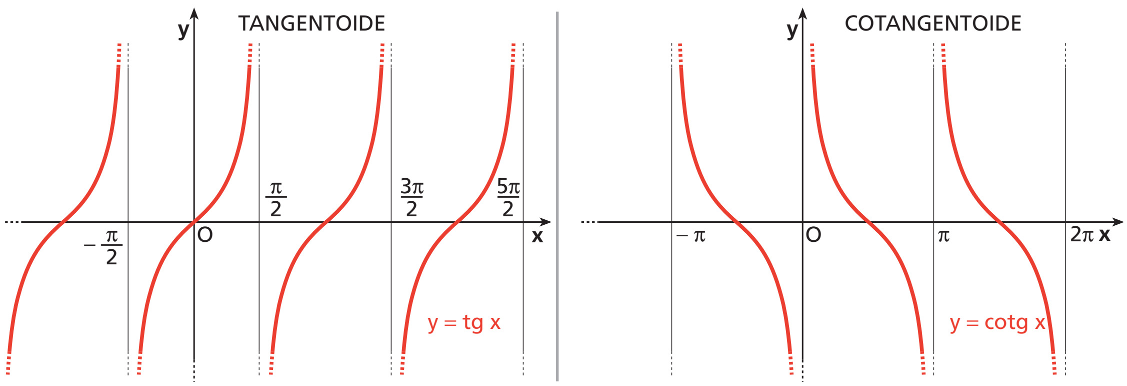
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

- **Cosecante di α**

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}, \text{ con } \alpha \neq 0 + k\pi.$$

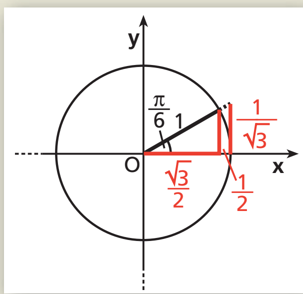


Grafici delle funzioni seno e coseno. Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π.



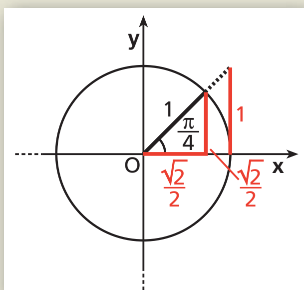
Grafici delle funzioni tangente e cotangente. Le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo π.

6. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI



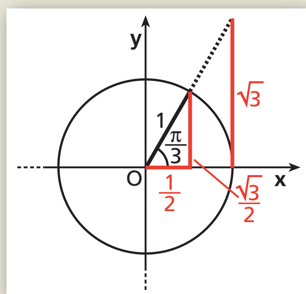
$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.



$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

7. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

- Le **funzioni inverse** delle funzioni seno, coseno, tangente e cotangente sono, rispettivamente, le seguenti (con D indichiamo il dominio, con C il codominio):

- **arcoseno**: $y = \text{arcsen}\, x$

  $D: [-1; 1]$; $C: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

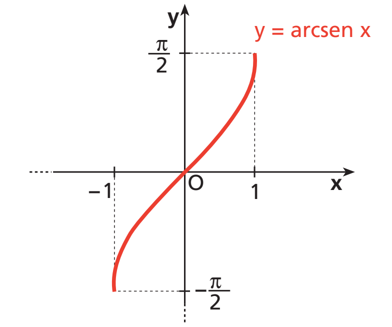


Grafico della funzione $y = \text{arcsen}\, x$.

- **arcocoseno**: $y = \arccos x$

  $D: [-1; 1]$; $C: [0; \pi]$;

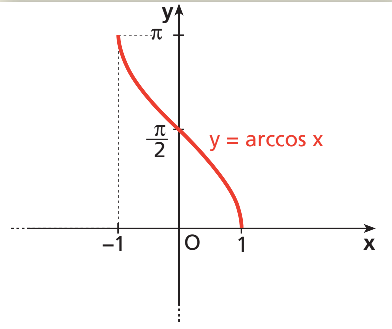


Grafico della funzione $y = \arccos x$.

- **arcotangente**: $y = \text{arctg}\, x$

  $D: \mathbb{R}$; $C: \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$;

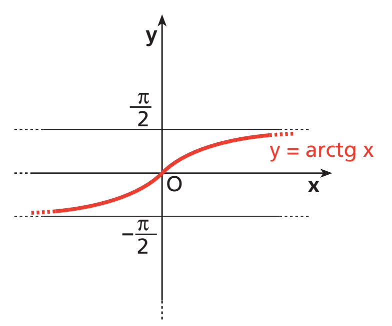


Grafico della funzione $y = \text{arctg}\, x$.

- **arcocotangente**: $y = \text{arccotg}\, x$

  $D: \mathbb{R}$; $C:]0; \pi[$.

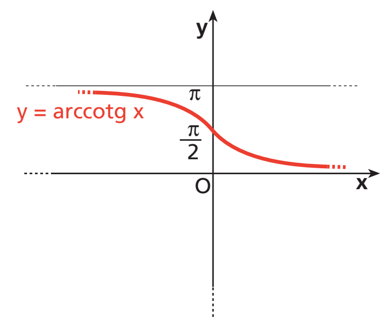


Grafico della funzione $y = \text{arccotg}\, x$.

- I loro grafici si ottengono da quelli delle funzioni di cui sono le inverse, tracciando i simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

8. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

- Dai grafici delle funzioni goniometriche si possono ottenere i grafici di altre funzioni mediante **traslazioni**, **simmetrie**, **dilatazioni** e **contrazioni**.

- **Funzioni sinusoidali**: sono funzioni del tipo

$$y = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi), \quad y = A\cos(\omega x + \varphi),$$

con $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$.

- Si dice:
  - **ampiezza** della funzione sinusoidale il numero $|A|$;
  - **pulsazione** il numero ω;
  - **sfasamento** o **fase iniziale** il numero φ;
  - **periodo** della funzione sinusoidale il numero $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$.

1. LA MISURA DEGLI ANGOLI

▶ Teoria a pag. 634

Gli angoli e la loro misura

Dai gradi sessagesimali ai gradi sessadecimali

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Esprimiamo 25° 32′ 40″ in forma sessadecimale.

Poiché $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$, scriviamo:

$$32' = \left(32 \cdot \frac{1}{60}\right)^{\circ}.$$

Poiché $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ}$, scriviamo:

$$40'' = \left(40 \cdot \frac{1}{3600}\right)^{\circ}.$$

Trasformiamo la misura:

$$25^{\circ}\, 32'\, 40'' = 25^{\circ} + \left(\frac{32}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{40}{3600}\right)^{\circ} =$$
$$= 25^{\circ} + 0{,}5\bar{3}^{\circ} + 0{,}0\bar{1}^{\circ} \simeq 25{,}54^{\circ}.$$

La trasformazione richiesta è la seguente:

$$25^{\circ}\, 32'\, 40'' \simeq 25{,}54^{\circ}.$$

Esprimi in forma sessadecimale le seguenti misure di angoli.

2 0° 59′ 59″; 0° 30′. [1°; 0,5°]

3 1° 59′ 30″; 2° 40″. [1,99°; 2,01°]

4 20° 30′; 60° 20′. [20,5°; 60,3°]

5 15° 30′ 30″; 30° 30′ 30″. [15,5°; 30,5°]

6 44° 59′ 32″; 45° 59′ 60″. [44,99°; 46°]

7 92° 20′ 36″; 140° 26′ 55″. [92,34°; 140,45°]

Dai gradi sessadecimali ai gradi sessagesimali

8 **ESERCIZIO GUIDA**

Trasformiamo 28,07° (forma sessadecimale) in gradi, primi e secondi.

Possiamo scrivere $28{,}07^{\circ} = \boxed{28^{\circ}} + 0{,}07^{\circ}$. Trasformiamo 0,07° in primi, moltiplicando 0,07 per 60 (poiché $1^{\circ} = 60'$):

$$0{,}07^{\circ} = (0{,}07 \cdot 60)' = 4{,}2'.$$

Scriviamo $4{,}2' = \boxed{4'} + 0{,}2'$.

Trasformiamo 0,2′ in secondi, moltiplicando 0,2 per 60 (poiché $1' = 60''$):

$$0{,}2' = (0{,}2 \cdot 60)'' = \boxed{12''}.$$

Pertanto:

$$28{,}07^{\circ} = 28^{\circ}\, 4'\, 12''.$$

Esprimi in gradi, primi e secondi le seguenti misure di angoli, espresse in forma sessadecimale (arrotondando eventualmente i secondi).

9 2,234° [2° 14′ 2″]

10 22,52° [22° 31′ 12″]

11 120,360° [120° 21′ 36″]

12 1,567° [1° 34′ 1″]

13 90,05° [90° 3′]

14 25,251° [25° 15′ 4″]

15 90,5° [90° 30′]

16 60,46° [60° 27′ 36″]

17 100,252° [100° 15′ 7″]

Le operazioni fra angoli espressi in gradi

18 ESERCIZIO GUIDA

Eseguiamo la seguente sottrazione:

$90° - 32° 46' 22''$.

Per poter eseguire la sottrazione, scriviamo 90° in termini di primi e secondi.

Poiché $1° = 60'$, possiamo scrivere:

$90° = 89° 60'$.

Poiché $1' = 60''$, possiamo scrivere:

$90° = 89° 59' 60''$.

Ora è possibile eseguire la sottrazione in colonna, fra gradi, primi e secondi:

$$\begin{array}{l} 89° 59' 60'' - \\ 32° 46' 22'' = \\ \hline 57° 13' 38'' \end{array}$$

Esegui le seguenti operazioni fra le misure di angoli.

19 $15° 32' 52'' + 2° 12' 8''$ [$17° 45'$]

20 $185° 2' + 6° 59' 12''$ [$192° 1' 12''$]

21 $27° 2' 3'' + 42° 12' 56'' + 1° 2' 4''$ [$70° 17' 3''$]

22 $102° 50' 18'' + 3° 9' 42''$ [$106°$]

23 $180° - 28° 30' 58''$ [$151° 29' 2''$]

24 $270° - 120° 29' 32''$ [$149° 30' 28''$]

25 $360° - 322° 40' 50''$ [$37° 19' 10''$]

26 $90° - 82° 48' 32''$ [$7° 11' 28''$]

27 $26° - 1° 1' 1''$ [$24° 58' 59''$]

28 $18° 30' 15'' \cdot 2$ [$37° 0' 30''$]

Dai gradi sessagesimali ai radianti e viceversa

29 **COMPLETA** la seguente tabella scrivendo la misura mancante, in gradi o in radianti.

Gradi	90°	0°		180°		30°		270°		
Radianti			$\frac{\pi}{3}$		$\frac{3}{4}\pi$		$\frac{2}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$

Trasforma in radianti le misure dei seguenti angoli, espresse in gradi sessagesimali.

30 15°, 36°, 210°, 300°. $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{5}; \frac{7}{6}\pi; \frac{5}{3}\pi\right]$

31 16°, 27°, 102°, 315°. [0,28; 0,47; 1,78; 5,50]

32 25°, 35°, 72°, 155°. [0,44; 0,61; 1,26; 2,71]

33 $121° 3'$, $200° 36'$, $15° 12' 58''$. [2,11; 3,50; 0,27]

Trasforma in gradi sessagesimali le misure dei seguenti angoli, espresse in radianti.

34 $\frac{4}{5}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{7}{9}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$. [144°; 75°; 140°; 300°]

35 $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{9}{5}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$. [$38°\ 11'\ 50''$; $120°$; $324°$; $270°$]

36 4π, 4, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$. [$720°$; $229°\ 11'$; $143°\ 14'\ 22''$; $450°$]

37 $\frac{3}{8}\pi$, $3{,}405$, $\frac{5}{16}\pi$, $2{,}807$. [$67°\ 30'$; $195°\ 5'\ 32''$; $56°\ 15'$; $160°\ 49'\ 45''$]

38 **COMPLETA** la seguente tabella inserendo la misura mancante.

Gradi sessagesimali	$22°\ 30'$			$31°\ 12'$		$18°\ 1'\ 2''$	
Radianti		$\frac{3}{8}\pi$			8		
Forma decimale			$12{,}5°$				$120{,}34°$

39 Un angolo α misura 0,725 radianti. Trova la misura del suo supplementare in radianti e in gradi. [$138°\ 39'\ 21''$; $2{,}42$]

In un triangolo rettangolo trova le misure in gradi degli angoli acuti α e β utilizzando la condizione indicata.

40 $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ [$\alpha = 22°\ 30'$, $\beta = 67°\ 30'$]

41 $\alpha = \beta - 20°$ [$\alpha = 35°$, $\beta = 55°$]

42 α supera il doppio di β di $15°$. [$\alpha = 65°$, $\beta = 25°$]

43 In un triangolo isoscele ciascun angolo alla base misura $27°$. Trova la misura in radianti dell'angolo al vertice. [2,2]

44 Un angolo di un triangolo misura $32°$, un secondo angolo è $\frac{2}{3}\pi$ radianti. Calcola la misura del terzo angolo in gradi e in radianti. [$28°$; $0{,}49$]

45 Un triangolo ha un angolo doppio di un altro e il terzo angolo misura $24°$. Trova la misura in radianti dei tre angoli del triangolo. [0,42; 0,91; 1,82]

46 Un triangolo ha gli angoli α, β, γ tali che $\alpha = \frac{1}{3}\beta$ e $\beta = \gamma$. Trova la misura in radianti degli angoli α, β, γ. $\left[\alpha = \frac{\pi}{7}; \beta = \gamma = \frac{3}{7}\pi\right]$

47 Un quadrilatero ha due angoli che misurano $148°$ e $\frac{7}{15}\pi$ e gli altri due sono uno i $\frac{3}{5}$ dell'altro. Scrivi le misure degli angoli del quadrilatero in gradi e in radianti. $\left[148°, 84°, 80°, 48°; \frac{37}{45}\pi, \frac{7}{15}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{4}{15}\pi\right]$

Trova la misura, in gradi o in radianti, di due angoli supplementari α e β, utilizzando la condizione indicata.

48 $\alpha - 3\beta = 27°$ [$\alpha = 141°\ 45'$, $\beta = 38°\ 15'$]

49 $\beta - 2\alpha = 80°$ [$\alpha = 33°\ 20'$, $\beta = 146°\ 40'$]

50 $\alpha = \beta + \frac{\pi}{3}$ $\left[\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{\pi}{3}\right]$

51 Calcola la misura, in gradi e in radianti, di un angolo al centro di una circonferenza il cui raggio è uguale a 5 cm e che sottende un arco lungo 23 cm. [263° 33′ 38″; 4,6]

52 Calcola la lunghezza di un arco di circonferenza, con il raggio lungo 7 cm, che sottende un angolo uguale a 4,2 radianti. [29,4 cm]

53 Due archi l_1 e l_2 di due circonferenze, che hanno i raggi r_1 e r_2 rispettivamente uguali a 2 cm e 3,5 cm, sottendono lo stesso angolo. Trova la misura di l_2, sapendo che l_1 misura 4,5 cm. [7,88 cm]

54 Trova l'area di un settore circolare individuato da un arco lungo 22 cm di una circonferenza che ha il raggio lungo 5,2 cm e determina la misura in gradi dell'angolo sotteso dall'arco. [57,2 cm^2; 242° 21′ 40″]

55 Due settori circolari appartengono allo stesso cerchio e hanno area uguale a 12 cm^2 e 15,4 cm^2. Trova le lunghezze degli archi da essi determinati, sapendo che il primo sottende un angolo di 1,5 radianti. [6 cm; 7,7 cm]

56 Un settore circolare ha l'angolo al centro che misura 96° e l'area uguale a 60π. Determina la misura del raggio della circonferenza e dell'arco che è definito dal settore. [15; 8π]

57 Un settore circolare ha area uguale a 12 e perimetro 14. Quanto misurano il raggio e l'angolo al centro corrispondente? $\left[3, \frac{8}{3}\text{ rad}; 4, \frac{3}{2}\text{ rad}\right]$

