MT-05

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

$$\frac{\partial M}{\partial y} = m \quad , \frac{\partial N}{\partial x} = -m \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1\ (x, y)}{f_2\ (x, y)}$$

$$V = \int \left(N - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q.y^n$$

$$z = \frac{1}{\log y}$$

अवकलन समीकरण

MT-05

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

अवकलन समीकरण

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

अध्यक्ष

प्रो. (डॉ.) नरेश दाधीच

कुलपति

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय

कोटा (राजस्थान)

संयोजक / समन्वयक एवं सदस्य

विषय समन्वयक

प्रो. डी.एस. चौहान

गणित विभाग

राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

सदस्य सचिव/समन्वयक

डॉ. अशोक शर्मा

सह आचार्य, राजनीति विज्ञान

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

सदस्य

1. **प्रो. वी. पी. सक्सेना**
   भूतपूर्व कुलपति एवं
   सेवानिवृत प्रोफेसर
   जीवाजी विश्वविद्यालय
   ग्वालियर (मध्यप्रदेश)
2. **प्रो.एस.सी. राजवंशी**
   गणित विभाग,
   इन्स्टीयूट ऑफ इंजीनियरिंग एण्ड टेक्नोलॉजी
   भड्डल, रोपड़ (पंजाब)
3. **प्रो. एस.पी. गोयल**
   गणित विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

1. **डॉ. ऐ. के. माथुर**
   सेवानिवृत्त सह आचार्य
   गणित विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
2. **डॉ. के. एन. सिंह**
   सह आचार्य
   गणित विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
3. **डॉ. परेश व्यास**
   सहायक आचार्य
   गणित विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

1. **डॉ. विमलेश सोनी**
   व्याख्याता - गणित
   राजकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय
   कोटा (राज.)
2. **डॉ. के. के. मिश्रा**
   व्याख्याता - गणित
   एम.एस.जे.महाविद्यालय
   भरतपुर (राज.)
3. **डॉ. के. एस. शेखावत**
   व्याख्याता - गणित
   राजकीय कल्याण महाविद्यालय,
   सीकर (राज.)

संपादन तथा पाठ लेखन

सम्पादक

डॉ. ऐ. के. माथुर

सेवानिवृत्त सहआचार्य

गणित विभाग

राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

1. **डॉ. के. एस. शेखावत**
   व्याखाता-गणित
   राजकीय कल्याण महाविद्यालय,
   सीकर (राज.)
2. **डॉ. सुभाष यादव**
   व्याख्याता - गणित विभाग
   राजकीय स्नाकोत्तर महाविद्यालय
   कोटपूतली (राज.)
3. **डॉ. परेश व्यास**
   सहायक आचार्य
   गणित विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय,जयपुर

अकादमिक एवं प्रशासनिक व्यवस्था

प्रो. (डॉ.) नरेश दाधीच	**प्रो. (डॉ.) एम.के. घड़ोलिया**	**योगेन्द्र गोयल**
कुलपति	निदेशक	प्रभारी
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय कोटा (राज.)	संकाय विभाग	पाठ्यक्रम सामग्री उत्पादन एवं वितरण विभाग

पाठ्यक्रम उत्पादन

योगेन्द्र गोयल

सहायक उत्पादन अधिकारी

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय कोटा (राज.)

पुनः उत्पादन :अगस्त,2010 ISBN-13/978-81-8496-014-3

MT-05

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

अवकलन समीकरण

प्रस्तावना

प्रस्तुत पुस्तक "अवकलन समीकरण" वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा द्वारा प्रस्तावित पाठ्यक्रमानुसार बी. एस. सी. भाग द्वितीय के गणित विषय- द्वितीय प्रश्न -पत्र के अध्ययन अध्यापन हेतु सृजित की गयी है । गणित जैसे विषय की प्रवृत्ति को ध्यान में रखते हुए पुस्तक में अंग्रेजी शब्दों का समुचित प्रयोग किया गाया है । पुस्तक की विभिन्न इकाइयों को विद्वान लेखकों द्वारा लिखा गया है । लेखकों ने पुस्तक को तथ्यपरक बनाने के लिए मानक ग्रन्थों की सहायता प्राप्त की है, इनके रचयिताओं के लिए कृतज्ञतापन इन पंक्तियों के माध्यम से प्रस्तुत है । यह पुस्तक विद्यार्थियों के लिए प्रतियोगी परीक्षाओं हेतु भी सही मार्गदर्शन प्रदान करने में सहायक होगी ।

इकाई 1: प्रथम घात एवं प्रथम कोटि के अवकल समीकरण-1 (Differential Equation of First Order And First Degree-1)

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य

इस इकाई में आप अवकल समीकरणो के बारे में प्रारम्भिक जानकारी तथा इनको हल करने की विधियों को सीखेगें। इस इकाई में विशेष रूप से प्रथम घात एव प्रथम कोटि के अवकल समीकरणों के विशेष रूप तथा चर पृथक्करण, समघात अवकल समीकरण, समघात समीकरण में समानयन योग्य समीकरण का अध्ययन करेगें।

1.1 प्रस्तावना

भौतिकी, अभियांत्रिकी एवं अन्य अनुप्रयुक्त विज्ञान की शाखाओं में बहुदा ऐसी स्थितियाँ आती है जब समस्या में स्वतंत्र चर, आश्रित चर और उनके अवकलज विद्यमान होते हैं। इस इकाई में आप इस प्रकार प्राप्त अवकल समीकरण के सम्बन्ध में अध्ययन करेगें।

1.2 परिभाषा

एक समीकरण जो स्वतंत्र चर, आश्रित चर तथा इनके अवकलजों के बीच सम्बन्धित हो, अवकल समीकरण कहलाता है। उदाहरणार्थ :

$$(i)\frac{dy}{dx} + xy = \cos x$$

$$(ii)\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$(iii)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$(iv)x\frac{\partial x}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$$

1.3 अवकल समीकरण के प्रकार

अवकल समीकरण दो प्रकार के होते हैं।

1.3.1 साधारण अवकल समीकरण

जब किसी अवकल समीकरण में अवकल गुणांक केवल एक ही स्वतंत्र-चर के हो तो उसे साधारण अवकल समीकरण कहते हैं।

उदाहरणार्थ :

$$\frac{dy}{dx} + xy = \tan x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x$$

1.3.2 आशिक अवकल समीकरण

जब किसी अवकल समीकरण में एक से अधिक स्वतंत्र-चर हो तथा आंशिक अवकल गुणांक इनमें किसी के भी सापेक्ष हो तो ऐसे समीकरण आंशिक अवकल समीकरण कहलाते हैं।

उदाहणार्थ :

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=k\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

1.4 कोटि (Order) एवं घात (Degree)

1.4.1 अवकल समीकरण की कोटि (Order)

अवकल समीकरण में विद्यमान अवकलजों की उच्चतम कोटि ही अवकल समीकरण की कोटि कहलाती है।

उदाहरणार्थ :

$$\frac{dy}{dx}+xy=\cot x$$
$$y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x^2\frac{dy}{dx}+2y=e^x+\sin x$$

क्रमश: प्रथम एवं द्वितिय कोटि के अवकल समीकरण है।

1.4.2 अवकल समीकरण की घात (Degree)

अवकल समीकरण को अवकलजों के सन्दर्भ में परिमेय और पूर्ण बीजीय बनानें के बाद उसमें आने वाले उच्चतम कोटि के अवकलज की घात ही उस अवकल समीकरण की घात कहलाती है। उदाहरणार्थ :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=7y$$ की घात 3 है।

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=0$$
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

अत : यह अवकल समीकरण 2 घात का है।

1.5 कल के प्रकार

1.5.1 व्यापक हल (General Solution)

यदि अवकल समीकरण के हल में समीकरण की कोटि के बराबर स्वेच्छ अचर हो तो उसे व्यापक हल कहते हैं। व्यापक हल को पूर्ण समाकलन भी कहा जाता है।

1.5.2 विशिष्ट हल (Particular Solution)

अवकल समीकरणों का वह हल जो कि व्यापक इस मे स्वेच्छ अचरों को विशिष्ट मानन देने पर प्राप्त होता है उसे समीकरण का विशिष्ट हल कहते हैं।

1.5.3 विचित्र हल (Singular Solution)

अवकल समीकरण का वह हल जो व्यापक हल में स्वेच्छ अचरो को विशिष्ट मान देनें पर प्राप्त नहीं होता है, उसे विचित्र हल कहते हैं।

उदाहरण 1 :

निम्नलिखित अवकल समीकरणों की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिये।

$$(1)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+x\left(\frac{dy}{dx}\right)=\cos x$$

$$(2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=\sin x$$

$$(3)\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+\int y dx=6x^3$$

हल :

1. अवकल समीकरण में उच्चतम अवकलज की कोटि 2 है तथा इसकी घात 1 है अर्थात यह समीकरण द्वितिय कोटि तथा प्रथम घात का है।
2. अवकल समीकरण में उच्चतम अवकलज की कोटि 2 है तथा इसकी घात 1 है अर्थात यह समीकरण द्वितिय कोटि तथा प्रथम घात का है।
3. अवकल समीकरण को समाकलन से स्वतंत्र करनें पर अर्थात इसका अवकलन करने पर

$$\frac{d^3y}{dx^3}+5\frac{d^2y}{dx^2}+y=18x^2+c$$

यहाँ उच्चतम कोटि के अवकलज की कोटि 3 और घात 1 है, अत: गए अवकल समीकरण की कोटि 3 है और घात 1 है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न-1

1. निम्नलिखित अवकल समीकरणों की कोटि तथा घात कीजिए

$$(i)\frac{d^3y}{dx^3}-5\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-2y=e^x$$

$$(ii)xy\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+2}{y+3}$$

$$(iii)\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}=\int x^2dx$$

2. अवकल समीकरण की कोटि एवं घात को परिभाषित कीजिए।
3. अवकल समीकरण के व्यापक हल को परिभाषित कीजिए।

1.6 प्रथम कोटि एवं प्रथम घात अवकल समीकरण

प्रथम कोटि एवं प्रथम घात अवकल समीकरण का व्यापक रूप है-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$$

या $\quad f_2(x,y)\,dy = f_1(x,y)\,dx$ ....(1)

इसे हम सुविधाजनक रूप में $Mdx+Ndy=0$ के रूप में लिखते हैं जहाँ M व N, x या y या दोनो के फलन हो या कोई अचरांक हो। इस इकाई में आप इस प्रकार के अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात करनें की कुछ विधियों का अध्ययन करेगें।

1.7 चर पृथक्करण (Sepration of Variables)

अवकल समीकरण जिसमें चरों को पृथक किया जा सके अर्थात समीकरण $f_1(x)dx+f_2(y)dy=0$ के रूप में लिखा जा सकता हो तो इसे निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

$$f_1(x)+f_2(y)\frac{dy}{dx}=0$$

x न के सापेक्ष समाकलन करने पर,

$$\int f_1(x)dx+\int f_2(y)\frac{dy}{dx}.dx=c$$

या $$\int f_1(x)dx+\int f_2(y)\,dy=c$$

जो कि अवकल समीकरण का व्यापक हल है तथा इसमें c स्वेच्छ अचर है।

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$y-x\frac{dy}{dx}=a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$$

हल :

यहाँ $$y-ay^2=x\frac{dy}{dx}+a\frac{dy}{dx}$$

या $$y(1-ay)=(x+a)\frac{dy}{dx}$$

या $$\frac{dx}{x++a}=\frac{dy}{y(1-ay)}=\left[\frac{1}{y}+\frac{a}{1-ay}\right]dy$$ (आंशिक भिन्नों मे लिखने पर)

समाकलन करने पर

$$\int\frac{dx}{x+a}=\int\frac{dy}{y}+\int\frac{ady}{1-ay}$$

$$\Rightarrow \log(x+a)=\log(1-ay)+\log c$$

या $\log(x+a)=\log\frac{y.c}{(1-ay)}$

या $(x+a)=\frac{cy}{(1-ay)}$

$$\Rightarrow cy=(1-ay)(x+a)$$

जो कि दिये गये अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 2 : हल कीजिये-

$$\left(e^x+1\right)\cos x dx+e^y\sin x dy=0$$

हल :

दिये हुए समीकरण में चरों को पृथक करनें पर

$$\frac{\cos x}{\sin x}dx+\frac{e^y}{e^y+1}dy=0$$

या $\int\frac{\cos x}{\sin x}dx+\int\frac{e^y}{e^y+1}dy=0$

या $\log\sin x+\log\left(1+e^y\right)=\log c$

या $\left(1+e^y\right)\sin x=c$

जो कि दिये गये अवकल समीकरण का अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 3 : हल कीजिए

$$3e^x\tan y dx+(1-e^x)\sec^2 y dy=0$$

हल :

दिये हुए समीकरण में चरों को पृथक करने पर

$$\frac{3e^x}{1-e^x}dx+\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy=0$$

$$\therefore\int\frac{3e^x}{1-e^x}dx+\int\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy=0$$

या $-3\log\left(1-e^x\right)+\log\tan y=\log c$

या $\log\tan y\left(1-e^x\right)^{-3}=c$

या $\tan y\left(1-e^x\right)^{-3}=c$

$$y=\tan^{-1}\left[c\left(1-e^x\right)^3\right]$$

जो कि दिये हुए समीकरण का अभीष्ट हल होगा।

उदाहरण 4 : हल कीजिए

$$\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$$

हल:

माना $x + y = v$

$$\therefore 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$$

अत: समीकरण से

$$\frac{dv}{dx} - 1 \sin v + \cos v$$

$$\Rightarrow \int dx = \int \frac{dv}{\sin v + \cos v + 1}$$

$$\int \frac{dv}{2\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2} + 2\cos^2\frac{v}{2} - 1 + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dv}{2\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2} + 2\cos^2\frac{v}{2}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2 v/2}{1 + \tan\frac{v}{2}} dv = \int \frac{dt}{1+t}\left(\tan\frac{v}{2} = t\right)$$ रखने पर

$$\log(1+t) \text{ या } x + c = \log\left(1 + \tan\frac{v}{2}\right)$$

अत: अभीष्ट हल $x + c = \log\left[1 + \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)\right] v$ का मान रखने पर

1.8 समघात अवकल समीकरण (Homogeneous differential equations)

समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ को समघात समीकरण कहते हैं यदि इसे निम्न रूप में लिखें

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} \qquad \text{............(1)}$$

जहाँ $f_1(x,y)$ व $f_2(x,y)$ दोनों x एवं y के एक ही घात के समघात फलन हो।

समघात अवकल समीकरण को हल करनें की विधि: ।

इस प्रकार के समीकरण को हल करनें के लिए $y - vx$ प्रतिस्थापित करते हैं जिससे y एक नये आश्रित चर v में बदल जाता है जो कि स्वयं x का फलन है।

माना $f_1(x,y)$ तथा $f_2(x,y)$ दोनों n घात के समघात फलन है अत:।

$$f_2(x,y) = x^n F_1(y/x) \qquad \text{..........(2)}$$

एवं $$f_2(x,y) = x^n F_1(y/x)$$

अत: (1) व (2) से

$$\frac{dy}{dx}=\frac{F_1(y/x)}{f_2(x,y)} \qquad \text{...........(3)}$$

$$\because y=vx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dy}{dx}$$

अत: समीकरण (3) से

$$v+x\frac{dy}{dx}=\frac{F_1(v)}{F_1(v)}$$

या $$\frac{F_2(v)dv}{\{F_1(v)-vF_2(v)\}}=\frac{dx}{x}$$

इस स्थिति मे चरों v व x का पृथक्करण हो गया है। जिसका समाकलन पिछली विधि द्वारा करने पर दिए गए समघात समीकरण का व्यापक हल प्राप्त होगा।

उदाहरण 1 : हल कीजिए

$$xdy-ydx=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}dx$$

हल :

दिए गए अवकल समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}}{x}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+(y/x)^2} \qquad \text{..........(1)}$$

जो कि प्रथमघात का समघात समीकरण है। अंत:

$y=vx$ रखने पर $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dy}{dx}$

समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करनें पर

$$v+x\frac{dy}{dx}=v+\sqrt{1+v^2}$$

या $$x\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$\Rightarrow \log x = \log\left[v + \sqrt{1+v^2}\right] + \log c$$

$$\Rightarrow \log x = \log c\left[v + \sqrt{1+v^2}\right]$$

$$= \log c\left[y/x + \sqrt{1+y^2/x^2}\right]$$

$$\Rightarrow x^2 = c\left[y + \sqrt{x^2+y^2}\right]$$

जो कि दिये हुए समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 2 : हल कीजिए

$$x\sin(y/x)dy = \{y\sin(y/x) - x\}\,dx$$

हल:

दिए हुए अवकल समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y/x)\sin(y/x) - 1}{\sin(y/x)} \qquad \text{............(1)}$$

जो कि एक समघात समीकरण है अत:

$y = vx$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dy}{dx}$$

समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करनें पर

$$v + x\frac{dy}{dx} = \frac{v\sin v - 1}{\sin v}$$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{v\sin v - 1}{\sin v} - v$$

$$= -\frac{1}{\sin v}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \sin v dv$$

$$\Rightarrow \log x = \cos v + \log c$$

$$\Rightarrow \log\frac{x}{c} = \cos v \Rightarrow \frac{x}{c} = e^{\cos v}$$

$$\Rightarrow x = ce^{\cos v}$$

$$= ce^{\cos(y/x)}$$

जो कि दिए गए अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 3 : हल कीजिए

$$(1+e^{(x/y)})+dxe^{(x/y)}\left\{1-\frac{x}{y}\right\}dy=0$$

हल:

दिए हुए समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{dx}{dy}=\frac{e^{(x/y)}\{(x/y)-1\}}{1+e^{(x/y)}}$$ (यहाँ x को y का फलन माना गया।)

जो कि समघात समीकरण है अत: $x=vy$

प्रतिस्थापित करनें पर

$$\frac{dx}{dy}=v+y\frac{dv}{dy}$$

या $$v+y\frac{dv}{dy}=\frac{e^{v}(v-1)}{1+e^{v}}$$

या $$y\frac{dv}{dy}=\frac{e^{v}(v-1)}{(1+e^{v})}-v$$

$$=-\frac{v+e^{v}}{1+e^{v}}$$

या $$\frac{dy}{y}=\frac{-(1+e^{v})}{v+e^{v}}dv$$

या $$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{(1+e^{v})}{v+e^{v}}dv$$

या $$\log y=-\log(v+e^{v})+\log c$$

या $$y=\frac{c}{v+e^{v}}=\frac{c}{x/y+e^{x/y}}=\frac{cy}{x+ye^{x/y}}$$

जो कि दिए हुए समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 4 : हल कीजिए

$$y-x\frac{dy}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}$$

हल:

$$y-x=(x+y)\frac{dy}{dx}$$

या $$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x+y}=\frac{y/x-1}{y/x+1}$$

जो कि समघात समीकरण है अत:

$y=vx$ रखनें पर

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

या $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{1+v}$$

या $$x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1-v-v^2}{1+v} = \frac{-(1+v^2)}{1+v}$$

या $$\frac{(1+v)dv}{1+v^2} = -\frac{dx}{x}$$

या $$\left(\frac{1}{1+v^2}\right)dv + \frac{vdv}{1+v^2} = -\frac{dx}{x}$$

समाकलन से

$$\tan^{-1} v + \frac{1}{2}\log\left(1+v^2\right) = -\log x + c$$

या $$\tan^{-1} v + \log x\sqrt{\left(1+v^2\right)} = c$$

या $$\tan^{-1}\left(y/x\right) + \log\sqrt{\left(x^2+y^2\right)} = c$$

या $$\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right) + \tan^{-1}\left(y/x\right) = c$$

1.9 समघात समीकरण में समानयन योग्य समीकरण

यदि दिया हुआ समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax+by+c}{Ax+By+C}$ के रूप का हो तो हम इसे।! समघात अवकल समीकरण

के रूप में परिवर्तित कर सकते हैं। इस प्रकार के समीकरण में विभिन्न स्थितियाँ उत्पन्न हो सकती है जो निम्न प्रकार हैं।

स्थिति I: जब $\dfrac{a}{A} = \dfrac{b}{B} \Rightarrow aB - bA \neq 0$

तो हम c तथा C को हटाकर समघात समीकरण में बदलने के लिये नयें चरों स्थापन करते है। इसके लिये, माना

$x = X + h$ और $y = Y + k$ ....(1)

जहाँ h और k स्वेच्छ अचर हैं और इनका चयन इस प्रकार करते हैं कि c व C विलुप्त हो जायें व शेष अवकल समीकरण समघात बन जाये।

पुन (1) से $dx = dX, dy = dY$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} \qquad ....(2)$$

(1) व (2) का प्रयोग दिए गए समीकरण में करनें पर

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a(X+h)+b(Y+k)+c}{a(X+h)+B(Y+k)+c}$$

या $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{aX + bY + (ah + bk + c)}{AX + BY + (Ah + By + c)}$ ....(3)

समीकरण (3) को समघात बनाने के लिए h और k का चयन इस प्रकार करते हैं कि

$ah + bk + c = 0$

और $Ah + By + c = 0$

अत: $h = \dfrac{bC - Bc}{aB - Ab}, k = \dfrac{Ac - aC}{aB - Ab}$

जो कि तभी सम्भव है जब $aB - Ab \neq 0$ अत:

समघात समीकरण (3) का नया रूप निम्न प्रकार प्राप्त होगा

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{AX + BY} \qquad ....(4)$$

समीकरण (4) को समघात समीकरण के लिए वर्णित विधि द्वारा हल कर लेते हैं।

स्थिति II : जब $\dfrac{a}{A} = \dfrac{b}{B} = \dfrac{1}{m}$ (माना)

इस स्थिति में दिए गए समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{m(ax + by) + c} \qquad ....(5)$$

यदि $w = ax + by$ मानें

तो $\dfrac{dw}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left[\frac{dw}{dx} - a\right] \qquad ....(6)$$

अत: (5) और (6) से

$$\frac{1}{b}\left[\frac{dw}{dx} - a\right] = \frac{w + c}{mw + c}$$

जो कि ऐसा अवकल समीकरण है जिसके चर पृथक हो गये हैं अत: इसे 1 .7 में वर्णित विधि द्वारा हल कर सकते हैं।

उदाहरण : 1 हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}$$

हल :

माना $x = X + h, y = Y + k$ (क्योंकि यहाँ स्थिति-I मान्य है।)

अत: दिये हुऐ समीकरण का नया रूप होगा

$$\frac{dY}{dX}=\frac{(X+h)+2(Y+k)-3}{2(X+h)+(Y+k)-3}$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2y+(h+2k-3)}{2X+Y+(2h+k-3)}$$

अत: h तथा k का चयन इस प्रकार करें कि

$$\left.\begin{aligned}h+2k-3=0\\2h+k-3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow h=k=1$$

अतएव समीकरण (1) रूपान्तरित होता है-

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2y}{2X+Y} \qquad ....(2)$$

समीकरण (2) समघात अवकल समीकरण है अत:

$$y=vX\Rightarrow\frac{dY}{dX}=v+X\frac{dv}{dx} \qquad ....(3)$$

समीकरण (2) व (3) से

$$v+X\frac{dv}{dx}=\frac{X+2vX}{2X+vX}=\frac{2v+1}{v+2}$$

$$\Rightarrow X\frac{dv}{dx}=\frac{2v+1}{v+2}-v$$

$$=\frac{2v+1-v^2-2v}{v+2}=\frac{(1+v)(1-v)}{(v+2)}$$

$$\Rightarrow\frac{dX}{X}=\frac{v+2}{(1+v)(1-v)}dv=\left[\frac{1}{2(1+v)}+\frac{3}{2(1-v)}\right]dv$$

समाकलन करने पर

$$\int\frac{dX}{X}=\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dv}{1-v}$$

$$\Rightarrow\log X+\log C_1=\frac{1}{2}\log(v+1)-\frac{3}{2}\log(1-v)$$

$$\Rightarrow X^2C=\frac{(1+v)}{(1-v)^3}$$ ($c^2{}_1$ को एक अन्य अचर c लेने पर)

$$\Rightarrow CX^2\left(1-\frac{Y}{X}\right)^3=\left(1+\frac{Y}{X}\right)$$

$$\Rightarrow C(X-Y)^3=(X+Y)$$

$$\therefore X=x-1, Y=y-1$$

अतः X व Y का मान रखने पर

$\Rightarrow C(X-Y)^3 = x+y-2$ जो कि अवकल समीकरण का अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 2 : हल कीजिए

$$(4x+6y+5)dy-(3y+2x+4)dx=0$$

हल :

दिये गये समीकरण को निम्न रूप में लिख सकते हैं।

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x+3y)+4}{2(2x+3y)+5}$$

यहाँ $\quad \frac{a}{A}=\frac{b}{B}\left[\because \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\right]$ **(स्थिति - II)**

अतः माना $w=2x+3y \Rightarrow \frac{dw}{dx}=2+3\frac{dy}{dx}$

अतः समीकरण (1) से

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dw}{dx}-2\right)=\frac{w+4}{2w+5}$$

या $$\frac{dw}{dx}=\frac{3w+12}{2w+5}+2=\frac{7w+22}{2w+5}$$

या $$\left[\frac{7w+22}{2w+5}\right]dw=dx$$

या $$\frac{2}{7}\left[1-\frac{9}{2}\left(\frac{1}{7w+22}\right)\right]dw=dx$$

या $$\left[1-\frac{9}{2}\left(\frac{1}{7w+22}\right)\right]dw=\frac{7}{2}dx$$

समाकलन करने पर

$$\int\left[1-\frac{9}{2}\left(\frac{1}{7w+22}\right)\right]dw=\int\frac{7}{2}dx$$

या $$w-\frac{9}{14}\log(7w+22)=\frac{7x}{2}+c$$

w का मान रखनें पर

$$(2x+3y)-\frac{9}{14}\log(14x+21y+22)=\frac{7x}{2}+c$$

या $\quad y-\frac{3}{14}\log(14x+21y+22)=\frac{x}{2}+c$

जो कि दिए हुए अवकल समीकरण का अभीष्ट हल

स्वमूल्यांकन प्रश्न 2

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिये :

1. $(xy^2+x)dx+(yx^2+y)dy=0$
2. $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+x^2e^{-y}$
3. $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$
4. $2xydy=(x^2+y^2)dx$
5. $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$

व्याख्यात्मक उदाहरण'

उदाहरण 1 : हल कीजिए

$$(a)\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0 \qquad (b)\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+e^{2\log x-y}$$

हल (*a*) :

दिये गए समीकरण के चरों को पृथक करनें पर

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

समाकलन करने पर

$$\sin^{-1}y+\sin^{-1}x=c_1$$

या

$$\sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right]=\sin^{-1}c \qquad [c_1=\sin^{-1}c \text{ लेने पर}]$$

या $\quad x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c$

जो कि दिये गए समीकरण का अभीष्ट हल है। क्य

हल $\quad (b)\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+e^{2\log x-y}$

दिया गया अवकल समीकरण है

$$\frac{dy}{dx}=e^{x-y}+e^{2\log x-y}$$

या $\frac{dy}{dx} = e^{-y}\left[e^{x} + e^{2\log x}\right]$

चरों को पृथक करने पर

$$e^{y}dy = \left(e^{x} + e^{2\log x}\right)dx$$

समाकलन करने पर

$$\int e^{y}dy = \int\left(e^{x} + e^{2\log x}\right)dx$$

या $e^{y} = e^{x} + \frac{x^{3}}{3} + c$: जहाँ c स्वेच्छ अचर है।

जो कि दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 2 :

यदि $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ तथा दिया गया है $x=1$ के लिये $y=1$ तो y का मान ज्ञात कीजिए, जबकि $x=-1$

हल :

दिया गया अवकल समीकरण निम्न है

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

चरों को पृथक करने पर

$$e^{-y}dy = e^{x}dx$$

समाकलन करने पर

$-e^{-y} = e^{x} + c$ जहाँ c स्वेच्छ अचर है।

दिया गया है कि $x=1, y=1$ अत: समीकरण (1) से

$$-e^{-1} = e^{1} = c \Rightarrow c = -e^{-1} - e$$

अब समीकरण (1) में c का मान रखने पर

$$-e^{-y} = e^{x} - e^{-1} - e$$

जब $x=-1$ है तो

$$-e^{-y} = e^{-1} - e^{-1} - e$$

या $e^{-y} = e^{1}$

$$\therefore -y = 1 \Rightarrow y = -1$$

उदाहरण 3 : हल कीजिए

$$\sqrt{\left(1 + x^{2} + y^{2} + x^{2}y^{2}\right)} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

अथवा

$$\sqrt{1+x^{2}}\sqrt{1+y^{2}} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

हल :

दिया गया अवकल समीकरण है

$$\sqrt{\left(1+x^2+y^2+x^2y^2\right)}+xy\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

इसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}+xy\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

चरों को पृथक करने पर

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=0$$

$$\frac{1+x^2}{x\sqrt{1+x^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=0$$

समाकलन करने पर

$$\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx+\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=c \qquad \text{...........(1)}$$

अब $$\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\left(\frac{1}{t}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}} \qquad (x=\frac{1}{t} \text{ रखने पर})$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=-\log\left\{t+\sqrt{t^2+1}\right\}$$

$$=-\log\left\{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right\}$$

$$=-\log\left\{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right\}$$

$$=\log x-\log\left\{x+\sqrt{1+x^2}\right\}$$

पुनः $$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} \qquad (1+x^2=t \text{ रखने पर})$$

$$=\sqrt{t}=\sqrt{1+x^2}$$

इसी प्रकार, $$\int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=\sqrt{1+y^2}$$

अतः समीकरण (1) से

$$\log x - \log\left[1+\sqrt{1+x^2}\right] + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$$

जो कि दिए हुये समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 4 :

वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिये जो कि निम्न अवकल समीकरण? व्यक्त किया जाता है

$(y-yx)dx+(x+xy)dy=0$ तथा बिन्दु $(1,1)$ से गुजरता है

हल :

दिया गया अवकल समीकरण है

$$y(1-x)dx + x(1+y)dy = 0$$

चरी को पृथक करने पर

$$\frac{1-x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$$

या $$\left(\frac{1}{x}-1\right)dx + \left(\frac{1}{y}-1\right)dy = 0$$

समाकलन करने पर

$$\log x - x + \log y + y = c$$

यदि वक्र $(1,1)$ से गुजरता है तो $c=0$ $\qquad [\because \log 1 = 0]$

अतएव वक्र का समीकरण होगा

$$\log x - x + \log y + y = 0$$

या $$\log(xy) = x - y$$

जो कि दिए हुये समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 5 : हल कीजिये

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y^2+y+1}{x^2+x+1} = 0$$

हल :

दिये हुए अवकल समीकरण में चरों को पृथक करने पर

$$\frac{dy}{y^2+y+1} + \frac{dx}{x^2+x+1} = 0$$

समाकलन करने पर

$$\int \frac{dy}{y^2+y+1} + \frac{dx}{x^2+x+1} = c_1$$

या $$\int \frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = c_1$$

या $$\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=c_1$$

या $\tan^{-1}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}+\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}c_1=\tan^{-1}c\left[\frac{\sqrt{3}}{2}c_1=\tan^{-1}c\right]$ मानने पर

या $$\tan^{-1}\frac{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}=\tan^{-1}c\because\left[\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}\right]$$

या $$\frac{2x+2y+2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{3-(2x+1)(2y-1)}=c$$

या $$\sqrt{3}(x+y+1)=c(1-x-y-2xy)$$

जो कि दिये हुये समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 6 : हल कीजिए

$$(i)\left(\frac{x+y-a}{x+y-b}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+a}{x+y+b}$$

$$(ii)(x+y+1)\frac{dy}{dx}=1$$

$$(iii)\frac{xdx+ydy}{xdx-ydy}=\sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}}$$

हल (i) **:**

दिये गये अवकल समीकरण में

$x+y=v$ लेकर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}-1$$

इन्हें दिये गये समीकरण मे प्रतिस्थापित करने पर

$$\left(\frac{v-a}{v-b}\right)\left(\frac{dv}{dx}-1\right)=\frac{v+a}{v+b}$$

या $$\frac{dv}{dx}=1+\frac{(v+a)(v-b)}{(v-a)(v+b)}=2.\frac{v^2-ab}{v^2+(b-a)v-ab}$$

चरी को पृथक करने पर

$$\frac{v^2+(b-a)v-ab}{v^2-ab}dv=2dx$$

या $$\left[1+\frac{(b-a)v}{v^2-ab}\right]dv = 2dx$$

समाकलन करने पर $2x+c = x+y+\frac{(b-a)}{2}\log\left(v^2-ab\right)$

पुन: v का मान प्रतिस्थापित करने पर

या $$2x+c = x+y+\frac{(b-a)}{2}\log\left[(x+y)^2-ab\right]$$

जो कि दिए हुये समीकरण का अभीष्ट हल है।

हल (ii) **:**

दिये गये अवकल समीकरण में

$x+y+1=v$ लेकर x के सापेक्ष अवकलन करनें पर

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}-1$$

इन्हें दिये गये समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर

$$v\left(\frac{dv}{dx}-1\right)=1$$

या $$\frac{dv}{dx}=1+\frac{1}{v}=\frac{v+1}{v}$$

चरों को पृथक करने पर

$$dx=\frac{v}{v+1}dv$$

या $$dx=\left(1-\frac{1}{v+1}\right)dv$$

समाकलन करने पर

$$x+c_1 = v-\log(v+1)$$

पुन: v का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$x+c_1 = x+y+1-\log(x+y+2)$$

या $$y-\log(x+y+2)=c_1-1$$

या $$y-\log(x+y+2)=c$$ (c_1-1 को एक अन्य अचर c लेने पर)

जो कि दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल हैं।

हल (iii)**:**

दिये गये अवकल समीकरण में

$x=r\cos\theta \;\; y=r\sin\theta$ लेने पर

$x^2+y^2=r^2$ तथा $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

अवकलन करने पर

$$2xdx + 2ydy = 2rdr$$

या $$xdx + ydy = rdr$$

तथा $$d\theta = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{xdy - ydx}{r^2}$$

