Práctica 7 - AGM y camino mínimo

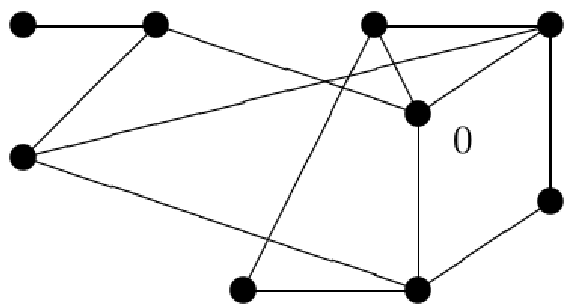
NOTAS PRELIMINARES
Los objetivos de esta práctica son:

- Comprender el problema de AGM.
- Comprender los distintos problemas de camino mínimo y sus diferencias.
- Comprender las diferencias entre el problema de AGM y el de encontrar las distancias entre un vértice y los demás.
- Comprender el funcionamiento de los algoritmos clásicos para AGM y camino mínimo.
- Analizar la versatilidad de estos algoritmos para distintas situaciones y sus tiempos de ejecución.

Los ejercicios marcados con el símbolo * constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.

Ejercicio 1 *

a. Usar BFS para numerar el grafo de la figura a partir del nodo marcado con 0.
b. Idem para DFS.



Ejercicio 2 *

a. Escribir un programa para contruir un árbol generador dado por DFS dada la matriz de adyacencia de un grafo.
b. Idem para BFS.

Ejercicio 3 *

a. Determinar la complejidad del algoritmo de Prim.
b. Escribir un programa para el algoritmo de Prim.
c. Qué técnica utiliza este algoritmo?
d. Repetir los items anteriores para el algoritmo de Kruskal.

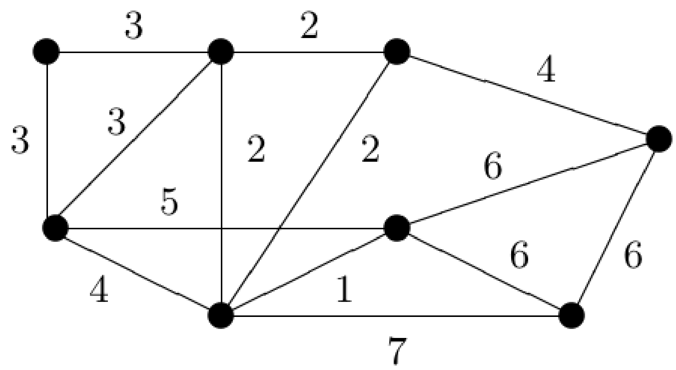
Ejercicio 4 *

Vialidad Nacional quiere construir, de la forma más económica posible, caminos que vinculen 5 ciudades (aunque para ir de una a otra haya que pasar por una tercera). Los costos de los tramos entre cada par de ciudades están dados en la tabla. Decir que tramos deberán construirse.

	B	C	D	E
A	5	10	80	90
B		70	60	50
C			8	20
D				10

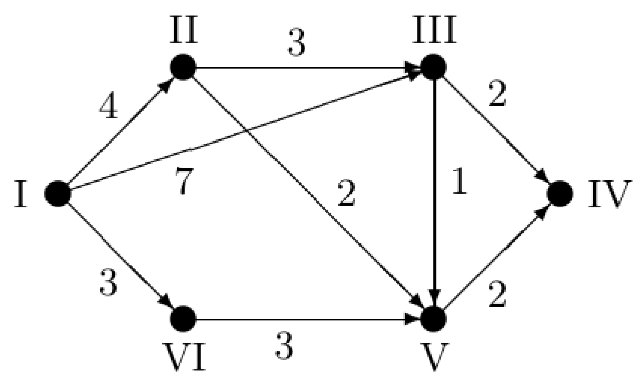
Ejercicio 5 *

Aplicar el algoritmo de Prim y el de Kruskal al grafo de la figura.



Ejercicio 6 *

a. Usar el algoritmo de Dijkstra para calcular el camino más corto desde el vértice I a todos los demás en el siguiente grafo:



b. Suponiendo que todos los arcos tuvieran la misma longitud, repetir **a** usando BFS.
c. Suponiendo que después de resolver **a** se descubriera que falta un arco en el grafo o que hay que modificar alguna longitud, es necesario repetir el algoritmo completo o se pueden aprovechar los resultados obtenidos?