58 **VERO O FALSO?**

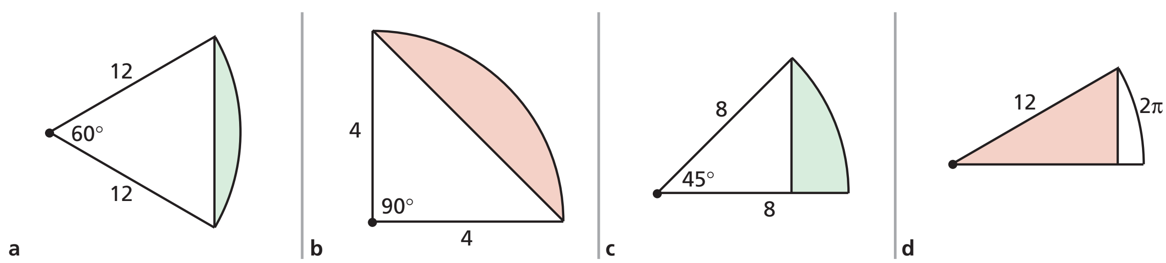
a) Se $\alpha = \frac{9}{4}\pi$, allora $\alpha = 45°$. V F

b) Se $\alpha = 300°$, allora $\alpha = \frac{5}{3}\pi$. V F

c) La misura l di un arco di circonferenza di raggio r che corrisponde a un angolo al centro di α radianti è $l = \frac{1}{2}\alpha r$. V F

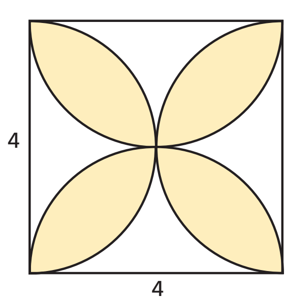
d) L'arco l di una circonferenza di raggio 5 cm, che sottende un angolo $\alpha = 32°$, è lungo $l = 32 \cdot 5 = 160$ cm. V F

59 Trova il perimetro e l'area delle zone colorate.



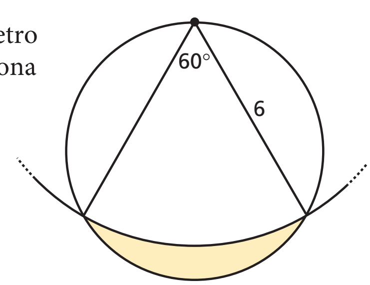
[a) $12 + 4\pi$, $24\pi - 36\sqrt{3}$; b) $2\pi + 4\sqrt{2}$, $4\pi - 8$; c) $2\pi + 8$, $8\pi - 16$; d) $18 + 6\sqrt{3}$, $18\sqrt{3}$]

60 Quanto vale l'area della zona colorata?



[$8(\pi - 2)$]

61 Trova perimetro e area della zona colorata.



$\left[\frac{2}{3}\pi(3 + 2\sqrt{3}); 2(3\sqrt{3} - \pi)\right]$

Gli angoli orientati

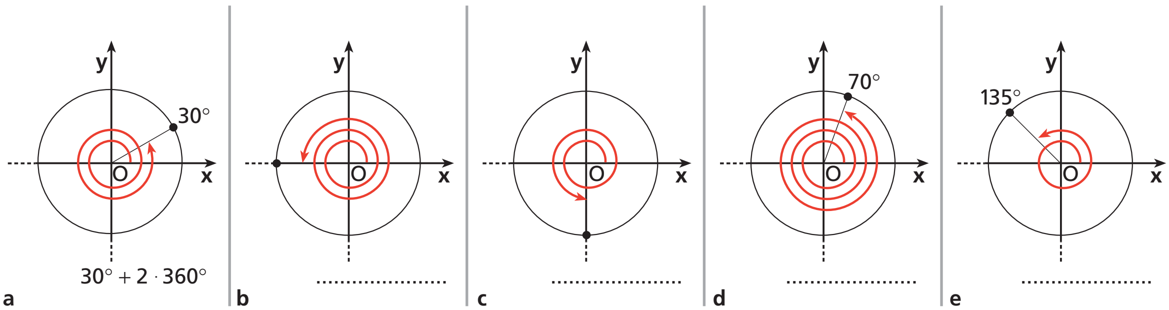
62 Disegna i seguenti angoli orientati facendo riferimento alla circonferenza goniometrica. L'angolo $\widehat{R}$ rappresenta l'angolo retto.

a) $+\widehat{R}$; $\quad -2\widehat{R}$; $\quad -\frac{1}{2}\widehat{R}$. $\qquad$ b) $+3\widehat{R}$; $\quad +\frac{3}{2}\widehat{R}$; $\quad -\frac{5}{2}\widehat{R}$.

63 Disegna i seguenti angoli, facendo riferimento alla circonferenza goniometrica.

390°; $\quad$ 765°; $\quad$ −420°; $\quad$ 450°; $\quad$ 1200°.

64 **COMPLETA** scrivendo in forma sintetica gli angoli rappresentati in figura.



Disegna alcuni degli angoli corrispondenti a ogni scrittura sintetica.

65 $k360°$; $\; k180°$; $\; k90°$; $\; k45°$.

66 $60° + k360°$; $\quad 45° + k180°$; $\quad 300° + k60°$.

Disegna sul cerchio goniometrico i seguenti angoli, misurati in radianti.

67 $\frac{\pi}{4}$; $\; \frac{3}{4}\pi$; $\; \frac{11}{4}\pi$; $\; \frac{\pi}{8}$.

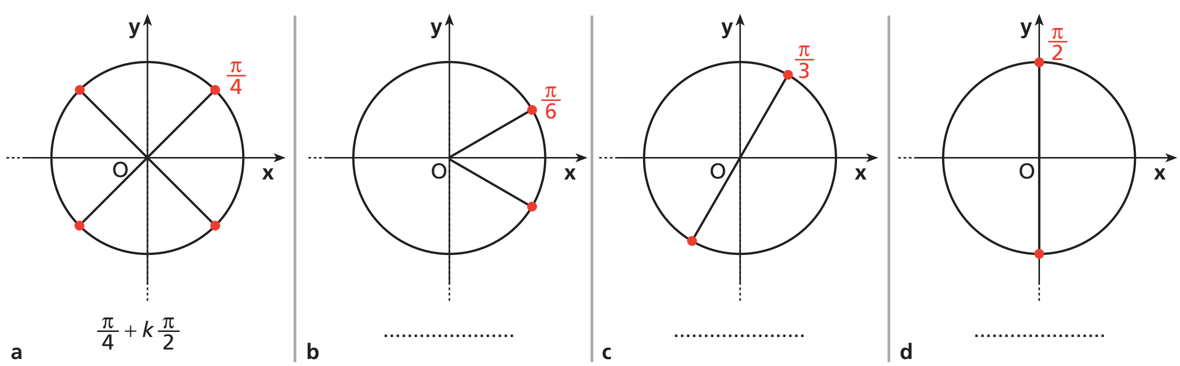
68 $\frac{\pi}{2}$; $\; \frac{3}{2}\pi$; $\; \frac{\pi}{3}$; $\; \frac{17}{6}\pi$.

Disegna alcuni degli angoli corrispondenti a ogni scrittura sintetica.

69 $2k\pi$; $\; k\pi$; $\; \frac{\pi}{2} + k\pi$.

70 $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$; $\; \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{4}$.

71 **COMPLETA** indicando tutti gli angoli che hanno il lato termine che passa per i punti segnati nelle seguenti figure, con la scrittura più sintetica possibile (come nel caso *a*).



2. LE FUNZIONI SENO E COSENO

▶ Teoria a pag. 639

72 **VERO O FALSO?**

a) Il seno di un angolo orientato è un segmento. V F

b) Se sen $\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$, allora α appartiene al IV quadrante. V F

c) $\sqrt{\text{sen}^2 135°} = \text{sen } 135°$. V F

d) Se $\cos\alpha > 0$, allora sen $\alpha > 0$. V F

e) Se $\cos\alpha > \cos\beta$, allora $\alpha > \beta$. V F

73 **VERO O FALSO?**

a) Se $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, allora $0 \leq \cos^2\alpha \leq 1$. V F

b) $\cos^2\alpha \leq \cos\alpha, \forall\alpha \in \mathbb{R}$. V F

c) Se sen $\alpha = \cos\alpha$, allora può essere solo $\alpha = \frac{\pi}{4}$. V F

d) Se sen $\alpha = -\frac{8}{9}$, allora α appartiene al III quadrante oppure al IV. V F

e) $\text{sen}^2\frac{\alpha}{4} + \cos^2\frac{\alpha}{4} = 1$. V F

74 **VERO O FALSO?**

a) $\cos 10° = \cos 350°$ V F

b) sen $3 <$ sen 4 V F

c) sen $3° <$ sen $4°$ V F

d) sen $8° <$ sen 8 V F

75 **COMPLETA** la tabella e disegna, utilizzando la circonferenza goniometrica, il coseno e il seno degli angoli assegnati, indicando se sono positivi o negativi.

α	30°	145°	220°	−28°	380°	460°	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{13}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{17}{3}\pi$
$\cos\alpha$	+									
sen α	+									

76 **TEST** Se $\cos x = \frac{1}{4}$ si ha:

A $0 < x < \frac{\pi}{6}$.

B $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$.

C $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

D $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.

(*Università di Modena, Corso di laurea in Matematica, Test propedeutico*, 2003)

77 **TEST** Supponi che ABC sia un triangolo con tre angoli acuti $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$. Allora il punto $(\cos\widehat{B} - \text{sen}\widehat{A}; \text{sen}\widehat{B} - \cos\widehat{A})$ può trovarsi:

A solo nel I quadrante o nel II quadrante.

B solo nel III quadrante o nel IV quadrante.

C solo nel II quadrante o nel III quadrante.

D solo nel II quadrante.

E in uno qualsiasi dei quattro quadranti.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 1993)

78 **VERO O FALSO?** La funzione $f(x) = \sqrt{4\,\text{sen}(5x) - 5}$ nell'insieme dei numeri reali non è definita. V F

(*Università di Lecce, Facoltà di Scienze, Test di ingresso*, 2001)

Disegna, utilizzando la circonferenza goniometrica, gli angoli a cui corrispondono i seguenti valori.

79 sen $\alpha = \frac{1}{3}$; $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$.

80 sen $\alpha = -\frac{1}{4}$; $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

81 $\cos\beta = \frac{1}{2}$; $\quad \operatorname{sen}\beta = -1$.

82 $\operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}$; $\quad \cos\gamma = -\frac{1}{4}$; $\quad \cos\gamma = -\frac{1}{2}$.

83 Individua sulla circonferenza goniometrica i seguenti valori.

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\quad \operatorname{sen}\frac{5}{8}\pi$, $\quad \operatorname{sen}(-240°)$, $\quad \cos\frac{7}{4}\pi$, $\quad \operatorname{sen}300°$, $\quad \cos 330°$.

84 **COMPLETA** inserendo i segni $>$, $<$ o $=$ (senza utilizzare la calcolatrice).

$\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi \ldots \operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi$; $\qquad \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi \ldots \operatorname{sen}\frac{3}{5}\pi$; $\qquad \operatorname{sen}240° \ldots \operatorname{sen}330°$;

$\cos 3\pi \ldots \operatorname{sen}\left(-\frac{5}{2}\pi\right)$; $\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} \ldots \cos 4\pi$; $\qquad \cos 80° \ldots \cos 110°$.

Trova quale condizione deve soddisfare il parametro affinché sia verificata l'uguaglianza.

85 $\cos x = k - 2$ $\qquad [1 \le k \le 3]$

86 $\operatorname{sen} x = -2a$ $\qquad \left[-\frac{1}{2} \le a \le \frac{1}{2}\right]$

87 $4a\cos x = a + 1$ $\qquad \left[a \le -\frac{1}{5} \vee a \ge \frac{1}{3}\right]$

88 $(k-1)\operatorname{sen} x = k$ $\qquad \left[k \le \frac{1}{2}\right]$

89 $(2a-3)\cos x = -a + 4$, con $x \in 2°$ quadrante. $\qquad [a \le -1 \vee a \ge 4]$

90 $(k-1)\cos x = 3 - k$, con $x \in 4°$ quadrante. $\qquad [2 \le k \le 3]$

91 $6a\operatorname{sen} x + a^2 + 9 = 0$, con $x \in 3°$ quadrante. $\qquad [a = 3]$

92 **VERO O FALSO?**

a) Se $\cos\alpha = \sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha$, con $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, allora $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}$. V F

b) Se $\cos\frac{\pi}{6} = \cos x$, allora $x = \frac{\pi}{6}$. V F

c) Se $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, allora $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. V F

d) Se $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, allora $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen}\alpha$. V F

93 **ESERCIZIO GUIDA**

Sapendo che $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$ e che $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcoliamo il valore di $\cos\alpha$.

Utilizziamo la prima relazione fondamentale della goniometria $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, sostituendo a $\operatorname{sen}\alpha$ il valore $\frac{5}{13}$. Otteniamo così:

$$\frac{25}{169} + \cos^2\alpha = 1 \to \cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} \to \cos^2\alpha = \frac{144}{169} \to \cos\alpha = \pm\frac{12}{13}.$$

Poiché $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e per tali angoli il coseno è negativo, allora:

$$\cos\alpha = -\frac{12}{13}.$$

Calcola il valore della funzione indicata, utilizzando le informazioni fornite.

94 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{7}{25}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\cos\alpha$? $\qquad \left[\frac{24}{25}\right]$

95 $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\qquad \left[-\frac{3}{5}\right]$

96 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\cos\alpha$? $\qquad \left[-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$

97 $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$; $\cos\alpha$? $\qquad \left[\frac{\sqrt{21}}{5}\right]$

98 $\cos\alpha = -\frac{4}{7}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\qquad \left[\frac{\sqrt{33}}{7}\right]$

99 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\qquad \left[-\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$

100 $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{9}{41}$ e $\alpha \in 4°$ quadrante; $\cos\alpha$? $\left[\frac{40}{41}\right]$

101 $\cos\alpha = -\frac{28}{53}$ e $\alpha \in 3°$ quadrante; $\operatorname{sen}\alpha$? $\left[-\frac{45}{53}\right]$

102 $\cos\alpha = \frac{33}{65}$ e $\alpha \in 4°$ quadrante; $\operatorname{sen}\alpha$? $\left[-\frac{56}{65}\right]$

103 $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$ e $\alpha \in 3°$ quadrante; $\cos\alpha$? $\left[-\frac{5}{13}\right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

104 $\frac{1}{2}\cos 540° + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 720° - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 450° + 6\operatorname{sen}(-270°)$ $\left[\frac{21}{4}\right]$

105 $\cos 4\pi + 2\operatorname{sen}\left(-\frac{15}{2}\pi\right) + \frac{1}{3}\cos(-3\pi) + \operatorname{sen}\frac{9}{2}\pi$ $\left[\frac{11}{3}\right]$

106 $\cos 720° + 2\cos 1080° - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 630° + 3\operatorname{sen} 540°$ $\left[\frac{7}{2}\right]$

107 $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{7}{2}\pi - \cos(-7\pi) + 2\operatorname{sen}\left(-\frac{11}{2}\pi\right)}{2\operatorname{sen}\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + \cos 4\pi - 4\cos\frac{5}{2}\pi}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

108 $\dfrac{4\left(\cos^2 2\pi + \operatorname{sen}^2\frac{5}{2}\pi\right) + 8\cos 10\pi}{3[1 - 4\cos(-4\pi)]}$ $\left[-\frac{16}{9}\right]$

109 $a\operatorname{sen}\left(-\frac{5}{2}\pi\right) + \frac{a}{2}\cos(8\pi) - \left(\frac{a}{2} + 1\right)\cos 0$ $[-a-1]$

110 $\left(a\cos 2\pi + b\operatorname{sen}\frac{7}{2}\pi\right)^2 - \left[a\operatorname{sen}\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + b\cos(-5\pi)\right]^2$ $[0]$

111 $\dfrac{(-\operatorname{sen} 5\pi + \cos\pi)\operatorname{sen}\frac{11}{2}\pi + 2\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\cdot[\operatorname{sen}(-3\pi) + \cos 2\pi]}{3\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{5}{2}\pi + 2\operatorname{sen}\frac{9}{2}\pi\right)}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

112 Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, calcola il valore della seguente espressione:

$$\frac{a\operatorname{sen}\alpha + b\cos 2\alpha}{\operatorname{sen}(-4\alpha) - a\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - b\cos\left(\frac{7}{2}\pi + \alpha\right)}.$$ $[1]$

113 Se $\alpha = \pi$, calcola il valore della seguente espressione:

$$\frac{a^2\cos(5\pi - \alpha) - b^2\operatorname{sen}\left(\frac{7}{2}\pi - \alpha\right)}{a\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + b\cos(4\pi - \alpha)} - a\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right).$$ $[b]$

114 Se $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, calcola il valore della seguente espressione:

$$\frac{\cos\left(\frac{9}{2}\pi + \alpha\right) + \operatorname{sen}(-\pi + \alpha) + \cos(\alpha - 5\pi)}{2\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + 4\cos\left(\alpha - \frac{7}{2}\pi\right)}.$$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

115 Disegna il grafico di $y = \cos x$ nell'intervallo $[-\pi; 4\pi]$. Scrivi le ascisse dei punti di intersezione della funzione con l'asse x in tale intervallo e trova le ordinate dei punti di ascissa $x = \frac{7}{2}\pi$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 3\pi$. Quali sono i valori di x in cui $\cos x = -1$ nell'intervallo considerato?