दिये गये मान अवकल समीकरण में रखने पर

$$\frac{rdr}{r^2 d\theta} = \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{r^2}}$$

और $$\frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = d\theta$$

समाकलन करने पर

$$\sin^{-1}\left(\frac{r}{a}\right) = \theta + c \Rightarrow r = a\sin(\theta + c)$$

r तथा θ का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\sqrt{x^2 + y^2} == a\sin\left\{c + \tan^{-1}\frac{y}{x}\right\}$$

जो कि दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 7 : हल कीजिये

$$(4y + 3x)dy + (y - 2x)dx = 0$$

हल :

दिये हुये समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{4y + 3x} = \frac{2 - \left(\frac{y}{x}\right)}{3 + 4\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \text{........(1)}$$

अब $y = vx$ लेने पर, $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ ....(2)

(2) का प्रयोग (1) में करने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2 - v}{3 + 4v}$$

या $x\frac{dv}{dx} = \frac{2 - v}{3 + 4v} - v$ या $x\frac{dv}{dx} = \frac{2 - 4v - 4v^2}{3 + 4v}$

चरों को पृथक करने पर

$$2\frac{dx}{x} = \left(\frac{2 + 4v}{1 - 2v - ev^2}\right)dv$$

समाकलन करने पर

$$2\log x+\log c=\int\frac{3+4v}{1-2v-2v^2}dv=\int\frac{-(-2-4v)+1}{2-2v-2v^2}dv$$

या $$\log x^2+\log c=-\log 1\left(1-2v-2v^2\right)+\frac{1}{2}\int\frac{dv}{\frac{1}{2}-v-v^2}$$

या $$\log\left\{ex^2\left(1-2v-2v^2\right)\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{dv}{\frac{1}{4}-v-v^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dv}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(v+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\log\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+v+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-v-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}+2v+1}{\sqrt{3}-2v-1}$$

पुन: v का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\log\left[cx^2\left(1-\frac{2y}{x}-\frac{2y^2}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)+2\frac{y}{x}}{\left(\sqrt{3}-1\right)-2\frac{y}{x}}$$

या $$c\left(x^2-2xy-2y^2\right)=\left[\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)x+2y}{\left(\sqrt{3}-1\right)x-2y}\right]^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

जो कि दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 8 : हल कीजिए

$$x\frac{dy}{dx}=y\left(\log y-\log x+1\right)$$

हल :

दिये गये अवकल समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left[\log\left(\frac{y}{x}\right)+1\right] \qquad \text{.............(1)}$$

$y=vx$ लेने पर, $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

(2) का प्रयोग (1) में करने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = v[\log v + 1]$$

या $$x\frac{dv}{dx} = v\log v$$

चरों को पृथक करने पर

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v\log v}$$

समाकलन करने पर

$$\log x = \log c = \int \frac{dv}{v\log v}$$

या $$\log cx = \log(\log v)$$

या $$cx = \log v$$

पुन: v का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\log\frac{y}{x} = cx$$

या $$y = xe^{cx}$$

जो कि दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 9 : हल कीजिये

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(x - y - 2)}{(x - 2y - 3)} = 0$$

हल :

दिये हुये अवकल समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x - y - 2}{x - 2y - 3}$$

माना कि $x = X + h, y = Y + k$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

अत: दिया गया समीकरण होगा

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{X - Y + h - k - 2}{X - 2Y + h - 2k - 3}$$

अचर h, k का मान इस प्रकार कर लेते हैं कि

$$h - k - 2 = 0$$

$$h - 2k - 3 = 0 \Rightarrow h = 1, k = -1$$

h तथा k के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{dY}{dX}=-\frac{X-Y}{X-2Y}=-\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

अब $Y=vx$ लेने पर, $\frac{dY}{dX}=v+\frac{dv}{dx}$

तब समीकरण (2) से,

$$v+\frac{dv}{dx}=-\frac{1-v}{1-2v}$$

या $v+\frac{dv}{dx}=\frac{1-2v}{2v-1}$

चरों को पृथक करने पर

$$\frac{dX}{X}=\frac{2v-1}{1-2v^2}dv$$

या $\frac{dX}{X}=\left[-\frac{1}{2}\frac{(-4v)}{(1-2v^2)}-\frac{1}{1-\left(\sqrt{2v}\right)^2}\right]dv$

समाकलन करने पर

$$\log X=-\frac{1}{2}\log\left(1-2v^2\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{1+v\sqrt{2}}{1-v\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\log c$$

या $2\log X+\log\left(1-2v^2\right)+\log c=-\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1+v\sqrt{2}}{1-v\sqrt{2}}$

या $\log\left\{cX^2\left(1-2v^2\right)\right\}=\log\left(\frac{1-v\sqrt{2}}{1+v\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

या $cX^2\left(1-2v^2\right)=\log\left(\frac{1-v\sqrt{2}}{1+v\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

पुन: v का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$CX^2\left(1-2\frac{Y^2}{X^2}\right)=\left\{\frac{1-\left(\frac{Y}{X}\right)\sqrt{2}}{1+\left(\frac{Y}{X}\right)\sqrt{2}}\right\}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

या $$C\left\{(x-1)^2-2(y+1)^2\right\}=\left\{\frac{x-1-(y+1)\sqrt{2}}{x-1+(y+1)\sqrt{2}}\right\}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

या $$C\left(x^2-2y^2-2x-4y-1\right)=\left(\frac{x-y\sqrt{2}-\sqrt{2}-1}{x+y\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

जो कि दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 10 : हल कीजिये

$$(4x+6y+3)\,dx=(6x+9y+2)\,dy$$

हल :

दिये गये अवकल समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x+6y+3}{6x+9y+2}$$

माना कि $2x+3y=v \Rightarrow 2+3\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

तब समीकरण (1) से

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dx}-2\right)=\frac{2v+3}{3v+2}$$

या $$\frac{dv}{dx}-2=\frac{6v+9}{3v+2}$$

या $$\frac{dv}{dx}=\frac{12v+13}{3v+2}$$

चरों को पृथक करने पर

$$12+13)3v+2(1/4$$

$$dx=\frac{3v+2}{12v+13}dv$$

$$\frac{3v+\frac{13}{4}}{-5/4}$$

या $$dx=\left[\frac{1}{4}.\frac{5}{4}.\frac{1}{12v+13}\right]dv$$

समाकलन करने पर

$$x+c_1=\frac{v}{4}.\frac{5}{4}.\frac{1}{12}\log(12v+13)$$

या $$48x+48c_1=12v-5\log(12v+13)$$

पुन: v का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$48x+c=12(2x+3y)-5\log(24x+36y+13)$$

या $$12(3y-2x)-5\log(24x+36y+13)=c$$

जो कि दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल है।

1.10 सारांश

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप अवकल समीकरण की परिभाषा एवं प्रकार के बारे में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं तथा प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरणों का अभीष्ट हल चरपृथक्करण, समघात रूप, समघात रूप में समानयन के द्वारा ज्ञात करने की विधियों को भी अच्छी तरह समझ चुके हैं।

1.11 शब्दावली

अवकल समीकरण	Differential Equation
व्यापक हल	General Solution
कोटि	Order
घात	Degree
समघात	Homogeneous

1.12 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न-1

1. (i) कोटि 3 घात 1

   (ii) कोटि 1 घात 1

   (iii) कोटि 3 घात 1
2. अवकल समीकरण की कोटि एवं घात अवकलज की कोटि एवं घात होती है।
3. ऐसा हल जिसमें समीकरण की कोटि के बराबर स्वेच्छ अचर हों।

स्वमूल्यांकन प्रश्न-2

1. $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=c$
2. $e^y=e^x+\dfrac{x^3}{3}+c$
3. $cy=e^{\frac{y}{x}}$
4. $c\left(x^2-y^2\right)-x$
5. $2x=\left(x+y\right)+\log\left(x+y\right)+c$

1.13 अभ्यास प्रश्न

निम्नलिखित अवकलन समीकरणों को हल कीजिए ।

1. $\cos\left(x+y\right)dy=dx$ (उत्तर : $y-c=\tan\frac{1}{2}\left(x+y\right)$)

2. $(1-x)dy-(3+y)dx=0$ (उत्तर : $(3+y)(1-x)=k$)

3. $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$ (उत्तर : $\frac{-2}{1+\tan\frac{x+y}{2}} = x + c$)

4. $y^2 dx + \left(xy + x^2\right) dy = 0$ (उत्तर : $xy^2 = c\left(2y + x\right)$)

5. $\left[x\cos\left(\frac{y}{x}\right) y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right] y = \left[y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] x\frac{dy}{dx}$

(उत्तर : $xy = c\sec\left(\frac{y}{x}\right)$)

6. $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x+y-1}{x+y+1}$ (उत्तर : $\log\left(x+y\right) = x - y + c$)

7. $\left(x-y\right)dy = \left(x+y+1\right)dx$

(उत्तर $\tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{2y-1}\right) - \frac{1}{2}\log\left(x^2 + y^2 + x + y + \frac{1}{2}\right) = c$)

इकाई 2: प्रथम घात एवं प्रथम कोटि के अवकल समीकरण-2 (Differential Equation of First Order and First degree -2)

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य

इस इकाई में आप प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरणों का हल रैखिक अवकल समीकरण तथा बरनौली अवकल समीकरणों की सहायता से ज्ञात करेगें जो कि पिछली ईकाई की विधियों से भिन्न हैं।

2.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम रैखिक अवकल समीकरण को परिभाषित करते हुए प्रथम कोटि व प्रथम कोटि व प्रथम घात के समीकरण का हल ज्ञात करेगें। भौतिकी, अभियांत्रिकी एवं अन्य अनुप्रयुक्त विज्ञान की शाखाओं में इसका बहुत प्रयोग होता है।

2.2 परिभाषा

रैखिक अवकल समीकरण : यदि किसी अवकल समीकरण में आश्रित y तथा उसके अवकल गुणांक केवल प्रथम घात में ही हो तो उसे रैखिक अवकल समीकरण कहते हैं। रैखिक-अवकल समीकरण का मानक रूप निम्न प्रकार होता है

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q$$

जहाँ P तथा Q स्वतंत्र चर x के फलन हैं।

2.3 रैखिक-अवकल समीकरण

रैखिक-अवकल समीकरण का मानक रूप $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ ....(1) होता है। जहाँ P तथा Q स्वतंत्र चर x के फलन हैं।

इस विधि में हम ऐसा गुणांक ज्ञात करते हैं जिससे गुणा करके दिया हुआ समीकरण पूर्ण रूप से समाकलनीय हो जाये। यह गुणांक " समाकलन गुणांक (Integrating factor) कहलाता है। इसे संक्षेप में I.F. से निरूपित करते हैं। रैखिक अवकल समीकरण का हल ज्ञात करनें के लिए समीकरण

(1) के दोनों पक्षों को $e^{\int Pdx}$ मल से गुणा करनें पर

$$e^{\int Pdx}\left[\frac{dy}{dx}+Py\right]=Qe^{\int Pdx}$$

या
$$\frac{d}{dx}\left[y.e^{\int Pdx}\right]=Qe^{\int Pdx}$$

समाकलन करनें पर

$$y.e^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}.dx+c \qquad \text{............(2)}$$

जो कि अवकल समीकरण (1) का अभीष्ट व्यापक हल है,

अत: (2) को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$y(I.F)=\int (I.F)Qdx+c$$

टिप्पणी : यदि y को स्वतंत्र चर तथा x आश्रित चर मानें तो रैखिक-अवकल समीकरण का हल निम्न प्रकार प्राप्त होगा-

$$x(I.F)=\int (I.F)Qdy+c$$

यहाँ P तथा Q स्वतंत्र चर x के फलन हैं।

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$\cos^2 x\frac{dy}{dx}+y=\tan x$$

हल :

$$\frac{dy}{dx}+y\sec^2 x=\sec^2 x.\tan x$$

यहाँ $p=\sec^2 x$ तथा $Q=\tan x$

अत: समाकलन गुणांक $(I.F)=e^{\int \sec^2 xdx}=e^{\tan x}$

अत: अभीष्ट हल होगा

$$ye^{\tan x}=\int e^{\tan x}\sec^2 x.\tan xdx+c$$

माना $\tan x=t$ तब $\sec^2 xdx=dt$

अतः $y.e^{\tan x} = \int e^t .tdt + c$

$$= e^t\left(t-1\right)+c$$

$$y.e^{\tan x} = e^{\tan x}\left(\tan x - 1\right) + c$$

जो कि दिये गये समीकरण का अभीष्ट हूल है।

उदाहरण 2 : हल कीजिये-

$$\left(1+y^2\right)dx = \left(\tan^{-1} y - x\right)dy$$

हल :

दिये गये अवकल समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{dx}{dy} + \left(\frac{1}{1+y^2}\right)x = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$$

यह ऐसा रैखिक अवकल समीकरण है जहां y स्वतंत्र चर तथा x आश्रित चर है।

अतः $P = \frac{1}{1+y^2}$ तथा इसका समाकलन गुणांक

$$I.F = e^{\int Pdy} = e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

$$\because Q = \tan^{-1} y / 1+y^2$$

अतः दिये हुये अवकल समीकरण का अभीष्ट हल होगा।

$$x\left(I.F\right) = \int \left(I.F\right)Qdy + c$$

$$\Rightarrow x.e^{\tan^{-1} y} = \int e^{\tan^{-1} y}\left(\frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}\right)dy + c$$

या $x.e^t = \int e^t .tdt + c$ जहाँ $\tan^{-1} y = t$

या $x.e^t = te^t - e^t + c$

या $x = t - 1 + ce^{-t}$

अतः $x = \tan^{-1} y - 1 + ce^{-\tan^{-1} y}$

जो कि अभीष्ट हल है। जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

उदाहरण 3 : हल कीजिये-

$$\left(x+2y^3\right)\frac{dy}{dx} = y$$

हल : दिये हुये समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+2y^3}$$

या $\frac{dx}{dy} = \frac{x+2y^3}{y} = \frac{x}{y} + 2y^2$

या $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{x}{y}=2y^2$

जो कि मानक रूप $\dfrac{dx}{dy}+Px=Q$ हैं

अत: $I.F=e^{\int -\frac{1}{y}dy}=e^{-\log y}=\left(\dfrac{1}{y}\right)$

अत: दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल होगा

$$x.\frac{1}{y}=\int \frac{1}{y}.2y^2dy+c$$

$$=y^2+c$$

$$\Rightarrow x=y\left(y^2+c\right)$$ जहाँ c स्वेच्छ अचर है।

उदाहरण 4 : हल कीजिये-

$$\sec x\frac{dy}{dx}=\sin x+y$$

हल :

दिये हुये समीकरण को मानक रूप रैखिक अवकल समीकरण रूप में लिखने पर से भाग देने पर

$$\frac{dy}{dx}-(\cos x)y=\sin x\cos x$$

$$(I.F)=e^{-\int \cos xdx}=e^{-\sin x}$$

अत: दिये गये रैखिक-अवकल समीकरण का अभीष्ट हल

$$y.e^{-\sin x}=\int e^{-\sin x}.\sin x\cos xdx+c$$

माना $\sin x=t$

तो $\cos xdx=dt$ रखनें पर

या $y.e^{-t}=\int te^{-t}dt+c$

$$=-te^{-t}-e^{-t}+c$$

$$=-(t+1)e^{-t}+c$$

या $y=-(t+1)+ce^{t}$

या $y=-(\sin x+1)+ce^{\sin x}$

जो कि दिये गये रैखिक-अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है। जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न 1

1. प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण का मानक रूप क्या होगा यदि y को स्वतंत्र चर व x को आश्रित चर मानें।

2. $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ का समाकलन गुणांक क्या होगा?

3. $\left(\frac{dy}{dx}\right)+y\tan x-\sec x=0$ को हल कीजिए ।

2.4 बरनौली अवकल समीकरण

अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q.y^n \qquad \text{............(1)}$$

जहाँ P तथा Q स्वतंत्र चर के फलन हैं अथवा अचर हैं।

इस प्रकार के अवकल समीकरण को बरनौली का अवकल-समीकरण कहते हैं। बरनौली समीकरण को रैखिक-अवकल समीकरण में बदलने के लिए इसे y^n से भाग देते हैं।

अत: $$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q \qquad \text{..............(2)}$$

माना $y^{1-n}=v$

$$\Rightarrow (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx}+Pv=Q$$

या $$\frac{dv}{dx}+(1-n)Pv=(1-n)Q$$

जो कि एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसकों हम पिछले अनुच्छेद 2.3 में वर्णित विधि द्वारा हल कर सकते हैं।

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)+x\sin 2y=x^3\cos^2 y$$

हल :

दिये हुये समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$\frac{1}{\cos^2 y}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{x\sin 2y}{\cos^2 y}=x^3$$

या $$\sec^2 y\frac{dy}{dx}+\frac{2\sin x\cos y.x}{\cos^2 y}=x^3$$

या $$\sec^2 y\frac{dy}{dx}+2\tan y.x=x^3 \text{............(1)}$$

यह एक बरनौली समीकरण है अत.

माना $\tan y=v\Rightarrow \sec^2 y\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

अत: (1) से

$$\frac{dv}{dx}+2vx=x^3$$

यहाँ v एक रैखिक समीकरण है जिसका

$$I.F.=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$$

अत: दिए हुये समीकरण का अभीष्ट हल होगा

$$v.(I.F)=\int (I.F)x^3dx+c$$

$$ve^{x^2}=\int x^3e^{x^2}dx+c$$

माना $x^2=t$

तो $2xdx=dt$

अत: $ve^{x^2}=\int \frac{1}{2}te^tdt+c$

$$=\frac{1}{2}(t-1)e^t+c$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+c$$

$$\therefore \tan y.e^{x^2}=\int \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+c$$ (v का मान रखनें पर)

$$\Rightarrow \tan y=\frac{1}{2}(x^2-1)+ce^{-x^2}$$

उदाहरण 2 : हल कीजिये-

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{1+x}\tan y=(1+x)e^x\sec y$$

हल :

$\sec y$ से समीकरण को भाग देनें पर

$$\cos y\frac{dy}{dx}-\frac{1}{1+x}\sin y=(1+x)e^x \qquad \text{................(1)}$$

माना $\sin y=v\Rightarrow \cos y\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

अत. : समीकरण (1) का रूप होगा

$$\frac{dv}{dx}-\frac{1}{1+x}.v=(1+x)e^x$$

जो कि रैखिक समीकरण है अत:

$$I.F=e^{-\int \frac{1}{1+x}dx}$$

$$=e^{\log(1+x)^{-1}}=(1+x)^{-1}$$

अत: अभीष्ट हल होगा

$$v.(1+x)^{-1}=\int(1+x)^{-1}(1+x)e^{x}dx+c$$

$$=\int e^{x}dx+c$$

$$=e^{x}+c$$

अत: $\sin y.(1+x)^{-1}=e^{x}+c$ (v का मान रखनें पर)

उदाहरण 3 : हल कीजिये-

$$(x^3y^3-xy)dx=dy$$

हल : दिया हुआ अवकल समीकरण निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$\frac{dy}{dx}=x^3y^3-xy$$

या $$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$$

y^3 से भाग देनें पर

या $$y^{-3}\frac{dy}{dx}+xy^{-2}=x^3 \qquad \text{................(1)}$$

यह एक बरनौली समीकरण है। अत : माना

$$y^{-2}=v\Rightarrow -2y^{-3}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

अत: समीकरण (1) का रूप होगा

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}+xv=x^3$$

या $$\frac{dv}{dx}-2xv=-2x^3$$

यह v में एक रैखिक समीकरण है जिसका

$$I.F=e^{\int(-2x)dx}$$

$$=e^{-x^2}$$

अतः दिये हुये समीकरण का हल होगा

$$v.(I.F)=\int(-2x^3)(I.F)dx+c$$

या $$v.e^{-x^2}=-\int 2x^3e^{-x^2}dx+c$$

$$v.e^{-t}=-\int te^{-t}dt+c$$

माना $x^2=t$

तो $2xdx=dt$

अत: $$ve^{-t}=te^{-t}+e^{-t}+c$$

या $$v=t+1+ce^{t}$$

$$\frac{1}{y^2} = x^2 + 1 + ce^{x^2} \qquad (v \text{ का मान रखनें पर})$$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न : 2

1. बरनौली समीकरण का मानक रूप बताओ।
2. $x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = y^2 \log x$ को हल कीजिए।
3. $x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y \log y = xye^x$

विविध दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$x \log x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$$

हल :

दिया गया समीकरण है

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x \log x} y = \frac{2}{x} \qquad (\text{रैखिक समीकरण}) \qquad \text{..........(1)}$$

अतः समाकल गुणांक $= e^{\int \frac{dx}{x \log x}} = e^{\log(\log x)} = \log x$

अतः समीकरण (1) का हल

$$y(\log x) = \int \frac{2}{x} \log x dx + c$$

$$= (\log x)^2 + c$$

उदाहरण 2 : हल कीजिये-

$$2xy \frac{dy}{dx} + (2y + 1 - x^2) + 0$$

हल : दिया गया समीकरण है-

$$2xy \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{y} = -\left(\frac{1+2y}{y}\right) \qquad \text{...........(1)}$$

माना $x^2 = z \Rightarrow 2x \frac{dx}{dy} = \frac{dz}{dy}$

अतः (1) बनता है-

$$\frac{dz}{dy} - \frac{z}{y} = -\left(\frac{1+2y}{y}\right) \qquad \text{..........(2)}$$

(2) रैखिक समीकरण है जिसका समाकलन गुणक

$$= e^{\int -\frac{dy}{y}} = \frac{1}{y}$$

अतः (2) का हल है-

$$z.\frac{1}{y} = -\int \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{y} \right) dy + c$$

$$= \frac{1}{y} - 2\log y + c$$

अतः (1) की अभीष्ट हल है-

$$\frac{x^2}{y} = \frac{1}{y} - 2\log y + c$$

उदाहरण 3 : हल कीजिये-

$$\frac{dy}{dx} = y + xy^3 (1 + \log x)$$

हल : दिया गया समीकरण है-

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - \frac{y^{-2}}{x} = (1 + \log x) \qquad \text{...........(1)}$$

माना $-y^{-2} = z \Rightarrow 2y^{-3} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

अतः (1) बनता है-

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2z}{x} = 2(1 + \log x) \qquad \text{(रैखिक समीकरण)} \qquad \text{...........(2)}$$

(2) का समाकल गुणक $e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2$

अतः (2) का हल

$$zx^2 = \int 2(1 + \log x) x^2 dx + c$$

$$= 2\frac{x^3}{3} + 2\int x^2 \log x dx + c$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 2\frac{x^3}{3} \log x - \frac{2}{3}\int x^2 dx + c$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^3 \log x - \frac{2}{9}x^3 + c$$

अतः (1) का हल है

$$-\frac{x^2}{y^2} = 2\frac{x^3}{3}\left(\frac{2}{3} + \log x\right) + c$$

उदाहरण 4 : हल कीजिये-

$$\sin y\frac{dy}{dx}=\cos x\left(2\cos y-\sin^2 x\right)$$

हल : $\sin y\frac{dy}{dx}-2\cos x\cos y=-\cos x\sin^2 x$ ....(1)

माना $\cos y=z\Rightarrow -\sin y\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$

अत: (1) बनता है-

$$\frac{dz}{dx}+\left(2\cos x\right)z=\cos x\sin^2 x \text{ (रैखिक)}$$

(2) का समाकल गुणक

$$e^{\int 2\cos x dx}=e^{2\sin x}$$

अत: (2) का हल

$$ze^{2\sin x}=\int \cos x\sin^2 x e^{2\sin x}dx+c$$

$$=\frac{1}{2}e^{2\sin x}.\sin^2 x-\frac{1}{2}e^{2\sin x}.\sin x+\frac{1}{4}e^{2\sin x}+c$$

अतः (1) का हल है-

$$\cos y e^{2\sin x}=\left(\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{4}\right)e^{2\sin x}+c$$

उदाहरण 5 : हल कीजिये-

$$\frac{dy}{dx}=e^{x-y}\left(e^x-e^y\right)$$

हल : दिया गया समीकरण है-

$$e^y\frac{dy}{dx}=e^x\left(e^x-e^y\right)$$

$$=e^{2x}-e^x e^y$$

या $e^y\frac{dy}{dx}+e^x e^y=e^{2x}$ ....(1)

माना $e^y=z\Rightarrow e^y\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$

अत: (1) से बनता है-

$\frac{dz}{dx}+e^x.z=e^{2x}$ (रैखिक) ....(2)

(2) का समाकल गुणक $=e^{\int e^x dx}=e^{e^x}$

अत: (2) का हल है-

$$ze^{e^x}=\int e^{e^x}e^{2x}dx+c$$

$e^y e^{e^x}=\int ve^v dv+c$ जहाँ $\left[v=e^x\Rightarrow dv=e^x dx\right]$

$$= ve^v - \int e^v dv + c$$

$$= ve^v - e^v + c$$

$$e^x e^{e^x} - e^{e^x} + c \Rightarrow e^y = \left(e^x - 1\right) + ce^{-e^x}$$

उदाहरण 6 : हल कीजिये-

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

हल :

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

या $\quad 2y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{y^{-1}}{x} = \frac{1}{x^2}$ ....(1)

माना $\quad y^{-1} = z \Rightarrow -y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

अतः (1) से

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = -\frac{1}{x^2}$$ ....(2)

(2) का समाकलन गुणक $= e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\log x} = x$

अतः (2) का हल

$$zx = \int x.\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx + c$$

$$y^{-1}.x = -\log x + c$$

$$\frac{x}{y} = \log\frac{1}{x} + c$$

उदाहरण 7 : हल कीजिये-

$$\left(1 - x^2\right)\frac{dy}{dx} + xy = xy^2$$

हल : $\quad \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}y^2$

$$\Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y^{-1} = \frac{x}{1-x^2}$$ ....(1)

माना $\quad y^{-1} = z \Rightarrow -y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

अतः (1) से

$$\frac{dz}{dx} - \frac{xz}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}$$ ....(2)

(2) रैखिक समीकरण है जिसका समाकल गुणक

$$= e^{-\int \frac{x}{1-x^2}dx} = e^{\frac{1}{2}\log\left(1-x^2\right)} = \sqrt{1-x^2}$$

अतः (2) का हल

$$z\sqrt{1-x^2} = \int \frac{x}{1-x^2}\sqrt{1-x^2}\,dx + c$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + c$$

$$\int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta\, d\theta + c \qquad \text{माना } x = \sin\theta \Rightarrow dx = \cos\theta\, d\theta$$

$$= -\cos\theta + c$$

$$= -\sqrt{1-\sin^2\theta} + c$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + c$$

अतः हल है

$$\left(y^{-1}+1\right)\sqrt{1-x^2} = c$$

या $\quad (1+y) = \dfrac{cy}{\sqrt{1-x^2}}$

उदाहरण 8 : हल कीजिये-

$$\left(1-x^2\right)dy + \left(2xy - x\sqrt{1-x^2}\right)dx = 0$$

हल :

दिया गया समीकरण है-

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1-x^2}y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{............(1)}$$

(1) का समाकल गुणक

$$= e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

(1) का हल-

$$y.\frac{1}{1-x^2} = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{1}{\left(1-x^2\right)}dx + c$$

$$= \int \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}dx = c$$

$$= -\frac{1}{2}\int v^{-3/2}dv \text{ माना } 1-x^2 = v$$

$$= v^{-1/2} + c$$

या $$\frac{y}{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

उदाहरण : 9 हल कीजिये-

$$\frac{dy}{dx}+y\cos x=y^n\sin 2x$$

हल : दिया गया समीकरण बरनौली समीकरण है अतएव

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}\cos x=\sin 2x \qquad ....(1)$$

माना $$y^{1-n}=z\Rightarrow(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

अत: $$\frac{dz}{dx}+(1-n)\cos x.z=(1-n)\sin 2x \qquad ....(2)$$

(2) का समाकल गुणक

$$e^{(1-n)\int\cos x dx}=e^{(1-n)\sin x}$$

अत: (2) का हल-

$$ze^{(1-n)\sin x}=\int(1-n)\sin 2xe^{(1-n)\sin x}dx+c$$

उदाहरण 10 : हल कीजिये-

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}\log y=\frac{y}{x^2}(\log y)^2$$

हल : दिया गया समीकरण है-

$$\frac{1}{y(\log y)^2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x\log y}=\frac{1}{x^2} \qquad ....(1)$$

माना $\frac{1}{\log y}=z$ तब $-\frac{1}{y(\log y)^2}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$

अत: समीकरण (1) बनता है-

$$\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x}=-\frac{1}{x^2} \qquad \text{(रैखिक)} \qquad ....(2)$$

(2) का समाकल गुणक $=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\log x}=\frac{1}{x}$

अत: (2) का अभीष्ट हल

$$\frac{z}{x}=-\int\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x}dx+c$$

$$\frac{z}{x}=\frac{1}{2x^2}+c$$

या $$\frac{1}{x\log y}=\frac{1}{2x^2}+c \qquad \left[\because z=\frac{1}{\log y}\right]$$

उदाहरण 11 : हल कीजिये-

$$\left(1+x^2\right)dy+\left(2yx-4x^2\right)dx=0$$

हल : दिया गया समीकरण है-

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{4x^2}{1+x^2}$$

समीकरण (1) रैखिक अवकल समीकरण है जिसका

समाकलन गुणक $e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}=e^{\log\left(1+x^2\right)}$

$=1+x^2$

अत: (1) का हल होगा-

$$y\left(1+x^2\right)=\int\frac{4x^2}{1+x^2}\left(1+x^2\right)dx+c$$

$$=\frac{4}{3}x^3+c$$

अत: अभीष्ट हल है- $y=\dfrac{4x^3}{3\left(1+x^2\right)}+\dfrac{c}{1+x^2}$

उदाहरण 12 : हल कीजिये-

$$\frac{dy}{dx}+xy=xy^2$$

हल :

दिया गया समीकरण $\dfrac{dy}{dx}+Py=Qy^n$ रूप का है अतएव गये समीकरण को y^{-2} से गुणा करने पर

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+xy^{-1}=x \qquad \text{............(1)}$$

माना $y^{-1}=t\Rightarrow -y^{-2}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dt}{dx}$ ....(2)

अत: (1), (2) से

$$-\frac{dt}{dx}+xt=x \quad \text{या} \quad \frac{dt}{dx}-xt=-x \qquad \text{...........(3)}$$

(3) रैखिक अवकल समीकरण है जिसका समाकलन गुणक

$$=e^{-\int xdx}=e^{-x^2/2}$$

अत: (3) का हल

$$te^{-x^2/2}=\int -xe^{-x^2/2}dx+c$$

माना $-x^2/2=z\Rightarrow -xdx=dz$

अत: $te^{-x^2/2} = \int e^z dz + c$

$= e^z + c$

$y^{-1}e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2} + c$

या $\frac{1}{y} = ce^{x^2/2} + 1$

उदाहरण 13 : हल कीजिये-

$$y\left(x^2y + e^x\right)dx = e^x dy$$

हल : $\frac{dy}{dx} = y\left(x^2y + e^x\right)e^{-x}$

$= x^2y^2e^{-x} + y$

या $\frac{dy}{dx} - y = x^2e^{-x}y^2$ (बरनौली रूप)

या $y^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1} = x^2e^{-x}$ ....(1)

माना $y^{-1} = t \Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dt}{dx}$ ....(2)

अत: (1), (2) से,

$$\frac{dt}{dx} + t = -x^2e^{-x}$$ ....(3)

(3) का समाकलन गुणक $= e^{\int 1.dx} = e^x$

(3) का हल $t.e^x = -\int -x^2e^{-x}e^x dx + c$

$= -\frac{x^3}{3} + c$

या $\frac{e^x}{y} = -\frac{x^3}{3} + c$ $\left[\because t = y^{-1}\right]$

उदाहरण 14 : हल कीजिये-

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3 = 4xe^{-x^2}$$

हल : माना $y^3 = t \Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

अत: दिया गया समीकरण है-

$$\frac{dt}{dx} + 2xt = 4xe^{-x^2}$$

(1) रैखिक समीकरण है जिसका समाकलन गुणक

$= e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$

अत: (1) का हल होगा-

$$te^{x^2} = \int 4xe^{-x^2} e^{x^2} dx + c$$

$$= \int 4x dx + c$$

$$y^3 e^{x^2} = 2x^2 = c \qquad \left[\because t = y^3\right]$$

उदाहरण 15 : हल कीजिये-

$$2(1-xy)\frac{dy}{dx} = y^2$$

हल : $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2(1-xy)}{y^2}$

$$= \frac{2}{y^2} - \frac{2x}{y}$$

या $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{2x}{y} = \dfrac{2}{y^2}$ ....(1)

समीकरण (1) x में रैखिक अवकल समीकरण है

समाकलन गुणक $= e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2\log y} = y^2$

अत: (1) का हल होगा

$$x.y^2 = \int \frac{2}{y^2}.y^2 dy + c$$

या $xy^2 = 2y + c$

उदाहरण 16 : हल कीजिये-

$$x(1-x^2)y^{-1/2} = \frac{(1-x^2)}{y}\frac{dy}{dx} + x$$

हल : दिया गया समीकरण है-

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2} = xy^{-1/2}$$

या $\dfrac{1}{y^{1/2}}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{1-x^2} y^{1/2} = x$ ....(1)

माना $y^{1/2} = t \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dt}{dx}$ ....(2)

अत: (1), (2) से,

$$\frac{dt}{dx} + \frac{2x}{1-x^2} t - 2x$$ ....(3)

(3) का समाकलन गुणक $e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx} = e^{-\log(1-x^2)} = -\dfrac{1}{1-x^2}$

अत: (3) का हल

$$-\frac{t}{1-x^2} = -\int 2x.\frac{1}{1-x^2}dx + c$$

$$= \log\left(1-x^2\right) + c$$

या $\quad -\frac{\sqrt{y}}{\left(1-x^2\right)} = \log\left(1-x^2\right) + \log a \qquad$ (जहां $c = \log a$ माना)