Ejercicio 7 *

a. Escribir un programa para el algoritmo de Dijkstra. Utilizar las estructuras vistas para representar grafos (además de matriz de adyacencia) para implementarlo.
b. idem **a** para Ford, y Floyd.

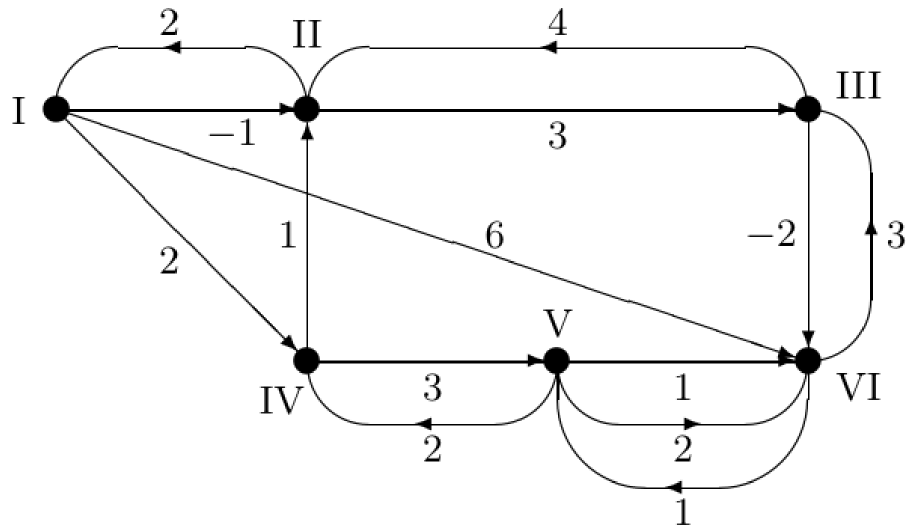
Ejercicio 8 *

a. Dar un ejemplo que muestre porque no se puede aplicar el algoritmo de Dijkstra cuando existen arcos de longitud negativa. Se puede construir un ejemplo en el cual Dijkstra funcione correctamente a pesar de tener arcos de longitud negativa?
b. Cuál es el trabajo computacional necesario para calcular los caminos de longitud mínima entre todos los pares de vértices de un grafo usando Dijkstra?
c. Se puede considerar a Dijkstra como un algoritmo goloso? Justifique.

Ejercicio 9 *

Usar el método de Ford para determinar el camino mínimo entre el vértice I y los demás en el siguiente grafo:

b. Calcular el camino más corto entre todos los pares de vértices del grafo del inciso **a** usando el método de Floyd.
c. Idem **b** para Ford, y Floyd.



Ejercicio 10 *

a. Cómo se puede modificar el algoritmo de Ford para usarlo para detectar circuitos de longitud negativa? Qué pasa si no todos los vértices son alcanzables desde el vértice 1?
b. Mostrar que el algoritmo de Ford requiere, en el peor caso, $O(mn)$ comparaciones.

Ejercicio 11 *

a. Cómo influye en el algoritmo de Floyd la manera en qué se hayan numerado los vértices del grafo?
b. Estimar el número de operaciones necesarias para ejecutar el algoritmo de Floyd.
c. Cómo puede usarse el algoritmo de Floyd para detectar la existencia de circuitos de longitud negativa?
d. Se puede aplicar el algoritmo de Floyd a grafos no orientados?

Ejercicio 12 *

Explicar porqué el algoritmo de Floyd es un algoritmo que usa la técnica de programación dinámica.

Ejercicio 13 *

Modelar el problema de la mochila, para el caso donde se pueden llevar varios elementos iguales, como un problema de camino mínimo.

Ejercicio 14 *

Volvamos al problema de dar cambio. En su forma más general podemos decir que el problema del cambio de dinero consiste en determinar si es posible cambiar un número p dado en billetes de denominaciones conocidas $a_1, \ldots, a_k$. Por ejemplo, si $k = 3, a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7$, podremos cambiar los números 8, 54, etc., pero no el número 4.

En general, este problema consiste en responder si $p = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$, para $x_i \geq 0, i = 1, \ldots, k$.

Modelar el problema como un problema de camino mínimo.

a. Describir un método para identificar todos los números en un rango dado $[l, u]$ que pueden ser cambiados.
b. Describir un método para decidir si un número p puede ser cambiado, y luego identificar las denominaciones de los billetes, tal que sea la menor cantidad posible.