$\left[\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \pm\frac{7}{2}\pi; 0, 0, -1; \pm\pi, 3\pi\right]$

116 Disegna il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ nell'intervallo $\left[-\frac{5}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi\right]$. Trova i punti di intersezione della funzione con l'asse x e calcola le ordinate dei punti di ascissa $x = -\frac{3}{2}\pi$, $x = -\pi$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{7}{2}\pi$. Determina i valori di x per cui $\operatorname{sen} x = -1$. $\left[-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi; 1, 0, 0, 1, -1; -\frac{5}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$

Trova il dominio delle seguenti funzioni.

117 $y=\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}{\cos x}$ $\left[x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right]$

118 $y = \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}$ $[x \neq k\pi]$

119 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$ $[x \neq 2k\pi]$

Trova il valore minimo e massimo delle seguenti funzioni, nell'intervallo indicato a fianco.

120 $y = -\frac{1}{2}\cos x$, $\mathbb{R}$; $y = 1 + 2\operatorname{sen} x$, $\mathbb{R}$.

121 $y = -\operatorname{sen} x + 4$, $[0; \pi]$; $y = \cos x - \frac{2}{3}$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

122 $y = \operatorname{sen}(x + \pi)$, $\mathbb{R}$; $y = \frac{1}{4}\cos x + 2$, $\left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$.

123 $y = \sqrt{2}\cos 2x - 1$, $\mathbb{R}$; $y = \dfrac{1}{2 + \cos x}$, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Semplifica le seguenti espressioni.

124 $(a \operatorname{sen}\alpha - 2\cos\alpha)^2 + (a\cos\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha)^2 - 4 + a^2 \operatorname{sen}\frac{5}{2}\pi$ $[2a^2]$

125 $4 - 4\operatorname{sen}^2\alpha + (\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)^2 + 2\cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$ $[1 + 6\cos^2\alpha]$

126 $\operatorname{sen}^2\alpha + (4\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^2 + (4\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha$ $[18 + \cos^2\alpha]$

127 Trova per quali valori di a le soluzioni dell'equazione $x^2 - ax + a - 1 = 0$ rappresentano il seno e il coseno dello stesso angolo. $[a = 1]$

3. LA FUNZIONE TANGENTE

Teoria a pag. 643

IN PRATICA
Videolezione 32

La tangente di un angolo

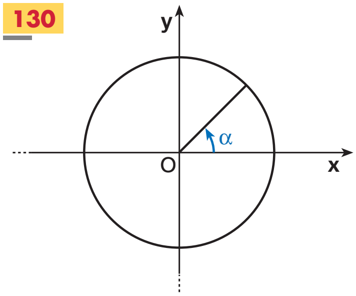
Disegna la circonferenza goniometrica e rappresenta la tangente dei seguenti angoli.

128 $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5}{4}\pi$; 2π.

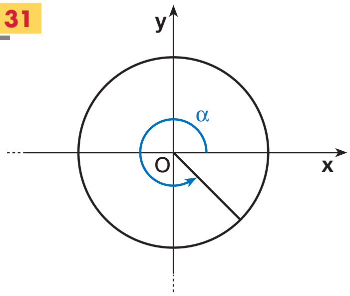
129 30°; 180°; 225°; 320°.

Per ogni angolo α in figura, individua tg α, quando esiste, sulla retta tangente alla circonferenza.

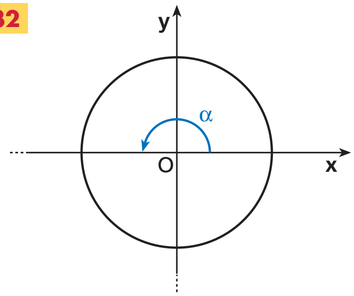
130



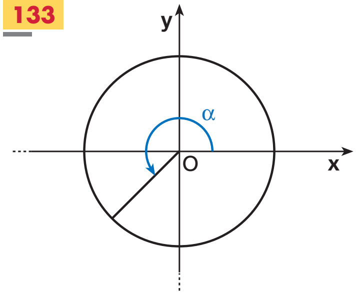
131



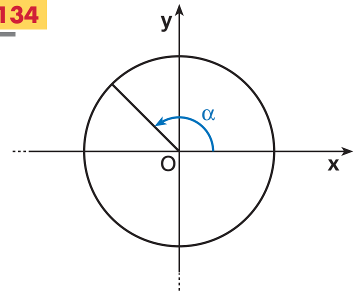
132



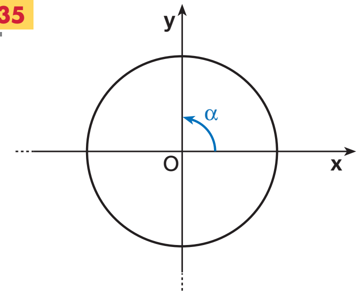
133



134



135



136 Rappresenta gli angoli che soddisfano le seguenti uguaglianze.

$\text{tg}\,\alpha = 1$; $\text{tg}\,\beta = 3$; $\text{tg}\,\gamma = -2$.

Utilizzando la circonferenza goniometrica, individua l'angolo α che soddisfa le seguenti relazioni.

137 $\text{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

138 $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.

139 $\text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

140 Utilizzando la circonferenza goniometrica rappresenta gli angoli che verificano le seguenti condizioni.

$\text{tg}\,\alpha = -3$, $\alpha \in$ IV quadrante; $\text{tg}\,\beta = \frac{3}{2}$, $\beta \in$ III quadrante; $\text{tg}\,\gamma = \sqrt{3}$, $\gamma \in$ I quadrante.

Trova quale condizione deve soddisfare il parametro *k* affinché sia verificata l'uguaglianza.

141 $\text{tg}\,x = \frac{1-k}{k^2-9}$ $[k \neq \pm 3]$

142 $\text{tg}\,x = \sqrt{\frac{4-k^2}{k+1}}$ $[k \leq -2 \vee -1 < k \leq 2]$

143 $(k+2)\,\text{tg}\,x = 2k$, $x \in$ I quadrante. $[k < -2 \vee k \geq 0]$

144 $\text{tg}\,x = \frac{2-k}{4k^2-9}$, $x \in$ IV quadrante. $\left[-\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2} \vee k \geq 2\right]$

145 $\text{tg}\,x = \sqrt{k-3} - k$, $x \in$ IV quadrante. $[k \geq 3]$

Trova il dominio delle seguenti funzioni.

146 $y = \frac{2\,\text{tg}\,x}{\sqrt{1-\text{sen}\,x}+1}$ $\left[x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

147 $y = \frac{-\text{tg}\,x}{\text{sen}\,x}$ $\left[x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$

148 $y = \frac{2\,\text{sen}\,x - 1}{3\,\text{tg}\,x}$ $\left[x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$

Utilizziamo le relazioni fondamentali della goniometria

149 **ESERCIZIO GUIDA**

Sapendo che $\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{7}$ e che $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcoliamo il valore di $\text{tg}\,\alpha$.

Utilizziamo la prima relazione fondamentale della goniometria, $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, per determinare il valore di $\cos\alpha$:

$$\frac{25}{49} + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{24}{49}.$$

Poiché $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e per tali angoli il coseno è positivo, abbiamo:

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

Sfruttiamo ora la seconda relazione fondamentale della goniometria, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, per determinare $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}.$$

Calcola il valore di $\operatorname{tg}\alpha$, usando le informazioni fornite.

150 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. $\left[-\frac{4}{3}\right]$

151 $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. $\left[-\frac{15}{8}\right]$

152 $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{7}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. $\left[-\frac{\sqrt{13}}{6}\right]$

153 $\cos\alpha = -\frac{5}{6}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. $\left[\frac{\sqrt{11}}{5}\right]$

154 Utilizza le relazioni fondamentali per dimostrare le formule che permettono di trovare $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ in funzione di $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Calcola il valore delle funzioni indicate, utilizzando le informazioni fornite.

155 $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\cos\alpha$? $\left[\frac{\sqrt{5}}{3}; -\frac{2}{3}\right]$

156 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{28}{45}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\cos\alpha$? $\left[-\frac{28}{53}; -\frac{45}{53}\right]$

157 $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{9}{40}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\cos\alpha$? $\left[\frac{9}{41}; -\frac{40}{41}\right]$

158 $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{5}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\cos\alpha$? $\left[-\frac{12}{13}; \frac{5}{13}\right]$

159 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{15}{17}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\cos\alpha$? $\operatorname{tg}\alpha$? $\left[-\frac{8}{17}; -\frac{15}{8}\right]$

160 $\cos\alpha = \frac{39}{89}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\operatorname{tg}\alpha$? $\left[-\frac{80}{89}; -\frac{80}{39}\right]$

161 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\cos\alpha$? $\left[-\frac{15}{17}; -\frac{8}{17}\right]$

162 $\cos\alpha = -\frac{33}{65}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\operatorname{sen}\alpha$? $\operatorname{tg}\alpha$? $\left[\frac{56}{65}; -\frac{56}{33}\right]$

Determina il valore delle seguenti espressioni.

163 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{7}{2}\pi+2\alpha\right)+2\operatorname{tg}\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)$, con $\alpha=\frac{\pi}{2}$. [1]

164 $2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{5}{2}\pi\right)-\operatorname{tg}(2\alpha+\pi)$, con $\alpha=\pi$. [-1]

Trasforma le seguenti espressioni in funzione soltanto di $\cos\alpha$.

165 $\frac{\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+2}{\operatorname{sen}\alpha}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$. $\left[\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{3\cos^2\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\right]$

166 $\operatorname{sen}^2\alpha-1-4(\operatorname{tg}^2\alpha+1)\operatorname{sen}^2\alpha$, con $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. $\left[-\frac{(\cos^2\alpha-2)^2}{\cos^2\alpha}\right]$

167 $\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{sen}^2\alpha-\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$, con $\alpha\neq k\frac{\pi}{2}$. $\left[\frac{3\cos^2\alpha-3\cos^4\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}\right]$

168 $\operatorname{sen}\alpha-\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}+\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$. $\left[\frac{(\cos\alpha-1)^2}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\right]$

Trasforma le seguenti espressioni in funzione soltanto di $\operatorname{sen}\alpha$, sapendo che $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

169 $\frac{4\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha}{1-2\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$ $\left[\frac{1+4\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{1-3\operatorname{sen}^2\alpha}\right]$

170 $\frac{1+\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}+1-\cos^2\alpha+\frac{4}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ $\left[\frac{5}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right]$

171 $\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{2+2\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{2}{\cos^2\alpha}$ $\left[\frac{5-\operatorname{sen}^2\alpha}{2(1-\operatorname{sen}^2\alpha)}\right]$

172 $\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}+1\right)\left(\frac{\cos^2\alpha-1}{2}\right)$ $\left[-\left(\operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{2}\right)\right]$

Trasforma le seguenti espressioni in funzione soltanto di $\operatorname{tg}\alpha$, sapendo che $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

173 $\left(\operatorname{sen}^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}-3+3\cos^2\alpha\right)\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $[1+\operatorname{tg}^4\alpha]$

174 $2\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$ $\left[\frac{\operatorname{tg}^3\alpha-2}{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right]$

175 $(4\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha}{1+3\operatorname{sen}^2\alpha}\right)$ $\left[\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right]$

176 $\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}-\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\right)\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos\alpha}$ $[1+\operatorname{tg}^3\alpha]$

177 **VERO O FALSO?**

a) Se $\alpha<0$ e $\operatorname{tg}\alpha>0$, allora $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$. V F

b) Se $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ e $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$, allora $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{3}{5}$. V F

c) $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. V F

d) Se $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, allora $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. V F

e) Se $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$ e $\cos\alpha<0$, allora $\operatorname{sen}\alpha=\frac{12}{13}$. V F

Semplifica le seguenti espressioni utilizzando le relazioni fondamentali della goniometria.

178 $\dfrac{\text{sen}^3\alpha - \text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + 2\,\text{tg}\,\alpha + \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\text{tg}\,\alpha}$ $[2\,\text{tg}\,\alpha]$

179 $\dfrac{1}{2}\cos\alpha + \dfrac{\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} - \text{sen}^2\alpha + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha\,\text{tg}^2\alpha}$ $[\cos\alpha]$

180 $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} - \text{tg}\,\alpha + \dfrac{1-\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}$ $[-\text{tg}\,\alpha]$

181 $\text{sen}\,\alpha\,\text{tg}\,\alpha + \cos\alpha(1-\text{sen}\,\alpha) + \text{tg}\,\alpha\cos^2\alpha$ $\left[\dfrac{1}{\cos\alpha}\right]$

182 $(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\,\text{tg}\,\alpha\cos^2\alpha + 2\,\text{sen}^2\alpha - 1$ $[2\,\text{sen}^2\alpha]$

183 TEST Se $\text{tg}\,x = 2$ e $180° < x < 270°$, quanto vale $\text{sen}\,x$?

A $\dfrac{-1}{\sqrt{5}}$. B $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. C $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$. D $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. E $\dfrac{1}{2}$.

(USA *Marywood University Mathematics Contest*, 2006)

184 TEST Se $\text{sen}\,x = 2\cos x$, allora qual è il valore di $\text{sen}\,x\cos x$?

A $\dfrac{1}{3}$. B $\dfrac{2}{3}$. C $\dfrac{1}{4}$. D $\dfrac{1}{5}$. E $\dfrac{2}{5}$.

(USA *Marywood University Mathematics Contest*, 2001)

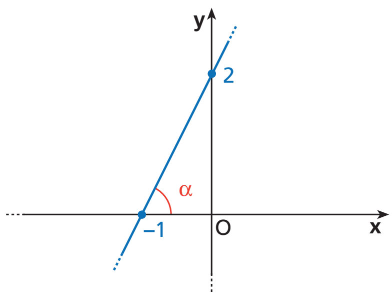
Il significato goniometrico del coefficiente angolare di una retta

185 La retta r forma con l'asse x un angolo α che ha $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Scrivi l'equazione di r, sapendo che passa per il punto di coordinate $(0; 1)$. $[4x - 3y + 3 = 0]$

186 Determina l'equazione della retta che passa per il punto P di coordinate $(2; 5)$ e forma con l'asse x un angolo α che ha $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{12}{13}$. $[12x - 5y + 1 = 0 \vee 12x + 5y - 49 = 0]$

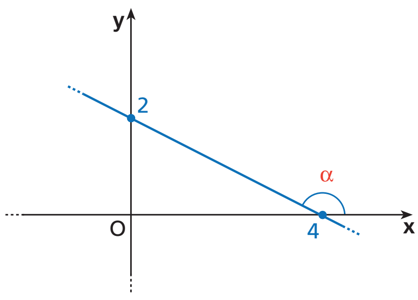
Utilizzando i dati della figura determina tg α e scrivi l'equazione della retta.

187



[2]

188



$\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

189 Calcola il coseno dell'angolo che la retta di equazione $y = -\dfrac{3}{4}x + 5$ forma con l'asse x. $\left[-\dfrac{4}{5}\right]$

190 Determina il seno dell'angolo che la retta di equazione $12x + 9y - 1 = 0$ forma con l'asse x. $\left[\dfrac{4}{5}\right]$

191 Trova l'equazione della retta passante per il punto $A(-2; 1)$ e che forma un angolo di $\dfrac{2}{3}\pi$ con l'asse x. $[y = -\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3} + 1]$

192 Trova le equazioni delle rette passanti per il punto $P(\sqrt{7}; -3)$ e che formano con l'asse x un angolo il cui seno è $\frac{3}{4}$. $\left[y = \frac{3}{\sqrt{7}}x - 6;\ y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x\right]$

193 Considera il fascio di rette di equazione $y = (k+2)x + k - 1$, con $k \in \mathbb{R}$, e determina:
a) la retta inclinata di 150° rispetto all'asse x;
b) le rette che hanno inclinazione compresa fra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$. $\left[\text{a) } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 3 - \frac{\sqrt{3}}{3};\ \text{b) } -1 \le k \le \sqrt{3} - 2\right]$

4. LE FUNZIONI SECANTE E COSECANTE

Teoria a pag. 646

Utilizzando la circonferenza goniometrica, rappresenta gli angoli che verificano le seguenti uguaglianze.