अतएव $\quad \log a\left(1-x^2\right) = -\frac{\sqrt{y}}{1-x^2}$

या $\quad a\left(1-x^2\right) = e^{-\sqrt{y}/\left(1-x^2\right)}$

उदाहरण 17 : हल कीजिये-

$$3x\left(1-x^2\right)y^2\frac{dy}{dx} + \left(2x^2-1\right)y^3 = ax^3$$

हल :

$$3y^2\frac{dy}{dx} + \frac{2x^2-1}{x\left(1-x^2\right)}y^3 = \frac{ax^2}{1-x^2}$$

माना $\quad y^3 = t \Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$

अत: $\quad \frac{dt}{dx} + \frac{\left(2x^2-1\right)}{x\left(1-x^2\right)}.t = \frac{8ax^2}{1-x^2}$

(1) रैखिक समीकरण है जिसका समाकलन गुणक

$$e^{\int\frac{2x^2-1}{x\left(1-x^2\right)}dx} = e^{\left[\int -\frac{1}{x}+\frac{1}{2(1-x)}-\frac{1}{2(1+x)}\right]dx}$$

अब

$$\therefore \frac{2x^2-1}{x\left(1-x^2\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x}$$

$$2x^2 - A\left(1-x^2\right) + B\left(1+x\right)X + Cx\left(1-x\right)$$

जब $\quad x = 1$ तब $B = 1/2$

$\quad x = -1$ तब $C = -1/2$

एवं $\quad A = -1$

अत: समाकलन गुणक $= e^{\left[-\log x - \frac{1}{2}\log(1-x) - \frac{1}{2}\log(1+x)\right]}$

$$= e^{-\left[\log x\left(1-x^2\right)^{1/2}\right]}$$

$$= \frac{1}{x\left(1-x^2\right)^{1/2}}$$

अत: (1) का हल.

$$\frac{t}{x\left(1-x^2\right)^{1/2}}=a\int\frac{x^2}{1-x^2}\frac{1}{x\left(1-x^2\right)^{1/2}}dx+c$$

$$=a\int\frac{xdx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}+c$$

$$=-\frac{a}{2}\int\frac{dz}{z^{3/2}} \text{ माना } 1-x^2=z$$

$$=-\frac{a}{2}\frac{z^{-1/2}}{(-1/2)}+c$$

$$=\frac{a}{\sqrt{z}}+c=\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

अतएव $\dfrac{y^3}{x\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{1-x^2}}+c$

या $y^3=ax+cx\sqrt{1-x^2}$

उदाहरण 18 : हल कीजिये-

$$\left(x^2+3x+2\right)\frac{dy}{dx}+\left(2x+1\right)y=\left(xy+2y\right)^2$$

हल : दिये गये समीकरण को लिखा जा सकता है-

$$\left(x+1\right)\left(x+2\right)\frac{dy}{dx}+\left(2x+1\right)y=y^2\left(x+2\right)^2$$

या $y^{-2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2x+1}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}y^{-1}=\dfrac{\left(x+2\right)}{\left(x+1\right)}$ ....(1)

माना $y^{-1}=t\Rightarrow -y^{-2}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dt}{dx}$ ....(2)

अत (1), (2) से

$$\frac{dt}{dx}-\frac{2x+1}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}t=\frac{x+2}{x+1}$$

..................(3)

(3) का समाकलन गुणक

$$=e^{-\int\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}dx}=e^{\int\left(\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx}$$

$$\because\frac{2x+1}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

या $2x+1\equiv A\left(x+2\right)+B\left(x+1\right)$

गुणांको की तुलना से $2A+B=2;2A+B=1$

$\Rightarrow A=-1;B=3$

समाकलन गुणक $= e^{-3\log(x+2)-\log(x+1)}$

$$= \frac{x+1}{(x+2)^3}$$

अत: (3) का हल

$$t.\frac{x+1}{(x+2)^3} = \int \frac{x+2}{x+1}.\frac{x+1}{(x+2)^3}dx + c$$

$$= \int \frac{dx}{(x+2)^2} + c$$

$$= -\frac{1}{(x+2)} + c$$

अत: $y^{-1}\frac{(x+1)}{x+2} = c - \frac{1}{x+2}$ अभीष्ट हल है।

2.5 सारांश

इस इकाई में आपने देखा कि प्रथम घात, प्रथम कोटि के समीकरण को बहुधा $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ अथवा $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ रूप में लिखा जा सकता है जिन्हें क्रमश' रैखिक अवकल समीकरण तथा बरनौली

समीकरण कहते हैं। बरनौली समीकरण को $y^{1-n} = v$ प्रतिस्थापन से v में रैखिक समीकरण में रूपान्तरित करते हैं।

रैखिक समीकरण का हल $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}dx + c$ होता है।

2.6 शब्दावली

कोटि	Order
घात	Degree
रैखिक अवकल समीकरण	Linear Differential equation
बरनौली समीकरण	Bernoulli's equation
समाकलन गुणक	Integrating Factor
समाकलनीय	Integrable

2.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नो के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न-1

$$1. \frac{dy}{dx} + xP = Q$$

$$2. I.F = e^{\int Pdx}$$

$$3. y = \sin x + c\cos x$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-2

1. $\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$

2. $\frac{1}{y}=\log x+1+cx$

3. $x\log y=e^x\left(x-1\right)+c$

2.8 अभ्यास प्रश्न

निम्नलिखित अवकलन समीकरणों को हल कीजिए।

1. $\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx}+2xy=4x^2$ [उत्तर : $y\left(1+x^2\right)=\frac{4}{3}x^3+c$]

2. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2$ [उत्तर : $4xy=x^4+4c$]

3. $x\left(x-1\right)\frac{dy}{dx}-\left(x-2\right)y=x^3\left(2x-1\right)$ [उत्तर : $y\left(x-1\right)=x^2\left(x^2-x+c\right)$]

4. $\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy=x\sqrt{1-x^2}$ [उत्तर : $y=c\left(1-x^2\right)+\sqrt{\left(1-x^2\right)}$]

5. $\cos x dy=y\left(\sin x-y\right)dx$ [उत्तर : $y^{-1}\sec x=\tan x+c$]

6. $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}=\frac{e^y}{x^2}$ [उत्तर : $2xe^{-y}=1+2cx^2$]

इकाई 3: प्रथम घात एवं प्रथम कोटि के अवकल समीकरण-3 (Differential Equation of First Order and First Degree-3)

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य

इस इकाई में आप अवकल समीकरणों के हल करनें की विधियों को सीखेगें। जिसमें यथातथ अवकल समीकरण तथा उनमें समानयन वाले समीकरणों का अध्ययन करेगें।

3.1 प्रस्तावना

इस ईकाई में हम यथातथ अवकल समीकरण को परिभाषित करते हुऐ प्रथम कोटि व प्रथमघात के अवकल समीकरण का हल ज्ञात करेगें तथा यथातथ अवकल समीकरण में समानयन वाले समीकरणों का भी हल ज्ञात करेगें।

3.2 परिभाषा

यथातथ अवकल समीकरण : किसी अवकल समीकरण को यतातथ अवकल समीकरण कहते हैं यदि उसके पूर्वग (Primitive) से इसे बिना किसी और परिवर्तन के अवकलन द्वारा व्युत्पन्न किया जा सके।

उदाहरणार्थ : $x\frac{dy}{dx}+y=0$ एक यथातथ अवकल समीकरण है क्योंकि इसके पूर्वग $xy=c$ का अवकलन करने पर इसको बिना किसी परिवर्तन के सीधा प्राप्त कर सकते है।

टिप्पणी : प्रथम घात एवं प्रथम कोटि के अवकल समीकरण $Mdx+Ndy+0$ के यथातथ समीकरण होने का आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ होता है।

3.3 यथातथ अवकल समीकरण

यथातथ अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात करनें के लिए निम्न विधि काम में लेते हैं। यथातथ अवकल समीकरण का व्यापक हल

$U(x,y)+V(y)=c$ होता है। जिसे हम निम्न क्रियाविधि द्वारा प्राप्त करते हैं।

(1) सबसे पहले y को अचर मानकर M को x के सापेक्ष समाकलन करके $U(x,y)=\int Mdx$ ज्ञात करते हैं।

(2) प्राप्त $U(x,y)$ का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करके $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int Mdx$ ज्ञात करते हैं।

(3) द्वितीय चरण में प्राप्त $\frac{\partial U}{\partial y}$ को N में से घटातें हैं।

(4) तृतीय चरण में प्राप्त $\left(N-\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ का y के सापेक्ष करके $V(y)$ ज्ञात करते हैं अर्थात $V(y)=\int\left(N-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy$

(5) इस प्रकार दिये गये यथातथ अवकल समीकरण का अभीष्ट हल $U(x,y)+V(y)=c$ प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$y\sin 2xdx-\left(1-y^2+\cos^2 x\right)dy=0$$

हल :

दिये गए अवकल समीकरण में

$$M=y\sin 2x \text{ तथा } N=-\left(1-y^2\cos^2 x\right)$$

अत: $\frac{\partial M}{\partial y}=\sin 2x$ व $\frac{\partial N}{\partial x}=2\cos x\sin x=\sin 2x$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

अत: दिया हुआ अवकल समीकरण एक यथातथ अवकल समीकरण हैं।

$$(i) U(x,y)=\int Mdx=\int y\sin 2xdx=\frac{-y\cos 2x}{2}$$

$$(ii)\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{-\cos 2x}{2}$$

$$(iii)\,N-\frac{\partial U}{\partial y}=-1-y^2-\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos 2x=-\frac{3}{2}-y^2$$

$$(iv)V(y)=\int\left(N-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy=\int-\frac{3}{2}dy-\int y^2dy$$

$$=-\frac{3}{2}y-\frac{y^3}{3}$$

अत: दिए गए यथातथ अवकल समीकरण का अभीष्ट हल $U(x,y)+V(y)=c$

या $\quad -y\frac{\cos 2x}{2}-\frac{3}{2}y-\frac{y^3}{3}=c$

या $\quad \frac{1}{2}y\cos 2x+\frac{3}{2}y+\frac{y^3}{3}=c$

उदाहरण 2 : हल कीजिये-

$$xdx+ydy=a^2\left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right)$$

हल :

दिये हु ये अवकल समीकरण को $Mdx+Ndy$ के रूप में लिखने पर व' 7 ग्र'प्र

$$\left[x+\frac{a^2y}{x^2+y^2}\right]dx+\left[y-\frac{a^2x}{x^2+y^2}\right]dy=0 \qquad ....(1)$$

अत $\quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{a^2\left(x^2+y^2\right)-y.2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{a^2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

$$\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{-^2\left(x^2+y^2\right)+2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{a^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial y}$ अत: समीकरण (1) यथातथ अवकल समीकरण हैं।

$$V(x,y)=\int\left[x+\frac{a}{x^2xy^2}\right]dx$$

y अचर

$$=\frac{x^2}{2}+a^2 y.\frac{1}{y}\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{x^2}{2}+a^2\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$(ii)\frac{\partial U}{\partial y}=a^2.\frac{1}{1+x^2/y^2}\left(\frac{-x}{y^2}\right)=-\frac{a^2x}{x^2+y^2}$$

$$(iii)\,N-\frac{\partial U}{\partial y}=\left[y-\frac{a^2x}{x^2+y^2}\right]-\left[\frac{-a^2x}{x^2+y^2}\right]=y$$

$$(iv)V(y)=\int\left(N-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy=\int y\,dy=\frac{y^2}{2}$$

अत: व्यापक हल $U(x,y)+V(y)=c$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{2}+a^2\tan^{-1}(x/y)+\frac{y^2}{2}=c$$

उदाहरण 3 : हल कीजिये-

$$\left\{y\left(1+\frac{1}{x}\right)\cos y\right\}dx+\{x+\log x-x\sin y\}\,dy=0$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण में

$$M=y\left(1+\frac{1}{x}\right)\cos y \text{ तथा } N=x+\log x-x\sin y$$

$$\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=1+\frac{1}{x}-\sin y \text{ तथा } \frac{\partial N}{\partial y}=1+\frac{1}{x}-\sin y$$

अत: $\therefore\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial y}$ दिया हुआ समीकरण एक यथातथ अवकल समीकरण हैं।

$$(i)U(x,y)=\int M\,dx=\int\left\{y\left(1+\frac{1}{x}\right)\cos y\right\}dx$$

$$=y(x+\log x)+x\cos y$$

$$(ii)\frac{\partial U}{\partial y}=x+\log x-x\sin y$$

$$(iii)\,N-\frac{\partial U}{\partial y}=x+\log x-x\sin y-x-\log x+x\sin y=0$$

$$(iv)V(y)=\int\left(N-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy=\int 0.dy=0$$

अत: दिये हुए समीकरण का व्यापक हल

$U(x,y)+V(y)=c$ होगा

या $y\left(x+\log x\right)+x\cos y=c$

जहाँ c एक स्वेच्छ अचर हैं।

3.4 यथातथ अवकल समीकरण में समानयन वाले समीकरण

यदि कोई समीकरण $Mdx+Ndy=0$ यथातथ नहीं हो तो उसे x तथा y के विशेष फलनों द्वारा गुणा करके यथातथ बनाया जा सकता है ऐसे विशेष फलनों को हम समाकलन-गुणक कहते हैं। समाकलन गुणक ज्ञात करनें की समान्यतया दो विधियाँ है।

3.4.1 निरीक्षण हारा समाकलन गुणक ज्ञात करना

कभी-कभी समीकरण के पदों की एक विशेष रूप में पुन: व्यवस्थित करते हैं या उचित फलन से भाग देते हैं तो इसके कई पदों का हम आसानी से समाकलन कर सकते हैं।

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$\left(1+yx\right)xdy+\left(1-yx\right)ydx=0$$

हल :

दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$\left(xdy+ydx\right)+xy\left(xdy-ydx\right)=0$$

निरीक्षण से इसका समाकलन गुणक $\dfrac{1}{x^2y^2}$ होगा।

x^2y^2 से भाग देने पर

$$\left(\frac{xdy+ydx}{x^2y^2}\right)+\left(\frac{xdy-ydx}{xy}\right)=0$$

या $-d\left(1/xy\right)+d\left[\log y/x\right]=0$

समाकलन करने पर

$$-\frac{1}{xy}+\log\left(y/x\right)=c$$

जो कि समीकरण का अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 2 : हल कीजिये-

$$\left(x+2y^3\right)\frac{dy}{dx}=y$$

हल : दिये हु ये समीकरण के पदों को पुनर्व्यवस्थित करनें परे

$$2y^3dy=ydx-xdy$$

या $2ydy=\dfrac{ydx-xdy}{y^2}$

या $2ydy=d\left(\dfrac{x}{y}\right)$

समाकलन करनें पर

$y^2 + c = \frac{x}{y}$ जो कि अभीष्ट हल है।

3.4.2 समाकलन गुणक ज्ञात करनें के नियम

नियम- I यदि समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ समघात अवकल समीकरण हो तथा $Mx + Ny \neq 0$ तो समीकरण का एक समाकलन गुणक $\frac{1}{Mx + Ny}$ होता है। परन्तु यदि $Mx + Ny = 0$ तो हम $\frac{M}{N}$ के स्थान पर $\frac{-y}{x}$ रखते हैं जिससे समाकलन करनें पर हल $x = cy$ प्राप्त होता हैं।

नियम- II यदि अवकल समीकरण $yf_1(x, y)dx + xf_2(x, y)dy = 0$ तथा $Mx - Ny \neq o$ तो अवकल समीकरण का समाकलन गुणक $\frac{1}{Mx - Ny}$ होगा परन्तु यदि $Mx - Ny = 0$ तो हमें $\frac{M}{N} = \frac{y}{x}$ रखने पर हल $xy = c$ प्राप्त होता हैं।

नियम- III यदि समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ में व्यजंक $\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = f(x)$ या अचर हो तो समाकलन गुणक $(I.F) = e^{\int f(x)dx}$ होता है।

नियम- IV यदि अवकल समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ में व्यजंक $\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = f(y)$ या अचर हो तो समाकलन गुणक $e^{\int f(y)dy}$ लेते है।

नियम- V : यदि अवकल समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ निम्न रूप में हो $x^a y^b (mydx = nxdy) + x^c y^d (uydx + vxdy) = 0$ जहाँ a, b, c, d, m, n, u व v अचर हों तो समाकलन
गुणक $x^h y^k$ होगा जहाँ h तथा k मान समीकरण को $x^h y^k$ से गुणा करके यथातथ प्रतिबन्ध $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ से ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 1 : हल कीजिए-

$$\left(x^2 y - 2xy^2\right)dx - \left(x^3 - 3x^2 y\right)dy = 0$$

हल :

यह एक तृतीय घात का समघात समीकरण है अत:

$$Mx + Ny = \left(x^2 y - 2xy^2\right)x - \left(x^3 - 3x^2 y\right)y$$

$$= x^2 y^2 \neq c$$

अत: समाकलन गुणक $(I.F)\frac{1}{x^2 y^2}$ होगा।

दिये गये समीकरण को $\frac{1}{x^2y^2}$ से गुणा करनें पर

$$\left(\frac{x^2y-2xy^2}{x^2y^2}\right)dx-\left(\frac{x^3-3x^2y}{x^2y^2}\right)dy=0$$

या $$\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x}\right)dx-\left(\frac{x}{y^2}-\frac{3}{y}\right)dy=0$$

जो कि एक यथातथ अवकल समीकरण है अतः इसे यथातथ समीकरण की विधि द्वारा समाकलन करनें पर

$$U(x,y)+V(y)=c$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y}-2\log x+3\log y=c$$

अतः $\Rightarrow \frac{x}{y}+\log\left(\frac{y^3}{x^2}\right)=c$ अभीष्ट हल होगा।

उदाहरण 2 : हल कीजिये-

$$(xy\sin xy+\cos xy)\,ydx+(xy\sin xy-\cos xy)\,xdy=0$$

हल :

दिये गये अवकल समीकरण में

$$M=(xy\sin xy+\cos xy)$$

$$N=(xy\sin xy-\cos xy)$$

अतः $$Mx-Ny=(xy\sin xy+\cos xy)\,xy-(xy\sin xy-\cos xy)\,xy$$

$$=2xy\cos xy\neq 0$$

अतः नियम II से $I.F.=\frac{1}{2xy\cos xy}$

समीकरण के दोनों पक्षों को समाकलन गुणक से गुणा करनें पर

$$y\frac{(xy\sin xy+\cos xy)\,dx}{2xy\cos xy}+x\frac{(xy\sin xy-\cos xy)}{2xy\cos xy}=0$$

या $$\frac{1}{2}\left[y\tan xy+\frac{1}{x}\right]dx+\frac{1}{2}\left[x\tan xy-\frac{1}{y}\right]dy=0$$

जो कि एक यथातथ समीकरण है अतः यथातथ समीकरण की विधि द्वारा समाकलन करनें पर

$$\frac{1}{2}[\log\sec xy+\log x]-\frac{1}{2}\log y=\frac{1}{2}\log c$$

या $$\log\left[\frac{x}{y}\sec x/y\right]=\log c$$

$\therefore \frac{x}{y}\sec x/y = c$ अभीष्ट हल होगा।

उदाहरण 3 : हल कीजिये-

$$\left(x^3 + xy^4\right)dx + 2y^3dy = 0$$

हल :

यहाँ $M = \left(x^3 + xy^4\right)$

$N = 2y^3$

अत: $\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 0$

अत: $\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{2y^3}\left(4xy^3 - 0\right)$

$= 2x$ [केवल x का फलन]

अत: $I.F. = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

दिये गये अवकल समीकरण को e^{x^2} लें गुणा करनें पर

$$e^{x^2}\left(x^3 + xy^4\right)dx + 2e^{x^2}y^3dy = 0$$

जो कि एक यथातथ अवकल समीकरण है अत: इसे यथातथ समीकरण की.विधि से समाकलन करनें पर

$$\frac{e^{x^2}}{2}\left(x^2 + y^4 - 1\right) = c$$

दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल होगा।

उदाहरण 4 : हल कीजिये-

$$\left(y^4 + 2y\right)dx + \left(xy^3 + 2y^4 - 4x\right)dy = 0$$

हल :

यहाँ $M = y^4 + 2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 + 2$

$N = xy^3 + 2y^4 - 4x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = y^3 - 4$

अत: $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y^4 + 2y}\left[y^3 - 4 - 4y^3 - 2\right]$

$= \frac{-3y^3 - 6}{y^4 + 2y} = -\frac{3}{y}$ [केवल y का मान]

अत: समाकलन गुणक $\left(I.F\right) = e^{-3\int \frac{1}{y}dy}$

दिये गये समीकरण को $\frac{1}{y^3}$ से गुणा करनें पर

$$\left(y+\frac{2}{y^2}\right)dx+\left(x+2y-\frac{4x}{y^3}\right)dy=0$$

जो कि यथातथ अवकल समीकरण है। अत: यथातथ विधि से समाकलन करने पर

$$\left(y+\frac{2}{y^2}\right)x+y^2=c$$ जो कि अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 5 : हल कीजिये-

$$(2ydx+3xdy)+2xy(3ydx+4xdy)=0$$

हल :

दिया गया अवकल समीकरण (3.4.2) के नियम V के रूप का है अत : नियम V के अनुसार इसका समाकलन गुणक $x^h y^k$ होना चाहिए। अत : दिये गये समीकरण को $x^h y^k$ से गुणा करनें पर

$$\left(2x^h y^{k+1}+6x^{h+1}y^{k+2}\right)dx+\left(3x^{h+1}y^k+8x^{h+2}y^{k+1}\right)dy=0 \qquad ....(1)$$

यथातथ समीकरण होनें के लिए

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\left[2(k+1)-3(h+1)\right]x^h y^k+\left[6(k+2)-8(h+2)\right]x^{h+1}y^{k+1}=0$$

यह तभी सन्यव है जब

तथा $$\left.\begin{array}{l}2(k+1)-3(h+1)=0\\ 6(k+2)-8(h+2)=0\end{array}\right]\Rightarrow h=1,k=2$$

अत: समाकलन गुणक $I.F.=x^h y^k=xy^2$

दिये गये अवकल समीकरण को xy^2 से गुणा करने पर

$$\left(2xy^3+6x^2y^4\right)dx+\left(3x^2y^2+8x^3y^3\right)dy=0$$

यह एक यथातथ समीकरण है। अत: यथातथ समीकरण की विधि द्वारा समाकलन करने पर

$$x^2y^3+2x^3y^4+c$$

जो अभीष्ट हल है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न :

1. यथातथ अवकल समीकरण के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध लिखिए।
2. हल कीजिए :

$$y\left(axy+e^x\right)dx-e^x dy=0$$

3. यदि समीकरण $Mdx+Ndy$ =0 समघात समीकरण हो तथा $Mx+Ny\neq 0$ तो समीकरण का समाकलन गुणक क्या होगा।

4. हल कीजिए :

$$\left(x^3+xy^4\right)dx+2y^3dy=0$$

विविध दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$\left(x^2+y^2+x\right)dx+xydy=0$$

हल : यहाँ $M=x^2+y^2+x,\ N=xy$

अत: $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y;\dfrac{\partial N}{\partial x}=y$

$$\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=y \qquad \text{अत:} \Rightarrow\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{x}$$

जो कि केवल x का फलन है अतएव दिये गये अवकल समीकरण का समाकल गुणक

$$=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\log x}=x$$

दिये गये समीकरण को x से गुणा करने पर

$$x\left(x^2+y^2+x\right)dx+x^2ydy=0 \qquad \text{......(1)}$$

अब $\quad "M"=x^3+xy^2+x^2\ "N"=x^2y$

$$U=\int Mdx=\int\left(x^3+xy^2+x^2\right)dx$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=x^2y$$

$$V=\int\left(N-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy=\int\left(x^2y-x^2y\right)dy=0$$

अतः अभीष्ट हल है-

$U+V=c$ जहाँ c नियतांक है।

$$\Rightarrow\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^3}{3}=c$$

या $3x^4+4x^3+6x^2y^2=c_1$ जहाँ $c_1=12c$ (नियतांक)

विकल्प: समीकरण (1) यथार्थ समीकरण है जिसे हम निरीक्षण विधि से भी हल कर सकते है-

$$x\left(x^2+y^2+xy\right)dx+x^2ydy=0$$

या $\quad \left(x^3+x^2\right)dx+xy\left(ydx+xdy\right)=0$

या $\quad \left(x^3+x^2\right)dx+xy\left[d\left(xy\right)\right]=0$

$$\left[\because d\left(xy\right)=xdy+ydx\right]$$

या $$d\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}\right]=0 \qquad \text{.........(2)}$$

अत: (2) के समाकलन से

$$\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2} = C$$

उदाहरण 2 : हल कीजिये-

$$\left(2xy^4e^y+2xy^3+y\right)dx+\left(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x\right)dy=0$$

हल : यहाँ $M=2xy^4e^y+2xy^3+y$

$$N=x^2y^4e^y-x^2y^2-3x$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y}==8xy^3e^y+2xy^4e^y+6xy^2+1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=x^2y^4e^y-2xy^2-3$$

अत: $$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=-4\left(2xy^3e^y+2xy^2+1\right)$$

$$=-\frac{4}{y}\left(2xy^4e^y+2xy^3+y\right)$$

$$\therefore \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=-\frac{4}{Y}$$

जो कि केवल का फलन है अतएव दिये गये समीकरण का समाकलन गुणक

$$=e^{\int -\frac{4}{y}dy}=e^{\log y^{-4}}=\frac{1}{y^4}$$

दिये गये समीकरण को $\frac{1}{y^4}$ से गुणा करने पर

$$\left(2xe^y+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^3}\right)dx+\left(x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-\frac{3x}{y^4}\right)dy=0$$

$$\Rightarrow\left(2xe^ydx+x^2e^ydy\right)+\left(\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy\right)+\left(\frac{1}{y^3}dx-\frac{3x}{y^4}dy\right)=$$

$$\Rightarrow d\left(x^2e^y\right)+d\left(\frac{x^2}{y}\right)+d\left(\frac{x}{y^3}\right)=0 \qquad \text{........(1)}$$

(1) समाकलन से

$$x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x^3}{y^3}=c$$

टिप्पणी : आप उपरोक्त हल को $U=\int M dx$ इत्यादि विधि से भी प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : हल कीजिये-

$$y\left(2xy+e^x\right)dx-e^x dy=0$$

हल :

दिया गया समीकरण है

$$2xy^2dx+ye^xdx-e^xdy=0$$

या $$2xdx+\frac{e^x}{y}dx-\frac{e^x}{y^2}dy=0$$

या $$d\left(x^2\right)+d\left(\frac{e^x}{y}\right)=0$$

(1) का समाकलन करने पर

$$x^2+\frac{e^x}{y}=c$$

उदाहरण 4 : हल कीजिये-

$$\left(x^4e^x-2my^2x\right)dx+2mx^2ydy=0$$

हल $$M=x^4e^x-2my^2x$$

$$N=2mx^2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-4myx \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=4myx$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$ अतः समीकरण यथार्थ

अब $$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-8mxy$$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-\frac{4}{x}$$

जो कि केवल x का फलन है।

अतः समाकलन गुणक $=e^{-\int\frac{4}{x}dx}=\dfrac{1}{x^4}$

अतः $\dfrac{1}{x^4}$ से दी गयी समीकरण को गुणा करने पर

$$\left(e^x-\frac{2my^2}{x^3}\right)dx+2m\frac{y}{x^2}dy=0 \qquad \text{........(1)}$$

$$\Rightarrow e^x dx + 2m\frac{y}{x}\left(\frac{dy}{x} - \frac{y}{x^2}dx\right) = 0$$

$$\Rightarrow d\left(e^x\right) + 2m\frac{y}{x}d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow e^x + 2m\int\left(\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right) = \int 0.dx$$

$$\Rightarrow e^x + 2m\left(\frac{y}{x}\right)^2 = c$$

उदाहरण 5 : हल कीजिये-

$$2x\left(ye^{x^2} - 1\right)dx + e^{x^2}dy = 0$$

हल :

$$M = 2x\left(ye^{x^2} - 1\right); \qquad N = 2e^{x^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xe^{x^2}; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xe^{x^2}$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ दिया गया समीकरण यथातथ

माना $U = \int M dx = \int\left(2xye^{x^2} - 2x\right)dx$

$$= ye^{x^2} - x^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{x^2}$$

$$V = \int\left(N - \frac{\partial U}{\partial y}\right)dy = \int 0.dy = 0$$

अत: अभीष्ट हल है : $U = c$

या $\quad ye^{x^2} - x^2 = c$

उदाहरण 6 : हल कीजिये-

$$xdx + ydy = m\left(xdy - ydx\right)$$

हल : दिया गया समीकरण है-

$$\left(x + my\right)dx + \left(y - mx\right)dy = 0 \qquad ....(1)$$

$$M = x + my, N = y - mx$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = m, \frac{\partial N}{\partial x} = -m \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

अत: समीकरण यथातथ नहीं है तथा

चूंकि दिया गया समीकरण समघात है तथा

$$Mx+Ny=x^2+mxy+y^2-mxy=x^2+y^2\neq 0$$

अत: $\dfrac{1}{Mx+Ny}=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ एक समकाल गुणक होगा

समीकरण (1) को $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ से गुणा करने पर

$$\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{{}^2\left(x^2+y^2\right)}+m=\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+x^2/y^2}=0$$

या $$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}+m\frac{\left(ydx-xdy\right)}{x^2+y^2}=0$$

या $$\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{2\left(x^2+y^2\right)}+m\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+y^2/x^2}=0$$

समाकलन करने पर,

$$\log\left(x^2+y^2\right)+2m\tan^{-1}\left(y/x\right)=c$$

उदाहरण 7 : हल कीजिये

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(\log y-\log x+1)$$

हल :

माना $y=Vx\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{dV}{dx}+V$

अत: दिया गया समीकरण $x\dfrac{dV}{dx}+V=V\left(\log V+1\right)$

या $x\dfrac{dV}{dx}=V\log V$ या $\dfrac{dV}{V\log V}=\dfrac{dx}{x}$

समाकलन करने पर

$$\log\left(\log V\right)=\log x+\log c$$

या $\log V=xc$

या $V=e^{xc}$

या $y=xe^{cx}$ $[\because\ y=Vx]$

उदारहण 8 : हल कीजिये-

$$\left(3x^2+2y\sin 2x\right)dx+\left(2\sin^2 x+3y^2\right)dy=0$$

हल : दिया गया समीकरण $Mdx+Ndy=0$ रूप का है-

जहाँ $M=3x^2+2y\sin 2x;$; $N=2\sin^2 x+3y^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2\sin 2x \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4\sin x\cos x = 2\sin 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ अतः समीकरण यथातथ है।

माना $U = \int M dx = \int (3x^2 + 2y\sin 2x) dx$

$= x^3 - y.\cos 2x$ [y को अचर रखते हुये]

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\cos 2x$$

अब $V = \int \left(N - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy$

$$= \int (2\sin^2 x + 3y^2 + \cos 2x) dy$$

$$= \int (2\sin^2 x + 3y^2 + 1 - 2\sin^2 x) dy$$

$$= \int (3y^2 + 1) dy$$

$$= y^3 + y$$

अतः हल है- $U + V = c$

या $x^3 - y\cos 2x + y^3 + y = c$

उदाहरण 9 : हल कीजिये-

$$4(x-2)^2 \frac{dy}{dx} = (x+y-1)^2$$

हल :

माना $X = x-2, Y = y+1$

तब $\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$ अत : दिया गया समीकरण बनता है-

$$4X^2 \frac{dY}{dX} = (X+Y)^2$$

या $$4\frac{dY}{dX} = \frac{(X+Y)^2}{X^2} \qquad \text{.........(1)}$$

समीकरण (1) समघात है अतः माना $Y = VX$ अत : (1) होगा,

$$4\left[V + \frac{dV}{dX}\right] = (1+V)^2$$

या $$4X\frac{dV}{dX} = (1-V)^2$$

या $$4\frac{dV}{(1-V)^2} = \frac{dX}{X}$$

समाकलन करने पर

$$\frac{4}{1-V}=\log X+c$$

या $$\frac{4X}{X-Y}=\log X+c$$

या $$4\frac{(x-2)}{x-y-3}=\log(x-2)+c$$

उदारहण-10 हल कीजिये-

$$x\left(x^2+y^2-\alpha^2\right)dx+y\left(x^2+y^2-\beta^2\right)dy=0$$

हल : दिये गये समीकरण को लिख सकते हैं-

$$\left(x^2+y^2\right)(xdx+ydy)=\alpha^2xdx+\beta^2ydy$$

या $$\left(x^2+y^2\right)d\frac{\left(\left(x^2+y^2\right)\right)}{2}=\frac{d\left(\alpha^2x^2+\beta^2y^2\right)}{2}$$

या $$\left(x^2+y^2\right)d\left(x^2+y^2\right)=d\left(\alpha^2x^2+\beta^2y^2\right)$$

समाकलन करने पर

$$x^2+y^2=2\left(\alpha^2x^2+\beta^2y^2\right)+c$$

उदाहरण 11 : हल कीजिये-

$$ydx-xdy-2x^3dx+x^2ydy=0$$

हल : $$ydx-xdy-2x^3dx+x^2ydy=0 \qquad \text{............(1)}$$

या $$\frac{ydx-xdy}{x^2}-2xdx+ydy=0$$

या $$\frac{y}{x^2}dx-\frac{dy}{x}-d\left(x^2\right)+d\frac{\left(y^2\right)}{2}=0$$

या $$-d\left(\frac{y}{x}\right)-d\left(x^2\right)+\frac{d\left(y^2\right)}{2}=0$$

समाकलन करने पर

$$-\frac{y}{x}-x^2+\frac{y^2}{2}=c \quad \text{या} \quad y^2x-2y-2x^3=cx$$

वैकल्पिक विधि: दिया गया समीकरण है-

$$\left(y-2x^3\right)dx+\left(x^2y-x\right)dy=0 \qquad \text{........(2)}$$

$$M=y-2x^3,\ N=x^2y-x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1 \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy-1$$

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ अत: समीकरण यतायथ नहीं है।

अब $\Rightarrow\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-(2xy-2)=-2(xy-1)$

$$\Rightarrow\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-\frac{2}{x}$$

जो कि केवल x का फलन है अत : समाकलन गुणक

$$= e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{\log x^{-2}}=\frac{1}{x^2}$$

अत: समीकरण (2) को $\frac{1}{x^2}$ से गुणा करने पर

$$\left(\frac{y-2x^3}{x^2}\right)dx+\frac{(x^2y-x)}{x^2}dy=0$$

अब $U=\int Mdx=\int\left(\frac{y}{x^2}-2x\right)dx$

$$=\frac{-y}{x}-x^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{x}$$

$$V=\int\left(N-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy$$

$$=\int\left[\left(y-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\right]dy=\frac{y^2}{2}$$

अत: अभीष्ट हल है-

$$-\frac{y}{x}-x^2+\frac{y^2}{2}=c$$

उदाहरण 12 : हल कीजिये-

$$(xy-2y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$$

हल : $M=xy-2y^2$ $\qquad N=-(x^2-2xy)$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x-4y \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-2x+2y$$

$\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ अत, समीकरण यथातथ नहीं है।

$$\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=3x-6y=3(x-2y)$$

अब $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{3(x-2y)}{-x(x-2y)}$

$$= -\frac{3}{x}$$

जो कि केवल x का फलन है अत :

समाकलन गुणक $e^{\int -\frac{3}{x}dx} = \frac{1}{x^3}$

दिये गये समीकरण को $\frac{1}{x^3}$ से गुणा करने पर

$$\left(\frac{y}{x^2} - \frac{2y^2}{x^3}\right)dx + \left(\frac{2y}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dy = 0$$

या $$\frac{y}{x^2}dx + \frac{2y}{x^2}dy - \frac{2y^2}{x^3}dx - \frac{1}{x}dy = 0$$

या $$\left(\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy\right) + 2\left(\frac{y}{x^2}dy - \frac{y^2}{x^3}dx\right) = 0$$

या $$-d\left(\frac{y}{x}\right) + 2d\left(\frac{y^2}{x^2}\right) = 0$$

या $$-\frac{y}{x} + \frac{2y^2}{x^2} = c$$

या $$2y^2 - xy = x^2c$$

उदाहरण 13 : हल कीजिये-

$$y\left(x^2y^2 + 2\right)dx + x\left(2 - 2x^2y^2\right)dy = 0$$

हल :

दिया गया समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ रूप का है जो कि $yf_1(xy)dx + xf_2(xy)dy = 0$ रूप में निरूपित है अत : इसका समाकलन गुणक $\frac{1}{Mx - Ny}$ रूप का होगा।

अब $$\frac{1}{Mx - Ny} = \frac{1}{x^3y^3 + 2xy - 2xy + 2x^3y^3} = \frac{1}{3x^3y^3}$$

अत: दिये गये समीकरण को समाकल-गुणक $\frac{1}{3x^3y^3}$ से गुणा करनें पर

$$\left(\frac{x^2y^3}{3x^3y^3} + \frac{2y}{3x^3y^3}\right)dx + \left(\frac{2x}{3x^3y^3} - \frac{2x^3y^2}{3x^3y^3}\right)dy = 0$$

या $$\left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^3y^2}\right)dx + \left(\frac{2}{3x^2y^3} - \frac{2}{3y}\right)dy = 0$$

अब $$U = \int\left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^3y^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\log x+\frac{2}{3y^2}\left(\frac{1}{-2x^2}\right)$$

$$=\log x^{1/3}-\frac{1}{3x^2y^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{3x^2y^3}$$

$$V=\int\left(N-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy$$

$$=\int\left(\frac{2}{3x^2y^3}-\frac{2}{3y}-\frac{2}{3x^2y^3}\right)dy$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{dy}{y}=-\frac{2}{3}\log y$$

अत: अभीष्ट हल है-

$$\log x^{1/3}-\frac{1}{3x^2y^2}-\frac{2}{3}\log y+\log c=0$$

या $\quad 3\log x^{1/3}-\frac{1}{x^2y^2}-\log y^2+\log c=0$

या $\quad \log\frac{cx}{y^2}=\frac{1}{x^2y^2}$

या $\quad cx=y^2e^{\frac{1}{x^2y^2}}$ अभीष्ट हल है।

3.5 सारांश

इस इकाई में आपने प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरणों के यथातथ होने के प्रतिबंध तथा यथातथ समीकरणों को हल करने की विधि को समझा। आपने जाना कि यदि समीकरण यथातथ नहीं है तो उसे समाकल गुणक की सहायता से यथातथ बनाया जा सकता है। समाकल गुणक की प्राप्ति कतिपय स्थितियों में निरीक्षण द्वारा अन्यथा उपयुक्त। सूत्रों द्वारा की जाती है। ये सूत्र समीकरण के विशिष्ट स्वरूप पर निर्भर करते है।

3.6 शब्दावली

समघात समीकरण	Homogenous equation
यथातथ	Exact
समाकलन गुणक	Integrating factor
पूर्वग	Primitive

3.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, यदि अवकलन समीकरण $Mdx+Ndy=0$ हो।

2. $ax^2y+2e^x=cy$

3. $\frac{1}{Mx+Ny}$

4. $\frac{e^{x^2}}{2}\left(x^2+y^4-1\right)=c$

3.8 अभ्यास प्रश्न

निम्नलिखित अवकलन समीकरणों को हल कीजिए ।

1. $(x+y)^2\,dx-\left(y^2-2xy-x^2\right)dy=0$

[उत्तर : $(x+y)^3-2y^3=c$]

2. $y\left(2xy+e^x\right)dx=e^x dx$

[उत्तर : $yx^2+e^x=cy$]

3. $x^2ydx-\left(x^3+y^3\right)dy=0$

[उत्तर : $y=ce^{x^3/3y^3}$]

4. $\left(xy^2+2x^2y^3\right)dx+\left(x^2y-x^3y^2\right)dy=0$

[उत्तर : $2\log x-\log y=\frac{1}{xy}+c$]

5. $\left(3xy-2ay^2\right)dx+\left(x^2-2axy\right)dy=0$

[उत्तर : $x^3y-ax^2y^2=c$]

6. $\left(3x^2y^4+2xy\right)dx+\left(2x^3y^3-x^2\right)dy=0$

[उत्तर : $x^3y^3+x^2=cy$]

7. $\left(y^2+2x^2y\right)dx+\left(2x^3-xy\right)dy=0$

[उत्तर : $\frac{-2}{3}x^{-3/2}y^{3/2}+4x^{1/2}y^{1/2}=c$]

इकाई 4 : प्रथमकोटि परन्तु उच्च घात के अवकल समीकरण-1 (Differential Equation of First Order But Of Higher Degree -1)

इकाई की रूप रेखा

4.0 उद्देश्य

इस इकाई में आप प्रथम कोटि परन्तु उच्च घात के अवकल समीकरणों का अध्ययन करेगें तथा इन समीकरणों को x, y और p के लिए हल योग्य समीकरण के रूप में हल करनें की विधियों को सीखेगें।

4.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम प्रथम कोटि तथा उच्च घात के अवकल समीकरणों को हल करनें की विधियाँ सीखेगें। व्यापक रूप में अवकल समीकरण का रूप

$p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + ...+ a_n = 0$ है जहाँ पर $p = \dfrac{dy}{dx}$ तथा $a_1, a_2, ...a_n$

चर x व y के फलन है अर्थात $f(x, y, p) = 0$

यहाँ विशेष परिस्थितियों में विशेष प्रकार के अवकल समीकरणों का वर्गीकरण करके समाकलन करेगें।

4.2 p के लिए हल योग्य समीकरण

प्रथम कोटि तथा उच्च घात () के अवकल समीकरण का व्यापक रूप

$$p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + ...+ a_n = 0 \qquad ......(1)$$

होता है जहाँ $p = \dfrac{dy}{dx}$

माना समीकरण (1) को निम्न रूप में लिखें।

$$\{p-f_1(x,y)\}\{p-f_2(x,y)\}.....\{p-f_n(x,y)\}=0 \qquad .....(2)$$

तो प्रत्येक खण्ड को शून्य के बराबर लेने पर हमें प्रथमघात व प्रथमकोटि के n समीकरण प्राप्त होगें।

माना जिनका हल निम्न प्रकार है :

$$F_1(x,y,c_1)=0, F_2(x,y,c_2)=0,......F_3(x,y,c_n)=0 \qquad .....(3)$$

जहाँ $c_1, c_2, ...c_n$ स्वेच्छ अचर है।

अत: (3) से संयुक्त व्यापक हल होगा

$$F_1(x,y,c_1)F_2(x,y,c_2).......Fn(x,y,c)=0, \qquad .....(4)$$

समीकरण (1) प्रथम कोटि का है अत: परिभाषानुसार व्यापक हल में केवल एक स्वेच्छ अचर होना चाहिए। अत: $c_1 = c_2 = ...c_n = c$

तथा $F_1(x,y,c_1)=0, F_2(x,y,c_2).=0,.....Fn(x,y,c)=0,$

अत: समीकरण (1) का व्यापक हल निम्न प्रकार से व्यक्त होगा।

$$F_1(x,y,c_1)F_2(x,y,c_2).....Fn(x,y,c)=0$$

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$x^2p^2 - 2xyp + 2y^2 - x^2 = 0$$

हल :

दिये गये समीकरण को p में द्विघाती मानकर हल करनें पर

$$p = \frac{2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 - 4x^2(2y^2 - x^2)}}{2x^2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

या $$p = \frac{y}{x} \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$$

समीकरण (1) समघात समीकरण है, अत: $y = vx$ रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

अत: (1) से

$$v + x\frac{dv}{dx} = v \pm \sqrt{1 - v^2}$$

या $$\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \pm\frac{dx}{x}$$

समाकलन करने पर

$$\sin^{-1} v = \pm \log x \pm \log c$$

या $$\sin^{-1} y/x = \pm \log cx$$ अभीष्ट हल होगा।

उदाहरण 2 : हल कीजिये-

$$p^2 + 2py \cot x = y^2$$

हल :

दिये गये समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है

$$p^2 + 2py \cot x - y^2 = 0$$

p में द्विघाती समीकरण मानकर हल करने पर

$$p = \frac{-2y \cot x \pm \sqrt{4y^2 \cot^2 x + 4y^2}}{z}$$

या $$p = -y \cot x \pm y \cos ecx \qquad \text{........(1)}$$

(1) में धनात्मक चिन्ह काम में लेनें पर

$$p = -y \cot x + y \cos ecx$$

या $$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) = y\left[\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\right]$$

$$= y\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

या $$\frac{dy}{y} = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right) dx$$

समाकलन करने पर

$$\log y = -\log(1+\cos x) + \log c$$

अतः $$y = \frac{c}{1+\cos x} \qquad \text{..............(2)}$$

पुनः (1) में ऋणात्मक चिन्ह लेनें पर

$$p = -y \cot x - y \cos ecx$$

या $$\frac{dy}{dx} = -y\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)$$

या $$= -y\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)$$

या $$\frac{dy}{y} = -\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right) dx$$

समाकलन करनें पर

$$\log y = -\log(1-\cos x) + \log c$$

अतः $$y = \frac{c}{1-\cos x} \qquad \text{..............(3)}$$

अत: (2) और (3) से दिये हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल होगा

$$\left(y-\frac{c}{1+x}\right)\left(y-\frac{c}{1-\cos x}\right)=0$$

उदाहरण 3 : हल कीजिये-

$$xy^2\left(p^2+2\right)=2py^3+x^3$$

हल : दिये हुए समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$xy^2p^2-2y^3p+x\left(2y^2-x^2\right)=0$$

p में द्विघात समीकरण मानकर हल करने पर

$$p=\frac{2y^3\pm\sqrt{4y^6-4xy^2x\left(2y^2-x^2\right)}}{2xy^2}$$

$$p=\frac{2y^3\pm\sqrt{4y^4-2x^2y^2+x^4}}{2xy^2}$$

$$=\frac{y^2\pm\left(x^2-y^2\right)}{xy} \qquad \text{........(1)}$$

(1) मे धनात्मक चिन्ह काम में ले तो

$$p=\frac{y^2+\left(x^2-y^2\right)}{xy}=\frac{x}{y}$$

या $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

या $ydy=xdx$

समाकलन करने पर

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+\frac{c}{2}$$

या $y^2-x^2-c=0$ .....(2)

पुन: (1) में ऋणात्मक चिन्ह लेनें पर

$$p=\frac{y^2-\left(x^2-y^2\right)}{xy}=\frac{2y^2-x^2}{xy}$$

या $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y^2-x^2}{xy}$

जो कि समघात अवकल समीकरण है अत: इसमें

$y=vx$ लेने पर

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2v^2x^2-x^2}{vx^2}=\frac{2v^2-1}{v}$$

या $$x\frac{dv}{dx}=\frac{2v^2-1}{v}-v=\frac{v^2-1}{v}$$

या $$\frac{2v}{v^2-1}dv=2\frac{dx}{x}$$

समाकलन करने पर

$$\log\left(v^2-1\right)=2\log x+\log c$$

$$\log\left(v^2-1\right)=\log\left(cx^2\right)$$

या $$\left(v^2-1\right)=\left(cx^2\right)\ [\therefore v=y/x]$$

या $$y^2-x^2=cx^4$$

अत: $$y^2-x^2-cx^4=0 \qquad \text{............(3)}$$

अत: (2) और (3) से दिये गये अवकल समीकरण का व्यापक हल होगा

$$\left(y^2-x^2-c\right)\left(y^2-x^2-cx^4\right)=0$$

4.3 y के लिए हल योग्य समीकरण

हम y के लिए हल होने योग्य समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त कर सकतें है।

$$y=f\left(x,p\right) \qquad \text{.......(1)}$$

(1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$p=\frac{dy}{dx}=\phi_1\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)$$

अर्थात $$p=\phi_1\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right) \qquad \text{......(2)}$$

समीकरण (2) चर p तथा x में अवकल समीकरण है जहाँ p आश्रित चर तथा x स्वतंत्र चर माना जा सकता है ऐसी स्थिति में माना (2) का हल.

$$F\left(x,p,c\right)=0 \qquad \text{.......(3)}$$

जहाँ c स्वेच्छ अचर है। (1) व (3) सें p का विलोपन करनें पर अभीष्ट हल प्राप्त होगा। यदि p का विलोपन सम्भव नहीं हो तो x व y को प्राचल के रूप में प्राप्त करना चाहिए जिनका संयुक्त रूप ही अवकल समीकरण का अभीष्ट हल होगा।

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$xp^2=-ax+2py$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण को y के लिए हल करनें पर

$$\frac{xp^2 + ax}{2p} = y$$

अर्थात $\quad y = \frac{1}{2}\left[xp + a\left(\frac{x}{p}\right)\right]$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{1}{2}\left[p + x\frac{dp}{dx} + a\left\{\frac{p - x\frac{dp}{dx}}{p^2}\right\}\right]$$

या $\quad p = x\frac{dp}{dx} + \frac{a}{p} - \frac{ax}{p^2}\frac{dp}{dx}$

या $\quad p - \frac{a}{p} = x\frac{dp}{dx}\left[1 - \frac{a}{p^2}\right] = \frac{x}{p}\frac{dp}{dx}\left(p - \frac{a}{p}\right)$

या $\quad \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p}$

समाकलन से

$$\log x + \log c = \log p$$

या $\quad cx = p$ ....(1)

(1) से p का मान समीकरण में प्रतिस्थापित करनें पर अभीष्ट हल

$$x.x^2c^2 + ax - 2xcy = 0$$

या $\quad c\left(x^2 - 2y\right) + a = 0$

उदाहरण 2 : हल कीजिये-

$$x^2 + p^2x = py$$

हल :

दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार लिखने पर

$$y = \frac{x^2}{p} + px \qquad \text{.......(1)}$$

(1) का x के सापेक्ष अवकलन करनें पर

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{2x}{p} - \frac{x^2}{p^2}\frac{dp}{dx} + p + x\,\frac{dp}{dx}$$

या $\quad \left(x - \frac{x^2}{p^2}\right)\frac{dp}{dx} + \frac{2x}{p} = 0$

या $\quad \left(p^2 - x\right)\frac{dp}{dx} + 2p = 0$

या $\left(p^2-x\right)\frac{dp}{dx}=-2p$

या $\frac{dx}{dp}-\frac{x}{2p}=-\frac{1}{2}p$ ....(2)

यह एक अवकल समीकरण है तथा इसमें x आश्रित चर तथा p स्वतंत्र है। अतः

$$I.F.=e^{-\int\frac{1}{2p}dp}=e^{-\frac{1}{2}\log p}=\frac{1}{\sqrt{p}}$$

अत: (2) का अभीष्ट हल होगा

$$x.\frac{1}{\sqrt{p}}=\int-\frac{1}{2}p.\frac{1}{\sqrt{p}}dp+c$$

$$=-\frac{p^{3/2}}{3}+c$$

या $x=c\sqrt{p}-\frac{1}{3}p^2$ .....(3)

(1) व (3) से p का विलोपन करना आसान नहीं है अत : (3) से x का मान (1) में रखने पर

$$y=\frac{1}{p}\left(c\sqrt{p}-\frac{1}{3}p^2\right)^2+p\left(c\sqrt{p}-\frac{p^2}{3}\right) \quad ......(4)$$

अत: सम्बन्ध (3) व (4) मिलाकर अभीष्ट हल देते हैं।

4.4 के लिए हल योग्य समीकरण

दिये गये समीकरण को x के लिये हल करें तो उसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$x=f\left(y,p\right)$ .....(1)

y के सापेक्ष अवकलन करनें पर

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{p}=\phi_2\left(y,p,\frac{dp}{dy}\right)$ ....(2)

यह p और y में एक अवकल समीकरण है माना इसका हल $F\left(y,p,c\right)=0$ है जहाँ c स्वेच्छ अचर है। (1) व (3) से p का विलोपन करनें पर अभीष्ट हल प्राप्त होगा। यदि विलोपन सम्भव नहीं हो तो x व y को प्राचल p के रूप में प्राप्त करनें पर यही संयुक्त रूप से अभीष्ट हल होगा।

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$y=2px+y^2p^3$$

हल :

दिये गये समीकरण को x के पदों के लिए हल करनें पर

$$x = \frac{y}{2p} - \frac{y^2 p^2}{2} \qquad \text{........(1)}$$

(1) का y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy} - yp^2 - y^2 p\frac{dp}{dy}$$

या $$\left(\frac{1}{2p} + yp^2\right) + \frac{y}{p}\left(\frac{1}{2p} + yp^2\right)\frac{dp}{dy} = 0$$

या $$\left(\frac{1}{2p} + yp^2\right)\left(1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy}\right) = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

जहाँ प्रथम गुणनखण्ड से विचित्र हल प्राप्त होगा जिसका अध्ययन हम इकाई 5 में करेगे । प्रथम गुणनखण्ड को त्यागने पर

अतः $$1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = 0$$

या $$\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0$$

समाकलन से

$$\log y + \log p = \log c$$

या $$py = c \Rightarrow p = c/y \qquad \text{.........(3)}$$

(1) और (3) से p का विलोपन करनें पर

$$x = \frac{y^2}{2c} - \frac{c^2}{2}$$

या $$y^2 = 2cx + c^3$$

जो कि समीकरण का अभीष्ट व्यापक हल है।

उदाहरण 2 : हल कीजिए :

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$$

हल :

x के पदो में हल करने पर

$$x = \frac{2y}{p} + \frac{p^2}{4y}$$

(1) का y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{2}{p} - \frac{2y}{p^2}\frac{dp}{dy} - \frac{p^2}{4y^2} + \frac{p}{2y}\frac{dp}{dy}$$

या $$\left(\frac{1}{p} - \frac{2y}{p^2}\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{p}{2y}\frac{dp}{dy} - \frac{p^2}{4y^2}\right) = 0$$

या $$\frac{1}{p}\left(1-\frac{2y}{p}\frac{dp}{dy}\right)-\frac{p^2}{4y^2}\left(1-\frac{2y}{p}\frac{dp}{dy}\right)=0$$

या $$\left(1-\frac{2y}{p}\frac{dp}{dy}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{p^2}{4y^2}\right)=0$$

द्वितीय खण्ड से विचित्र हल प्राप्त होगा, अतः इसको छोड़ने पर

अतः $$1-\frac{2y}{p}\frac{dp}{dy}=0$$

या $$\frac{dy}{y}-\frac{2dp}{p}=0$$

समाकलन करनें पर

$$\log y-2\log p+\log c=0$$

या $$p^2=cy \qquad \text{.........(3)}$$

(3) से p का मान (1) में रखने पर

$$x=\frac{2y}{\sqrt{cy}}+\frac{cy}{4y}$$

या $$x-\frac{c}{4}=2\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{c}}$$

या $$\frac{4x-c}{4}=\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{c}}$$

या $$\frac{(4x-c)^2}{16}=\frac{4y}{c}$$

या $$c(4x-c)^2=64y$$

जो कि दिए हुए समीकरण का अभीष्ट हल है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न :

हल कीजिए :

1. $p^2-9p+18=0$
2. $p^3(x+2y)+3p^2(x+y)+(y+2x)p=0$
3. $y=x+a\tan^{-1}p$
4. $y^2\log y=xyp+p^2$

विविध दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$p^3+2xp^2-y^2p^2-2xy^2p=0$$

हल :

दिये गये समीकरण को लिख सकते हैं-

$$p\left(p^2+2xp-y^2p-2xy^2\right)=0$$

या $$p\left(p+2x\right)\left(p-y^2\right)=0$$

$$\Rightarrow p=0 \text{ या } \Rightarrow p+2x=0 \text{ या } \Rightarrow p-y^2=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=0 \text{ या } \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-2x \text{ या } \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y^2$$

$$\Rightarrow y-c=0 \text{ या } y+x^2-c=0 \text{ या } xy+yc+1=0$$

अत : व्यापक हल है-

$$\left(y-c\right)\left(y+x^2-c\right)\left(xy+yc+1\right)=0$$

उदाहरण 2 : हल कीजिये

$$x^2p^2+xyp-6y^2=0$$

हल :

$$x^2p^2+xyp-6y^2=0$$

या $$\left(xp+3y\right)\left(xp-2y\right)=0$$

$$\Rightarrow xp+3y=0 \qquad \text{या } xp-2y=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{3y}{x}=0 \qquad \text{या } \frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y}+\frac{3y}{x}dx=0 \qquad \text{या } \frac{dy}{2y}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow yx^3=c \qquad \text{या } \frac{y}{x^2}=c$$

अत: हल है $\left(yx^3-c\right)\left(\frac{y}{x^2}-c\right)=0$

उदाहरण 3 : हल कीजिये-

$$p^2-\left(x^2+xy+y^2\right)p+xy\left(x+y\right)=0$$

हल :

$$p^2-\left(x^2+xy+y^2\right)p+xy\left(x+y\right)=0$$

या $$p^2-\left(x^2+xy+y^2\right)p+xy\left(x+y\right)=0$$

या $$\left(p-x\right)\left(p-y\right)\left\{p+\left(x+y\right)\right\}=0$$

$$\Rightarrow p-x=0 \text{ या } p-y=0 \text{ या } p+x+y=0$$

इन घटकों के हल है-

$$\frac{dy}{dx}-x=0 \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}+c \qquad ......(1)$$

$$\frac{dy}{dx}-y=0 \Rightarrow \log y=x+\log c \Rightarrow y=ce^x \qquad .....(2)$$

$$\frac{dy}{dx}+x+y=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}+y=-x$$

$$ye^{x}=-\int xe^{x}dx+c$$

$$c-(x-1)e^{x}$$

$$\Rightarrow y+x-1-ce^{x}=0 \qquad ....(3)$$

अत: (1), (2), (3) से अभीष्ट व्यापक हल

$$(2y-x^2-c)(y-ce^{x})(y+x-1-ce^{-x})=0$$

उदाहरण 4 : हल कीजिये-

$$\left(1-y^2-\frac{y^4}{x^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\frac{2y}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x^2}=0$$

हल :

$$\left(1-y^2-\frac{y^4}{x^2}\right)p^2-2\frac{y}{x}p+\frac{y^2}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow p^2-p^2y^2-\frac{y^4}{x^2}p^2-\frac{2y}{x}p+\frac{y^2}{x^2}=0$$

या $\left(p^2-\frac{2y}{x}p+\frac{y^2}{x^2}\right)=p^2y^2\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)$

या $\left(p-\frac{y}{x}\right)^2=p^2y^2\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)$

$$\Rightarrow (px-y)=\pm py\left(x^2-y^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow p\left[x\pm y\sqrt{x^2-y^2}\right]=y \qquad ....(1)$$

अत: (1) के घटक हल हैं-

या $\frac{dy}{dx}\left[x\pm y\sqrt{x^2-y^2}\right]-y=0$

या $\frac{dx}{dy}=\frac{x\pm y\sqrt{x^2-y^2}}{y}$

माना $x=vy \Rightarrow \frac{dx}{dy}=v+y\frac{dv}{dy}$

अत: $y\frac{dv}{dy}+v=v\pm\sqrt{v^2-1}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\pm\sqrt{v^2-1} \qquad \text{या} \qquad \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}}=\pm dy$$

समाकलन करने पर

$$\log\left[v+\sqrt{v^2-1}\right]=\pm y+c$$

या $$\log\left[\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}\right]=\pm y+c$$

उदाहरण 5 : हल कीजिये-

$$x-yp=ap^2$$

हल :

y के लिये हल करने पर

$$y=\frac{x}{p}-ap$$

(1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p}-\frac{x}{p^2}\frac{dp}{dx}-\frac{adp}{dx} \qquad \left[\because p=\frac{dy}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx}\left(ap^2+x\right)=p\left(1-p^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp}-\frac{x}{p\left(1-p^2\right)}=\frac{ap}{1+p^2} \qquad ....(2)$$

समीकरण (2) x में रैखिक है जिसका समाकलन गुणक

$$=e^{-\int\frac{dp}{p\left(1-p^2\right)}}=e^{-\log\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}}=\frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$$

अत: (2) का हल

$$\frac{x\sqrt{1-p^2}}{p}=\int\frac{ap}{1-p^2}.\frac{\sqrt{1-p^2}}{p}dp+c$$

या $$x=\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\left\{c+a\sin^{-1}p\right\} \qquad ....(3)$$

या $$yp+ap^2=\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\left\{c+a\sin^{-1}p\right\} \qquad \left[\because x=yp+ap^2\right]$$

या $$y=\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\left\{c+a\sin^{-1}p\right\}-ap \qquad ......(4)$$

(3), (4) संयुक्त रूप से अभीष्ट हल है।

उदाहरण : 6 हल कीजिये-

$$y=3x+\log p$$

हल :

दिये गये समीकरण को x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$p = 3 + \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}$$

या $\quad p(p-3) = \frac{dp}{dx}$ या $dx = \frac{dp}{p(p-3)}$

या $\quad dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{p-3} - \frac{1}{p}\right]dp$

समाकलन करने पर

$$x = \log\left(\frac{p-3}{p}\right)c_1 \quad \text{जहाँ } c_1 = 3\log k$$

$$\Rightarrow \frac{p-3}{p} = ce^{3x}$$

$c_1 = 1/c$

$$\Rightarrow p = \frac{3}{1-ce^{3x}}$$

n का यह मान दिये गये समीकरण में रखनें पर अभीष्ट हल,

$$y = 3x + \log\frac{3}{1-ce^{3x}}$$ होगा ।

उदाहरण 7 : हल कीजिये-

$$y - 2xp - f\left(xp^2\right) = 0$$

हल :

y के लिये हल करने पर

$$y = 2xp + f\left(xp^2\right) \qquad \text{.........(1)}$$

(1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + f'\left(xp^2\right)\left[2xp\frac{dp}{dx} + p^2\right]$$

या $\quad \left(p + 2x\frac{dp}{dx}\right)\left[1 + f'\left(xp^2\right)\right] = 0$

$$\Rightarrow p + 2x\frac{dp}{dx} = 0$$

या $\quad \frac{dp}{p} = -\frac{dx}{2x}$ ....(2)

(2) का समाकलन करने पर $p^2x = c$ ....(3)

p का मान (3) से (1) में रखने पर अभीष्ट हल,

$$y = 2\sqrt{cx} + f(c)$$

उदाहरण 8 : हल कीजिये-

$$p^3+\beta p^2=\alpha\left(y+\beta x\right)$$

हल :

y के लिये हल करने पर

$$\alpha y=-\alpha\beta x+\beta p^2+p^3$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर'

$$\alpha p=-\alpha\beta+2\beta p\frac{dp}{dx}+3p^2\frac{dp}{dx}$$

या $$\frac{dp}{dx}=\frac{\alpha\left(p+\beta\right)}{2\beta p+3p^2}$$

या $$\alpha dx=\frac{2\beta p+3p^2}{p+\beta}dp$$

$$\int\alpha dx=\int\left[3p-\beta+\frac{\beta}{p+\beta}\right]dp$$

$$\Rightarrow\alpha\ x=\frac{3}{2}p^2-\beta p+\beta^2\log(p+\beta)+c \qquad \text{.........(2)}$$

(1), (2) से

$$\Rightarrow\alpha y=-\beta\left[c+\frac{3}{2}p^2+\beta p+\beta^2\log\left(p+\beta\right)\right]+\beta p^2+p^3$$

(2), (3) संयुक्त रूप से अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 9 : हल कीजिये-

$$3px+6p^2y^2-y=0$$

हल:

x के लिये हल करने पर

$$3x=\frac{y}{p}-6py^2 \qquad \text{......(1)}$$

(1) का y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{3}{p}=\frac{1}{p}-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}-6y^2\frac{dp}{dy}-12py$$

या $$\left(1+6p^2y^2\right)\left(2p+y\frac{dp}{dy}\right)=0$$

$1+6p^2y^2$ गुणक को त्यागने पर जो कि विचित्र हल प्रदान करता है(विचित्र हल पर आगामी अध्याय में चर्चा की गई है), हम पाते हैं

$$2p+y\frac{dp}{dy}=0$$

$$\Rightarrow py^2=c \text{ या } p=c/y^2$$

p का उपरोक्त मान (1) में रखने पर

$$y = 3x\frac{c}{y^2} + cy^2\frac{c^2}{y^4}$$

$$\Rightarrow y^3 = 3cx + 6c^2$$

उदाहरण 10 : हल कीजिये-

$$p = \tan\left(x - \frac{p}{1+p^2}\right)$$

हल : x के लिये हल करने पर

$$x = \tan^{-1} p + \frac{p}{1+p} \qquad \text{......(1)}$$

y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{1+p^2}\frac{dp}{dy} + \frac{\left(1+p^2\right) - 2p^2}{\left(1+p^2\right)^2}\frac{dp}{dy}$$

या $$dy = \frac{2p}{\left(1+p^2\right)^2}dp$$

या $$y = c - \frac{1}{1+p^2} \qquad \text{.........(2)}$$

(1) (2) संयुक्त रूप से अभीष्ट हल है।

उदाहरण 11 : हल कीजिये -

$$y^2 \log y = xpy + p^2$$

हल :

x के लिये हल करने पर,

$$x = \frac{y \log y}{p} - \frac{p}{y} \qquad \text{........(1)}$$

(1) का y के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{p} = \left(1+\log y\right)\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dy}y\log y - \frac{1}{y}\frac{dp}{dy} + \frac{p}{y^2}$$

या $$\left(1+\frac{y^2}{p^2}\log y\right)\left(\frac{p}{y^2} - \frac{1}{y}\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

प्रथम गुणनखण्ड जो कि विचित्र हल देता है को त्यागने पर

$$\frac{p}{y^2} - \frac{1}{y}\frac{dp}{dy} = 0$$

या $$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$\log p = \log y + \log c \Rightarrow p = cy \qquad \text{........(2)}$$

(2) से p का मान (1) में रखनें पर, अभीष्ट हल होगा

$$y^2 \log y = xy(cy) + c^2 y^2$$

या $\log y = cx + c^2$

उदाहरण 12 : -हल कीजिये-

$$yp^2 - 2xp + y = 0$$

हल :

x के लिये हल करने पर

$$2x = yx + \frac{y}{p} \qquad ....(1)$$

y के सापेक्ष अवकलन से,

$$\frac{2}{p} = p + y\frac{dp}{dy} + \frac{1}{p} - \frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}$$

या $\left(y\dfrac{dp}{dy} + p\right)\left(1 - \dfrac{1}{p^2}\right) = 0$

$\left(1 - \dfrac{1}{p^2}\right)$ की उपेक्षा पर,

$$y\frac{dp}{dy} + p = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dy}{y} = 0$$

समाकलन पर $py = c$ या $p = \dfrac{c}{y}$

$p = \dfrac{c}{y}$ दी गयी समीकरण में रखने पर अभीष्ट हल

$$y\frac{c^2}{y^2} - 2x\frac{c}{y} + y = 0$$

या $y^2 = 2cx - c^2$

उदाहरण-13 हल कीजिये

$$x - y - p^2 = 0$$

हल : $x = y + p^2$

y के सापेक्ष अवकलन से,

$$\frac{1}{p} = 1 + 2p\frac{dp}{dy}$$

या $\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{1-p}{2p^2}$

या $\dfrac{2p^2 dp}{1-p} = dy \Rightarrow -2\left[p + 1 + \dfrac{1}{p-1}\right]dp = dy$

समाकलन पर -

$$2\left[\frac{p^2}{2}+p+\log(p-1)\right]=y+c$$

$$\Rightarrow -2\left[\frac{(x+y)}{2}+\sqrt{x-y}+\log\left(\sqrt{x-y}-1\right)\right]=y+c$$ अभीष्ट हल है।

4.5 सारांश

इस इकाई में आपने ऐसे अवकल समीकरणों का अध्ययन किया जो प्रथम कोटि के हैं परन्तु प्रथम घात के नहीं है। आपनें देखा कि इन समीकरणों को हल करने की निम्न स्थितियाँ बनती है-