194 $\sec\alpha = 2$

195 $\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

196 $\sec\alpha = -1$

197 $\operatorname{cosec}\alpha = 3$

Trova quale condizione deve soddisfare il parametro affinché sia verificata l'uguaglianza.

198 $\sec\alpha = k - 4$ $[k \le 3 \vee k \ge 5]$

199 $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{2k}{k+3}$ $[k < -3 \vee -3 < k \le -1 \vee k \ge 3]$

200 $\sec\alpha = \frac{2a-1}{a}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. $[a < 0 \vee a > 1]$

201 $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{a+2}}{a+1}$, con $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < a < -1\right]$

202 Se $\sec\alpha = \frac{5}{4}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$, verifica che $\frac{2\operatorname{sen}\alpha - 4\cos\alpha}{\cos\alpha - 3\operatorname{sen}\alpha} = -\frac{22}{13}$.

203 Se $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{12}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, verifica che $\frac{\operatorname{tg}\alpha - 13\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 1 + 13\cos\alpha} = \frac{12}{7}$.

204 Trasforma l'espressione y in funzione soltanto di: a) sec α, b) cosec α.

$$y = \operatorname{tg}^2\alpha + 1 - \operatorname{cosec}^4\alpha$$

$\left[\text{a) } \sec^2\alpha - \frac{\sec^4\alpha}{(\sec^2\alpha - 1)^2};\ \text{b) } \frac{\operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1} - \operatorname{cosec}^4\alpha\right]$

205 Trasforma l'espressione y in funzione soltanto di: a) sen α, b) tg α.

$$y = \frac{\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha}{2\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$\left[\text{a) } \frac{1}{2\operatorname{sen}^4\alpha};\ \text{b) } \frac{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{2\operatorname{tg}^4\alpha}\right]$

206 Trova il valore di sen α e cos α, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, sapendo che:

$$3\frac{\sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} - 4 = 0.$$

$\left[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right]$

207 Determina il valore di sen α e cos α, con $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, sapendo che:

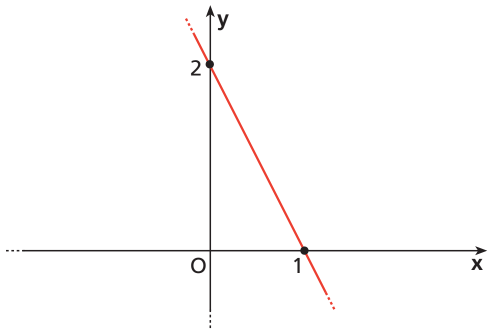
$$12\sec\alpha - 5\operatorname{cosec}\alpha = 0.$$

$\left[-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right]$

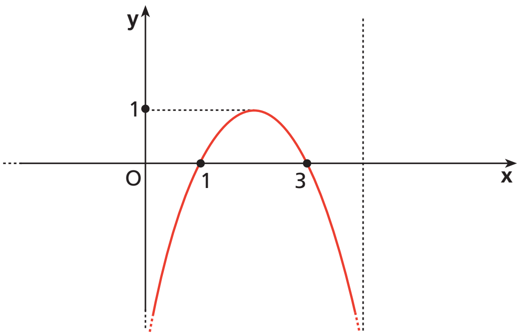
Il grafico del reciproco di una funzione

Nel grafico è rappresentata la funzione $y = f(x)$. Disegna il grafico di $y = \dfrac{1}{f(x)}$.

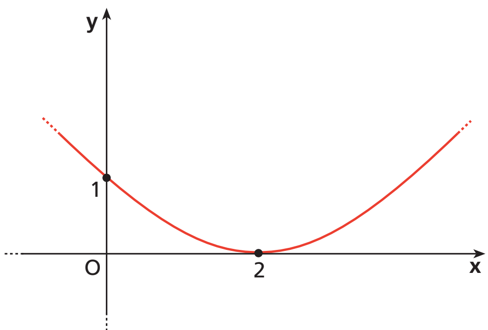
208



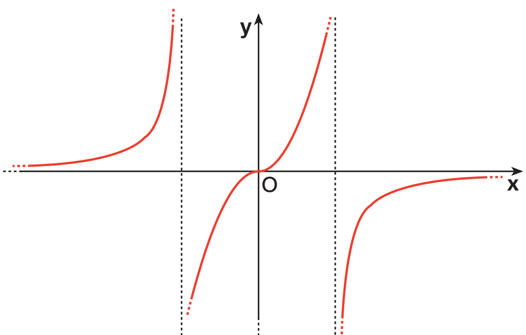
210



209



211



212 Rappresenta il grafico della funzione $f(x) = x^2 + 2$ e poi disegna quello di $\dfrac{1}{f(x)}$.

213 Disegna il grafico della funzione $f(x) = -x^2 + 4x$ e poi traccia quello di $\dfrac{1}{f(x)}$.

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

214 $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

215 $y = \dfrac{1}{2x - 3}$

216 $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x}$

217 $y = \dfrac{1}{|x| - 1}$

218 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

5. LA FUNZIONE COTANGENTE

▶ Teoria a pag. 650

IN PRATICA
▶ Videolezione 32

La cotangente di un angolo

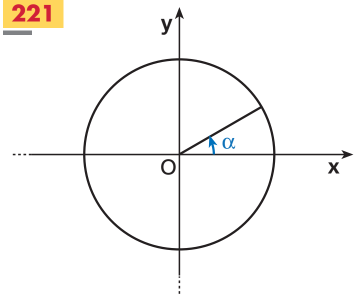
Disegna la circonferenza goniometrica e rappresenta la cotangente dei seguenti angoli.

219 60°; 90°; 150°; 330°.

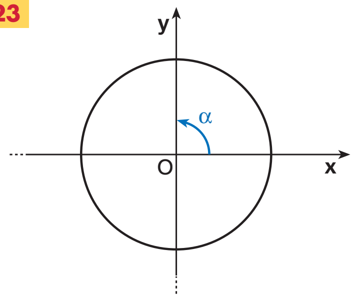
220 $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{3}{4}\pi$; $\dfrac{5}{4}\pi$; $\dfrac{7}{4}\pi$.

Per ogni angolo α in figura, individua cotg α, quando esiste, sulla retta tangente alla circonferenza.

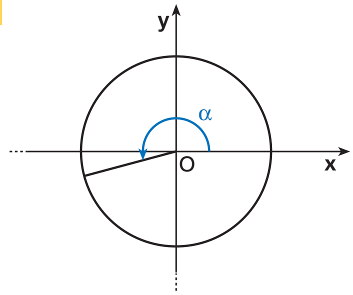
221



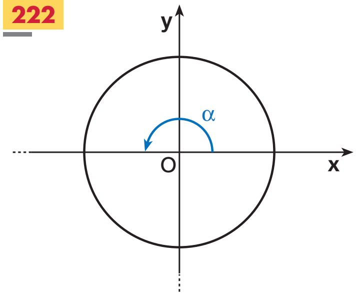
223



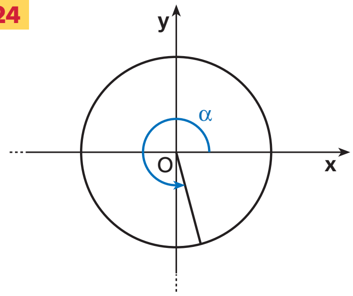
225



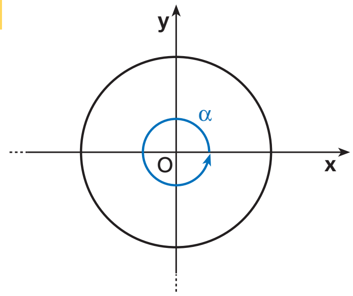
222



224



226



227 Disegna nel cerchio goniometrico gli angoli che soddisfano le seguenti uguaglianze.

$\text{cotg}\,\alpha = 1; \quad \text{cotg}\,\beta = 4; \quad \text{cotg}\,\gamma = -2.$

Trova quale condizione deve soddisfare il parametro affinché sia verificata l'uguaglianza.

228 $\text{cotg}\,x = \dfrac{a-4}{a+1}$ $[a \neq -1]$

229 $2k\,\text{cotg}\,x = k^2 - 16$ $[k \neq 0]$

230 $\text{cotg}\,x = \dfrac{\sqrt{a-3}}{2a}$ $[a \geq 3]$

Indica in quale quadrante si trova un angolo α che verifica le seguenti condizioni.

231 $\text{sen}\,\alpha > 0, \quad \text{cotg}\,\alpha < 0.$ [II quadrante]

232 $\text{cotg}\,\alpha < 0, \quad \sec\alpha < 0.$ [II quadrante]

233 $\cos\alpha > 0, \quad \text{cotg}\,\alpha > 0.$ [I quadrante]

234 Utilizza le relazioni fondamentali per dimostrare le seguenti formule, che permettono di trovare sen α e cos α in funzione di cotg α.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\pm\text{cotg}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}.$$

235 ESERCIZIO GUIDA

Sapendo che cotg $\alpha = 3$ e che α appartiene al I quadrante, determiniamo sen α, cos α e tg α.

Poiché $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, seno, coseno e tangente di α sono tutti positivi.

- Calcoliamo sen α applicando la formula $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

- Calcoliamo $\cos\alpha$ applicando la formula $\cos\alpha = \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$:

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\cdot\sqrt{10}}{10}.$$

- Calcoliamo $\operatorname{tg}\alpha$ tenendo presente che $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$, quindi:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}.$$

Considera le funzioni seno, coseno, tangente e cotangente dell'angolo α: noti il valore di una funzione e l'intervallo a cui appartiene α, calcola il valore delle altre tre funzioni.

236 $\operatorname{cotg}\alpha = 2$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\quad \operatorname{tg}\alpha = 1$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$. $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$

237 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}; -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}\right]$

238 $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ e $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$; $\quad \operatorname{cotg}\alpha = -\sqrt{3}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

239 Trasforma l'espressione in funzione soltanto di $\operatorname{tg}\alpha$, sapendo che $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{cotg}\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}^2\alpha + \cos^2\alpha} \qquad \left[\frac{\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha + 1)}{3\operatorname{tg}^2\alpha + 2}\right]$$

240 Trasforma l'espressione in funzione soltanto di $\operatorname{cotg}\alpha$, sapendo che $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha + \cos^2\alpha - 1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \qquad \left[\frac{2\operatorname{cotg}^2\alpha - \operatorname{cotg}\alpha + 2}{\operatorname{cotg}\alpha}\right]$$

241 Trasforma l'espressione in funzione soltanto di $\operatorname{sen}\alpha$, sapendo che $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

$$3\operatorname{sen}\alpha - 2\operatorname{cotg}^2\alpha + \cos^2\alpha \qquad \left[\frac{-\operatorname{sen}^4\alpha + 3\operatorname{sen}^3\alpha + 3\operatorname{sen}^2\alpha - 2}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right]$$

Trova il dominio delle seguenti funzioni.

242 $y = \dfrac{\operatorname{cotg}x}{\cos x}$ $\left[x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$ **243** $y = \dfrac{2}{\operatorname{cotg}x}$ $\left[x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$ **244** $y = \operatorname{cotg}x - 3\operatorname{sen}x$ $[x \neq k\pi]$

Espressioni con le funzioni goniometriche

Semplifica le seguenti espressioni.

245 $\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha\right)\dfrac{1}{\sec^2\alpha}$ $[1 + \operatorname{sen}^2\alpha]$

246 $(\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha$ $\left[\dfrac{1}{\operatorname{sen}^4\alpha}\right]$

247 $\dfrac{\cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha - 2}{\operatorname{cotg}\alpha}\cdot\operatorname{cosec}\alpha$ $[-\cos\alpha]$

248 $1 + \dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha - \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$ $\left[\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right]$

249 $\operatorname{tg}\alpha + \dfrac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha} - \operatorname{cotg}\alpha + 1$ $\left[\dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}\right]$

6. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ANGOLI PARTICOLARI

▶ Teoria a pag. 652

250 Determina il seno dei seguenti angoli, utilizzando la conoscenza del seno degli angoli particolari:

120°; 135°; 150°; 180°; 270°; 300°. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; 0; -1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

251 Determina il coseno dei seguenti angoli, utilizzando la conoscenza del coseno di angoli particolari:

120°; 135°; 150°; 180°; 270°; 300°. $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -1; 0; \frac{1}{2}\right]$

252 Determina la tangente dei seguenti angoli, utilizzando la conoscenza della tangente degli angoli particolari:

120°; 135°; 150°; 180°; 270°; 300°. $\left[-\sqrt{3}; -1; -\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; \text{non esiste}; -\sqrt{3}\right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

253 $4\,\text{sen}\,30° - \sec 60° + \sqrt{2}\,\text{cosec}\,45° + \cos 90° - 3\sec 0° + \text{cotg}\,45°$ $[0]$

254 $4\cos 0 - 2\sec\frac{\pi}{3} + 2\,\text{cosec}\,\frac{\pi}{4} - 4\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4} + \text{cotg}\,\frac{\pi}{2}$ $[0]$

255 $3\,\text{tg}\,0° + 4\cos 30°\,\text{sen}\,60° - \sqrt{2}\cos 45° - 6\,\text{sen}\,90°$ $[-4]$

256 $\cos 0° + \text{sen}\,90° - 3\cos 180° + 5\,\text{sen}^2 270° - \text{sen}\,180° + 7\cos 270°$ $[10]$

257 $\sqrt{3}\cos 30° - \sqrt{3}\sec 60° - \text{sen}\,45° + \cos 60°\,\text{cosec}\,45° - 8\,\text{sen}^2\,30°$ $\left[-\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right]$

258 $\text{cotg}\,\frac{\pi}{2} - 3\sec\frac{\pi}{4} + \text{cosec}\,\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{6} - 8\,\text{cotg}\,\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$ $[-3\sqrt{2}]$

259 $\frac{1}{2}\sec 45° - \cos 45° - 2\cos^2 30° + \sqrt{3}\,\text{cosec}\,60° - 3\,\text{tg}\,30° + 3\,\text{cotg}\,60°$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

260 $\frac{1}{3}\cos 0° + \sqrt{3}\,\text{sen}\,60° + 4\cos 90° - \frac{\sqrt{2}}{3}\cos 45° - 2\cos 60° - \frac{3}{2}\,\text{sen}\,90°$ $[-1]$

261 $\frac{3}{2}\,\text{cotg}\,\frac{\pi}{4} - \sec\frac{\pi}{3} + \frac{3}{5}\,\text{cosec}\,\frac{\pi}{6} - \frac{3}{4}\sec\frac{\pi}{4}\,\text{cosec}\,\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,\text{cosec}\,\frac{\pi}{2}$ $\left[-\frac{13}{10}\right]$

262 $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sec\frac{\pi}{4} + \text{cosec}\,\frac{\pi}{4}\right) + 3\,\text{cotg}\,\frac{\pi}{3}\,\text{tg}\,\frac{\pi}{6} + \text{cosec}\,\frac{\pi}{6}$ $[6]$

263 $\dfrac{\left(2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}{\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \cos\pi - \text{sen}\,\frac{3\pi}{2}} - \left(2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} + \text{tg}\,\frac{\pi}{4}\right)^2$ $\left[\frac{-7 + 2\sqrt{6}}{3}\right]$

264 $\left(2\cos\frac{\pi}{6} - 4\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)^2 + 16\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\right) - \text{sen}\,\frac{\pi}{2}$ $[10 + 4\sqrt{2}]$

265 $\sqrt{3}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\text{sen}\,\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6}\right)^2$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

266 $\sec\frac{\pi}{3}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\right) - 2\,\text{cosec}\,\frac{\pi}{2} + \text{tg}\,0 - \text{tg}\,\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$ $[-\sqrt{3}]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni a coefficienti letterali.