(1) जब अवकल समीकरण को गुणनखण्डों में विभक्त करना संभव हो, जिसमें p प्रत्येक गुणनखण्ड में एक घाती है अथवा समीकरण p के लिये हल योग्य है।

(2) समीकरण में जब y एक घाती है तो y के लिए समीकरण को हल करके।

(3) समीकरण में जब x एक घाती है तो x के लिये समीकरण को हल करके।

4.6 शब्दावली

p के लिये हल योग्य	solvable for p
x के लिये हल योग्य	solvable for x
y के लिये हल योग्य	solvable for y
व्यापक हल	General Solution
पूर्ण हल	Complete solution
पूर्ण समाकलन	Complete integral

4.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. $(y-6x-c)(y-3x-c)=0$

2. $(y-c)(y+x-c)\left(xy+x^2+y^2-c\right)=0$

3. $x=c+\frac{a}{2}\left[\log(p-1)-\frac{1}{2}\log\left(1+p^2\right)-\tan^{-1}p\right]$

$y=c+\frac{a}{2}\left[\log(p-1)-\frac{1}{2}\log\left(1+p^2\right)+\tan^{-1}p\right]$

4. $\log y=cx+c^2$

4.8 अभ्यास प्रश्न

निम्नलिखित अवकल समीकरणों का हल कीजिये-

1. $p^2y-p(1+xy)+x=0$

[उत्तर : $\left(\frac{1}{2}y^2 - x - x\right)\left(y - \frac{1}{2}x^2 - c = 0\right)$]

2.$y = -px + x^4 p^2$

[उत्तर : $y = c^2 - \frac{c}{x}$]

3.$y = 2px + f\left(xp^2\right)$

[उत्तर : $y = 2\sqrt{cx} + f\left(c\right)$]

4.$y = 2px + p^2 y$

[उत्तर : $y^2 = c\left(2x + c\right)$]

इकाई 5: प्रथम कोटि एवं उच्च घात के अवकल समीकरण-2 (Differential Equation of First Order and Higher Degree-2)

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप

1. प्रथम कोटि के ऐसे अवकल समीकरणों के जो प्रथम घात के नहीं हैं के विशेष रूप लैग्रेंज समीकरण तथा क्लैरो समीकरण के स्वरूप तथा उनको हल करने की विधि से परिचित होगें।
2. विचित्र हल, बाह्य बिन्दु पथ की अवधारणा तथा उनको ज्ञात करने की विधि को जानेगें।

5.1 प्रस्तावना

आपने पूर्व इकाईयों में प्रथम कोटि के अवकलन समीकरणो (प्रथम घात के नहीं) को हल करनें की विधि का अध्ययन किया है। उपरोक्त समीकरणों के विशेष प्रकार लैग्रेंज एवं क्लैरो समीकरण हैं, जिनको हल करने की विशिष्ट विधि गणितीय दृष्टि से महत्वपूर्ण होने के साथ इस इकाई की केन्द्रीय विषय वस्तु विचित्र हल तथाबाह्य बिन्दु पथ को ज्ञात करने में भी उपयोगी होती है।

उपरोक्त प्रकार के समीकरणों के व्यापक हल में अवकल समीकरणों के कतिपय हल विद्‌यमान नहीं होते हैं। ऐसे अपवादी हल विचित्र हल तथा बाहय बिन्दु पथ कहलाते हैं।

5.2 लैग्रेंज समीकरण

$$y = x\phi(p) + F(p) \qquad ....(1)$$

रूप की समीकरण को लैग्रेंज समीकरण कहा जाता है जहाँ $\phi(p), F(p)\, p$ के फलन हैं। ध्यान दीजिये कि यहाँ $p = \frac{dy}{dx}$ है।

समीकरण (1) को हल करने हेतु (1) का x के सापेक्ष अवकलन करते हैं।

अत: $$p = \phi(p) + \left[x\phi'(p) + F'(p)\right]\frac{dp}{dx}$$

जहाँ $$\phi'(p) = \frac{d}{dp}\{\phi(p)\}, F'(p) = \frac{d}{dp}\{F(p)\}$$

या $$p - \phi(p) = \left[x\phi(p) + F'(p)\right]\frac{dp}{dx}$$

या $$\frac{dx}{dp} - \frac{\phi'(p)}{p-\phi(p)}x = \frac{F'(p)}{p-\phi(p)} \qquad ......(2)$$

समीकरण (2) x में रैखिक है, जिसे पूर्व अध्याय में वर्णित विधि से हल करते हैं। यहाँ ध्यान दीजिये कि यदि $\phi(p) = p$ हो तो $p - \phi(p) = 0$ होने से यह विधि अनुपयुक्त होती है।

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$y - 2px + p^2 = 0$$

हल :

$$y = 2px + p^2 \qquad ....(1)$$

$$= x\phi(p) + F(p) \qquad \left[\phi(p) = 2p, F(p) = -p^2\right]$$

समीकरण (1) लैग्रेंज समीकरण है अत: (1) का x के सापेक्ष अवकलन करनें पर

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$$

या $$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 2 \qquad .....(2)$$

समाकलन गुणक $= e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{2\log p} = p^2$

अत: (2) का हल है-

$$xp^2 = \int 2.p^2 dp + c$$

$$xp^2 = \frac{2}{3}p^3 + c$$

$$x = \frac{2}{3}p + cp^{-2} \qquad ....(3)$$

(3) से x का मान (1) में रखने पर

$$y = 2p\left(cp^{-2} + \frac{2}{3}p\right) - p^2$$

या $$y = \frac{2c}{p} + \frac{p^3}{3}$$ ....(4)

(3), (4) संयुक्त रूप से हल हैं।

उदाहरण 2 : हल कीजिये-

$$p^2 - py + x = 0$$

हल :

$$y = p + \frac{x}{p}$$ ....(1)

(1) लैग्रेंज समीकरण है।

(1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$p = \frac{dp}{dx} + \frac{1}{p} - \frac{x}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

या $$\frac{dx}{dp} + \frac{1}{p\left(p^2-1\right)}x = \frac{p}{p^2-1}$$ ....(2)

(2) x में रैखिक है

समाकलन गुणक $= e^{\int \frac{dp}{p\left(p^2-1\right)}} = e^{\log \frac{\sqrt{p^2-1}}{p}} = \frac{\sqrt{p^2-1}}{P}$

अतः (2) का हल है-

$$x\frac{\sqrt{p^2-1}}{p} = \int \frac{p}{p^2-1}\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}dp + c$$

$$= \int \frac{dp}{\sqrt{p^2-1}}$$

$$\frac{x\sqrt{p^2-1}}{P} = \log\left(p + \sqrt{p^2-1}\right) + c$$

$$\Rightarrow x = \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\left[\log\left(p + \sqrt{p^2-1}\right) + c\right]$$ ....(3)

x का मान (3) से (1) में रखने पर

$$y = p + \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\left[\log\left(p + \sqrt{p^2-1}\right) + c\right]$$ .....(4)

(3), (4) संयुक्त रूप से अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 3 : हल कीजिये-

$$y = x(1+p) + p^2$$

हल :

$y = x(1+p) + p^2$ (लैग्रेंज समीकरण) ......(1)

(1) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$p = x\left(\frac{dp}{dx}\right) + 1 + p + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$0 = 1 + \frac{dp}{dx}(x + 2p)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + x = -2p \quad ....(2)$$

समाकलन गुणक $e^{\int 1.dp} = e^p$

अत: (2) का हल होगा-

$xe^p = -2\int pe^p dp + c$

$= -2\left[pe^p - e^p\right] + c$

$$xe^p = -2(p-1)e^p + c \quad ....(3)$$

(3) से x का मान (1) में रखने पर

$$y = (1+p)\left[ce^{-p} - 2(p-1)\right] + p^2$$

$$= \left[(1+p)e^{-p} - p^2 + 2\right] \quad ....(4)$$

(3), (4) संयुक्त रूप से अभीष्ट हल है।

उदाहरण 4 : हल कीजिये-

$$4p^3 + 3px = y$$

हल :

$$y = 3px + 4p^3 \text{ (लैग्रेंज समीकरण)}$$

(1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$p = 3p + 3x\frac{dp}{dx} + 12p^2\frac{dp}{dx}$

$0 = 2p + 3(x + 4p^2)\frac{dp}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{-3(x+4p^2)}{2p} = -\frac{3}{2p}x - 6p$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{3}{2p}.x = -6p \quad ....(2)$$

समाकलन गुणक $= e^{\frac{3}{2}\int\frac{dp}{p}} = e^{\frac{3}{2}\log p} = p^{3/2}$

अतः $xp^{3/2} = -\int 6.p.p^{3/2}dp + c$

$$= -6.\frac{2}{7}p^{7/2} + c$$

$$= -\frac{12}{7}p^{7/2} + c$$

या $\quad x = -\frac{12}{7}p^{2} + cp^{-3/2}$ ....(3)

(3) से x का मान (1) में रखने पर

$$y = 3p\left[-\frac{12}{7}p^{2} + cp^{-3/2}\right] + 4p^{3}$$

$$= 3cp^{-1/2} - \frac{8}{7}p^{3}$$ ....(4)

(3), (4) संयुक्त रूप से हल हैं।

$$y = px + F(p)$$ ....(1)

5.3 क्लैरो समीकरण

रूप का समीकरण क्लैरो समीकरण कहलाता है। स्पष्ट है कि यह समीकरण लैग्रेंज समीकरण का विशिष्ट रूप है जहाँ $\phi(p) = p$ है।

पूर्व में आपने देखा कि समाकरण (1) को लैग्रेंज विधि से हल नहीं कर सकते हैं। (1) को हल करने के लिये x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + F'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$0 = \left[x + F'(p)\right]\frac{dp}{dx}$$

$\left[x + F'(p)\right] = 0$ की उपेक्षा पर

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

समाकलन पर, $p = c$ .....(2)

$p = c$ (1) में रखने पर

$$y = cx + F(c)$$

जो कि (1) का हल होता है।

टिप्पणी :

1. क्लैरो समीकरण का हल समीकरण में $p = c$ रखने पर प्राप्त होता है।
2. बहुधा कतिपय समीकरणों को उचित प्रतिस्थापन से क्लैरो रूप में परिवर्तित किया जा सकता है यद्यपि ये प्रतिस्थापन यादृच्छिक प्रयोगों से ही इप्रत किये जाते हैं।

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$$\left(y-px\right)\left(p-1\right)=p$$

हल :

उपरोक्त समीकरण

$$y-px=\frac{p}{p-1}$$

या $$y=px+\frac{p}{p-1} \qquad ....(1)$$

(1) क्लैरो रूप का है जिसका हल है-

$$y=cx+\frac{c}{c-1}$$

उदाहरण 2 : हल कीजिये-

$$\cos y\sin px-\cos px\sin y-p=0$$

हल : दिया गया समीकरण है-

$$\cos y\sin px-\cos px\sin y=p$$

या $$\sin\left(px-y\right)=p$$

या $$px-y=\sin^{-1}p$$

$$y=px-\sin^{-1}p$$

जो कि समीकरण क्लैरो रूप है अत:

(1) का हल है- $y=cx-\sin^{-1}c$

उदाहरण 3 हल कीजिये-

$$x^2p^2+py\left(2x+y\right)+y^2=0$$

$y=u, xy=v$ प्रतिस्थापन द्वारा

हल :

दिया है $\because y=u, xy=v$

अतएव $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{dy}{dx}=p$

$$\frac{dv}{dx}=x\frac{dy}{dx}+y=xp+y$$

अत: माना $P=\dfrac{dv}{du}=\dfrac{dv/dx}{du/dx}=\dfrac{xp+y}{p}$

$$\Rightarrow p=\frac{y}{P-x}$$

p का उपरोक्त मान दिये गये समीकरण में रखने पर

$$\frac{x^2y^2}{(P-x)^2}+\frac{y^2}{P-x}(2x+y)+y^2=0$$

या $\quad x^2+(P-x)(2x+y)+(P-x)^2=0$

या $\quad P^2-xy+Py=0$

या $\quad xy=P^2+Py$

या $\quad v=py+p^2$

$\quad v=Pu+p^2$ ....(1)

(1) क्लैरो समीकरण है जिसका हल होगा-

$$v=uc+c^2$$

या $\quad xy=yc+c^2 \qquad [\because y=u, v=xy]$

उदाहरण 4 : हल कीजिये-

$$p^2(x-a)=y+(y-x)p$$

हल :

$$p^2(x-a)=y+(y-x)p$$

या $\quad y(1+p)=px(1+p)-ap^2$

या $\quad y=px-\frac{ap^2}{1+c}$ (क्लैरो समीकरण)

अत: हल है- $y=cx-\frac{ac}{1+c}$

उदाहरण 5 : हल कीजिये-

$x+y=u, xy=v$ प्रतिस्थापन से हल कीजिये-

$$(px^2+y^2)(px+y)=(p+1)^2$$

हल : $\because x+y=u, xy=v$

$$\Rightarrow 1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}; x\frac{dy}{dx}+y=\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow 1+p=\frac{du}{dx}; xp+y=\frac{dv}{dx}$$

$\Rightarrow$ माना $P=\frac{dv}{dx}=\frac{dv/dx}{du/dx}=\frac{xp+y}{1+p}$ ......(1)

अत: दिया गया समीकरण लिखा जा सकता है

$$[(px+y)(x+y)-xy(p+1)](px+y)=(p+1)^2$$

या $\quad \left[\frac{px+y}{p+1}(x+y)-xy\right]\frac{(px+y)}{p+1}=1$

या $\left[P(x+y)-xy\right]P=1$

या $\left[Pu-v\right]P=1 \Rightarrow v=Pu-\frac{1}{p}$ (क्लैरो समीकरण)

अतः हल है $v=uc-\frac{1}{c}$ या $xy=c(x+y)-\frac{1}{c}$

उदाहरण 6 : हल कीजिये-

$axyp^2+\left(x^2-ay^2-b\right)p-xy=0$ को हल कीजिये-

$\left[x^2=u, y^2=v\right]$

हल :

$\left[\because x^2=u, y^2=v\right]$

$$\Rightarrow 2x=\frac{du}{dx}, 2y=\frac{dv}{dy}=\frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}=2x, \frac{dv}{dx}=2py$$

अब माना $P=\frac{dv}{du}=\frac{dv/dx}{du/dx}=\frac{2py}{2x}=\frac{py}{x}$

$$\Rightarrow p=\sqrt{\frac{u}{v}}P, \quad P=p\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$$

अतः दिया गया समीकरण बनता है-

$$a\sqrt{uv}\frac{u}{v}P^2+(u-av-b)\sqrt{\frac{u}{v}}-\sqrt{uv}=0$$

सरल करने पर, $v(1+aP)=uP(aP+1)-bP$

या $v=uP-\frac{bP}{1+aP}$ ....(1)

(1) क्लैरो रूप का है जिसका हल $P=c$ रखने पर मिलेगा अतः

$$v=uc-\frac{bc}{1+ac}$$

या $y^2=x^2c-\frac{bc}{1+ac}$ अभीष्ट हल है।

5.4 विचित्र हल एवं बाह्य बिन्दु पथ

5.4.1 विचित्र हल.

अवकल समीकरणों के हल में बहुधा ऐसा विशिष्ट हल विद्यमान होता है जो अवकल समीकरण को तो संतुष्ट करता है परन्तु इस हल को समीकरण के व्यापक हल में विद्यमान स्वेच्छ नियतांको को विशिष्ट मान देकर प्राप्त नहीं किया जा सकता है। ऐसे

हल को विचित्र हल कहते हैं। सरल शब्दों में कहें तो विचित्र हल वह हल है जो अवकल समीकरण के व्यापक हल में विद्‌यमान नहीं होता है। निम्नलिखित उदाहरण से यह और स्पष्ट होगा-

समीकरण

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{a}{dy/dx} = xp + \frac{a}{p} \text{ जहाँ } p = \frac{dy}{dx} \qquad \text{........(1)}$$

पर विचार करते हैं। (1) क्लैरो समीकरण है जिसका हल

$$y = cx + \frac{a}{c} \text{ होगा, जहाँ } c \text{ स्वेच्छ नियतांक है।} \qquad \text{.......(2)}$$

ध्यान दीजिये कि c के विभिन्न मानों के लिये (2), (1) के हल हैं तथा (2) परवलय

$$y^2 = 4ax \qquad \text{......(3)}$$

की स्पर्श रेखायें हैं। परवलय (2) के बिन्दु $p(x, y)$ पर स्पर्श रेखा (2), परवलय (3) की दिशा समान है अत: $p(x, y)$ बिन्दु पर (2), (3) के $\frac{dy}{dx}, x, y$ के मान समान हैं इसका तात्पर्य यह है कि $y^2 = 4ax$ अवकल समीकरण (1) का हल होना चाहिये। परन्तु स्पष्टत : यह हल (2) में विद्‌यमान नहीं है। अर्थात $y^2 = 4ax$ (1) का विचित्र हल है।

अतएव, अवकल समीकरणों के व्यापक हल द्‌वारा प्रदर्शित वक्रों के कुल (family of curves) का अन्वालोप ही विचित्र हल होता है।

विविक्तिकर :

माना समीकरण $f(x, y, p) = 0$ .....(1)

का हल $\phi(x, y, c) = 0$ .....(2)

है। तब $p-$विविक्तिकर समीकरणों (1) तथा $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$ में से p के से प्राप्त होता है इसी प्रकार $c-$विविक्तिकर समीकरणों (2) तथा $\frac{\partial \phi}{\partial c} = 0$ में से c विलोपन से होता है।

यहाँ ध्यान दीजिये कि विचित्र हल दोनों विविक्तिकरो में विद्‌यमान होता है परन्तु इन विविक्तिकरों में कुछ ऐसे गुणनखण्ड भी विद्‌यमान होते हैं जो कि समाकल के अन्य बिन्दु को निरूपित करते हैं। परन्तु सामान्यतया ये बिन्दु पथ अवकल समीकरण को संतुष्ट नहीं करते हैं : इन्हें (बाह्‌य) बिन्दुपथ कहा जाता है।

5.4.2 बाह्‌य बिन्दु पथ के प्रकार

(1) स्पर्श बिन्दु पथ (Taclocus)

माना बिन्दु $p(x, y)$ अवकल समीकरण $f(x, y, p)=0$ के $p-$विविक्तिकर को संतुष्ट करता है तब बिन्दु P पर p के दो मान समान होते हैं। वस्तुत: p के ये दो समान मान, अवकल समीकरण के व्यापक हल द्वारा प्रदर्शित वक्रो के कुल उन व्रको के संगत होते हैं जो अक्रमागत (non con sec utive) हैं तथा
परस्पर बिन्दु $p(x, y)$ पर स्पर्श करते हैं। तात्पर्य यह है कि $p(x, y)$ वक्र कुल के दो अक्रमागत वक्रों का स्पर्श बिन्दु है। p के बिन्दु पथ को वक्र-कुल का स्पर्श बिन्दु पथ कहते हैं।

टिप्पणी : स्पर्श बिन्दु पथ $p-$विविक्तिकर का एक गुणनखण्ड होता है परन्तु यह $c-$विविक्तिकर में निहित नहीं होता है। इसका कारण यह है कि स्पर्शरत (वक्र) अक्रमागत होने से, उनमें c के मान असमान होते हैं।

नोड पथ (Node locus) : नोड पथ उन बिन्दुओं का बिन्दु पथ होता है जो वक्र कुल दे क्रमागत वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु होते हैं। $c-$विविक्तिकर का सम्बंध ऐसे बिन्दुओं का बिन्दुपथ है जिनके लिये c के मान समान होते हैं। नोड पथ को व्यक्त करने वाला समीकरण $N(x, y)=0$ $c-$विविक्तिकर का भाग होता है परन्तु यह $p-$विविक्तिकर में निहित नहीं होता है। यहाँ यह उल्लेखनीय है कि नोड पथ $N(x, y)=0$ अवकल समीकरण को सामान्यत: संतुष्ट नहीं करता है। यदि अपवाद स्वरूप यह अवकल समीकरण को संतुष्ट करे तो उस स्थिति में नोड पथ वस्तुत: अन्वालोप ही होता है।

उभयाग्र पथ (Cusp locus): यह नोड पथ की सीमान्त अवस्था है। यदि $S(x, y)=0$ उभयाग्र पथ को व्यक्त करे तो यह p तथा c विविक्तिकरो में उपस्थित होता है। नोड पथ की भांति उभयाग्र पथ भी अवकल समीकरण को सामान्यत: संतुष्ट नहीं करता है। अपवाद की स्थिति में उभयाग्र पथ, अन्वालोप होगा।

5.4.3 विचित्र हल एवं बाह्य बिन्दु पथ ज्ञात करने की कार्य विधि

अवकल समीकरण का विचित्र हल $p-$विविक्तकर $c-$विविक्तिकर दोनों से प्राप्त किया जा सकता है। $p-$विविक्तिकर अवकल समीकरण से सीधे प्राप्त किया जाता है।
माना $f(x, y, p)=0$ ......(1)
दिया गया समीकरण है।

$$\frac{\partial f}{\partial p}=0 \qquad .....(2)$$

से p के विलोपन से प्राप्त बिन्दु पथ $\psi_1(x, y)=0$ में विचित्र हल(अन्वालोप) विद्यमान हो सकता है। यहाँ यह उल्लेखनीय है कि यह बिन्दुपथ विचित्र हल तभी होगा जबकि यह अवकल समीकरण को संतुष्ट करे।

$\psi_1(x,y)=0$ को $p-$विविक्तिकर कहते हैं। पुन: विचित्र हल को $c-$विविक्तिकर से प्राप्त करने के लिये अवकल समीकरण (1) का व्यापक हल

$$\phi(x,y,c)=0 \qquad ....(3)$$

प्राप्त करते हैं। समीकरण (3) वस्तुत: प्राचल c के लिये वक्रों के कुल निरूपित करता है। समीकरण (3) का अन्वालोप (3) एवं

$$\frac{\partial\phi}{\partial c}=0 \qquad ....(4)$$

से c के विलोपन से प्राप्त सम्बंध $\Psi_2(x,y)=0$ में अन्तनीर्हित होता है। $\Psi_2(x,y)=0$ को $c-$विविक्तिकर कहते हैं।

(यहाँ उल्लेखनीय है कि $c-$विविक्तिकर $\Psi_2(x,y)=0$ में अन्य बाह्य बिन्दु पथ भी शामिल हो सकते हैं जो समान्यत : अवकल समीकरण को संतुष्ट नहीं करते हैं अत: $\Psi_2(x,y)=0$ विचित्र हल होगा यदि यह अवकल समीकरण को संतुष्ट करे।

उपरोक्त विवेचन को साररूप में निम्न प्रकार क्रियान्वित कर सकते हैं-

$$p-\text{विविक्तिकर} \equiv ET^2(C) \qquad .....[A]$$

$$c-\text{विविक्तिकर} \equiv EN^2(C^3) \qquad ....[B]$$

यहाँ E,T,C एवं N क्रमश: विचित्र हल (अन्वालोप), स्पर्श बिन्दु पथ, C उभयाग्र बिन्दु पथ तथा N नोड बिन्दु पथ को निरूपित करते हैं। सूत्रों (A) एवं (B) को रखना श्रेयस्कर हैं।

इसके अतिरिक्त प्रश्न हल करते समय निम्न बिन्दु स्मरणीय हैं-

1. यदि प्रश्न में केवल विचित्र हल ज्ञात करना हो तो $p-$ विविक्तिकर को उपयोग करना चाहिये। जब व्यापक हल और विचित्र हल दोनों ज्ञात करने हों तो $c-$ विविक्तिकर को उपयोग करना चाहिये।
2. यदि अवकल समीकरण को ऐसे गुणनखण्डों में विभक्त करना संभव हो जिसमें प्रत्येक गुणनखण्ड में p एकघाती हो तो ऐसी स्थिति में विचित्र हल उपस्थित नहीं होता है। इसके अलावा विचित्र हल अनुपस्थित होता है यदि अवकल समीकरण p में घात का हो।
3. अवकल समीकरण को तभी पूर्णतया हल (completely solved) किया हुआ माना जाता है जबकि उसके व्यापक हल के साथ विचित्र हल भी ज्ञात जाये ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न!

1. समीकरण का विचित्र हल है-

   $(i)\, y-4x=0 \quad (ii)\, y^2=4x \quad (iii)\, x^2+y^2=6 \quad (iv)\, y^2=8x$
2. $c-$विविक्तिकर में उपस्थित होते हैं-

   (i) अन्वालोप, स्पर्श बिन्दु पथ, उभयाग्र पथ

(ii) अन्वालोप, उभयाग्र पथ परन्तु नोड पथ नहीं

(iii) केवल स्पर्श बिन्दु पथ

(iv) नोड पथ, अन्वालोप, उभयाग्र पथ

3. हल कीजिये

$$(i)\, xp^2 - py + 2 = 0$$

$$(ii)\, p = \log(px - y)$$

$$(iii)\, (px - y)(x - yp) = 2p$$ [प्रतिस्थापन $x^2 = u, y^2 = v$]

$$(iv)\, (y - px)^2 = a^2(1 + p^2)$$

$$(v)\, xy(y - px) = x + py$$ [प्रतिस्थापन $x^2 = u, y^2 = v$]

$$(vi)\, x^2(y - px) = p^2 y$$

उदाहरण 1 : हल कीजिये-

$4xp^2 = (3x - a)^2$ को पूर्णत : हल कीजिये।

हल :

दिया गया समीकरण है-

$$p = \pm \frac{3x - a}{2\sqrt{x}} \qquad \text{.......(1)}$$

या $\quad dy = \pm \dfrac{3x - a}{2\sqrt{x}} dx \qquad \left[\because p = \dfrac{dy}{dx}\right]$

समाकलन करने पर, $y = \pm\left[x^{3/2} - a\sqrt{x}\right] + c$

$$\Rightarrow (y - c)^2 = \left(x^{3/2} - a\sqrt{x}\right)^2$$

$$= x^3 + a^2x - 2ax^2$$

$$= x\left(x^2 + a^2 - 2ax\right)$$

$$= x(x - a)^2$$

अत: $(y - c)^2 = x(x - a)^2$

(1) का पूर्ण हल है

अब (2) से

$$y^2 + c^2 - 2cy = x(x-a)^2$$

या $$c^2 - 2cy + \left\{y^2 - x(x-a)^2\right\} = 0 \qquad .....(3)$$

अत: c विविक्तिकर $\left["B^2 - 4C"\right]$

$$4y^2 - 4\left\{y^2 - x(x-a)^2\right\} = 0$$

या $$x(x-a)^2 = 0 \qquad .....(4)$$

अब दिया गया समीकरण

$$4xp^2 - (3x-a)^2 = 0$$

अत: $p-$विविक्तिकर

$$4x(3x-a)^2 = 0$$

या $$x(3x-a)^2 = 0 \qquad ....(5)$$

अब सूत्र (A),(B) से

$$x(3x-a)^2 \equiv ET^2C$$

$$x(x-a)^2 \equiv ET^2C^3$$

स्पष्ट है कि $x=0$ विचित्र हल है क्योंकि x दोनों विविक्तिकरो में केवल एक बार आया है। इसी प्रकार $(3x-a)=0$ स्पर्श बिन्दु पथ है तथा $(x-a)=0$ पात बिन्दु पथ है।

उदारहण 2 : हल कीजिये-

$$p^2x^2 + (2x+y)py + y^2 = 0$$

[प्रतिस्थापन $xy = v, y = u$]

हल :

चूंकि $y = u, xy = v \qquad ....(1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}, x\frac{dy}{dx} + y = \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow P = \frac{dv}{du} = \frac{dv/dx}{du/dx} = \frac{xp+y}{p} \qquad \left[\because \frac{dy}{dx} = p\right]$$

$$\Rightarrow p = \frac{y}{(P-x)} \qquad ....(2)$$

(2) को दिये गये समीकरण में रखने पर

$$x^2\left(\frac{y}{P-x}\right)^2 + (2x+y)y\left\{\frac{y}{P-x}\right\} + y^2 = 0$$

या $$x^2 + (P-x)(2x+y) + (P-x)^2 = 0$$

या $\quad Py - xy + P^2 = 0$

या $\quad Pu - v + P^2 = 0 \qquad [\because y = u, xy = v]$

या $\quad v = Pu + P^2$ (क्लैरो रूप) ....(3)

अत: हल है $v = uc + c^2$

या $\quad xy = yc + c^2$ ....(4)

(4) से $c^2 + yc - xy = 0$

$c -$ विविक्तिकर $y^2 + 4xy = 0$

या $\quad y(y + 4x) = 0$ ......(5)

(1) से $p -$ विविक्तिकर

$$y^2(2x + y)^2 - 4x^2y^2 = 0$$

या $\quad y.y^2(y + 4x) = 0$ ....(6)

(5), (6) से स्पष्ट होता है कि रैखिक गुणनखण्ड $y = 0, y + 4x = 0$ दोनों विविक्तिकरो में विद्‌यमान है अत: $y = 0, y + 4x = 0$ विचित्र हल हैं।

उदाहरण 3 : हल कीजिये-

$$(a^2 - x^2)p^2 + 2xyp + (b^2 - y^2) = 0$$

हल : दिया गया समीकरण है-

$$p^2x^2 - 2pxy + y^2 = a^2p^2 + b^2 \qquad ......(1)$$

या $\quad (px - y)^2 = a^2p^2 + b^2$

$$y = px \pm \sqrt{a^2p^2 + b^2} \qquad ......(2)$$

(2) क्लैरो रूप का है अत. इसका हल होगा-

$$y = cx \pm \sqrt{a^2c^2 + b^2}$$

अब $p -$ विविक्तिकरो निम्न प्रकार है-

$$4x^2y^2 - 4(a^2 - x^2)(b^2 - y^2) = 0$$

या $\quad x^2y^2 - a^2b^2 + b^2x^2 + a^2y^2 - x^2y^2 = 0$

या $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ जो कि विचित्र हल हैं।

$c -$ विविक्तिकर से उपरोक्त विचित्र हल को स्वयं प्राप्त करके देखें।

उदाहरण : 4 हल कीजिये-

प्रतिस्थापन $x^2 = u, y^2 = v$ से समीकरण

$xyp^2 - (x^2 + y^2 - 1)p + xy = 0$ को हल कीजिये

हल :

दिया गया समीकरण है-

$$xyp^2-\left(x^2+y^2-1\right)p+xy=0 \qquad \text{........(1)}$$

$$\because x^2=u, y^2=v$$

$$\Rightarrow 2x=\frac{du}{dx}, 2y\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx} \text{ या } \frac{dv}{dx}=2yp$$

अब माना $P=\frac{dv}{du}=\frac{dv/dx}{du/dx}=\frac{2yp}{2x}=\frac{yp}{x}$

$$\Rightarrow p=\frac{xP}{y}=\sqrt{\frac{u}{v}}.P$$

p का उपरोक्त मान (1) में रखने पर,

$$xy\frac{x^2P^2}{Y^2}-\left(x^2+y^2-1\right)\frac{xP}{y}+xy=0$$

या $\quad x^2P^2-\left(x^2+y^2-1\right)P+y^2=0$

$$uP^2-\left(u+v-1\right)P+v=0 \qquad \text{........(2)}$$

या $\quad u\left(P^2-P\right)-v\left(P-1\right)+P=0$

या $\quad uP\left(P-1\right)-v\left(P-1\right)+P=0$

या $\quad v=uP+\frac{P}{P-1}$ (क्लैरो रूप) ....(3)

(3) का हल होगा-

$$v=uc+\frac{c}{c-1}$$

या $\quad y^2=cx^2+\frac{c}{c-1}$

या $\quad c^2x^2-\left(x^2+y^2-1\right)c+y^2=0$ ....(4)

(4) से $c-$विविक्तिकर $\left(EN^2C^3\right)$

या $\quad =\left(x^2+y^2-1\right)-4x^2y^2=0$

या $\quad \left[x^2+y^2-1-2xy\right]\left[x^2+y^2-1+2xy\right]=0$

या $\quad \left[\left(x-y\right)^2-1\right]\left[\left(x+y\right)^2-1\right]=0$

या $\quad \left(x-y-1\right)\left(x-y+1\right)\left(x+y-1\right)\left(x+y+1\right)=0$ ....(6)

इसी प्रकार $p-$विविक्तिकर $\left(ET^2C\right)$

$=\left(x^2-y^2-1\right)^2-4x^2y^2=0$ ......(7)

चूंकि (5), (7) समान हैं अत: (6) विचित्र हल देता है।

उदाहरण-5 : निम्नलिखित समीकरण का व्यापक हल, विचित्र हल तथा बाहय बिन्दु पथ ज्ञात कीजिये-

$$p^2x^3 + x2yp + l^3 = 0$$

हल :

दिये गये समीकरण में चूंकि y एकघाती है अत: y के लिये हल करने पर

$$y = -px - \frac{l^3}{px^2} \qquad \text{....(1)}$$

(1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = p = -p - x\frac{dp}{dx} - l^3\left[-\frac{1}{x^2p^2}\frac{dp}{dx} - \frac{2}{x^3p}\right]$$

सरल करने पर

$$\left[2p + x\frac{dp}{dx}\right]\left[1 - \frac{l^3}{p^2x^3}\right] = 0$$

द्वितीय गुणनखण्ड को त्यागने पर

$$2p + x\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -2\frac{dx}{x} \qquad \text{.......(2)}$$

(2) का समाकलन करने पर,

$$\log p = -2\log x + \log c,$$ जहाँ $\log c$ नियतांक है

या $$p = \frac{c}{x^2} \qquad \text{......(3)}$$

दिये गये समीकरण एवं (3) से p का विलोपन करने पर

$$\left(\frac{c^2}{x^4}\right)x^3 + x^2y\left(\frac{c}{x^2}\right) + l^3 = 0$$

या $$c^2 + cxy + l^3x = 0 \qquad \text{.......(4)}$$

समीकरण (4) अभीष्ट व्यापक हल है।

विचित्र हल एवं बाहय बिन्दु पथ:

समीकरण (4) से $c-$विविक्तकर-

$$(xy)^2 - 4l^3x = 0$$

$$\Rightarrow x\left[xy^2 - 4l^3\right] = 0 \qquad \text{........(5)}$$

पुन: समीकरण (1) से विविक्तिकर-

$$\left(x^2y\right)^2 - 4x^3l^3 = 0$$

$$\Rightarrow x^3\left[xy^2 - 4l^3\right] = 0$$

या $$x.x^2\left[xy^2 - 4l^3\right] = 0 \qquad \text{.......(6)}$$

(5), (6) से स्पष्ट है कि $x\left[xy^2-4\ell^3\right]=0$

अर्थात $x=0, xy^2-4l^3=0$ विचित्र हल है।

उदाहरण 6 : पूर्णत: हल कीजिये-

$$xp^2-2yp+4x=0 \qquad \text{जहाँ } p=\frac{dy}{dx}$$

हल : दिया है : $xp^2-2yp+4x=0$ ......(1)

(1) p में द्विघाती है अत. $p-$वितिक्तिकर होगा

$$(-2y)^2-4(x)(4x)=0$$

या $$y^2=4x^2$$ ....(2)

अब हम देखते हैं कि (2), समीकरण (1) को संतुष्ट करता है अत: यह (1) विचित्र हल हैं।उपरोक्त विचित्र हल को $c-$विविक्तिकर से भी प्राप्त कर सकते हैं।

व्यापक हल : समीकरण (1) से

$$y=\frac{xp}{2}+\frac{2x}{p}$$ ....(3)

(3) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{p}{2}+\frac{x}{dx}\frac{dp}{dx}+\frac{2}{p}-\frac{2x}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

या $$\left(x\frac{dp}{dx}-p\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{p^2}\right)=0$$

द्वितिय गुणनखण्ड को त्यागने पर

$$x\frac{dp}{dx}-p=0 \Rightarrow \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$$

समाकलन से $\log p=\log x+\log c$

$$\Rightarrow p=xc$$ ....(4)

(1), (4) से p का विलोपन करने पर,

$$x\left(x^2c^2\right)-2yxc+4x=0$$

या $$c^2x^2-2cy+4=0$$

(5) अभीष्ट व्यापक हल है।

विचित्र हल : (5) से $c-$विविक्तिकर- $\left["B^2-4AC=0"\right]$

$$(-2y)^2-4x^2.(4)=0$$

या $$y^2=4x$$

स्पष्ट है कि p एवं $c-$विविक्तिकरों से प्राप्त विचित्र हल समान हैं।

उदाहरण - 7 : $y^2+y^2p^2-4=0$ के हलों की व्याख्या कीजिये

जहाँ $p=\dfrac{dy}{dx}$

हल : दिया गया समीकरण है-

$$y^2p^2+y^2-4=0 \qquad ....(1)$$

$$\Rightarrow p=\frac{\sqrt{4-y^2}}{y}$$

या $$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{4-y^2}}{y} \qquad \left[\because p=\frac{dy}{dx}\right]$$

$$\Rightarrow \int\frac{ydy}{\sqrt{4-y^2}}=\int dx$$

$$\Rightarrow -\sqrt{4-y^2}=x+c$$

$$\Rightarrow (x+c)^2=4-y^2$$

$$\Rightarrow c^2+2cx+\left(x^2+y^2-4\right) \qquad ....(2)$$

समीकरण (2), समीकरण (1) का व्यापक हल है।

$p-$विविक्तिकर : (1) से $p-$विविक्तिकर होगा

$$(0)^2-4.y^2\left(y^2-4\right)=0$$

$$\Rightarrow y^2\left(y^2-4\right)=0$$

$c-$विविक्तिकर : समीकरण (2) से $c-$विविक्तिकर

$$(2x)^2-4\left(x^2+y^2-4\right)=0$$

या $$4x^2-4x^2+4\left(y^2-4\right)=0$$

या $$\left(y^2-4\right)=0 \qquad ....(4)$$

स्मरण कीजिये

$p-$विविक्तिकर $\equiv ET^2C$ ....(5)

$c-$विविक्तिकर $\equiv EN^2C^3$ ....(6)

(3), (4) से स्पष्ट है कि $\left(y^2-4\right)=0$ (5),(6) में एक बार आया है अत : $\left(y^2-4\right)=0$ विचित्र हल

(अन्वालोप E) है अत: $\left(y^2-4\right)=0$ या $y-2=0, y+2=0$ विचित्र हल हैं।

पुन: $y=0$, $p-$विविक्तिकर में तो दो बार आया है परन्तु $c-$ विविक्तिकर में नहीं है अत: $y=0$ स्पर्श बिन्दु पथ है।

उदाहरण 8 : समीकरण

$$\sin\left(x\frac{dy}{dx}\right)\cos y=\cos\left(x\frac{dy}{dx}\right)\sin y+\frac{dy}{dx}$$

के हल की विवेचना कीजिये।

हल :

$\because p=\frac{dy}{dx}$ अत दिया गया समीकरण है-

$$\sin(xp)\cos y=\cos(xp)\sin y+p$$

या $\sin(xp)\cos y-\cos(xp)\sin y=p$

या $\sin(xp-y)=p$

या $xp-y=\sin^{-1}p$

या $y=xp-\sin^{-1}p$ ....(1)

समीकरण (1) से क्लैरो रूप का है जिसका हल होगा

$y=xc-\sin^{-1}c$ ....(3)

(1) एवं (3) से स्पष्ट है कि $p-$विविक्तिकर तथा $c-$विविक्तिकर समान होगें। अतएव किसी को भी प्रयोग लिया जा सकता है।

(3) का c के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$0=x-\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\quad\left[\because\frac{d}{dc}\left(\sin^{-1}c\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\right]$$

$\Rightarrow x^2=\frac{1}{1-c^2}$ या $c=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ......(4)

c का उपरोक्त मान (3) में रखने पर, अभीष्ट विचित्र हल होगा-

$$y=\sqrt{x^2-1}-\sin^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$y=\sqrt{x^2-1}-\sin^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

उदाहरण 9 : $p^3-4pxy+8y^2=0$ को पूर्णत: हल कीजिये

हल :

माना $y=t^2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2t\frac{dt}{dx}$

$\Rightarrow p=2tP$ जहाँ $p=\frac{dy}{dx},P=\frac{dt}{dx}$

अत: दिया गया समीकरण होगा-

$$(2tP)^3-4xy(2tP)+8y^2=0$$

या $8t^3P^3-8xPt^3+8t^4\quad\left[\because y=t^2\right]$

या $\quad t = xP - P^3$ ....(1)

(1) क्लैरो समीकरण है जिसका हल होगा

$$t = xc - c^3$$

या $\quad \sqrt{y} = xc - c^3$

या $\quad y = c^2\left(x - c^2\right)^2$

या $\quad y = \left(x - c_1\right)^2 c_1$ (जहाँ $c_1 = c^2$) ....(2),

(2) (1) का व्यापक हल है।

विचित्र हल : (2) को c_1,के सापेक्ष अवकलित करने पर

$c-$विविक्तिकर :

$$0 = 2\left(x - c_1\right)c_1 + \left(x - c_1\right)^2$$

या $\quad \left(x - c_1\right)\left(x - 3c_1\right) = 0$

या $\quad \Rightarrow x = c_1$ या $\Rightarrow x = 3c_1 \;\; \Rightarrow c_1 = x/3$

$x = c_1$ (2) में रखने पर, $y = 0$ ......(3)

$x = 3c_1$ (2) में रखने पर,

$$y = \left(3c_1 - c_1\right)^2 c_1 = 4c_1^3 = 4\frac{x^3}{27}$$

या $\quad 27y - 4x^3 = 0$ ....(4)

अत: $c-$विविक्तिकर "EN^2C^3"

$$"EN^2C^3" \equiv y\left(27y - 4x^3\right) = 0$$

पुन: $p-$विविक्तिकर :

दिये गये समीकरण

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0 \qquad \text{........(6)}$$

को p के सापेक्ष अवकलित करने पर,

$$3p^2 - 4xy = 0 \qquad \text{.......(7)}$$

अत: (6), (7) से p का विलोपन करने पर $p-$विविक्तिकर होगा-

$$y\left(27y - 4x^3\right) = 0 \qquad \text{.......(8)}$$

चूंकि $y = 0, 27y - 4x^3 = 0$ दोनो गुणनखण्ड p तथा c विविक्तिकरो में केवल एक बार विद्यमान हुये हैं अत ये विचित्र हल हैं।

5.5 सारांश

आपने इस इकाई में देखा कि प्रथम कोटि (परन्तु प्रथम घात के नहीं) अवकल समीकरणों के व्यापक हल में विचित्र हल तथा बाहय बिन्दु पथ हल अनुपस्थित होते हैं

जिन्हें $p-$विविक्तिकर तथा $c-$विविक्तिकर से प्राप्त किया जाता है। उपरोक्त हलों की प्राप्ति लैग्रेंज तथा क्लैरो रूप में दी गयी समीकरणों की स्थिति में अपेक्षाकृत सरल होती है।

5.6 शब्दावली

लैग्रेंज समीकरण	Lagrange's equation
क्लैरो समीकरण	Claraut's equation
व्यापक हल	General solution
विचित्र हल	Singular solution
बाहय बिन्दुपथं	Extraneous loci
विविक्तिकर	Discri min ant
स्पर्श बिन्दु पथ	Tac locus
नोड बिन्दु पथ	Node locus
उभयाग्र बिन्दु पथ	Cusp locus

5.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न-1

1. (iv) 2. (iv)

2. $(i)\, y = cx + \frac{2}{c}$ $(ii)\, y = cx - e^{o}$ $(iii)\, y^2 = cx^2 - \left[\frac{2c}{1-c}\right]$

$(iv)\,(y-cx)^2 = a^2\left(1+c^2\right)$ $(v)\, y^2 - 1 = c\left(x^2+1\right)$ $(vi)\, y^2 = cx^2 + c^2$

5.8 अभ्यास प्रश्न

1. हल कीजिये-

$(i)\, y - px = \frac{yp^2}{x^2}$ [प्रतिस्थापन $x^2 = u, y^2 = v$]

उत्तर : $y^2 = cx^2 + c$

$(ii)\, y = 2xp - ayp^2$ [प्रतिस्थापन $y^2 = v$]

उत्तर : $y^2 = cx - \frac{ac^2}{4}$

$(iii)\, y = p^2 + (1+x)\,p$ उत्तर : $y = c(1+p)e^{-p} - p^2 + 2$

$(iv)\, y = px + \frac{a}{p}$ उत्तर : $y = cx + \frac{a}{c}$

$(v)\, y^2 + x^2p^2 - 2xyp = 0$ उत्तर : $y = cx \pm \frac{2}{c}$

$(vi)\, y - 2px - y^2p^3 = 0$ [प्रतिस्थापन $y^2 = v$]

उत्तर : $y^2 = cx + \frac{c^3}{8}$

$(vii)\left(px^2+y^2\right)\left(px+y\right)=\left(p+1\right)$ [प्रतिस्थापन $x+y=u$]

उत्तर : $c^2\left(x+y\right)-cxy-1=0$

$(viii) e^{2x}\left(p-1\right)+p^3e^{2y}=0$ [प्रतिस्थापन $e^x=u, e^y=v$]

उत्तर : $e^y = ce^x + c^3$

2. निम्न समीकरणों के विचित्र हल एवं बाह्य बिन्दु पथ, यदि विद्यमान हैं तो ज्ञात कीजिये-

$(i)\, y+px=p^2x^4$

उत्तर. विचित्र हल: $4x^2y+1=0$; स्पर्श बिन्दु पथ : $x=0$

$(ii)\, x^2p^2-3xyp+2y^2+x^3=0$ [प्रतिस्थापन $x=u, y=xv$]

उत्तर : विचित्र हल $x^2\left(y^2-4x^3\right)=0,$

बाह्य बिन्दु पथ विद्यमान नहीं

$(iii)\, p^2\left(1-x^2\right)=\left(1-y^2\right)$

उत्तर : विचित्र हल. $x=\pm 1, y=\pm 1;$

बाह्य बिन्दु पथ विद्यमान नहीं

$(iv)\, p^2y^2\cos^2\alpha-2pxy\sin^2\alpha+y^2-x^2\sin^2\alpha=0$

उत्तर : विचित्र हल : $y=\pm x\tan\alpha$

स्पर्श बिन्दु पथ : $y=0$

व्यापक हल $x^2+y^2-2xy\sec\alpha+c^2=0$

$(v)\, p^2\left(2-3y\right)^2=4\left(1-y\right)$

उत्तर : विचित्र हल : $y=1$

स्पर्श बिन्दु पथ : $y=\frac{2}{3}$ नोड पथ $y=0$

इकाई 6 अचर गुणांक युक्त रैखिक अवकल समीकरण (Linear Differential Equations with Constant Coefficients)

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप अचर गुणांक युक्त रैखिक अवकल समीकरण की परिभाषा, इसके व्यापक हल में पूरक फलन ज्ञात करने तथा विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की व्यापक विधि के बारे में जान सकेंगे। आप जान सकेंगे कि लघु विधियों द्वारा विशिष्ट समाकल किस प्रकार आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

6.1 प्रस्तावना

इकाई 1 में हमने प्रथम घात तथा प्रथम कोटि के अवकल समीकरण का अध्ययन किया, जिसमें रैखिक अवकल समीकरण को परिभाषित किया गया था, जहाँ आश्रित चर तथा उसके अवकलज केवल प्रथम घात में आते थे। इस इकाई में हम n कोटि के अचर गुणांको वाले रैखिक अवकल समीकरण एवम् इसके व्यापक हल में पूरक फलन तथा विशिष्ट समाकल का अध्ययन करेंगे। आप देखेंगे कि विशेष स्थितियों में विशिष्ट समाकल लघु विधियों द्वारा किस प्रकार आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। इस इकाई को पूर्ण कर लेने के पश्चात् आप समघात रैखिक अवकल समीकरण के लिये तैयार हो सकेंगे।

6.2 अचर गुणांको युक्त रैखिक अवकल समीकरण

अवकल समीकरण जिसमें आश्रित चर y तथा उसके सभी अवकलज केवल प्रथम घात में ही आते हो और आपस में गुणित नहीं होते हो, रैखिक अवकल समीकरण कहलाते है। यदि आश्रित चर y तथा उसके सभी अवकलजो के गुणांक अचर राशियाँ हो, तो ऐसे समीकरण को अचर गुंणाको वाला रैखिक अवकल समीकरण कहते है।

6.2.1 परिभाषा : n वीं कोटि के अचर गुंणाको वाले रैखिक अवकल समीकरण का व्यापक रूप निम्न होता है

$$\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}+............+P_n y=Q(x) \qquad .....(1)$$

जहाँ $P_1P_2.........P_n$ अचर है एंव $Q(x)$ या तो x का फलन है या अचर है। अवकल समीकरण (1) को अवकल संकारक के रूप में लिखने पर

$$D^n y+P_1D^{n-1}y+P_2D^{n-2}y+............P_n y=Q(x) \qquad ......(2)$$

या $$\left[D^n+P_1D^{n-1}+P_2D^{n-2}+............P_n\right]y=Q(x)$$

या $$f(D)\,y=Q(x) \qquad ....(3)$$

जहाँ $$f(D)=D^n+P_1D^{n-1}+P_2D^{n-2}+..........+P_n$$

यहाँ पर $\frac{dy}{dx}=Dy,\frac{d^2y}{dx^2}=D^2y,............\frac{d^ny}{dx^n}=D^ny$

अर्थात $\frac{d}{dx},\frac{d^2}{dx^2}................,\frac{d^n}{dx^n}$ के लिये क्रमश: $D, D^2,..............,D^n$ प्रतीको का प्रयोग किया गया है, D को अवकल संकारक कहते है।

उदाहरणार्थ, रैखिक अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_2y=Q(x)$ को हम प्रकार लिख सकते है।

$$\left(D^2+a_1D+a_2\right)y=f(D)y=Q(x)$$

6.2.2 अवकल सकांरक का बीजगणित

अवकल सकांरक D बीजगणित के निम्न नियमो का पालन करते है।

1. $\left(D^m+D^n\right)u=\left(D^n+D^m\right)u=D^mu+D^nu$
2. $D^m.D^nu=D^{m+n}u=D^n.D^mu$
3. $D(u+v)=Du+Dv$
4. $(D-\alpha)(D-\beta)=(D-\beta)(D-\alpha)$, जहाँ α,β अचर है

यहाँ पर m तथा n धन पूर्णाक एवम् u व v, x के फलन है।

प्रतिलोम सकांरक D^{-1}

D तथा D^{-1} एक दूसरे के प्रतिलोम सकांरक है और जब वे किसी फलन पर करते है तो एक दूसरे के प्रभाव को नष्ट कर देते है अर्थात यदि D अवकलन के लिये प्रयुक्त है तो संकेत D^{-1} या $\frac{1}{D}$ उसकी प्रतिलोम सक्रिंया समाकलन के लिये प्रयुक्त होता है

उदाहरणार्थ,

$$\frac{1}{D}(x)=\int xdx=\frac{x^2}{2}$$

तथा $$\frac{1}{D^2}(x)=\int\int xdx=\frac{x^3}{6}$$

इसी प्रकार $\frac{1}{D^n}\{Q(x)\}=\int\int.........\int Q(x)dx,$ (n बार)

जहाँ n धनात्मक पूर्णाक हैं

6.3 रैखिक अवकल समीकरण का व्यापक हल

रैखिक अवकल समीकरण

$$\left(D^n+P_1D^{n-1}+P_2D^{n-2}+............+P_n\right)y=Q(x) \qquad ......(1)$$

या $f(D)y=Q(x)$ इसका व्यापक हल निम्न प्रकार होता है।

व्यापक हल = पूरक फलन + विशिष्ट समाकल

अर्थात, व्यापक हल के दो भाग (1) पूरक फलन (ii) विशिष्ट समाकल होते है, यहाँ हम इन दोनों भागों पर विचार करेंगे।

6.3.1 पूरक फलन

पूरक फलन ज्ञात करने के लिये समीकरण (1) का दाहिना पक्ष $Q(x)$ शून्य के बराबर माना जाता है, अर्थात $f(D)y=0$.......................(2)

यह रैखिक अवकल समीकरण (1) का समान भाग कहलाता है। अब यदि (2) के $y_1(x)y_2(x),..........., y_n(x), n$ घाततः स्वतन्त्र हल है तो

$$f(D)y_1=0\, f(D)y_2=0,............., f(D)y_n=0,$$

अब $c_1c_2,............., c_n$ स्वेच्छ अचर है तो

$c_1y_1+c_2y_2+.................c_ny_n$ भी समीकरण (2) का हल होगा क्योंकि

$$f(D)[c_1y_1+c_2y_2+.................c_ny_n]$$
$$=c_1f(D)y_1+c_2f(D)y_2+...............+c_nf(D)y_n$$
$$c_1.0+c_2.0+..................+c_n.0$$
$$=0$$

या $\quad f(D)u=0$

जहाँ $\quad u(x)=c_1y_1+c_2y_2+..............+c_ny_n$........(3)

चूँकी n वीं कोटि के किसी अवकल समीकरण के हल में n अचर होते है, इसलिये (3) अवकल समीकरण (2) का पूर्ण समाकल है। यहाँ व्यजंक (3), अवकल समीकरण (1) या (2) का पूरक फलन कहलाता है। इसे संक्षेप में $C.F.$ लिखते है।

अतः $C.F.=$ पूरक फलन $=c_1y_1+c_2y_2+..............+c_ny_n$

टिप्पणी 1 : यदि समीकरण (1) में $Q(x)=0$ हो तो व्यापक हल $=$ पूरक फलन ही होगा

टिप्पणी 2 : पूरक फलन में समीकरण की कोटि के बराबर स्वेच्छ अचर होते है।

6.3.2 विशिष्ट समाकल

यदि समीकरण (1) का दाहिना पक्ष $Q(x)\neq 0$ ले तो यह रैखिक अवकल समीकरण का असमान भाग कहलाता है यदि समीकरण (1) का विशिष्ट हल $v(x)$ हो तो

$$f(D)v=Q(x) \qquad ......(4)$$

तो $v(x)$ अवकल समीकरण (1) का विशिष्ट समाकल कहलाता है तथा इसे सक्षेंप रूप में $P.I.$ लिखते है। अत :

$P.I.=$ विशिष्ट समाकलद $=v(x)$

टिप्पणी : विशिष्ट समाकल में कोई स्वेच्छ अचर प्रयुक्त नहीं होता है

6.3.3 व्यापक हल

यदि अवकल समीकरण (1) के पूरक फलन $u(x)$ तथा विशिष्ट समाकल $v(x)$ है हम देखते है कि

$$f(D)[u+v]=f(D)u+f(D)v$$

$$=0+Q(x)$$ [(3) [(3 व (4) की सहायता से]

अत: $u(x)+v(x)$ अथवा $c_1y_1+c_2y_2+.................+c_ny_n+v(x), n$ वीं कोटि के ह समीकरण (1) का व्यापक हल है जिसमें n स्वेच्छ अचर है। इसे सक्षेंप रूप में $G.S.$ लिखते है, इसलिये n वीं कोटि के रैखिक अवकल समीकरण के व्यापक हल का निम्न रूप होता है

व्यापक हल $(G.S)=$ पूरक फलन $(C.F.)+$ विशिष्ट समाकल $(P.I)$

टिप्पणी: अवकल समीकरण (1) में विशिष्ट समाकल $Q(x)\neq 0$ लेने पर आता है अत: यदि $Q(x)=0$ हो तो उसका

व्यापक हल $=$ पूरक फलन ही होगा

6.4 पूरक फलन ज्ञात करने की विधियाँ

अवकल समीकरण

$$\left[D^n+P_1D^{n-1}+P_2D^{n-2}+..................+P_n\right]y=Q(x) \qquad ....(1)$$

या $$f(D)y=Q(x)$$

के व्यापक हल में पूरक फलन ज्ञात करने के लिये दाहिने पक्ष में दिये गये $Q(x)$ को शून्य के बराबर लेगें।

अर्थात $$f(D)y=0 \qquad ......(2)$$

अब माना कि $y=e^{mx}$ समीकरण (2) का एक हल है तो

$Dy=me^{mx}, D^2y=m^2e^{mx}.........D^ny=m^ne^{mx}$ का मान (2) में प्रतिस्थापित पर

$$\left(m^n+P_1m^{n-1}+P_2m^{n-2}+...........P_n\right)e^{mx}=0$$

या $$m^n+P_1m^{n-1}+P_2m^{n-2}+...........P_n=0 \qquad \left[\because e^{mx}\neq 0\right]$$

अतएव स्पष्ट है कि $y=e^{mx}$ समीकरण (2) का हल होगा, यदि m समीकरण

$$m^n+P_1m^{n-1}+P_2m^{n-2}+...........P_n=0 \text{ या } f(m)=0 \qquad ......(3)$$

का एक मूल है। समीकरण (3) को अवकल समीकरण (2) का सहायक समीकरण कहते है तथा इसे संक्षेप रूप में $A.E$ लिखते है, यहाँ (2) व (3) की तुलना से स्पष्ट है कि $f(D)=0$ में D के स्थान पर m रखकर भी सहायक समीकरण प्राप्त किया

जा सकता है। अब सहायक समीकरण के मूल वास्तविक, भिन्न-2 अथवा पुनरावृत या अधिकल्पित हो सकते है इस आधार पर हम मूलो की निम्न विभिन्न स्थितियाँ लेते है

स्थिति 1- जब सहायक समीकरण के मूल वास्तविक तथा भिन्न-2 हो; माना 'कि सहायक समीकरण $f(m)=0$ के सभी वास्तविक भिन्न-2 मूल $m_1, m_2 \ldots\ldots\ldots m_n$ हो तो अवकल समीकरण $f(D)y=0$ के एक घाततः n स्वतन्त्र हल $y_1 = e^{m_1 x}, y_2 = e^{m_2 x}, \ldots\ldots\ldots y_n = e^{m_n x}$ होंगे। अतः इसका व्यापक हल होगा

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_1 e^{m_2 x} + \ldots\ldots + c_n e^{m_n x}$$

जहाँ $c_1, c_2 \ldots\ldots\ldots, c_n; n$ स्वेच्छ अचर है-

स्थिति-2 जब सहायक समीकरण के मूल समान हो

माना कि सहायक समीकरण $f(m)=0$ के दो मूल समान है, अर्थात

$m_1 = m_2, m_3, m_4 \ldots\ldots\ldots, m_n$ सहायक समीकरण के मूल हो तो इस स्थिति में सहायक समीकरण का निम्न हल होगा

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{m_1 x} + c_3 e^{m3x} + \ldots\ldots\ldots + c_n e^{m_n x}$$

यदि सहायक समीकरण के तीन मूल $m_1 = m_2 = m_3$ समान हो तो समीकरण का निम्न हल होगा

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{m_1 x} + c_4 e^{m_4 x} + \ldots\ldots\ldots + c_n e^{m_n x}$$

इसी प्रकार यदि r मूल समान हो, अर्थात

$m_1 = m_2 = \ldots\ldots\ldots m_r$ तो समीकरण का निम्न हल होगा

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_r x^{r-1}) e^{m_1 x} + c_{r+1} e^{m_{r+1} x} + \ldots + c_n e^{m_n x}$$

स्थिति-3 जब सहायक समीकरण के मूल सम्मिश्र हो

यदि सहायक समीकरण $f(m)=0$ के कुछ मूल सम्मिश्र या अधिकल्पित हो तो हम जानते है कि अधिकल्पित मूल सदैव युग्म में आते है। अतः यदि $\alpha + i\beta$ सहायक समीकरण का एक मूल है तो उसका सयुंग्मी मूल $\alpha - i\beta$ भी सहायक समीकरण का मूल होगा, जहाँ α तथा β वास्तविक है। इस स्थिति में $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ मूलो के लिये सगंत हल निम्न होगा

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$= e^{ax}\left[c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}\right]$$

$$= e^{ax}\left[c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right]$$

$$= e^{ax}\left[(c_1 + c_2)\cos\beta x + i(c_1 - c_2)\sin\beta x\right]$$

या $\quad y = e^{ax}\left[A\cos\beta x + B\sin\beta x\right]$

जहाँ $\quad A = c_1 + c_2$ तथा $B = i(c_1 - c_2)$

यदि $A = c\cos D$ तथा $B = -c\sin D$ ले तो इस रूप को निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$y = ce^{ax}\cos\left(\beta x + D\right)$$

इसी प्रकार इसे निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है।

$$y = ce^{ax}\sin\left(\beta x + D\right)$$

इसलिये समीकरण का सम्पूर्ण हल निम्न प्रकार का होगा

$$y = e^{\alpha x}\left[A\cos\beta x + B\sin\beta x\right] + c_3 e^{m_3 x} + c_4 e^{m_4 x} + \ldots. + c_n e^{m_{n^x}}$$

$$y = ce^{ax}\cos\left(\beta x + D\right) + c_3 e^{m_3 x} + c_4 e^{m_4 x} + \ldots\ldots\ldots + c_n e^{m_n x}$$

अथवा $y = ce^{ax}\sin\left(\beta x + D\right) + c_3 em_3 x + c_4 em_4 x + \ldots\ldots\ldots + c_n e^{m_n x}$

स्थिति-4 जब सहायक समीकरण के मूल सम्मिश्र तथा समान हो

जब सहायक समीकरण के मूल $\alpha \pm i\beta$ दो बार आते है तो उनके सगंत हल निम्न प्रकार होगा।

$$y = e^{ax}\left[\left(A_1 + A_2 x\right)\cos\beta x + \left(B_1 + B_2 x\right)\sin\beta x\right]$$

स्थिति-5 जब सहायक समीकरण के मूल $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ रूप के हो, जहाँ β हो

जब सहायक समीकरण के मूल $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ रूप के हो तो उनके सगंत हल निम्न प्रकार का होगा

$$y = e^{\alpha x}\left[A\cosh(\sqrt{\beta x}) + B\sinh(\sqrt{\beta x})\right]$$

या $\quad y = ce^{ax}\cosh\left(\sqrt{\beta}x + D\right)$

$y = ce^{ax}\sinh\left(\sqrt{\beta}x + D\right)$

ये हल स्थिति 4 में दिये गये हलो के समान है केवल sin व cos के स्थान पर sinh व cosh आते है

टिप्पणी- सहायक समीकरण के मूली के संगत पूर्ण हल को सारणी रूप मे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

सहायक समीकरण के मूल	**पूर्ण हल**
स्थिति 1 : सभी मूल $m_1, m_2 \ldots\ldots, m_n$ वास्तविक तथा भिन्न है	$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots. + c_n e^{m_{n^x}}$
स्थिति 2 : $m_1, = m_2$ तथा अन्य वास्तनिक भिन्न -2 $m_3, m_4 \ldots\ldots, m_n$	$y = \left(c_1 + c_2 x\right)e^{m_1 x} + c_3 e^{m_3 x} + \ldots. + c_n e^{m_{n^x}}$
स्थिति 3 : दो सम्मिश्र मूल $\alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}\left[A\cos\beta x + B\sin\beta x\right]$ या $y = e^{\alpha x}\cos\left(\beta x + D\right)$

	या $y = e^{\alpha x}\sin(\beta x + D)$
स्थिति 4 : जब मूल $\alpha \pm i\beta$ दो बार आते है	$y = e^{\alpha x}\left[(A_1 + A_2 x)\cos\beta x + (B_1 + B_2 x)\sin\right.$
स्थिति 5 : जब मूल $\alpha \pm \sqrt{\beta}$	$y = e^{\alpha x}\left[A\cosh(\sqrt{\beta x}) + B\sinh(\sqrt{\beta x})\right]$ या $y = ce^{\alpha x}\cosh(\sqrt{\beta x + D})$ या $y = ce^{\alpha x}\sinh(\sqrt{\beta x + D})$

उदाहरण 1 : हल कीजिए

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0$$

हल : दी गयी अवकल समीकरण है

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0$$

इसलिये इसका सहायक समीकरण $(A.E)$ होगा

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

या $(m-1)(m-2) = 0$

$\therefore m = 1, 2$ (भिन्न- 2 मूल)

इसलिये पूरक फलन $(C.F.) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

चूंकि यहाँ $Q(x) = 0,$ अत: व्यापक हल होगा,

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ जहाँ c_1, c_2 समाकलन के स्वेच्छ अचर है

उदाहरण 2 : हल कीजिये

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$$

हल : दी गयी अवकल समीकरण है

$$(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$$

इसलिये इसका सहायक समीकरण $(A.E)$ होगा

$$(m^3 - 6m^2 + 11m - 6) = 0$$

या $(m-1)(m-2)(m-3) = 0$

$\therefore m = 1, 2, 3$ (भिन्न-2 मूल)

इसलिये पूरक फलन $(C.F.) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

चूंकि यही $Q(x) = 0,$ अत: व्यापक हल होगा

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x},$ जहाँ c_1, c_2, c_3 समाकलन के स्वेच्छ अचर है

उदाहरण 3 : हल कीजिए

$$(D^3 - 3D + 2)y = 0$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण $(A.E)$ निम्न होगा

$$m^3-3m+2=0$$

या $$(m-1)(m-1)(m+2)=0$$

$\therefore m=1,1,-2$ (मूल $m=1$ दो बार आता है)

इसलिये इसका व्यापक हल होगा

$$y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-2x}$$

उदाहरण 4 हल कीजिए

$$(D^3-4D^2+5D-2)y=0$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण $(A.E)$ निम्न होगा

$$m^3-4m^2+5m-2=0$$

या $$(m-1)^2(m-2)=0$$

$\therefore m=1,1,2$ (मूल $m=1$ दो बार आता है)

इसलिये इसका व्यापक हल होगा

$$y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{2x}$$

उदाहरण 5. हल कीजिए

$$\frac{d^4y}{dx^4}+m^4y=0$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण $(A.E)$ निम्न होगा

$$D^4+m^4=0 \qquad \text{........(1)}$$

$$\because D^4+m^4=(D^2+m^2)^2-2D^2m^2=(D^2+m^2)^2-\left(\sqrt{2}Dm\right)^2$$

$$=\left(D^2+m^2+\sqrt{2}Dm\right)\left(D^2+m^2-\sqrt{2}Dm\right)$$

सलिये (1) से, $\left(D^2+m^2+\sqrt{2}Dm\right)=0$ तथा $\left(D^2+m^2-\sqrt{2}Dm\right)=0$

अब $$D^2+m^2+\sqrt{2}Dm=0$$

$$D=\frac{-\sqrt{2}m\pm\sqrt{2m^2-4m^2}}{2}=\frac{-m}{\sqrt{2}}\pm\frac{m}{\sqrt{2}}i \qquad (\alpha\pm i\beta \text{ रूप})$$

तथा $$D^2+m^2-\sqrt{2}Dm=0$$

$$D=\frac{\sqrt{2}m\pm\sqrt{2m^2-4m^2}}{2}=\frac{m}{\sqrt{2}}\pm\frac{m}{\sqrt{2}}i \qquad (\alpha\pm i\beta \text{ रूप})$$

चूंकि जहां $Q(x)=0$ अत: व्यापक हल = पूरक फलन ही होगा

इसलिये अभिष्ट व्यापक हल होगा

$$y=e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}x}\left\{c_1\cos\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)+c_2\sin\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)\right\}+e^{\frac{m}{\sqrt{2}}x}\left\{c_1\cos\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)+c_2\sin\left(\frac{m}{\sqrt{2}}x\right)\right\}$$

उदाहरण 6 : हल कीजिए

$$\left(D^4+2D^3+3D^2+2D+1\right)y=0$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण निम्न होगा

$$m^4+2m^3+3m^2+2m+1=0$$

या $$\left(m^4+2m^3+m^2\right)+2m^2+2m+1=0$$

या $$\left(m^2+m\right)^2+2\left(m^2+m\right)+1=0$$

या $$\left(m^2+m+1\right)^2=0$$

$$\therefore m=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2},\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$ ($\alpha\pm i\beta$ रूप के मूल दो बार आते है

$$=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}\left[\left(A_1+A_2x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\left(B_1+B_2x\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$$