267 $2a \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - b\sqrt{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} + a\cos\frac{\pi}{2} + b\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}$ $[a-b]$

268 $a \operatorname{sen} 90° + 2b\cos 180° - 3a \operatorname{sen} 270° + b\cos 0°$ $[4a-b]$

269 $2x\cos 60° - 2y \operatorname{sen} 60° + x\sec 60° + y \operatorname{tg} 60°$ $[3x]$

270 $\left(a \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - b\cos\pi\right)\left(2a \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - b\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}\right) + b^2\sec\frac{\pi}{3}$ $[a^2+b^2]$

271 $x \operatorname{tg} 0 + \left(x\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} + y\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^2 - 3y^2\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} - x\operatorname{cotg}\frac{3}{2}\pi$ $[3x^2+6xy]$

272 $a\sec\frac{\pi}{3} + b^2\sqrt{3}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} + 5a \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi - b^2\cos 0 - b^2\operatorname{cosec}\frac{3}{2}\pi$ $[3b^2-3a]$

273 $\dfrac{a^2 \operatorname{tg} 45° + ab\operatorname{cosec} 30° + b^2\sec 0°}{a\operatorname{cosec} 90° - b \operatorname{sen} 270°}$ $[a+b]$

274 $\dfrac{2x \operatorname{sen} 30°}{x\cos 0° + 2y \operatorname{sen} 30°} + \dfrac{y \operatorname{sen} 90°}{2y\sqrt{3}\cos 30° + 2y \operatorname{sen} 270° + x} + \cos 60°$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

275 $\dfrac{a\cdot \operatorname{sen} 90° - b\cdot\cos 0° + (a+b)\cdot\operatorname{tg} 45° - 2a + 1}{a^2\cdot\operatorname{tg} 45° - 2ab\cdot\cos 180° + b^2\cdot \operatorname{sen} 90° - (a+b)^2 + 1}$ $[1]$

276 $\dfrac{a^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 2b^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + ab\sec\frac{\pi}{3}}{a\cos 0 + b \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}\cdot a \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ $[b]$

7. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

▶ Teoria a pag. 654

COMPLETA le seguenti tabelle.

277

x	$y = \arcsin x$	$\operatorname{sen} y$
0		
1		
	$\frac{\pi}{6}$	
		$-\frac{1}{2}$
		-1

278

x	$y = \arccos x$	$\cos y$
	$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$		
		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
	π	
0		

279

x	$y = \operatorname{arctg} x$	$\operatorname{tg} y$
		0
	$\frac{\pi}{3}$	
-1		
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
		$-\sqrt{3}$

280

x	$y = \operatorname{arccotg} x$	$\operatorname{cotg} y$
	$\frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{3}$		
		-1
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
	$\frac{5}{6}\pi$	

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

281 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{3}\right]$

282 $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$

283 $\operatorname{arctg}(-1)$, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

284 $\operatorname{arcsen} 1 + \operatorname{arctg}(-1)$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

285 $\operatorname{arctg}(-1) + 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ $\left[-\frac{\pi}{4}\right]$

286 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\left[\frac{\pi}{6}\right]$

287 $\pi - \operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\arccos\frac{1}{2}$ $\left[\frac{7}{4}\pi\right]$

288 $\pi - \left[4\operatorname{arctg}(-1) + 2\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\frac{8}{3}\pi\right]$

Risolvi le seguenti equazioni.

289 $\operatorname{arcsen} x = \pi$ [impossibile]

290 $4\operatorname{arctg} x - \pi = 0$ $[1]$

291 $9(\arccos x)^2 = \pi^2$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

292 $\arccos\frac{1}{2} = \operatorname{arcsen} x$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

293 $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

294 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

Si tratta di una funzione composta; calcoliamo il valore della funzione più «interna», $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$, tenendo conto che il codominio dell'arcoseno è $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \rightarrow \cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

295 $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg} 1)$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

296 $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$ $[\sqrt{3}]$

297 $\cos[\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

298 $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

299 $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

300 $\operatorname{cotg}\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

301 $\operatorname{sen}(\operatorname{arccotg}\sqrt{3})$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

302 $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

303 $\operatorname{tg}\left[\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$ $[-\sqrt{3}]$

304 $\cos[\operatorname{arctg}(-1)]$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

305 $\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

306 $\operatorname{sen}[\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

307 **COMPLETA**

$\arccos\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \ldots\ldots;$ $\operatorname{sen}\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right] = \ldots\ldots;$ $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \ldots\ldots;$

$\operatorname{cotg}\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \ldots\ldots;$ $\quad\arccos\left(\operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\right) = \ldots\ldots;$ $\quad\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(-1)] = \ldots\ldots;$

$\operatorname{arcsen}\left(\cos\frac{5}{2}\pi\right) = \ldots\ldots;$ $\quad\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \ldots\ldots;$ $\quad\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{4}\right) + \operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{4}\right) = \ldots\ldots.$

308 **VERO O FALSO?**

a) $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{5}{6}\pi$ V F

b) $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4} = 1$ V F

c) $\operatorname{arcsen} 0 = \arccos 1$ V F

d) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ V F

e) $\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(-1)] = -1$ V F

f) $\arccos\left(\cos\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ V F

309 **TEST** Determina quale dei seguenti risultati è uguale a $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} v)$.

A $\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}$. B $\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$. C $\frac{1+v}{\sqrt{v^2-1}}$. D $\frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}$. E $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 1993)

Il dominio dell'inversa di una funzione goniometrica

310 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il dominio della funzione $y = \operatorname{arcsen}\frac{x+1}{x-2}$.

Poiché il dominio della funzione arcoseno è $[-1; 1]$, dobbiamo imporre che:

$$-1 \leq \frac{x+1}{x-2} \leq 1.$$

Pertanto, dobbiamo risolvere il seguente sistema di due disequazioni fratte:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} \geq -1 \\ \frac{x+1}{x-2} \leq 1 \end{cases}$$

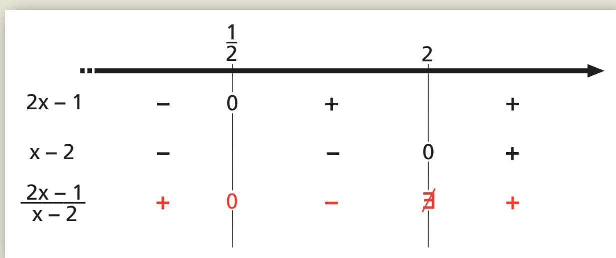
- Risolviamo la prima disequazione:

$$\frac{x+1}{x-2} \geq -1 \to \frac{x+1}{x-2} + 1 \geq 0 \to$$

$$\to \frac{x+1+x-2}{x-2} \geq 0 \to \frac{2x-1}{x-2} \geq 0.$$

La prima disequazione è soddisfatta per

$$x \leq \frac{1}{2} \vee x > 2.$$



- Risolviamo la seconda disequazione:

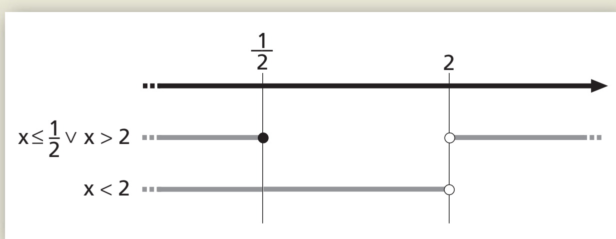
$$\frac{x+1}{x-2} \leq 1 \to \frac{x+1}{x-2} - 1 \leq 0 \to$$

$$\to \frac{x+1-x+2}{x-2} \leq 0 \to \frac{3}{x-2} \leq 0,$$

che è soddisfatta per $x < 2$.

Compiliamo il quadro relativo al sistema.

Il dominio della funzione è $x \leq \frac{1}{2}$.



Determina il dominio delle seguenti funzioni.

311 $y = \text{arcsen}(2x + 1)$ $[[-1; 0]]$

312 $y = \arccos(x^2 - 4)$ $[[-\sqrt{5}; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \sqrt{5}]]$

313 $y = \text{arctg}\dfrac{1}{x}$ $[\mathbb{R} - \{0\}]$

314 $y = \text{arctg}(x^4 + 1)$ $[\mathbb{R}]$

315 $y = \text{arccotg}(x^3 + 1)$ $[\mathbb{R}]$

316 $y = \arccos(-x^2 + 2x)$ $[[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]]$

317 $y = \text{arcsen}\dfrac{2}{x + 2}$ $[]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[]$

318 $y = \text{arctg}\dfrac{2x + 3}{x - 2}$ $[\mathbb{R} - \{2\}]$

319 $y = \text{arccotg}\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ $[\mathbb{R} - \{-2, 2\}]$

320 $y = \arccos\dfrac{x - 1}{x + 3}$ $[[-1; +\infty[]$

321 $y = \dfrac{1}{\text{arcsen}\sqrt{x}}$ $[]0; 1]]$

322 $y = \sqrt{\text{arcsen}(x - 1)}$ $[[1; 2]]$

323 $y = \text{arctg}\dfrac{x + 1}{1 - x}$ $[\mathbb{R} - \{1\}]$

Trova il dominio e la funzione inversa delle seguenti funzioni restringendo tale dominio dove necessario.

324 $y = \arccos\dfrac{x + 1}{2x}$ $\left[x \le -\dfrac{1}{3} \vee x \ge 1;\ y = \dfrac{1}{2\cos x - 1}\right]$

325 $y = \text{tg}(x - \pi)$ $\left[x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};\ y = \pi + \text{arctg}\, x\right]$

326 $y = 2 + \text{arcsen}\sqrt{x - 1}$ $[1 \le x \le 2;\ y = 1 + \text{sen}^2(x - 2)]$

327 $y = \text{arctg}\dfrac{x - 4}{x + 2}$ $\left[x \ne -2;\ y = \dfrac{2\,\text{tg}\, x + 4}{1 - \text{tg}\, x}\right]$

8. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE E LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

▶ Teoria a pag. 658

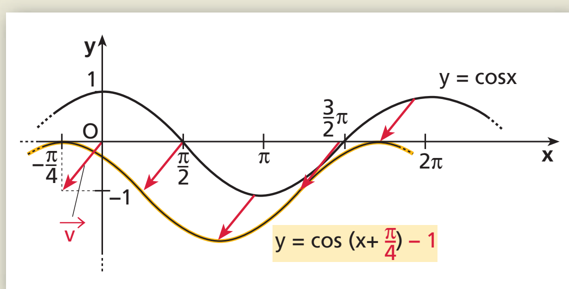
IN PRATICA
▶ Videolezione 33

La traslazione

328 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico della funzione $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$.

Tracciamo il grafico di $y = \cos x$ e poi lo trasliamo secondo il vettore $\vec{v}\left(-\dfrac{\pi}{4}; -1\right)$.



Disegna le seguenti funzioni, utilizzando i grafici delle funzioni goniometriche e delle loro inverse.

329 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

330 $y = \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$

331 $y = \mathrm{cotg}\left(x - \frac{2}{3}\pi\right) - 2$

332 $y = \cos x + 2$

333 $y = \mathrm{sen}\, x + 1$

334 $y = \mathrm{cotg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 4$

335 $y = \mathrm{tg}(x - \pi) + 1$

336 $y = \mathrm{arcsen}(x - 1)$

337 $y = \mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

338 $y = \mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

339 $y = \mathrm{sen}(x + 2\pi) + 2$

340 $y = \arccos x + 1$

341 $y = \mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

342 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 5$

343 $y = \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$

344 $y = \frac{1}{\mathrm{sen}\, x} + 2$

345 $y = \frac{1}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$

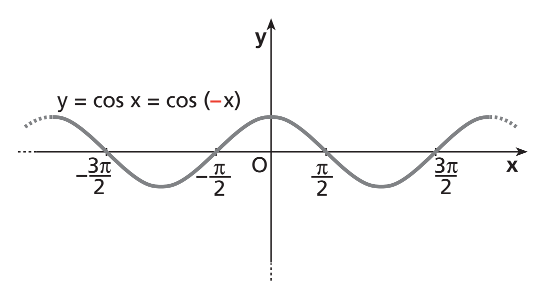
346 $y = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x} + 1$

Le simmetrie

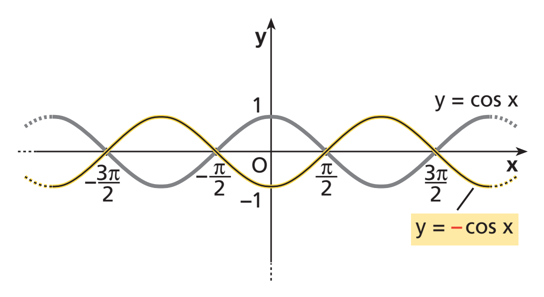
347 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo i grafici delle funzioni: a) $y = \cos(-x)$; b) $y = -\cos x$.

a) Sappiamo che il grafico di $y = f(-x)$ è simmetrico di quello di $y = f(x)$ rispetto all'asse y. Poiché il grafico di $y = \cos x$ è simmetrico rispetto all'asse y, il grafico di $y = \cos(-x)$ coincide con quello di $y = \cos x$.



b) Il grafico della funzione $y = -f(x)$ è simmetrico di quello di $y = f(x)$ rispetto all'asse x. Quindi, tracciato il grafico di $y = \cos x$, consideriamo il suo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.



Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

348 $y = \mathrm{tg}(-x)$

349 $y = \sec(-x)$

350 $y = -\mathrm{sen}(-x)$

351 $y = \mathrm{cotg}(-x)$

352 $y = \mathrm{cosec}(-x)$

353 $y = \mathrm{sen}(-x)$

354 $y = -\cos(-x)$

355 $y = -\mathrm{tg}(-x)$

356 $y = -\sec x$

357 $y = -\mathrm{arctg}(-x)$

358 $y = -\mathrm{sen}\, x$

359 $y = -\mathrm{tg}\, x$

360 $y = -\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

361 $y = -\frac{1}{\operatorname{sen}(-x)}$

362 $y = \frac{1}{-\operatorname{tg} x}$

363 $y = -1 + \operatorname{sen}(-x)$

364 $y = -\operatorname{cotg} x$

365 $y = -\operatorname{arcsen} x$

Le funzioni goniometriche e il valore assoluto

Il grafico di $y = |f(x)|$

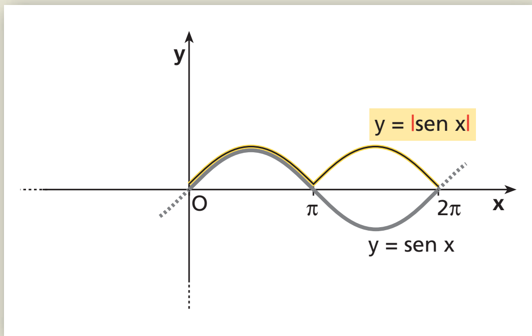
366 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico della funzione

$y = |\operatorname{sen} x|$, con $0 \le x \le 2\pi$.

a) Disegniamo $y = \operatorname{sen} x$ e confermiamo la parte di curva che sta nel semipiano positivo delle y.

b) Negli intervalli in cui la curva sta nel semipiano negativo delle y, tracciamo la curva simmetrica rispetto all'asse x.



Disegna il grafico delle seguenti funzioni.

367 $y = |\cos x|$

368 $y = |\operatorname{cosec} x|$

369 $y = |\cos(-x)|$

370 $y = |\operatorname{tg} x|$

371 $y = |\operatorname{cotg} x|$

372 $y = |-\operatorname{tg}(-x)|$

373 $y = |\sec x|$

374 $y = |\operatorname{sen}(-x)|$

375 $y = |-\operatorname{sen}(-x)|$

376 $y = |\operatorname{arctg} x|$

377 $y = |\operatorname{sen} x - 2|$

378 $y = |\operatorname{arcsen} x|$

379 $y = \frac{1}{|\operatorname{sen} x - 1|}$

380 $y = \left|\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\right|$

381 $y = \frac{1}{|\operatorname{tg}(-x)|}$

Il grafico di $y = f(|x|)$

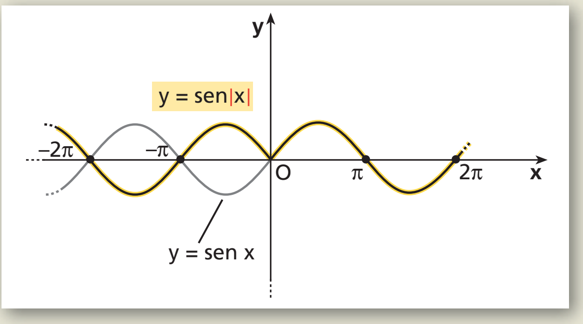
382 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico della funzione $y = \operatorname{sen}|x|$.

Sappiamo che $f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \ge 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

a) Disegniamo $y = \operatorname{sen} x$ nel semipiano positivo delle x.

b) Per $x < 0$ disegniamo il simmetrico del grafico precedente rispetto all'asse y.



Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

383 $y = \mathrm{tg}\,|x|$

384 $y = \mathrm{cotg}\,|x|$

385 $y = \sec|x|$

386 $y = \mathrm{arcsen}\,|x|$

387 $y = \mathrm{cosec}\,|x|$

388 $y = \mathrm{arctg}\,|x|$

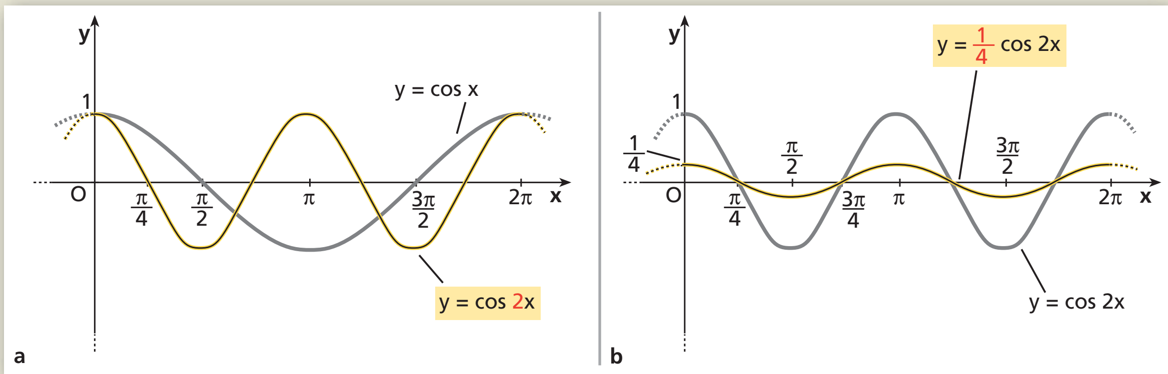
La dilatazione e la contrazione

389 **ESERCIZIO GUIDA**

Disegniamo il grafico della funzione $y = \frac{1}{4}\cos 2x$.

a) Passiamo da $y = \cos x$ a $y = \cos 2x$. Possiamo scrivere $2x = \frac{x}{\frac{1}{2}}$, quindi $y = \cos 2x = \cos\frac{x}{\frac{1}{2}}$, e pertanto abbiamo una contrazione orizzontale di rapporto $m = \frac{1}{2}$ (figura *a*).

b) Da $y = \cos 2x$ passiamo a $y = \frac{1}{4}\cos 2x$ con una contrazione verticale con $n = \frac{1}{4}$ (figura *b*).



Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

390 $y = 2\,\mathrm{sen}\frac{x}{4}$; $y = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,2x$; $y = 2\cos\frac{x}{2}$.

391 $y = 3\,\mathrm{tg}\frac{x}{4}$; $y = 2\,\mathrm{cotg}\,4x$; $y = 4\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}$.

392 $y = 4\cos 2x$; $y = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\frac{x}{4}$; $y = \frac{1}{4}\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

393 $y = 2\,\mathrm{cotg}\frac{x}{2}$; $y = 3\,\mathrm{sen}\,4x$; $y = 3\cos 2x$.

394 **ESERCIZIO GUIDA**

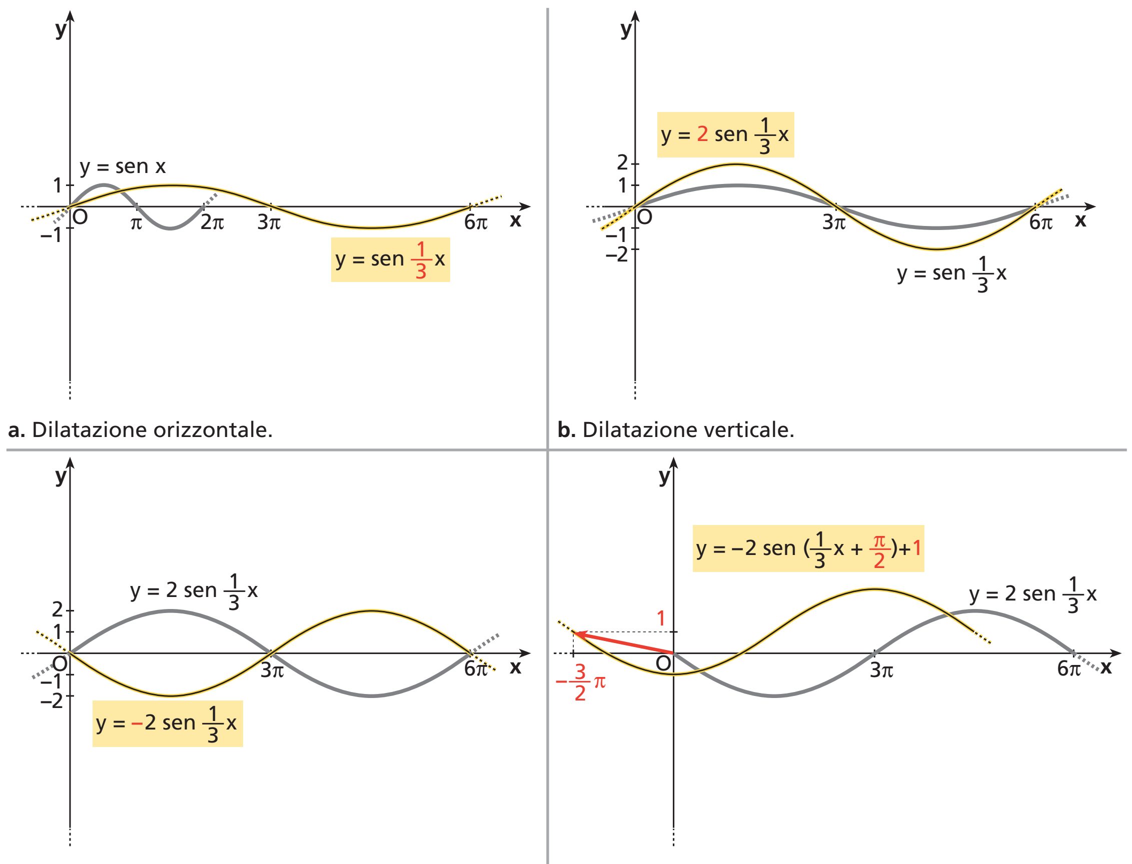
Disegniamo il grafico della funzione sinusoidale $y = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ e scriviamo il valore dell'ampiezza, della pulsazione, della fase iniziale e del periodo.

Applichiamo alla funzione $y = \mathrm{sen}\,x$, per passi successivi:

- la dilatazione orizzontale con $m = 3$;
- la dilatazione verticale con $n = 2$;
- la simmetria rispetto all'asse x;
- la traslazione di vettore $\left(-\frac{3\pi}{2}; 1\right)$.

Notiamo che si può determinare la componente orizzontale del vettore di traslazione ponendo $\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2} = 0$, cioè:

$$\frac{1}{3}x = -\frac{\pi}{2} \rightarrow x = -\frac{3\pi}{2}.$$



a. Dilatazione orizzontale.

b. Dilatazione verticale.

c. Simmetria rispetto all'asse *x*.

d. Traslazione.

L'ampiezza $|A|$ vale 2, la pulsazione $\omega = \frac{1}{3}$, la fase iniziale $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Il periodo è $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ossia

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi.$$

Disegna i grafici delle seguenti funzioni e scrivi il valore dell'ampiezza, della pulsazione, della fase iniziale e del periodo.

395 $y = \frac{1}{4}\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

396 $y = 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

397 $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$

398 $y = 2\cos\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{2}\right)$

399 $y = 3\,\text{sen}\left(\frac{1}{4}x + \pi\right)$

400 $y = -2\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

401 $y = -2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$

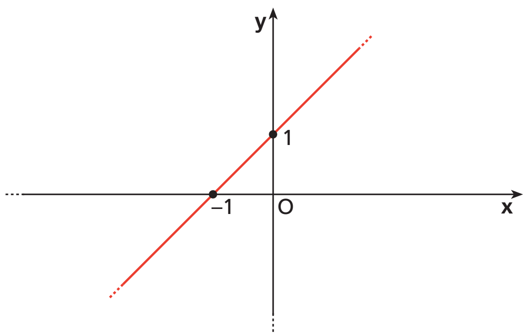
402 $y = -6\,\text{sen}\left(2x + \frac{3}{2}\pi\right)$

403 $y = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$

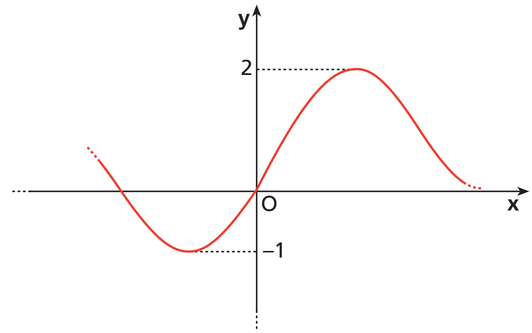
Il grafico di $y = f^2(x)$ e di $y = \sqrt{f(x)}$

Nel grafico è rappresentata la funzione $y = f(x)$. Disegna $y = f^2(x)$.

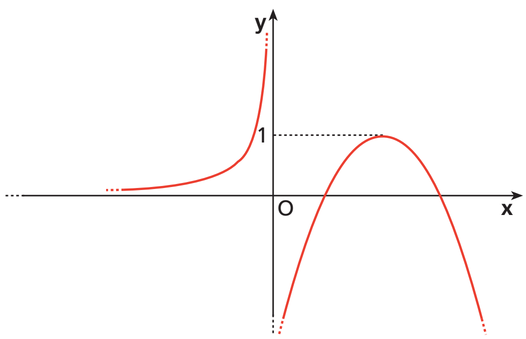
404



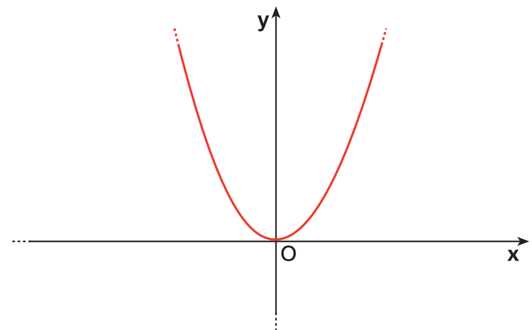
406



405



407



408 Disegna la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x + 1$ e poi traccia il grafico di $f^2(x)$.

409 Rappresenta graficamente la funzione $f(x) = -\operatorname{tg} x$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$ e poi disegna $f^2(x)$.

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

410 $y = (-\cos x + 1)^2$

411 $y = \operatorname{tg}^2 |x|$

412 $y = \operatorname{tg}^2 x - 1$

413 $y = \operatorname{sen}^2 x$

414 $y = -\cos^2 x$

415 $y = \operatorname{sen}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

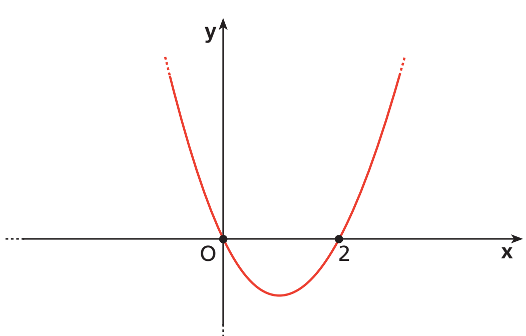
416 $y = \cos^2 x + 2$

417 $y = \operatorname{arctg}^2 x$

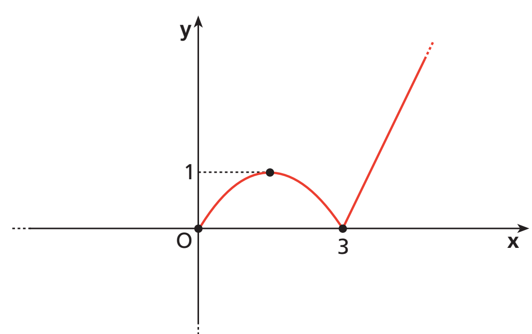
418 $y = \frac{1}{2}\cos^2(2x)$

Nel grafico è rappresentata la funzione $y = f(x)$. Disegna $y = \sqrt{f(x)}$.

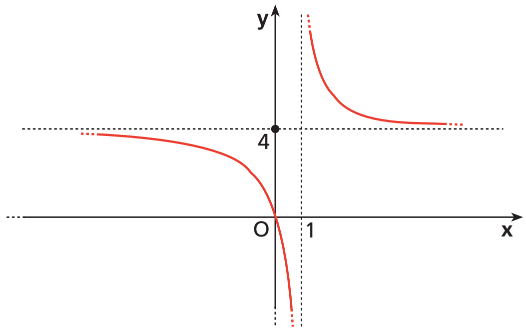
419



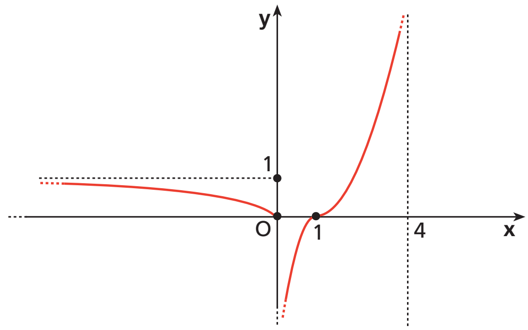
420



421



422



423 Disegna la funzione $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ e poi traccia il grafico di $\sqrt{f(x)}$.

424 Rappresenta il grafico della funzione $f(x) = -\operatorname{sen} x$ nell'intervallo $[-\pi; \pi]$ e poi disegna $\sqrt{f(x)}$.

Rappresenta graficamente le seguenti funzioni.

425 $y = \sqrt{\cos x}$

426 $y = \sqrt{-\operatorname{tg} x}$

427 $y = \sqrt{\operatorname{sen} x + 1}$

428 $y = \sqrt{\operatorname{tg}|x|}$

429 $y = -\sqrt{|\operatorname{tg} x|}$

430 $y = \sqrt{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1}$

431 $y = -\sqrt{\operatorname{sen}(-x)}$

432 $y = \sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x + 2}$

433 $y = \sqrt{\operatorname{cosec} x}$

ESERCIZI VARI Le funzioni goniometriche

434 **TEST** La funzione $y = 3\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{4}\right)$ ha come ampiezza, pulsazione e periodo, rispettivamente:

A $3, \frac{1}{3}, 6\pi$.
B $3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\pi$.
C $3, \frac{1}{3}, \frac{\pi}{6}$.
D $3, \frac{1}{3}, \frac{\pi}{6}$.
E $\frac{1}{3}, 3, 8\pi$.

435 **TEST** Quale, fra le seguenti funzioni, ha la stessa rappresentazione grafica della funzione $y = |\operatorname{sen}|x||$?

A $y = \cos x$
B $y = |\operatorname{sen} x|$
C $y = |\cos x|$
D $y = \operatorname{sen} x$
E $y = \cos|x|$

436 **TEST** Se l'ampiezza di $y = \left(\frac{1}{k}\right)\cos(k^2\theta)$ è 2, allora il periodo deve essere:

A π.
B 2π.
C 4π.
D 8π.
E 16π.

(USA *Wolsborn-Drazovich State Mathematics Contest*, 2006)

437 **TEST** È data la funzione $f(x) = \operatorname{sen}(2x - 5)$. Allora: [Nota: *dom* e *im* stanno per *dominio* e *codominio*.]

A $\operatorname{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq 2x - 5 \leq 1\}$.
B $\operatorname{im}(f) = [-1; 1]$.
C f ha periodo $T = \pi - 5$.
D f ha periodo $T = 2\pi - 5$.

(*Politecnico di Torino, Test di autovalutazione*)

438 **ASSOCIA** a ciascuna delle prime tre funzioni quella, fra le ultime tre, che ha lo stesso grafico.

1) $y = \cos(x + 2\pi)$.
2) $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$.
3) $y = \operatorname{sen}(x + \pi)$.

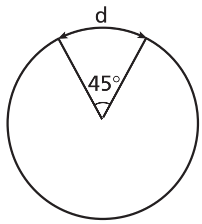
a) $y = -\cos x$.
b) $y = \operatorname{sen}(-x)$.
c) $y = \cos(-x)$.

439 Disegna il grafico delle seguenti funzioni.

$$y = \text{sen}\,2x; \quad y = \cos 2x; \quad y = \cos\frac{x}{2}; \quad y = \cos|x|; \quad y = \text{sen}\,|x|.$$

440 The diagram shows an angle of 45° at the centre of the circle of radius length 14 cm.

Calculate d, taking $\pi = \frac{22}{7}$.



(IR *Leaving Certificate Examination*, Ordinary Level, 1992)

[11 cm]

441 A graph has equation $y = \cos(2x)$, where x is a real number.

a) Draw a sketch of that part of the graph for which $0 \le x \le 2\pi$.

b) On your sketch show two of the lines of symmetry which the complete graph possesses.

(UK *Northern Examination Assessment Board*, *NEAB*)

$\left[\text{b) } x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \ldots\right]$

442 The functions $f(x)$ and $g(x)$ are defined for all real numbers by $f(x) = \sin(2x)$, $g(x) = |\sin(2x)|$.

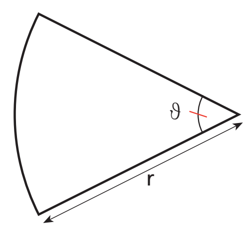
a) (*i*) State whether f is an odd function, an even function or neither.
(*ii*) State whether g is an odd function, an even function or neither.

b) Given that f and g are periodic functions, write down the periods of f and of g.