उदाहरण 7 : हल कीजिए

$$(a)\left(D^4+4\right)y=0$$

$$(b)\left(D^6-64\right)y=0$$

हल (a) : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण निम्न होगा

$$m^4+4=0$$

या $$m^4+4m^2+4-4m^2=0$$

या $$\left(m^2+2\right)^2-\left(2m\right)^2=0$$

या $$\left(m^2+2m+2\right)\left(m^2-2m+2\right)=0$$

$$\therefore m=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2},\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}$$

$$=-1\pm i,1\pm i$$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y=e^{-x}\left[c_1\cos+c_2\sin x\right]+e^{x}\left[c_3\cos x+c_4\sin x\right]$$

हल (3) : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण निम्न होगा

$$m^6-64=0$$

या $$\left(m^3-8\right)\left(m^3+8\right)=0$$

या $$\left(m-2\right)\left(m^2+2m+4\right)\left(m+2\right)\left(m^2-2m+4\right)=0$$

$$\therefore m=2,\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2},-2,\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}$$

$$= 2, -2, -1 \pm i\sqrt{3}, 1 \pm i\sqrt{3}$$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y = c_1 e^{2x} + c_2^{-2x} + e^{-x}\left[A_1 \cos\sqrt{3}x + B_1 \sin\sqrt{3}x\right] + e^{x}\left[A_2 \cos\sqrt{3}x + B_2 \sin\sqrt{3}x\right]$$

उदाहरण 8 हल कीजिए

$$(a)\left(D^4 - 81\right)y = 0$$

$$(b)\left(D^2 + 6D + 4\right) = 0$$

हल (a) : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण होगा

$$m^4 - 81 = 0$$

या $$\left(m^2 + 9\right)\left(m^2 - 9\right) = 0$$

$$\therefore m = \pm 3i, 3, -3$$

अत. अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + e^{0x}\left(c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x\right)$$

या $$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x$$

हल (b) : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण होगा

$$m^2 + 6m + 4 = 0$$

या $$m = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2}$$

$$\therefore m = -3 \pm \sqrt{5}$$ ($\alpha \pm \sqrt{\beta}$ रूप के मूल है)

अत: अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y = e^{-3x}\left[c_1 \cosh\left(\sqrt{5}x\right) + c_2 \sinh\left(\sqrt{5}x\right)\right]$$

टिप्पणी : यहीं दोनों मूल $-3+\sqrt{5}$ तथा $-3-\sqrt{5}$ वास्तविक (अपरिमेय) है तथा सम्मिश्र व्यापक हल निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$y = c_1 e^{\left(-3+\sqrt{5}\right)x} + c2e^{\left(-3-\sqrt{5}\right)x}$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-1

1. रैखिक अवकल समीकरण $f(D)y = Q(x)$ में यदि $Q(x) = 0$ हो तो व्यापक हल $y = C.F$ होता है (सत्य/असत्य)
2. n वीं कोटि के अवकल समीकरण के हल में n अचर होते है (सत्य/असत्य)
3. विशिष्ट समाकल में समीकरण की कोटि के बराबर स्वेच्छ अचर होते है (सत्य/असत्य)
4. हल कीजिये : $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$
5. हल कीजिये : $\left(D^3 - 3D^2 + 4\right)y = 0$

6.5 विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की व्यापक विधि

दिया हुआ अवकल समीकरण है

$$f(D)y = Q(x), Q(x) \neq 0 \qquad \text{........(1)}$$

यदि y इसका विशिष्ट समाकल है तो स्पष्ट है कि

$$f(D)\left\{\frac{1}{f(D)}Q(x)\right\} = Q(x) \qquad \text{.......(2)}$$

अतएव (1) व (2) की तुलना से,

विशिष्ट समाकल $= \dfrac{1}{f(D)}Q(x)$

यहाँ $\dfrac{1}{f(D)}, f(D)$ का प्रतिलोम सकांरक है। अब निम्न स्थितियाँ उत्पन्न होती है

स्थिति 1 : यदि $f(D) = D$ हो तो विशिष्ट समाकल होगा

$$y = \frac{1}{D}Q(x) = \int Q(x)\,dx$$

स्थिति 2 : यदि $f(D) = D - \alpha,$ जहाँ α कोई अचर है तो विशिष्ट समाकल होगा

$$y = \frac{1}{D-\alpha}Q(x)$$

या $\quad (D-\alpha)y = Q(x)$

या $\quad \dfrac{dy}{dx} - \alpha y = Q(x)$

यह प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण है, जिसके हल के लिये

समाकल गुणांक $(I.F.) = e^{-ax}$

$$\therefore y.e^{-ax} = \int e^{-ax}.Q(x)\,dx$$

या $\quad y = e^{ax}\int e^{-ax}.Q(x)\,dx \qquad$ ....(3)

चूंकि हम विशिष्ट समाकल को ज्ञात करना चाहते है तथा विशिष्ट समाकल में कोई भी अचर प्रयुक्त नहीं होता है इसलिये (3) में समाकल अचर नहीं लिखा गया है

$$\therefore \frac{1}{D-\alpha}Q(x) = e^{ax}\int e^{-ax}Q(x)\,dx$$

टिप्पणी : इसी प्रकार $\dfrac{1}{D-\alpha}Q(x) = e^{-ax}\int e^{ax}Q(x)dx$ होगा

स्थिति : 3 यदि $f(D) = (D-\alpha_1)(D-\alpha_2).........(D-\alpha_n)$ हो तो विशिष्ट समाकल होगा,

$$y = \frac{1}{f(D)}Q(x) = \frac{1}{(D-\alpha_1)(D-\alpha_2).........(D-\alpha_n)}Q(x)$$

$$=\left[\frac{A_1}{D-\alpha_1}+\frac{A_2}{D-\alpha_2}+..........\frac{A_n}{D-\alpha_n}\right]Q(x)$$ (आंशिक भिन्नों में परिवर्तन से)

$$A_1e^{\alpha_1 x}\int e^{-\alpha_1 x}dx+A_2e^{\alpha_2 x}\int e^{-\alpha_2 x}dx+........+A_ne^{\alpha_n x}\int e^{-\alpha_n x}dx$$

टिप्पणी : विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की व्यापक विधि का प्रयोग तब किया जाता है जबकि ऐसा करने के लिये कहा गया हो अथवा $Q(x)$ का रूप $\sec ax, \operatorname{cosec} ax, \tan ax, \cot ax$ या अन्य प्रकार का हो जो कि लघु विधियो द्वारा हल नहीं किये जा सकते। विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की लघु विधि का अध्ययन हम अगले अनुच्छेद में करेंगे।

उदाहरण 1 हल कीजिये (विशिष्ट समाकल व्यापक विधि से ज्ञात करो)

$$\left(D^2+3D+2\right)y=e^x$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण निम्न होगा

$$m^2+3m+2=0$$

या $$(m+2)(m+1)=0$$

$$\therefore m=-2,-1$$

अतः पूरक फलन $c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}$

पुनः विशिष्ट समाकल $=\dfrac{1}{f(D)}Q(x)$

$$=\frac{1}{f(D)}e^x$$

$$=\frac{1}{(D+2)(D+1)}e^x=\left[\frac{1}{(D+1)}-\frac{1}{(D+2)}\right]e^x$$

$$=\frac{1}{(D+1)}e^x-\frac{1}{(D+2)}e^x$$

$$=e^{-x}\int e^x.e^xdx-e^{-2x}\int e^{2x}.e^xdx$$

$$\frac{e^x}{2}-\frac{e^x}{3}=\frac{1}{6}e^x$$

अतः अभीष्ट व्यापक हल होगा

$y=$ पूरक फलन + विशिष्ट समाकल

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-x}+\frac{1}{6}e^x$$

टिप्पणी : यहाँ $\dfrac{1}{(D+2)(D+1)}e^x$ को लघु विधि द्वारा आसानी से हल किया जा सकता है

[देखे 6.6.1]

उदाहरण 2 : हल कीजिये (विशिष्ट समाकल व्यापक विधि से ज्ञात करो

$$\left(D^2+a^2\right)y=\tan ax$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण निम्न होगा

$$m^2+a^2=0$$

$$\therefore m=\pm ia$$

अत: पूरक फलन $\left(C.F\right)=c_1\cos ax+c_2\sin ax$

पुन: विशिष्ट समाकल $=\dfrac{1}{\left(D^2+a^2\right)}\tan ax=\dfrac{1}{\left(D+ai\right)\left(D-ai\right)}\tan ax$

$$\therefore P.I.=\frac{1}{2ia}\left[\frac{1}{D-ai}-\frac{1}{D+ai}\right]\tan ax\text{.......................}(1)$$

अब $\dfrac{1}{D-ai}\tan ax=e^{iax}=e^{iax}\int e^{-iax}\tan axdx$

$$=e^{iax}\int\left(\cos ax-i\sin ax\right)\frac{\sin ax}{\cos ax}dx \qquad \text{[आयलर प्रमेय से]}$$

$$=e^{iax}\int\left(\sin ax-\frac{i\left(1-\cos ax\right)}{\cos ax}\right)dx$$

$$=e^{iax}\left[-\frac{\cos ax}{a}-\frac{i}{a}\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)+i\sin\frac{ax}{a}\right]$$

$$=-\frac{e^{iax}}{a}\left[\left(\cos ax-i\sin ax\right)+i\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)\right]$$

$$\therefore\frac{1}{D-ai}\tan ax=-\frac{e^{iax}}{a}\left[e^{-iax}+i\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)\right] \qquad \text{......(2)}$$

i के स्थान पर $-i$ लिखने पर

$$\frac{1}{D+ai}\tan ax=-\frac{e^{-iax}}{a}\int\left[e^{iax}-i\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)\right] \qquad \text{......(3)}$$

अब (1) में (2) व (3) का प्रयोग करने पर

$$P.I.=\frac{1}{2ia}\left\{\frac{-i}{a}\left(e^{iax}+e^{-iax}\right)\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{-1}{a^2}\cos ax\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)$$

अत: अभीष्ट व्यापक हल होगा

$y=$ पूरक फलन + विशिष्ट समाकल

$$y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax - \frac{1}{a^2} \cos ax \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न -2

1. अवकल समीकरण $f(D)y = Q(x)$ में विशिष्ट समाकल $= \frac{1}{f(D)} Q(x)$ होता है (सत्य/असत्य)
2. अवकल समीकरण $f(D)y = Q(x)$ में यदि $f(D) = (D+\alpha)$ हो तो
3. विशिष्ट समाकल निम्न होगा

$$\frac{1}{D+\alpha} Q(x) = e^{-ax} \int e^{ax} Q(x)\,dx$$ (सत्य/असत्य)

3.निम्न अवकल समीकरण में विशिष्ट समाकल व्यापक विधि से ज्ञात कर व्यापक हल ज्ञात कीजिए

$$\left(D^2 - 5D + 6\right) y = e^{4x}$$

6.6 विशेष स्थितियों में विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की लघु विधियाँ

यदि अवकल समीकरण $f(D)y = Q(x)$ में फलन $Q(x)$ नीचे दिये गये विशेष रूप में हो तो विशिष्ट समाकल व्यापक विधि की अपेक्षा लघु विधियो से आसानी से ज्ञात किये जा है। हम यहाँ $Q(x)$ के नीचे दिये गये विशेष रूपो का वर्णन करेगे, जिनमें विशिष्ट समाकल लघु विधियो द्वारा आसानी से ज्ञात किया जा सकता है

$Q(x)$ के विशेष रूप-

(1) $Q(x) = e^{ax}$, जहाँ a कोई अचर है

(2) $Q(x) = \sin ax$ या $\cos ax$

(3) $Q(x) = x^n$, जहाँ n धनात्मक पूर्णांक है

(4) $Q(x) = e^{ax}.v$, जहाँ v, x का कोई फलन है

(5) $Q(x) = xv$, जहाँ v, x का कोई फलन है

यहाँ हम लघु विधियों से विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की क्रियाविधियों को सिद्ध नहीं कर केवल इनका वर्णन करेंगे।

6.6.1 विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की क्रियाविधि, जबकि $Q(x) = e^{ax}$

सूत्र 1 : विशिष्ट समाकल $= \frac{1}{f(D)} Q(x) = \frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$, जहाँ $f(a) \neq 0$

सूत्र 2 : यदि $(D-a)^r, f(D)$ का गुणनखण्ड है तो $f(a)=0$ होगा तथा मूल a की r बार पुनरावृति होगी, इस स्थिति में

विशिष्ट समाकल $=\frac{1}{f(D)}Q(x)=\frac{1}{(D-a)^r\psi(D)}e^{ax}=\frac{1}{\psi(a)}\frac{x^r}{r}e^{ax}$

जहाँ $f(D)=(D-a)^r\psi(D)$ तथा $\psi(a)\neq 0$

उदाहरण 1 : हल कीजिये

$$(D^2-5D+6)y=e^{4x}$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण निम्न होगा

$$m^2-5m+6=0$$

या $(m-2)(m-3)=0$

$$\therefore m=2,3$$

अतः $C.F=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$

पुनः $P.I=\frac{1}{(D^2-5D+6)}e^{4x}=\frac{1}{(4)^2-5(4)+6}e^{4x}=\frac{1}{\underline{|2}}e^{4x}$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y=C.F+P.I$$

या $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^{4x}$

उदाहरण 2 : हल कीजिये

$$(D^2-3D+2)y=e^{x}$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण निम्न होगा

$$m^2-3m+2=0$$

या $(m-1)(m-2)=0$

$$\therefore m=1,2$$

अतः $C.F=c_1e^{x}+c_2e^{2x}$

तथा $P.I=\frac{1}{D^2-3D+2}e^{x}$

$$=\frac{1}{(D-1)(D-2)}e^{x}$$

$$=\frac{1}{(D-1)}\left\{\frac{1}{(D-2)}e^{x}\right\}=\frac{1}{(D-1)}\left\{\frac{e^{x}}{(1-2)}\right\}$$

$=-\frac{1}{(D-1)}e^{x}$ (सूत्र 2 से)

$$= -xe^x$$

टिप्पणी : यदि $(D-a), f(D)$ का गुणनखण्ड है तो $f(a)=0$ होगा, इस स्थिति में विशिष्ट समाकल निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{xe^{ax}}{f'(a)} \text{ या } x.\frac{1}{f(D)}e^{ax}$$

इस प्रकार यदि $(D-a)^2, f(D)$ का गुणनखण्ड है तो $f'(a)=0$ इस में विशिष्ट समाकल निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} = x^2.\frac{1}{f''(D)}e^{ax}$$

इसी प्रकार $(D-a)^r.f(D)$ का गुणनखण्ड हो तो इसी तरीके से आगे बढ़ते विशिष्ट समाकल ज्ञात किया जा सकता है

उदाहरणार्थ, $P.I = \frac{1}{D^2-3D+2}e^x$ [यहाँ $f(1)=1-3+2=0$]

$= x.\frac{1}{2D-3}e^x$ [x का गुणा कर हर का D के सापेक्ष अवकलन पर]

$$= x\frac{1}{2.1-3}e^x$$

$$= -xe^x$$

उदाहरण 3 : हल कीजिये

$$\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$$

दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण निम्न होगा

$$D^3+3D^3+3D+1=0, (D+1)^3=0, D=-1,-1,-1$$

$$\therefore C.F. = (c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-x}$$

तथा $P.I = \frac{1}{(D+1)3}e^{-x}$ [यहीं सूत्र 1 का प्रयोग नहीं सकते क्योंकि $f(-1)=0$]

$= \frac{x^3}{3}e^{-x} = \frac{x^3}{6}.e^{-x}$ [सूत्र 2 से]

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y = C.F + P.I$$

या $y = (c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-x} + \frac{x^3}{6}e^{-x}$

टिप्पणी : यहाँ विशिष्ट समाकल निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है

$$P.I. = \frac{1}{(D+1)^3} e^{-x} \qquad [\text{यहाँ } f(-1)=0]$$

$$= x.\frac{1}{3(D+1)^2} e^{-x}$$ [x का गुणा कर हर D का के सापेक्ष अवकलन करने पर]

$$= x^2.\frac{1}{6(D+1)^2} e^{-x}$$ [पुनः $f'(-1)=0$ अतः x का गुणा कर हर D का के सापेक्ष अवकलन करने पर]

$$\frac{x^3}{6}.e^{-x}$$ [पुनः $f''(-1)=0$ अतः x का गुणा कर हर D का के सापेक्ष अवकलन करने पर]

6.6.2 विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की क्रियाविधि, जबकि $Q(x) = \sin ax$ या $\cos ax$

सूत्र : यहाँ $f(D)$ को D^2 के फलन के रूप में व्यक्त करते है

$\therefore f(D) = \phi(D^2)$ (माना)

इसके पश्चात D^2 के स्थान पर $-a^2$ लिखते है, इस स्थिति में

विशिष्ट समाकल $= \frac{1}{f(D)} Q(x) = \frac{1}{\phi(D^2)} \sin ax = \frac{1}{\phi(-a^2)} \sin ax,$ जहाँ $\phi(-a^2) \neq 0$

इसी प्रकार यदि $= Q(x) = \cos ax$ है तो

विशिष्ट समाकल $= \frac{1}{f(D)} Q(x) = \frac{1}{\phi(D^2)} \cos ax = \frac{1}{\phi(-a^2)} \cos ax,$ जहाँ $\phi(-a^2) \neq 0$

टिप्पणी 1. कई बार $f(D)$ को D^2 के फलन के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता, इस स्थिति में हम $f(D)$ को D, D^2 के फलन $\phi(D, D^2)$ के रूप में व्यक्त करते है जिसे नीचे दिये गये उदाहरणो से समझा जा सकता है

टिप्पणी 2 : यदि $f(D)$ का एक गुणनखण्ड $(D^2 + a^2)$ है तो हमे $\phi(-a^2) = 0$ प्राप्त होता है, इस

स्थिति में हम निम्न सूत्र का प्रयोग $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} e^{0x}$ नीचे दर्शाये गये तरीके से करते है

हम जानते है कि $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$

$\therefore$ विशिष्ट समाकल $= \frac{1}{D^2 + a^2} \sin ax$

$$=\frac{1}{D^2+a^2}e^{iax}$$ का काल्पनिक भाग ....(1)

परन्तु $$\frac{1}{D^2+a^2}e^{iax}=e^{iax}.\frac{1}{(D+ia)^2+a^2}e^{0.x}$$

$$=e^{iax}.\frac{1}{D^2+2iaD}e^{0.x}$$

$$=e^{iax}.\frac{1}{(D^2+2ia)D}e^{0.x}$$

$$=e^{iax}.\frac{1}{D}\left[\frac{1}{(0+2ia)}e^{0.x}\right]$$

$$=\frac{e^{iax}}{2ia}.\frac{1}{D}e^{0.x}$$

$$=\frac{e^{iax}}{2ia}.\frac{1}{D}.1$$

$$=\frac{e^{iax}}{2ia}x=\frac{x}{2ia}(\cos ax+i\sin ax)$$

$$\frac{x}{2a}\sin ax-i.\frac{x}{2a}\cos x$$

$\therefore$ (1) से, $$\frac{1}{D^2+a^2}\sin ax=-\frac{x}{2a}\cos ax$$

इसी प्रकार $$\frac{1}{D^2+a^2}\cos ax=\frac{x}{2a}\sin ax$$

उदाहरण 1 : हल कीजिये

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+5y=\sin 3x$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण निम्न होगा

$$D^2-2D+5=0$$

$$\therefore D=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=1\pm 2i$$

$$\therefore C.F=e^x(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$$

$$P.I = \frac{1}{D^2 - 2D + 5}\sin 3x = \frac{1}{-9 - 2D + 5}\sin 3x$$ [D^2 के स्थान पर -3^2 रखने पर

$$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{D+5}\sin 3x = -\frac{1}{2}.\frac{D-2}{D^2-4}\sin 3x$$

$$= -\frac{1}{2}.\frac{D-2}{-9-4}\sin 3x = \frac{1}{26}\left[D(\sin 3x) - 2\sin 3x\right]$$

$$= \frac{1}{26}\left[3\cos 3x - 2\sin 3x\right]$$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y = C.F + P.I$$

या $y = e^x\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right) + \frac{1}{26}\left(3\cos 3x - 2\sin 3x\right)$

उदाहरण 2 : हल कीजिये

$$\left(D^3 + 6D^2 + 11D + 6\right)y = 2\sin x$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण निम्न होगा

$$D^3 + 6D^2 + 11D + 6 = 0$$

या $(D+1)(D+2)(D+3) = 0$

$$\Rightarrow D = -1, -2, -3$$

$$\therefore C.F = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$$

तथा $P.I = \frac{1}{D^3 + 6D^2 + 11D + 6}(2\sin x)$

$$= 2.\frac{1}{D^3 + 6D^2 + 11D + 6}\sin x$$

$$= 2.\frac{1}{(-1)D + 6(-1) + 11D + 6}\sin x$$ [$D^2 = -1$ रखने पर]

$$= 2.\frac{1}{10D}\sin x = \frac{1}{5}\int \sin x dx = -\frac{1}{5}\cos x$$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x} - \frac{1}{5}\cos x$$

उदाहरण 3 : हल कीजिये

$$\left(D^2 + a^2\right)y = \sin ax$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण का सहायक समीकरण निम्न होगा

$$D^2 + a^2 = 0, D = \pm ia$$

$$\therefore C.F = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$$

$$P.I = \frac{1}{D^2 + a^2} \sin ax \quad [\text{यहाँ } f\left(-a^2\right) = 0 \text{ है}]$$

$$= x.\frac{1}{2D} \sin ax \quad [x \text{ का गुणा कर हर } D \text{ का के सापेक्ष अवकलन}]$$

$$= -\frac{x}{2a} \cos ax$$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y = C.F + P.I$$

या $$y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax - \frac{x}{2a} \cos ax$$

उदाहरण 4 : हल कीजिए

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + \cos x$$

हल : यहाँ सहायक समीकरण निम्न होगा

$$D^3 - 3D^2 + 4D - 2 = 0$$

या $$(D-1)\left(D^2 - 2D + 2\right) = 0$$

या $$D = 1, 1 \pm i$$

$$\therefore C.F. = c_1 e^x + e^x \left(c_2 \cos x + c_3 \sin x\right)$$

$$P.I. = \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} e^{-x} + \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 4D - 2} \cos x$$

[प्रथम पद में $f(1) = 0$]

$$= x.\frac{1}{6D+4} e^x + \frac{1}{(-1)D - 3(-1) + 4D - 2} \cos x$$

[प्रथम पद में x का गुणा कर हर D का के सापेक्ष अवकलन करने पर]

$$= xe^x + \frac{1}{3D+1} \cos x$$

$$= xe^x + \frac{3D-1}{9D^2 - 1} \cos x$$

$$= xe^x + \frac{1}{10}\left(3\sin x + \cos x\right)$$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y = c_1 e^x + e^x \left(c_2 \cos x + c_2 \sin x\right) + xe^x + \frac{1}{10}\left(3\sin x + \cos x\right)$$

6.6.3 विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की क्रियाविधि, जबकि $Q(x)=x^n$

यदि $Q(x)=x^n$ के रूप का हो, जहाँ n धनात्मक पूर्णांक है तो इसका विशिष्ट समाकल ज्ञात करने के लिये $f(D)$ की निम्न घात लेकर इसे $\left[1\pm F(D)\right]^n$ रूप में रखकर इसे अंश में लेकर इसका द्विपद प्रमेय से प्रसार करते है इसके पश्चात प्रत्येक सकांरक को x^n के साथ लेकर इसका मान ज्ञात किया जाता है यहाँ ध्यान देने योग्य है कि $D^{n+r}x^n=0, \forall r\geq 1,$ अतएव प्रसार में D की घात में n से अधिक पद लिखने की आवश्यकता नहीं है।

यहाँ निम्न द्विपद प्रसार सहायक होंगे

$$(a)(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+..........$$

$$(b)(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+..........$$

$$(c)(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+..........$$

$$(d)(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+..........$$

उदाहरण 1 : हल कीजिये

$$\left(D^2-3D-2\right)y=x^2$$

हल : यहाँ सहायक समीकरण निम्न होगा

$$D^3-3D-2=0,(D+1)^2(D-2)=0,;D=-1,-1,2$$

$$\therefore C.F=(c_1+c_2x)e^{-x}+c_3e^{2x}$$

$$P.I=\frac{1}{D^3-3D-2}x^2$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+\frac{3D}{2}-\frac{D^3}{2}\right)}x^2=-\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{3D}{2}-\frac{D^3}{2}\right)\right]^{-1}x^2$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{3D}{2}-\frac{D^3}{2}\right)+\left(\frac{3D}{2}-\frac{D^3}{2}\right)^2+...........\right]x^2$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1-\frac{3D}{2}+\frac{9D^2}{4}..........\right]x^2 \qquad [D^2 \text{ से उच्च घातों को छोड़ने पर}]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[x^2-3x+\frac{9}{2}\right] \qquad \left[\because D^r x^2=0\forall r>2\right]$$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y=(c_1+c_2x)e^{-x}+c_3e^{2x}-\frac{1}{2}\left(x^2-3x+\frac{9}{2}\right)$$

उदाहरण 2 : हल कीजिए

$$\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}e^{2x}+x^2+x$$

हल : यहाँ सहायक समीकरण निम्न होगा

$$D^3+2D+D=0, D(D+1)^2=0, ; \therefore D=0,-1,-1$$

अत: $C.F.=c_1+(c_2+c_3x)e^{-x}$

$$P.I.=\frac{1}{D(D+1)^2}\left(e^{2x}+x^2+x\right)$$

$$=\frac{1}{D(D+1)^2}e^{2x}+\frac{1}{D}(1+D)^{-2}\left(x^2+x\right)$$

$$=\frac{1}{2(2+1)^2}e^{2x}+\frac{1}{D}\left(1-2D+3D^2+4D^3.....\right)\left(x^2+x\right)$$

$$=\frac{1}{18}e^{2x}+\left(\frac{1}{D}-2+3D-4D^2+.......\right)\left(x^2+x\right)$$

$$=\frac{1}{18}e^{2x}+\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{3}-2x^2-2x+6x+3-8\right)$$

$$=\frac{1}{18}e^{2x}+\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+4x-5$$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y=C.F+P.I$$

$$y=c+(c_2+c_3x)e^{-x}+\frac{1}{18}e^{2x}+\frac{x^3}{2}-\frac{3}{2}x^2+4x$$

टिप्पणी : यहाँ -5 को अचर c_1 में लेकर नया अचर c लिखा जा सकता है

6.6.4 विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की क्रियाविधि, जबकि $Q(x)=e^{ax}.v$; जहाँ v, x का फलन है

सूत्र : $\frac{1}{f(D)}e^{ax}.v=e^{ax}.\frac{1}{f(D+a)}v$, जहाँ $\frac{1}{f(D+a)}v$ पूर्व में दी गई विधियो की सहायता से ज्ञात करते है, यहाँ $f(D+a)$ प्राप्त करने के लिये $f(D)$ में D के स्थान $D+a$ रखते है। इस सूत्र का प्रयोग तब सहायक सिद्ध होता है जबकि $v; \cos ax, \sin ax$ या x^n रूप का हो

उदाहरण 1 : हल कीजिये

$$\left(D^2-2D+1\right)y=x^2e^{3x}$$

हल : यहाँ सहायक समीकरण निम्न होगा

$$D^2-2D+1=0, (D-1)^2=0, \quad \therefore D=1,1$$

$$\therefore C.F=(c_1+c_2x)e^x$$

$$P.I.=\frac{1}{D^2-2D+1}x^2e^{3x}$$

$$=e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2-2(D+3)+1}x^2$$

$$=e^{3x}\frac{1}{D^2+4D+4}x^2$$

$$=e^{3x}.\frac{1}{4}\left(1+\frac{D^2+4D}{4}\right)^{-1}x^2$$

$$=e^{3x}.\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{D^2+4D}{4}\right)+\left(\frac{D^2+4D}{4}\right)^2+.......\right]^{-1}x^2$$

$$=e^{3x}.\frac{1}{4}\left[1-D+\frac{3}{4}D^2\right]x^2 \qquad \left[\because D^rx^2=0\forall r>2\right]$$

$$\frac{e^{3x}}{8}\left(2x^2-4x+3\right)$$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y=(c_1+c_2x)e^x+\frac{e^{3x}}{8}\left(2x^2-4x+3\right)$$

उदाहरण 2 : हल कीजिये

$$\left(D^2-2D+5\right)y=e^{2x}\sin x$$

हल : यहाँ सहायक समीकरण निम्न होगा

$$D^2-2D+5=0$$

$$\therefore D=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=1\pm 2i$$

अतः $\quad C.F.=e^x\left(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x\right)$

$$P.I.=\frac{1}{D^2-2D+5}e^{2x}\sin x$$

$$=e^{2x}.\frac{1}{(D+2)^2-2(D+2)+5}\sin x$$

$$=e^{2x}.\frac{1}{D^2+2D+5}\sin x$$

$$=e^{2x}.\frac{1}{-1^2+2D+5}\sin x$$

$$= e^{2x}.\frac{1}{2D+4}\sin x$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}.\frac{1}{D+2}\sin x$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}.\frac{D-2}{D^2-4}\sin x$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}.\frac{D-2}{-1-4}\sin x$$

$$= -\frac{e^{2x}}{10}.\left[D(\sin x) - 2\sin x\right]$$

$$= -\frac{e^{2x}}{10}.\left[\cos x - 2\sin x\right]$$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y = C.F. + P.I$$

या $y = e^{x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right) + \frac{e^{2x}}{10}\left(2\sin x - \cos x\right)$

6.6.5 विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की क्रियाविधि, जबकि $Q(x) = xv$, जहाँ v, x का फलन है

सूत्र : $\frac{1}{f(D)}(xv) = \left[x - \frac{f'(D)}{f(D)}\right]\left[\frac{1}{f(D)}v\right]$

उदाहरण 1 : हल कीजिये

$$\left(D^2 - 2D + 1\right)y = x\sin x$$

हल : यहाँ सहायक समीकरण निम्न होगा

$$D^2 - 2D + 1 = 0, (D-1)^2 = 0,; \therefore D = 1,1$$

$$\therefore C.F. = \left(c_1 + c_2 x\right)e^{x}$$

$$P.I. = \frac{1}{D^2 - 2D + 1}x\sin x$$

$$= \left[x - \frac{2D-2}{D^2 - 2D + 1}\right]\left[\frac{1}{D^2 - 2D + 1}\sin x\right] \text{ (सूत्र से)}$$

$$=\left[x-\frac{2(D-1)}{(D-1)^2}\right]\left[\frac{1}{(-1)^2-2D+1}\sin x\right]$$

$$=\left[x-\frac{2(D-1)}{(D-1)^2}\right]\left(\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=\frac{1}{2}x\cos x-\frac{1}{D-1}\cos x$$

$$=\frac{1}{2}x\cos x-\frac{D+1}{D^2-1}\cos x$$

$$=\frac{1}{2}x\cos x-\frac{D+1}{-1-1}\cos x$$

$$\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}(-\sin x+\cos x)$$

$$\frac{1}{2}(x\cos x+\cos x-\sin x)$$

$\therefore$. अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y=C.F+P.I$$

या $$y=(c_1+c_2x)e^x+\frac{1}{2}(x\cos x+\cos x-\sin x)$$

टिप्पणी : यहाँ विशिष्ट समाकल $=\dfrac{1}{D^2-2D+1}xe^{ix}$ का काल्पनिक भाग लेकर भी ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 2 : हल कीजिये

$$\left(D^2-2D+1\right)y=xe^x\sin x$$

हल : यहाँ सहायक समीकरण निम्न होगा

$$D^2-2D+1=0,(D-1)^2=0,\therefore D=1,1$$

$$\therefore C.F.=(c_1+c_2x)e^x$$

तथा $$P.I.=\frac{1}{D^2-2D+1}xe^x\sin x$$

$$=e^x.\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+1}x\sin x \qquad \text{(सूत्र से)}$$

$$= e^x . \frac{1}{D^2} x \sin x$$
$$= e^x . \frac{1}{D} \int x \sin x dx$$
$$= e^x . \frac{1}{D} \left[-x \cos x - \int 1 . (-\cos x) dx \right]$$
$$= e^x . \frac{1}{D} [-x \cos x + \sin x]$$
$$= e^x \int (-x \cos x + \sin x) dx$$
$$= e^x \left[-x \sin x + \int \sin x dx - \cos x \right]$$
$$= e^x [-x \sin x - 2 \cos x] = -e^x (x \sin x + 2 \cos x)$$

$\therefore$ अभीष्ट व्यापक हल होगा

$$y = C.F. + P.I$$

या $$y = (c_1 + c_2 x) e^x - e^x (x \sin x + 2 \cos x)$$

टिप्पणी : यहाँ $\frac{1}{D^2} x \sin x$ को निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है

$$\frac{1}{D^2} x \sin x = \left[x - \frac{2D}{D^2} \right] \left[\frac{1}{D^2} \sin x \right] \qquad \text{(सूत्र से)}$$
$$= \left[x - \frac{2}{D} \right] [-\sin x]$$
$$= -x \sin x + 2 \frac{1}{D} \sin x$$
$$= -x \sin x - 2 \cos x$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न -3

1. हल कीजिये
   $(D^2 + 2D + 1) y = x \cos x$
2. हल कीजिये
   $(D^2 + a^2) y = \cos ax$

6.7 सारांश

n वीं कोटि के अचर गुंणाको वाले रैखिक अवकल समीकरण का व्यापक रूप निम्न होता है

$$\left(D^n + P_1 D^{n-1} + P_2 D^{n-2} + ... P_n \right) y = Q(x)$$

यहाँ $P_1, P_2, ... P_n$ अचर होते है तथा $Q(x)$ या तो x का फलन या अचर होता है इसके व्यापक हल के दो भाग (i) पूरक फलन तथा (ii) विशिष्ट समाकल होते