(UK *Northern Examination Assessment Board*, *NEAB*)

$\left[\text{a) } f \text{ is an odd function, } g \text{ is an even function; b) } \pi; \frac{\pi}{2}\right]$

443



The sector of the circle shown, of radius length r, has total perimeter length 18. Using this information, express the angle ϑ in terms of r and hence obtain a formula for the area of the sector in terms of r.

$\left[\vartheta = \frac{2(9-r)}{r}; \text{ area} = (9-r)r\right]$

Disegna i grafici delle seguenti funzioni.

444 $y = \text{sen}\,2x - \frac{\pi}{2}$

445 $y = 4\sec x - 1$

446 $y = 2\cos\frac{x}{4} + 1$

447 $y = \text{tg}|x| - 3$

448 $y = \frac{(\text{sen}\,x + \cos x)^2 - 1}{\text{sen}\,x}$

449 $y = 3 - \text{arcsen}\,x$

450 $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}$

451 $y = 2\cos 2x + 2$

452 $y = \frac{|\text{sen}\,x|}{\text{sen}\,x} + 4$

453 $y = \frac{-1}{|\text{sen}\,x - 1|}$

454 $y = \frac{1}{1 - \text{arctg}\,x}$

455 $y = \frac{1}{\text{sen}|x|} - 1$

456 $y = \frac{1}{2\,\text{sen}^2 x + 1}$

457 $y = \frac{1}{-\sqrt{\cos x} + 2}$

458 $y = \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]^2$

459 $y = 2\sqrt{\cos x} - 1$

460 $y = -\text{cotg}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

461 $y = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$

462 $y = \begin{cases} |\cos 2x| & \text{se } x \le 0 \\ |\text{arctg}\,x| - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}; \qquad y = \begin{cases} \cos x & \text{se } |x| \le \frac{\pi}{2} \\ \text{cosec}\,x & \text{se } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$

463 Traccia il grafico di $f(x) = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, di $\frac{|f(x)|}{f(x)} + 1$ e di $\frac{f(x) + |f(x)|}{2}$.

464 Della funzione $y = 1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ trova il dominio, disegna il grafico e scrivi le equazioni degli asintoti.
[D: $x \neq \pi + 2k\pi$; $x = \pi + 2k\pi$]

465 Quanto valgono i rapporti di dilatazione m e n e il vettore $\vec{v}$ di traslazione che si applicano a $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}\pi\right)$ per ottenere una funzione del tipo $y = \cos x$?
[$m = 3, n = 1$; $\vec{v}(-2\pi; 0)$]

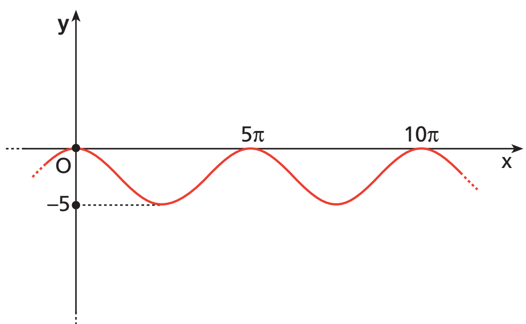
466 Dopo aver tracciato il grafico della funzione $f(x) = -|\operatorname{tg} x| + 1$, disegna il grafico delle funzioni $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) - \frac{\pi}{2}$, $2f(x)$, $f(2x)$.

467 Dopo aver trovato il dominio D e il codominio C e aver disegnato il grafico della funzione $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\cos x}$, traccia i grafici di $f(|x|)$ e di $f(x) + 1$.
$\left[D\!: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ C\!: \left]-\infty; 0\right] \cup \left[2; +\infty\right[\right]$

468 Traccia i grafici di $y = \frac{\cos x}{\cos x}$, $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$, $y = 1$. Rappresentano la stessa funzione?

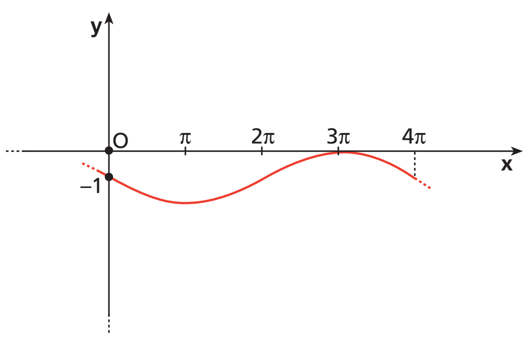
Scrivi le equazioni delle funzioni che hanno i seguenti grafici, sapendo che sono ricavabili dai grafici delle funzioni goniometriche mediante le trasformazioni geometriche.

469



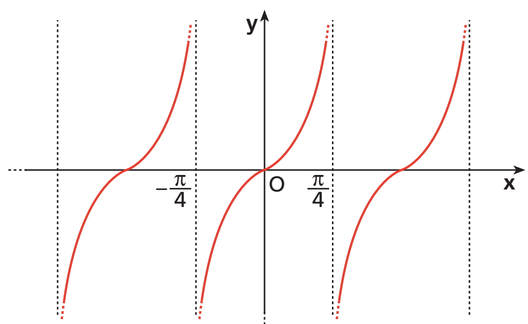
$\left[y = \frac{5}{2}\cos\frac{2}{5}x - \frac{5}{2}\right]$

470



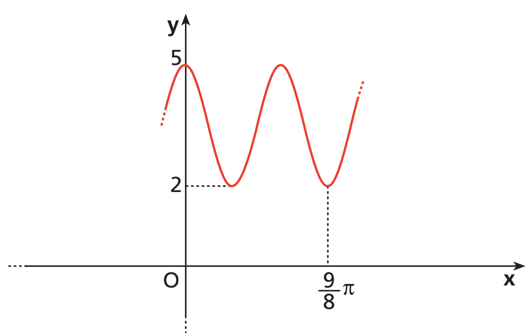
$\left[y = -1 - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]$

471



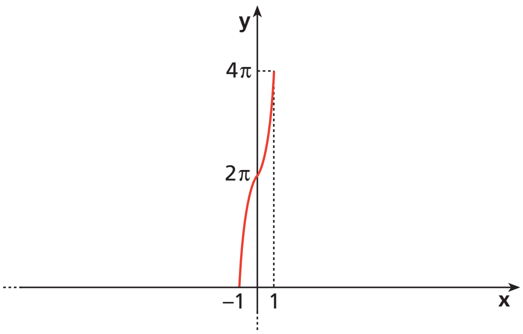
[$y = \operatorname{tg} 2x$]

472



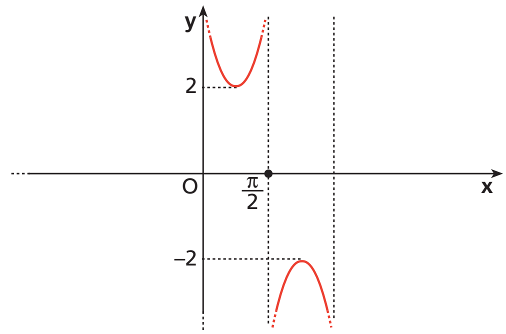
$\left[y = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{8}{3}x\right]$

473



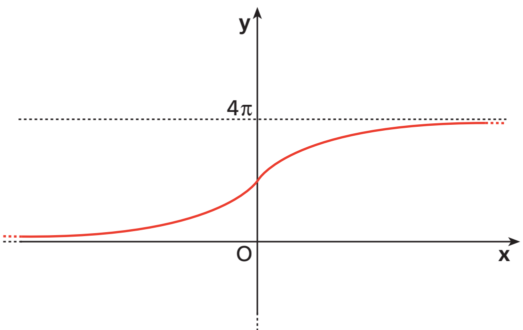
$[y = 2\pi + 4 \operatorname{arcsen} x]$

475



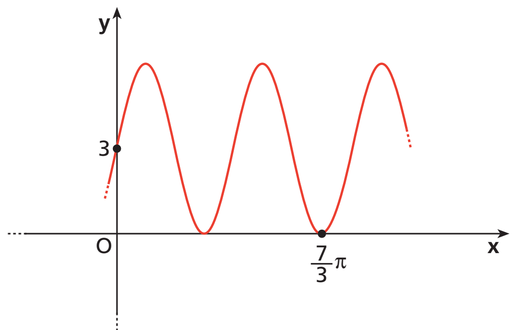
$[y = 2 \operatorname{cosec} 2x]$

474



$[y = 4 \operatorname{arctg} x + 2\pi]$

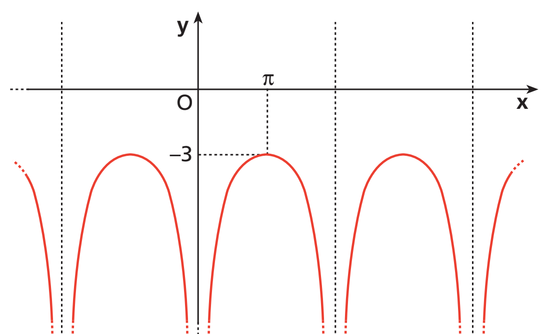
476



$\left[y = 3 + 3 \operatorname{sen} \frac{3}{2}x\right]$

477 a) Determina una possibile equazione della funzione f rappresentata in figura.
b) Indica il dominio e il codominio di f.
c) Traccia il grafico di $|f(x)| - 3$.
d) Disegna il grafico di $-f(x - \pi)$.

$\left[\text{a) } f(x) = -\frac{1}{\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|} - 2; \text{ b) } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z};]-\infty; -3]\right]$



Funzioni sinusoidali e luoghi geometrici

478 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo il luogo geometrico descritto al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ da $P(x; y)$, con x e y date da:

$$\begin{cases} x = 2\cos\alpha - 1 \\ y = 3\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

Isoliamo al primo membro $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$:

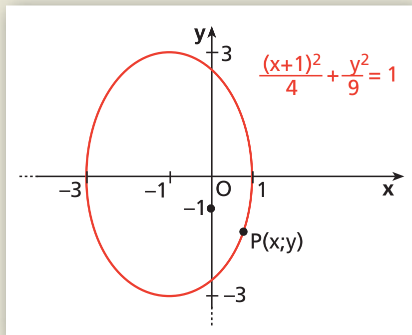
$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x+1}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{3} \end{cases}$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri delle due equazioni e poi sommiamo membro a membro. Otteniamo

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2,$$

da cui, essendo $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$: $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Il luogo cercato è un'ellisse traslata di centro $(-1; 0)$ e semiassi di lunghezza 2 e 3.



Determina i luoghi geometrici descritti al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ da $P(x; y)$, con x e y date dalle seguenti equazioni.

479 $\begin{cases} x = 3 + \cos\alpha \\ y = \operatorname{sen}\alpha - 2 \end{cases}$ $[(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1]$

480 $\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = 1 + \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$ $\left[\frac{x^2}{9} + (y-1)^2 = 1\right]$

481 $\begin{cases} x = \operatorname{sen}\alpha \\ y = \cos^2\alpha + 1 \end{cases}$ $[y = 2 - x^2]$

482 $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg}\alpha \\ y = \sec\alpha \end{cases}$ $\left[\frac{x^2}{4} - y^2 = -1\right]$

483 $\begin{cases} x = 2\operatorname{sen}^2\alpha - 1 \\ y = \cos^2\alpha + 2 \end{cases}, \quad \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$

$[x + 2y - 5 = 0, -1 < x < 1]$

484 $\begin{cases} x = \operatorname{sen}\alpha + 3 \\ y = \operatorname{cosec}\alpha \end{cases}, \quad \alpha \in]0; \pi[.$

$[xy - 3y - 1 = 0, 3 < x \leq 4]$

485 Le coordinate dei punti di una curva sono date dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = \cos 3\alpha - 2 \\ y = \operatorname{sen} 3\alpha + 1 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Determina l'equazione cartesiana della curva.
b) Individua il tipo di conica $\mathscr{C}$ che essa rappresenta e calcola l'eccentricità.
c) Trova l'equazione della retta tangente a $\mathscr{C}$ nel suo punto di ordinata 1 e ascissa minore, dopo averla rappresentata su un piano cartesiano.

[a) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$; b) circonferenza, $e = 0$; c) $x = -3$]

Il periodo delle funzioni goniometriche

IN PRATICA ▶ Videolezione 34

Determina il periodo delle seguenti funzioni.

486 $y = \operatorname{sen} 4x$, $\quad y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$

487 $y = \cos 6x$, $\quad y = \operatorname{cotg} 2x$. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

488 $y = \operatorname{sen}(3x + \pi)$, $\quad y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$. $\left[\frac{2}{3}\pi, 4\pi\right]$

489 $y = \cos(2x + 2\pi)$, $\quad y = \operatorname{cotg}\left(6x + \frac{\pi}{4}\right)$. $\left[\pi, \frac{\pi}{6}\right]$

Determina k in modo che la funzione abbia il periodo T indicato.

490 $y = \operatorname{sen} 2kx$, $\quad T = \frac{\pi}{2}$. $[2]$

491 $y = \text{tg}\dfrac{2}{k}x$, $\quad T = 2\pi$. [4]

492 $y = \cos\left(\dfrac{k}{4}x + \pi\right)$, $\quad T = \pi$. [8]

493 $y = \text{cotg}\left(\dfrac{k}{3}x\right)$, $\quad T = \dfrac{\pi}{3}$. [9]

494 a) Data la funzione $y = f(x) = 2\cos kx + 2$, determina k in modo che il periodo sia $\dfrac{2}{3}\pi$.

b) Traccia il grafico della funzione f ottenuta con il valore di k del punto precedente.

c) Disegna il grafico di $\dfrac{1}{|f(x)|}$.

d) Indica un intervallo in cui f è invertibile, trova l'espressione analitica di f^{-1} e rappresentala graficamente.

$\left[\text{a) } k = 3; \text{ d) } \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]; f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{x-2}{2}\right]$

495 Data la funzione $y = a \cdot \text{arcsen}(x + b)$, determina i valori di a e b in modo che sia $a > 0$ e che la funzione abbia come dominio l'intervallo $[0; 2]$ e come codominio l'intervallo $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

a) Rappresenta la funzione così ottenuta.
b) Determina la funzione inversa (applicando la simmetria rispetto a $y = x$).
c) Dopo aver individuato il periodo della funzione inversa, rappresentala su un intero periodo.

$\left[y = \dfrac{1}{\pi}\text{arcsen}(x-1); \text{ b) } y = \text{sen}(\pi x) + 1; \text{ c) } T = 2\right]$

496 a) Data la funzione $f(x) = 3\,\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$, determina il suo periodo e rappresentala graficamente.

b) Traccia il grafico di $|f(x)|$.

c) Traccia il grafico di $\big||f(x)| - 3\big|$.

d) Verifica se nell'intervallo $\left[-\dfrac{\pi}{3}; \pi\right]$ la funzione $f(x)$ è invertibile; se necessario effettua una restrizione del dominio in modo che lo sia, determina $f^{-1}(x)$ in tale dominio e rappresentala graficamente.

e) Calcola $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ e $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

$\left[\text{a) } 2\pi; \text{ d) no; in } \left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5}{6}\pi\right] \text{ è invertibile e } f^{-1}(x) = \text{arcsen}\left(\dfrac{x-2}{3}\right) + \dfrac{\pi}{3}; \text{ e) } \dfrac{1}{2}, -1\right]$

497 Trova per quale valore di a il periodo della funzione $y = \text{tg}\left(\dfrac{3a}{2}x + \pi\right)$ è $\dfrac{\pi}{2}$, e poi rappresentala graficamente.

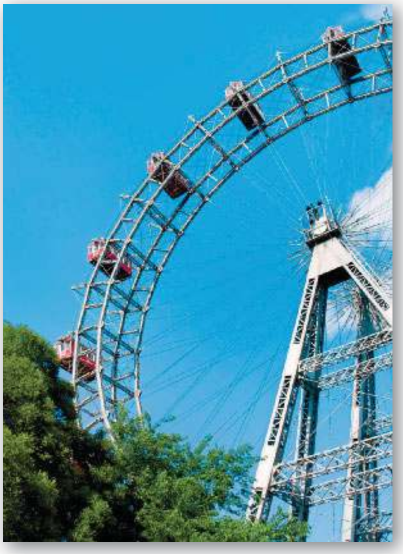
$\left[a = \dfrac{4}{3}\right]$

498 Come nell'esercizio precedente, ma con la funzione $y = \cos\left(\dfrac{k}{4}x - 1\right)$ e con periodo $\dfrac{3}{2}\pi$. $\left[k = \dfrac{16}{3}\right]$

REALTÀ E MODELLI

1 **La ruota panoramica**

Nel 1897 fu costruita a Vienna la Riesenrad, una ruota panoramica alta 65 metri tuttora esistente e in funzione, in occasione delle celebrazioni dei 50 anni di regno dell'imperatore Francesco Giuseppe I.
Il punto più basso dista da terra 4 metri e impiega circa 4 minuti per fare un giro completo.



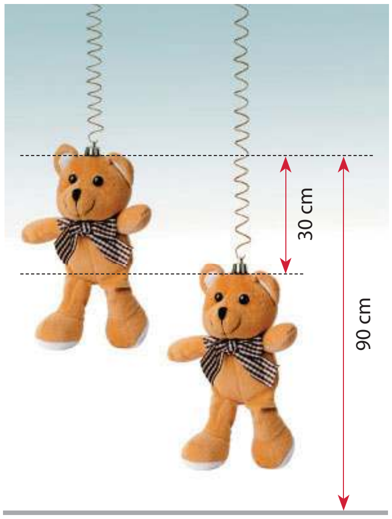
- ▶ Posiziona il sistema di riferimento cartesiano nel centro della ruota ed esprimi le funzioni che descrivono l'ascissa e l'ordinata della posizione di un passeggero in funzione dell'angolo α formato dal raggio della ruota e dalla verticale (in modo che alla partenza l'angolo sia nullo e supponendo che la ruota giri in senso antiorario).
- ▶ Posiziona ora il sistema di riferimento cartesiano in modo che l'asse x coincida con la linea del terreno e l'asse y passi per il centro della ruota. Esprimi la funzione che descrive l'altezza del passeggero rispetto al terreno, sempre in relazione all'angolo α, e rappresenta il grafico di tale funzione.
- ▶ Esprimi l'altezza del passeggero trovata al punto precedente in funzione del tempo, anziché dell'angolo.
- ▶ A che altezza dal suolo si trova il passeggero dopo 30 secondi dalla partenza?

2 **La marea**

La marea è un moto periodico di oceani e mari che si innalzano e abbassano anche di 10-15 metri, solitamente ogni circa sei ore. L'ampiezza (detta *altezza dell'onda di marea*, uguale al dislivello tra bassa e alta marea) dipende dalla conformazione della costa e del terreno.
Al molo di un villaggio in Bretagna una tabella riporta giorno per giorno gli orari della marea e precisa che l'altezza dell'acqua sul pilone del molo varia da 0,8 a 9,5 m. Per un certo giorno sono segnati i seguenti orari: alta marea ore 4:03; bassa marea ore 10:14; alta marea ore 16:25; bassa marea ore 22:36.

- ▶ Determina l'altezza media dell'acqua sul pilone, l'ampiezza della variazione e il periodo dell'onda di marea di quel giorno.
- ▶ La variazione dell'altezza del livello dell'acqua nel tempo può essere descritta da una funzione goniometrica; scrivi l'equazione di tale funzione fissando il tempo 0 in corrispondenza delle ore 4:03 e il livello 0 in corrispondenza dell'altezza media dell'acqua.
- ▶ Cambia il sistema di riferimento mettendo il livello 0 in corrispondenza del fondo del mare e il tempo 0 in corrispondenza dell'ora 0 della notte (esprimi il tempo in minuti) e rappresentane il grafico.

3 **Il pupazzetto a molla**



Roberto gioca con un pupazzetto a molla facendolo oscillare verticalmente, partendo da una posizione di equilibrio a un'altezza di 90 cm dal pavimento. Supponiamo che per effettuare un'oscillazione completa, di ampiezza 30 cm, e ritornare nella posizione iniziale impieghi 3 secondi.

- ▶ Esprimi mediante una funzione goniometrica la variazione dell'altezza dal suolo del pupazzetto in funzione del tempo e rappresenta il grafico della funzione.
- ▶ Quale posizione occupa il pupazzetto dopo 2 secondi?

VERSO L'ESAME DI STATO

TEST

Questi e altri test interattivi nel sito: zte.zanichelli.it

1 Delle seguenti affermazioni relative alla funzione $y = \operatorname{arcsen}(\sqrt{x} - 1)$ una sola è *falsa*. Quale?

- **A** Il dominio è $0 \le x \le 4$.
- **B** Il codominio è $[-1; 1]$.
- **C** La sua funzione inversa è $y = (1 + \operatorname{sen} x)^2$.
- **D** La funzione è positiva per $1 < x \le 4$.
- **E** La funzione interseca l'asse y in $\left(0; -\frac{\pi}{2}\right)$.

2 Indica quale delle seguenti proposizioni è *vera*.

- **A** Se $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\operatorname{cotg}\alpha < 0$, allora α ha il lato termine nel terzo quadrante.
- **B** Se $\operatorname{tg}^2\alpha = -\operatorname{tg}\alpha$ e $\alpha \neq 0$, allora il lato termine di α è nel secondo o nel quarto quadrante.
- **C** Se $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, allora $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{7}{2}}$.
- **D** Se $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{4}$ e il suo lato termine appartiene al secondo quadrante, allora $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$.
- **E** Se $\operatorname{tg}\alpha = -6$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, allora
$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{6\sqrt{7}}{7}.$$

3 Le seguenti proposizioni sono tutte vere *tranne* una. Quale?

- **A** La funzione $y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$ è invertibile nell'intervallo $\left[-\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi\right]$.
- **B** La funzione inversa di $y = 2\operatorname{tg} 2x$ ha equazione $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$.
- **C** $(\operatorname{sen} x)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.
- **D** $\frac{1}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}\sec 2x$.
- **E** La funzione $y = \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x^2+1}$ ha per dominio $\mathbb{R}$.

4 La funzione $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}x + \pi\right)$ ha periodo:

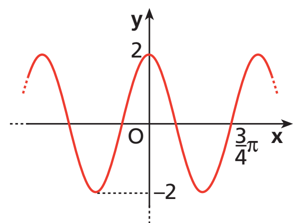
A $\frac{1}{2}$. **B** $\frac{3}{4}\pi$. **C** $\frac{3}{2}\pi$. **D** 2π. **E** $\frac{4}{3}$.

5 Quale fra le seguenti funzioni *non* è simmetrica rispetto all'origine?

- **A** $y = \operatorname{sen} x$
- **B** $y = \operatorname{arctg} x$
- **C** $y = \operatorname{arcsen} x$
- **D** $y = \operatorname{tg} x$
- **E** $y = -\cos x$

6 Quale delle seguenti funzioni ha il grafico della figura?

- **A** $y = 2\operatorname{sen} 2x$
- **B** $y = 2\operatorname{sen} x$
- **C** $y = 4\cos 2x$
- **D** $y = 2\cos 2x$
- **E** $y = 2\operatorname{sen}(x + \pi)$



7 L'espressione
$$\frac{1}{\sec^2\alpha} + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha$$
è equivalente a:

- **A** $1 - \operatorname{tg}^2\alpha$.
- **B** $\operatorname{cosec}^2\alpha$.
- **C** $\sec^2\alpha$.
- **D** $\frac{1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\sec^2\alpha}$.
- **E** $\frac{1 + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

8 Il grafico della funzione
$$y = -3 + 2\cos\left(\frac{4}{3}x + \frac{\pi}{3}\right)$$

- **A** interseca l'asse y nel punto $(0; 4)$.
- **B** ha codominio $[-4; -1]$.
- **C** ha periodo $T = \frac{8}{3}\pi$.
- **D** passa per il punto $(3\pi; -2)$.
- **E** è simmetrico rispetto all'asse y.

QUESITI

9 Confronta le funzioni $f_1(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$ e $f_2(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$, precisando per ciascuna il dominio e il codominio, sottolineando analogie e differenze dei rispettivi grafici.

$\left[f_1(x) = x, D = C = [-1; 1];\ f_2(x) = x \text{ solo nell'intervallo} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], D: \mathbb{R}, C: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right]$

10 Dimostra che per qualunque $x \in \mathbb{R}$ vale la relazione:

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

11 Dimostra che il periodo della funzione $y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ è $\frac{\pi}{\omega}$.

12 Verifica che per $-1 < x < 1$ è $\operatorname{tg} \operatorname{arcsen} x = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

13 Se $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}\beta$ sono radici di $x^2 - px + q = 0$ e $\operatorname{cotg}\alpha$ e $\operatorname{cotg}\beta$ sono radici di $x^2 - rx + s = 0$, quanto vale il prodotto rs espresso in funzione di p e q?

(*Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria,* 2004, *quesito* 7)

$\left[\frac{p}{q^2}\right]$

PROBLEMI

14 Data la funzione $f(x) = \frac{a}{2} + \frac{4}{\pi} \operatorname{arcsen}(x + 1)$:

a) trova a in modo che il suo grafico passi per $(0; 5)$;
b) determina il dominio e il codominio della funzione f_1 ottenuta per il valore di a del punto precedente;
c) rappresenta graficamente f_1;
d) determina il punto di intersezione del suo grafico con l'asse y;
e) traccia il grafico di $f_1(|x|) - 2$.

[a) $a = 6$; b) $D: [-2; 0]$, $C: [1; 5]$; d) $(0; 5)$]

15 Data la funzione

$$y = \frac{-2(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + 2}{\operatorname{sen} x}:$$

a) verifica se è funzione pari o dispari;
b) rappresentala graficamente;
c) determina il suo periodo;
d) rappresenta $|f(x)| + 1$;
e) rappresenta $\frac{1}{f(x)}$.

[a) pari; c) 2π]

16 a) Rappresenta graficamente la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}|x| & \text{se } x \le 0 \\ |\sec x| + 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

b) Determina il suo dominio e il suo codominio.

c) Indica l'insieme più ampio in cui la funzione è invertibile, determina l'espressione algebrica di f^{-1} e rappresentala graficamente.

$\left[\text{b) } D: [-1; +\infty[, \text{ con } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; C: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup [4; +\infty[; \text{ c) } \left[-1; \frac{\pi}{2}\right[; \; f^{-1}(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{se } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \arccos\left(\frac{1}{x-3}\right) & \text{se } x \ge 4 \end{cases}\right]$

17 a) Trova il dominio della funzione: $y = f(x) = \operatorname{arcsen}\left|\frac{2x-1}{x}\right| + \sqrt{\operatorname{arctg}(2x-1)}$.

b) Calcola $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $f(1)$.

c) Considera la funzione:

$$y = g(x) = a + b\arccos\sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

Per quali valori dei parametri a e b il suo grafico interseca quello di f nel punto di ascissa 1 e taglia l'asse x nel punto di ascissa 2?

d) Determina il dominio di g.

$\left[\text{a) } \left[\frac{1}{2}; 1\right]; \text{ b) } 0; \frac{1}{2}(\pi + \sqrt{\pi}); \text{ c) } a = -\frac{\pi + \sqrt{\pi}}{2}, b = \frac{2(\pi + \sqrt{\pi})}{\pi}; \text{ d) } [1; +\infty[\right]$

18 Considera la funzione:

$y = a + b \operatorname{arcsen}[c(x+d)]$, con b e c positivi.

a) Determina i parametri a, b, c, d in modo che abbia dominio $\left[-\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right]$ e codominio $[0; 2\pi]$ e che il suo grafico passi per $P\left(\frac{5}{2}; \pi\right)$.

b) Esegui una traslazione in modo che il grafico della funzione $f(x)$ ottenuta abbia centro di simmetria nell'origine.

c) Traccia il grafico di $\frac{1}{f(x)}$.

d) Trova l'equazione della funzione $f^{-1}(x)$ inversa di f e disegna il suo grafico.

$\left[\text{a) } y = 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right) + \pi; \text{ b) } y = 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}x; \text{ d) } y = 3\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]$

19 Data la funzione $y = a \operatorname{sen} bx + c$, con a e b positivi:

a) trova a, b, c in modo che il periodo sia 3π e il codominio $\left[-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]$;

b) esegui una traslazione di vettore $\vec{v}(0; -1)$ e determina i punti di intersezione con l'asse x del grafico della funzione $f(x)$ ottenuta, nell'intervallo $[-\pi; 2\pi]$;

c) traccia il grafico di $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ indicando il suo dominio e il suo codominio.

$\left[\text{a) } y = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\frac{2}{3}x + 1; \text{ b) } f(x) = \frac{3}{2}\operatorname{sen}\frac{2}{3}x; x = 0 \text{ e } x = \frac{3\pi}{2}; \text{ c) } D: \left]3k\pi; \frac{3}{2}\pi + 3k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}, C: \left[\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right[\right]$

20 Rappresenta, nello stesso sistema di assi cartesiani ortogonali, le funzioni:

$$f(x) = \text{arcsen}|x|, \qquad g(x) = 1 - x^2.$$

a) Dai grafici deduci il numero delle soluzioni dell'equazione $\text{arcsen}|x| = 1 - x^2$.

b) Generalizzando, discuti per quali valori di k l'equazione $\text{arcsen}|x| = k - x^2$ ammette soluzioni.

c) Traccia i grafici di $\frac{1}{f(x)}$ e di $\frac{1}{[g(x)]^2}$.

$\left[\text{b) per } k = 0 \text{ una soluzione, per } 0 < k \leq 1 + \frac{\pi}{2} \text{ due soluzioni}\right]$

21 Data la funzione

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\text{arctg}(x) + 1,$$

rappresentala in un sistema di assi cartesiani indicando dominio e codominio.

a) Determina la funzione omografica

$$g(x) = \frac{ax + b}{x}$$

tale che il suo grafico abbia come asintoti le rette $x = 0$ e $y = 1$ e passi per il punto $(1; 0)$.

b) Utilizzando i grafici delle funzioni f e g, determina il numero delle soluzioni delle equazioni:

$$f(x) = g(x),\ f(x) = |g(x)|,\ f(x) = g(|x|),\ f(|x|) = g(|x|).$$

$\left[\text{a) } g(x) = \frac{x-1}{x}\text{; b) numero soluzioni: } 0, 1, 1, 0\right]$

22 Data la funzione $y = a\,\text{tg}(bx)$, esprimi, in funzione di a e b diversi da 0, il periodo e gli asintoti paralleli all'asse y.

a) Determina la funzione di periodo $T = 2\pi$, passante per $\left(\frac{\pi}{2}; -2\right)$ e con $b > 0$.

b) Rappresenta la funzione trovata in un sistema di assi cartesiani ortogonali.

c) Come potresti modificare la legge per rendere il grafico simmetrico rispetto all'asse y?

d) Determina la funzione inversa indicando dominio e codominio.

$\left[T = \frac{\pi}{|b|};\ x = \frac{\pi}{2b} + k\frac{\pi}{b}\text{; a) } y = -2\,\text{tg}\frac{x}{2}\text{; c) per esempio: } y = -2\,\text{tg}\frac{|x|}{2}\text{; d) } y = -2\,\text{arctg}\frac{x}{2};\ D\text{: } \mathbb{R},\ C\text{: }]-\pi; \pi[\right]$

23 È data la funzione $f(x) = a + \text{arctg}(x + 1)$.

a) Calcola il valore di a in modo che la funzione passi per il punto $(-2; 0)$, quindi risolvi l'equazione:

$$f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

b) Determina dominio e codominio; nello stesso riferimento disegna i grafici di $f(x)$ e di $f(|x|)$.

c) Per quali valori di x risulta $f(x) = f(|x|)$?

$\left[\text{a) } a = \frac{\pi}{4},\ x = 0\text{; b) } D\text{: } \mathbb{R},\ C\text{: } \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right[\text{; c) } x \geq 0\right]$

24 Considera la generica funzione $y = a\sec px$, con $a \neq 0 \wedge p \neq 0$.

a) Indica il periodo T e le equazioni degli asintoti.

b) Determina la particolare funzione y_1 di periodo $T = \frac{\pi}{2}$ e passante per il punto $\left(\frac{\pi}{6}; -1\right)$; rappresenta il suo grafico.

c) Trova un intervallo in cui y_1 sia invertibile, deduci l'espressione della funzione inversa e il corrispondente dominio. Rappresenta poi il grafico della funzione inversa.

$\left[\text{a) } T = \frac{2\pi}{p},\ x = \frac{\pi}{2p} + k\frac{\pi}{p}\text{; b) } y_1 = \frac{1}{2}\sec 4x\text{; c) } \left[0; \frac{\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right],\ (y_1)^{-1} = \frac{1}{4}\arccos\frac{1}{2x},\ D\text{: } x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2}\right]$