है। यदि $Q(x)=0$ हो तो व्यापक हल इसका पूरक फलन ही होता है। पूरक फलन में समीकरण की कोटि के बराबर स्वेच्छ अचर होते है तथा विशिष्ट समाकल में कोई भी स्वेच्छ अचर प्रयुक्त नहीं होता है। विशेष स्थितियों में विशिष्ट समाकल व्यापक विधि की अपेक्षा लघु विधियों से आसानी से ज्ञात किया जा सकता है

6.8 शब्दावली

अवकल सकांरक	Differential Operator
एक घाततः स्वतन्त्र हल	Linearly independent Solution
पूरक फलन	Complementary Function
विशिष्ट समाकल	Particular integral
सहायक समीकरण	Auxiliary Equation
व्यापक हल	General Solution
पुनरावृत अधिकल्पित मूल	Repeated Complex roots

6.9 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. सत्य
2. सत्य
3. असत्य
4. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{4x}$
5. $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+c_3e^{-x}$

स्वमूल्यांकन प्रश्न- 2

1. सत्य
2. सत्य
3. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^{4x}$

स्वमूल्यांकन प्रश्न- 3

1. $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+\frac{1}{2}\left[\cos x+(x-1)\sin x\right]$
2. $y=c_1\cos ax+c_2\sin ax+\frac{x}{2a}\sin ax$

6.10 अभ्यास प्रश्न

निम्नलिखित अवकल समीकरणो को हल कीजिये

1. $(D^3-4D^2+5D-2)y=0$

उत्तर $y=(c_1+c_2x)e^{x}+c_3e^{2x}$

2. $\left(D^4-2D^3+5D^2-8D+4\right)y=0$

उत्तर $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$

3. $\left(D^4+4D^3-5D^2-36D-36\right)y=0$

उत्तर $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+(c_3+c_4x)e^{-2x}$

4. $\left(D^2+D+1\right)^2 y=0$ या $\left(D^4+2D^3+3D^2+2D+1\right)y=0$

उत्तर $y=e^{-\frac{x}{2}}\left[(c_1+c_2x)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+(c_3+c_4x)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$

5. $\left(D^2+1\right)y=\tan 2x$

उत्तर $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x.\log(\sec 2x+\tan 2x)$

6. $\left(D^2+1\right)y=\sec 2x$

उत्तर $y=c_1\cos x+c_2\sin x+x\sin x+\cos x\log\cos x$

7. $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^{5x}$

उत्तर $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+\frac{1}{12}e^{5x}$

8. $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

उत्तर $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^x+\frac{1}{12}e^{-x}$

9. $\left(D^2-2kD+k^2\right)y=e^{kx}$

उत्तर $y=(c_1+c_2x)e^{kx}+\frac{x^2}{2}e^{kx}$

10. $\left(D^2+4\right)y\sin^2 x$ [संकेत $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$]

उत्तर $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}x\sin 2x$

11. $\left(D^2+9\right)y=\cos 2x+\sin 2x$

उत्तर $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{1}{5}(\cos 2x+\sin 2x)$

12. $\left(D^2+9\right)y=\cos 3x$

उत्तर $y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{x}{6}\sin 3x$

13. $\left(D^2+1\right)y=\sin x\sin 2x$

[(संकेत $\sin x\sin 2x=\frac{1}{2}\left(\cos x-\cos 3x\right)$]

उत्तर $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{16}\left(4x\sin x+\cos 3x\right)$

14. $\left(D^2-1\right)y=xe^x+\cos^2 x$

उत्तर $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{4}e^x\left(x^2-x\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\cos 2x$

15. $\left(D^2-4D+4\right)y=8x^2e^{2x}\sin 2x$

उत्तर $y=\left(c_1+c_2x\right)e^{2x}+e^{2x}\left[3\sin 2x-4x\cos 2x-2x^2\sin 2x\right]$

इकाई-7 समघात रैखिक अवकल समीकरण (Homogeneous Linear Differential Equation)

इकाई की रूपरेखा

7.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप समघात रैखिक अवकल समीकरण एवं उनको हल करने की विधियों के बारे में जान पायेंगे, आप जान पायेंगे कि कई अवकल समीकरणों को किस प्रकार समघात रैखिक अवकल समीकरण में परिवर्तित कर हल किया जा सकता है।

7.1 प्रस्तावना

इकाई 6 में हमने रैखिक अवकल समीकरणों का अध्ययन किया जिसमें अवकल के गुणांक अचर थे। इस इकाई में हम विशेष प्रकार की रैखिक अवकल समीकरणों का अध्ययन करेंगे जो कि समघात रैखिक अवकल समीकरण कहलाती है।

7.2 समघात रैखिक अवकल समीकरण अवकल समीकरण

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y$$
$$= Q(x) \ldots\ldots\ldots.(A)$$

जहाँ $a_n, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ अचर है तथा $Q(x), x$ का कोई फलन है, ऐसे समीकरण को n कोटि का समघात रैखिक अवकल समीकरण कहते है।

7.2.1 समघात रैखिक अवकल समीकरण का हल ज्ञात करने की विधि

दिये हुये समघाती रैखिक अवकल समीकरण में स्वतन्त्र चर x को एक नये चर z से सम्बन्ध $z = \log x$ या $x = e^z$ द्वारा प्रतिस्थापित कर समीकरण को अचर गुणांकों वाली रैखिक अवकल समीकरण में परिवर्तित करते है। हम देखते है कि यदि $z = \log x$ या $x = e^z$ है तो $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}.\frac{dy}{dz}$$

या $$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$$

$$\therefore x\frac{dy}{dx} = Dy$$ [जहाँ $D \equiv \frac{d}{dz}$ आपरेटर प्रदर्शित करता है]

इसी प्रकार,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\therefore x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$$

या $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \left(D^2 - D\right)y = D\left(D-1\right)y$$

इसी प्रकार,

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = D\left(D-1\right)\left(D-2\right)y$$

....

....

तथा $$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = D\left(D-1\right)\left(D-2\right)......\left(D-n+1\right)y$$

अत: अवकल समीकरण (A) का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$\left\{D\left(D-1\right)\left(D-2\right)......\left(D-n+1\right)\right\} +$$
$$a_1\left\{D\left(D-1\right)\left(D-2\right)......\left(D-n+2\right) + ... + ... + a_n\right\}y = Q\left(e^z\right)$$

या $$f\left(D\right)y = Q\left(e^Z\right) ....\left(B\right)$$

स्पष्टतः परिवर्तित समीकरण (B) अचर गुणांकों वाली रैखिक अवकल समीकरण है, जिसे आसानी से हल किया जा सकता है।

अवकल समीकरण (B) का सहायक समीकरण निम्न होगा

$$m(m-1)(m-2)......(m-n+1)+a_1 m(m-1)(m-2)....(m-n+2)+$$
$$.......+......+a_n=0\ ....(C)$$

जो कि m में एक n घात का समीकरण है अतएव इसके n मूल होंगे

(i) यदि $m_1, m_2, ..., m_n$ इस समीकरण के मूल है तो

पूरक फलन $(C.F.)=c_1 e^{m_1 z}+c_2 e^{m_2 z}.....+c_n e^{m_n z}$

$$=c_1 x^{m_1}+c_2 x^{m_2}+.....+c_n x^{m_n}$$

(ii) यदि सहायक समीकरण के दो मूल $m_1=m_2$ समान हो तो पूरक फलन

$$(C.F.)=(c_1+c_2 z)e^{m_1 z}+c_3 e^{m_3 z}+.....+c_n e^{m_n z}$$
$$=(c_1+c_2\log x)x^{m_1}+c_3 x^{m_3}+.......+c_n x^{m_n}$$

(iii) यदि सहायक समीकरण के मूल m_1 की r बार पुनरावृत्ति हो तो पूरक फलन

$$(C.F.)=\left[=c_1+c_2\log x+c_3(\log x)^2+.......+c_r(\log x)^{r-1}\right]x^{m_1}$$
$$+c_{r+1}x^{m_{r+1}}+.......+c_n x^{m_n}$$

(iv) यदि सहायक समीकरण (C) के दो मूल अधिकल्पित हो, मान लो $\alpha \pm i\beta$ हो तो, इनके संगत

पूरक फलन $(C.F)=e^{\alpha z}\left[c_1\cos\beta z+c_2\sin\beta z\right]+c_3 e^{m_3 z}+....+c_n x^{m_n}$

$$=x^{\alpha}\left[c_1\cos(\beta\log x)+c_2\sin(\beta\log x)\right]+c_3 x^{m_3}+.......+c_n x^{m_n}$$

पूरक फलन ज्ञात करने के पश्चात् इकाई 6 में दिये गये सूत्रों की सहायता से विशिष्ट समाकल ज्ञात कर समघात रैखिक अवकल समीकरण का व्यापक हल लिख सकते है।

7.2.2 समघात रैखिक अवकल समीकरण को हल करने की वैकल्पिक विधि

यदि संकारक $x\dfrac{dy}{dx}=\theta$ से निरूपित करे तो हम देखते है कि

$$x\frac{dy}{dx}=\theta y$$

तथा $$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)=x\left(\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

या $$\theta(\theta y)=x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

या $$\theta(\theta y)=\theta y+x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\therefore \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \theta(\theta-1) y$$

व्यापक रूप में,

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \theta(\theta-1)(\theta-2)....(\theta-n+1) y$$

अतः समघाती रैखिक अवकल समीकरण (A) निम्न रूप का होगा

$$\left[\{\theta(\theta-1)(\theta-2)....(\theta-n+1)\}+\right.$$
$$a_1\{\theta(\theta-1)(\theta-2).........(\theta-n+2)\}+.....+a_n]y = Q(x)$$

या $\quad f(\theta) y = Q(x) \quad ......(D)$

अचर गुणाको वाले रैखिक अवकल समीकरण की भाँति, समीकरण (D)का व्यापक हल पूरक फलन तथा विशिष्ट समाकलन का योग होता है।

(a) पूरक फलन

पूरक फलन को समीकरण $f(\theta) y = 0$ को हल करके प्राप्त करते है। यदि $y = x^m$ इसका एक हल है तो

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

या $\quad x\dfrac{dy}{dx} = mx^m = my$

$$\therefore \theta \equiv x\frac{d}{dx} = m$$

अतः $\quad f(m) = 0 \quad ....(E)$

जो कि समीकरण (D)का सहायक समीकरण है

(i) यदि समीकरण (E)के किसी मूल $m_1, m_2, ..., m_n$ है जो कि वास्तविक तथा असमान है, तो समीकरण (E) का हल होगा

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + ... + c_n x^{m_n} \quad ....(F)$$

(ii) यदि समीकरण (E) में किसी मूल m_1 की r बार पुनरावृति हो, तो उसके संगत पूरक फलन होगा

$$y = \left\{c_1 + c_2 \log x + c_3 (\log x)^2 + ... + c_r (\log x)^{r-1}\right\} x^{m_1}$$
$$+ ..... + c_{r+1} x^{m_{r+1}} + ... + c_n x^{m_n}$$ [देखें टिप्पणी (1)]

(iii) यदि सहायक समीकरण में काल्पनिक मूल युग्म $\alpha + i\beta$ हो, तो उसके संगत पूरक फलन होगा

$$y = x^{\alpha}\{c_1 \cos(\beta \log x) + c_2 \sin(\beta \log x)\} c_3 x^{m_3} + ... + c_n x^{m_n}$$

[देखें टिप्पणी (2)]

टिप्पणी 1 : यदि $z=\log x$ या $x=e^z$ ले तो

$$x^{m_1}=e^{m_1 z}, x^{m_2}=c_2e^{m_2 z}, \ldots\ldots x^{m_n}=m_{n^z}$$

अत: समीकरण (F) से

$$y=c_1e^{m_1 z}+c_2e^{m_2 z}+\ldots\ldots+c_ne^{m_n z} \qquad \ldots\ldots(G)$$

यदि मूल m_1 की r बार पुनरावृत्ति हो तो

$$y=\left\{c_1+c_2z+c_3z^2+\ldots\ldots+c_rz^{r-1}\right\}e^{m_1 z}+c_{r+1}x^{m_{r+1}z}$$
$$+\ldots\ldots+c_nx^{m_n}$$

या $$y=\left\{c_1+c_2(\log x)+\ldots..+c_r(\log x)^{r-1}\right\}x^{m_1}+c_{r+1}x^{m_{r+1}}$$
$$+\ldots..+c_nx^{m_n}$$

टिप्पणी 2 : यदि सहायक समीकरण (E) में काल्पनिक मूल युग्म $\alpha+i\beta$ हो तो उसके संगत पूरक फलन होगा

$$y=e^{\alpha z}\left[c_1\cos\beta z+c_2\sin\beta z\right]+c_3e^{m_3 z}+\ldots\ldots.+c_ne^{m_{nz}}$$

या $$y=x^{\alpha}\left\{c_1\cos(\beta\log x)+c_2\sin(\beta\log x)\right\}+c_3x^{m_3}+\ldots\ldots.+c_nx^{m_n}$$

(b) विशिष्ट समाकल

माना की $y=u$ समीकरण (D) का विशेष हल है तो $f(\theta)u=Q(x)$

यदि $\dfrac{1}{f(\theta)}, f(\theta)$ का प्रतिलोम सकारक हो तो

$$\frac{1}{f(\theta)}f(\theta)u=\frac{1}{f(\theta)}Q(x)$$

या $$u=\frac{1}{f(\theta)}Q(x)$$

अत: विशिष्ट समाकल $=\dfrac{1}{f(\theta)}Q(x)$

(c) $\dfrac{1}{f(\theta)}Q(x)$ का मान ज्ञात करना :

(i) विशिष्ट समाकल - $\dfrac{1}{\theta-\alpha}Q(x)$ का मान ज्ञात करना :

माना $$\frac{1}{\theta-\alpha}Q(x)=V$$

या $$(\theta-\alpha)V=Q(x)$$

या $$x\frac{dV}{dx}-\alpha V=Q(x)$$

या $$\frac{dV}{dx}-\frac{\alpha}{x}V=\frac{1}{x}Q(x)$$

यह प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण है अत: इसका समाकलन

$$(I.F.) = e\int \frac{-\alpha}{x}dx = e^{-\alpha \log x} = x^{-\alpha}$$

$$\therefore Vx^{-\alpha} = \int \frac{1}{x} Q(x).x^{-\alpha} dx$$

या $V = x^{\alpha} \int Q(x).x^{-\alpha-1} dx$

$$\therefore \frac{1}{\theta-1} Q(x) = x^{\alpha} \int Q(x).x^{-\alpha-1} dx$$

पुन: यदि $f(\theta) = (\theta-\alpha_1)(\theta-\alpha_2).....(\theta-\alpha_n)$ हो तो आशिक भिन्नों से

$$\frac{1}{f(\theta)} Q(x) = \left[\frac{A_1}{\theta-\alpha_1} + \frac{A_2}{\theta-\alpha_2} + ... + \frac{A_n}{\theta-\alpha_n}\right] Q(x)$$

$$= A_1 x^{\alpha_1} \int Q(x).x^{-\alpha_1-1} dx + A_2 x^{\alpha_2} \int Q(x).x^{-\alpha_2-1}$$

$$+ .... + A_n x^{\alpha_n} \int Q(x).x^{-\alpha_n-1} dx$$

(ii) $\frac{1}{f(\theta)} x^m$ का मान ज्ञात करना जबकि $f(m) \neq 0$

हम जानते है कि $\theta(x^m) = x\frac{d}{dx}(x^m) = x(mx^{m-1}) = mx^m$

$$\theta^2(x^m) = \theta(mx^m) = x\frac{d}{dx}(mx^m) = x(m^2 x^{m-1}) = m^2 x^m$$

....

....

इसी प्रकार,

$$\theta^n(x^m) = \theta(m^{n-1}x^m) = x\frac{d}{dx}(m^{n-1}x^m) = x(m^{n-1}x^{m-1}) = m^n x^m$$

$$\therefore f(\theta)x^m - f(m)x^m$$

या $\frac{1}{f(\theta)} f(\theta) x^m = \frac{1}{f(\theta)} f(m) x^m$

या $x^m = \frac{1}{f(\theta)} f(m) x^m$

या $\frac{1}{f(\theta)} x^m = \frac{x^m}{f(m)}$ जबकि $f(m) \neq 0$

विशेष स्थिति : यदि $f(m) = 0$ अर्थात $m, f(\theta) = 0$ का एक मूल है। मान लो $f(\theta) = (\theta - m)\phi(\theta)$, जहाँ $\phi(m) \neq 0$

$$\therefore \frac{1}{f(\theta)}x^m = \frac{1}{(\theta-m)\phi(\theta)}x^m$$

$$= \frac{1}{\phi(m)}.\frac{1}{\theta-m}x^m$$

$$\frac{1}{\phi(m)}.\left[x^m\int x^{-m-1}x^m dx\right] \qquad \left[\because \frac{1}{\theta-\alpha}Q(x)x^{\alpha}\int x^{-\alpha-1}Q(x)dx\right]$$

$$= \quad \frac{1}{\phi(m)}\left[x^m \quad \int\frac{1}{x}dx\right]$$

$$= \frac{x^m \log x}{\phi(m)}$$

$$\therefore \frac{1}{f(\theta)}x^m = \frac{x^m \log x}{\phi(m)}, \qquad \text{जहाँ } f(\theta) = (\theta-m)\phi(\theta), \phi(m) \neq 0$$

यदि मूल m की r बार पुनरावृति हो तो माना कि

$$f(\theta) = (\theta-m)^r \Psi(\theta), \qquad \text{जहाँ } \psi(\theta) \neq 0$$

$$\therefore \frac{1}{f(\theta)}x^m = \frac{1}{(\theta-m)^r \psi(\theta)}x^m = \frac{x^m}{\psi(m)}\frac{(\log x)^r}{r!}$$

टिप्पणी : ईकाई 6 के अभ्यास के कारण वैकल्पिक विधि कि अपेक्षा मुख्य विधि का प्रयोग ज्यादा किया जाता है। (देखे उदाहरण 3

7.2.3 समघात रैखिक रूप में सामानेय अवकल समीकरण

कई अवकल समीकरणों को हम समघात रैखिक अवकल समीकरणों में परिवर्तित कर सकते है ऐसे समीकरणों का रूप निम्न होता है।

$$(a+bx)^n\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx}a_n y = Q(x) \text{......(1)}$$

जहाँ गुणांक $a, b; a_1.., a_2....., a_n$ सभी अचर है तथा Q, x का फलन है। यदि $a+bx = v$ रखे तो,

$$\frac{dv}{dx} = b$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}.\frac{dv}{dx} = b\frac{dy}{dv}$$

तथा $$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[b\frac{dy}{dv}\right] = \frac{d}{dv}\left[b\frac{dy}{dv}\right]\frac{dv}{dx} = b^2\frac{d^2y}{dv^2}$$

. . .   .

. . .   .

इसी प्रकार,

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left[b^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dv^{n-1}}\right]=\frac{d}{dv}\left[b^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dv^{n-1}}\right]\frac{dv}{dx}=b^n\frac{d^n y}{dv^n}$$

इसलिये समीकरण (1) का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$b^n v^n\frac{d^n y}{dx^n}+a_1 b^{n-1}v^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dv^{n-1}}+.....+a_{n-1}bv\frac{dy}{dv}a_n y=Q\frac{(v-a)}{b}$$

जो की समघात रैखिक अवकल समीकरण है इसे सम्बध $v=a+bx=e^z$ से अचर गुणांको वाली रैखिक अवकल समीकरण में परिवर्तित कर आसानी से हल किया जा सकता है। (देखे उदाहरण 8)

उदहारण 1 : हल कीजिए

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+5y=5(\log x)^2$$

हल : माना की $z=\log x$ अर्थात $x=e^z$

अत: दिये हुये समीकरण का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$\left[D(D-1)+3D+5\right]y=5z^2$$

या $$\left[D^2+2D+5\right]y=5z^2$$

इसका सहायक समीकरण $m^2+2m+5=0$ होगा

$$\therefore m=-1\pm 2i$$

अत : पूरक फलन $(C.F)=e^{-z}\left[c_1\cos 2z+c_2\sin 2z\right]$

$$x^{-1}\left[c_1\cos(2\log x)+c_2\sin(2\log x)\right]$$

पुन: विशिष्ट समाकल $(P.I)\frac{1}{D^2+2D+5}5z^2$

$$=\left[1+\frac{D^2+2D}{5}\right]^{-1}z^2$$

$$=\left[1-\frac{2D}{5}-\frac{D^2}{25}+.......\right]z^2$$

$$=\left[z^2-\frac{4z}{5}-\frac{2}{25}\right]$$

$$\left[(\log x^2)-\frac{4}{5}\log x-\frac{2}{25}\right]$$

अत: दिये हुये समीकरण का व्यापक हल होगा

$$y=x^{-1}\left[c_1\cos(2\log x)+c_2\sin(2\log x)\right](\log x)^2-\frac{4}{5}\log x-\frac{2}{25}$$

उदहारण 2: हल कीजिए

$$\left(x^2D^2+4xD+2\right)y=e^x$$

हल : माना की $z=\log x$ अर्थात $x=e^x$

अत: दिये हुये समीकरण का परिवर्तत रूप निम्न होगा

$$\left[D'\left(D'-1\right)+4D'2\right]y=e^{e^z},\left[D'\equiv xD=x\frac{dy}{dx}\right]$$

या $$\left(D'^2+3D'+2\right)y=e^{e^z}$$

इसका सहायक समीकरण $m^2+3m+2=0$ होगा

या $(m+1)(m+2)=0$

$\therefore m=-1-2$

अतः पूरक फलन $(C.F.)=c_1e^{-z}+c_2e^{-2z}=c_1x^{-1}+c_2x^{-2}$

पुन: विशिष्ट समाकल $(P.I.)=\dfrac{1}{(D'+1)(D'+2)}.e^{e^z}$

$$=\left\{\frac{1}{(D'+1)}-\frac{1}{(D'+2)}\right\}e^{e^z}$$

$$=\frac{1}{D'+1}e^{e^z}-\frac{1}{D'+2}e^{e^z}$$

$$=e^{-z}\int e^z.e^{e^z}dz-e^{-2z}\int e^{2z}.e^{e^z}dz$$

$$\left[\therefore\frac{1}{D+\alpha}f(x)=e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}f(x)dx\right]$$

यदि $e^z=t$ ले तो $e^zdz=dt$

$\therefore$ विशिष्ट समाकल $(P.I.)=e^{-z}\int e^tdt-e^{-2z}\int te^tdt$

$$=e^{-z}e^t-e^{-2z}(t-1)e^t$$

$$=e^{-z}e^{e^z}-e^{-2z}.e^ze^{e^z}+e^{-2z}e^{e^z} \qquad \left[\therefore t=e^t\right]$$

$$=e^{-2z}e^{e^z}$$

$$=e^{-2}e^x \qquad \left[\therefore x=e^z\right]$$

अत: दिये हुये समीकरण का व्यापक हल होगा

$$y=c_1x^{-1}+c_2x^{-2}+x^{-2}e^x$$

उदहारण 3 : हल कीजिए

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=2x^2$$

हल : माना की $z=\log x$ या $x=e^z$

$\therefore$ दिये हुये समीकरण का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$\left[D(D-1)-3D+4\right]y = 2e^{2z}$ [जहाँ $d \equiv \dfrac{d}{dz}$]

या $\left[D^2-4D+4\right]y = 2e^{2z}$

अतः इसका सहायक समीकरण $m^2-4m+4=0$ होगा

या $(m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2,2$

अतः पूरक फलन $(C.F.) = (c_1+c_1 z)e^{2z} = (c_1+c_1\log x)x^2$

पुनः विशिष्ट समाकल $(P.I.) = \dfrac{1}{(D-2)^2}2e^{2z}$

$= 2.\dfrac{z^2}{2!}e^{2z} = z^2e^{2z} = x^2(\log x)^2 = (x\log x)^2$

अतः समीकरण का व्यापक, हल होगा।

$y = (c_1+c_2\log x)x^2 + (x\log)^2$

वैकल्पिक विधि :

दिये गये समीकरण में $x\dfrac{d}{dx} = \theta$ रखने पर, समीकरण निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$\left[\theta(\theta-1)-3\theta+4\right]y = 2x^2$

या $\left[\theta^2-4\theta+4\right]y = 2x^2$

अतः इसका सहायक समीकरण $m^2-4m+4=0$ होगा

या $(m-2)^2 = 0$

$\therefore m = 2,2$

अतः पूरक फलन $(C.F.) = (c_1+c_2\log x)x^2$

पुनः विशिष्ट समाकल $(P.I.) = \dfrac{1}{(\theta-2)^2}.2x^2$

$= 2.\dfrac{x^2}{1}\dfrac{(\log x)^2}{2!}$ [$\therefore$ यदि $f(\theta) = (\theta-m)^r\psi(\theta)$ तो

$\dfrac{1}{f(\theta)}x^m = \dfrac{x^m}{\psi(m)}\dfrac{(\log x)^r}{r!}$, जहां $\psi(m) \neq 0$]

$= (x\log x)^2$

अतः समीकरण का व्यापक हल होगा

$y = (c_1+c_2\log x)x^2 + (x\log x)^2$

उदाहरण 4 : हल कीजिए

(i) $\left(x^2D^2+xD+1\right)y=\log x.\sin\left(\log x\right)$

(ii) $\left(x^2D^2-xD+4\right)y=\cos\left(\log x\right)+x\sin\left(\log x\right)$

हल (i) : माना की $z=\log x$ या $x=e^z$

दिये गये समीकरण का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$\left[D'\left(D'-1\right)+D'+1\right]y=z\sin z$ [जहाँ $D'\equiv xD=x\dfrac{d}{dx}$]

या $\left[D^2+1\right]y=z\sin z$

अत: इसका सहायक समीकरण $m^2+1=0$ होगा

$\therefore m=\pm i$

अत: पूरक फलन

$\left(C.F.\right)=c_1\cos z+c_2\sin z=c_1\cos\left(\log x\right)+c_2\sin\left(\log x\right)$

पुन: विशिष्ट समाकल $\left(P.I.\right)=\dfrac{1}{D^2+1}=z\sin z$

$=\dfrac{1}{D'^2+1}ze^{iz}$ का काल्पनिक भाग

$=eiz\dfrac{1}{\left(D^2+i\right)^2+1}z$ का काल्पनिक भाग

$=e^{iz}\dfrac{1}{D'^2+2iD}z$ का काल्पनिक भाग

$=e^{iz}\dfrac{1}{2iD'\left(1+\dfrac{D'}{2i}\right)}z$ का काल्पनिक भाग

$=\dfrac{1}{2i}e^{iz}\dfrac{1}{D'}\left[1+\dfrac{D'}{2i}\right]^{-1}z$ का काल्पनिक भाग

$=\dfrac{1}{2i}e^{iz}\dfrac{1}{D'}.\left[1-\dfrac{D'}{2i}+......\right]z$ का काल्पनिक भाग

$=\dfrac{1}{2i}e^{iz}\dfrac{1}{D'}\left[z-\dfrac{1}{2i}\right]$ का काल्पनिक भाग

$=\dfrac{1}{2i}e^{iz}\left[\dfrac{z^2}{2}-\dfrac{z}{2i}\right]$ का काल्पनिक भाग

$=-i\dfrac{z^2}{4}e^{iz}+\dfrac{ze^{iz}}{4}$ का काल्पनिक भाग

$=-\dfrac{z^2}{4}\cos z+\dfrac{z}{4}\sin z$ ($e^{iz}=\cos z+i\sin z$)

(e^{iz} का वास्तविक भाग $=\cos z$)

(e^{iz} का काल्पनिक भाग $=\sin z$)

$$=-\frac{(\log x)^2}{4}\cos(\log x)+\frac{1}{4}\log x\sin(\log x) \qquad \text{..........(2)}$$

अतः समीकरण का व्यापक हल

$$y=C.F.+P.I. \text{ होगा}$$

जहाँ $C.F.$ तथा $P.I.$ (1) व (2) से प्राप्त होते है।

(ii) माना कि $z=\log x$ अर्थात $x=e^z$

$\therefore$ दिये हुये समीकरण का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$\left[D'(D'-1)-D'+4\right]y=z\sin x \text{ जहाँ } \left[D'\equiv xD=x\frac{d}{dx}\right]$$

या $\left[D'^2-2D'+4\right]y=\cos z+e^z\sin z$

इसका सहायक समीकरण $m^2-2m+4=0$ होगा

$$\therefore m=-1\pm\sqrt{3}i$$

अतः पूरक फलन $(C.F.)=e^z\left(c_1\cos\sqrt{3}z+c_2\sin\sqrt{3}z\right)$

$$=x\left[c_1\cos\left(\sqrt{3}\log x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{3}\log x\right)\right] \qquad \text{.......(1)}$$

पुनः विशिष्ट समाकल $(P.I.)=\frac{1}{D'^2-2D'+4}\left[\cos z+e^z\sin z\right]$

$$=\frac{1}{-1-2D'+4}\cos z+e^z\,\frac{1}{(D'+1)^2-2(D'+1)4}\sin z$$

$$=\frac{3+2D}{9-4D'^2}\cos z+e^z.\frac{1}{D'^2+3}\sin z$$

$$=\frac{3\cos z-2\sin z}{9+4}+e^z\,\frac{1}{-1^2+3}\sin z$$

$$=\frac{1}{13}[3\cos z-2\sin z]+\frac{e^z}{2}\sin z$$

$$=\frac{1}{13}\left[3\cos(\log x)-2\sin(\log x)\right]+\frac{x}{2}\sin(\log x)$$

अतः समीकरण का व्यापक हल $y=C.F.+P.I.$ होगा, जहाँ $C.F.$ तथा $P.I.$ क्रमशः (1) व (2) से प्राप्त होते है।

उदाहरण (5) : हल कीजिए

(i) $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{6y}{x^3}$

(ii) $x^2D^2-(2m-1)xD+\left(m^2+n^2\right)y=n^2x^m\log x$

(iii) $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2y=10\left(x+\frac{1}{x}\right)$

हल (1) : दिया गया अवकल समीकरण $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-6y=0$

माना कि $z=\log x$ या $x=e^z$

$\therefore$ दिये गये समीकरण का परिवर्तित रूप निम्न होगा ।

$$\left[D(D-1)(D-2)-6\right]y=0$$

या $$\left[D^3-3D^2+2D-6\right]y=0$$

या $$(D-3)\left(D^2+2\right)y=0$$

इसका सहायक समीकरण $(m-3)\left(m^2+2\right)=0$ होगा

$$\therefore m=3,\pm\sqrt{2}i$$

अत: समीकरण का व्यापक हल होगा

$$y=c_1e^{3z}e^{0z}+\left(c_1\cos\sqrt{2}z+c_3\ \sin\sqrt{2}z\right)$$

$$=c_1x^3+\left[c_2\cos\left(\sqrt{2}\log x\right)+c_3\sin\left(\sqrt{2}\log x\right)\right]$$

(ii) माना की $z=\log x$ अर्थात $x=e^z$

$\therefore$ अत: दिया गया अवकल समीकरण निम्न रूप का होगा

$$\left[D'(D'-1)-(2m-1)D'+\left(m^2+n^2\right)\right]y=n^2e^{mz}.z$$ [जहाँ $D'\equiv xD=x\dfrac{d}{dx}$]

इसका सहायक समीकरण

$$D^2-2mD+m^2+n^2=0$$ होगा

या $$(D'-m)^2+n^2=0$$

$$\therefore D'=m\pm in$$

अत: पूरक फलन $(C.F.)=e^{mz}c_1\cos\left(nz+c_2\right)$

$$=e^mc_1\cos\left(n\log x+c_2\right)$$

पुन: विशिष्ट समाकल $(P.I)=\dfrac{1}{(D'-m)^2+n^2}n^2ze^{mz}$

$$=n^2e^{mz}\frac{1}{(D'+m-m)^2+n^2}.z$$

$$=n^2e^{mz}\frac{1}{D'^2+n^2}.z$$

$$=n^2e^{mz}.\frac{1}{n^2}\left[1+\frac{D'^2}{n^2}\right]^{-1}z$$

$$=e^{mz}\left[1-\frac{D'^2}{n^2}+......\right]z$$

$$=e^{mz}.z=x^m\log x$$

अतः समीकरण का व्यापक हल निम्न होगा

$$y = x^m c_1 \cos\left(n \log x + c_2\right) + x^m \log x$$

(iii) दिया गया अवकल समीकरण है

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y = 10\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

माना कि $z = \log x$ अर्थात $x = e^z$

$\therefore$ दिये गये अवकल समीकरण का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$\left[D(D-1)(D-2) + 2D(D-1) + 2\right] y = 10\left(e^z + e^{-z}\right)$$

या $$\left(D^3 - D^2 + 2\right) y = 10\left(e^z + e^{-z}\right)$$

इसका सहायक समीकरण $m^3 - m^2 + 2 = 0$ होगा।

या $$(m+1)\left(m^2 + 2m + 2\right) = 0$$

$$\therefore m = -1. m = 1 \pm i$$

अतः पूरक फलन $(C.F.) = c_1 e^{-z} + e^z \left(c_2 \cos z + c_3 \sin z\right)$

$$= \frac{c_1}{x} + x\left[c_2 \cos(\log x) + c_3 \sin(\log x)\right]$$

पुनः विशिष्ट समाकल $(P.I.) = \dfrac{1}{D^3 - D^2 + 2} 10\left(e^z + e^{-z}\right)$

$$= 10 \frac{1}{D^3 - D^2 + 2} e^z + 10. \frac{1}{D^3 - D^2 + 2} e^{-z}$$

$$= 10 \frac{1}{1^3 - 1^2 + 2} e^z + 10. \frac{1}{(D+1)\left(D^2 + 2D + 2\right)} e^{-z}$$

$$= 5e^z + 10. \frac{1}{(D+1)}\left[\frac{e^{-z}}{5}\right]$$

$$= 5e^z + 2ze^{-z}$$

$$= 5x + \frac{2}{x} \log x$$

अतः समीकरण का व्यापक हल होगा

$$y = \frac{c_1}{x} x\left[c_2 \cos(\log x) + c_3 \sin(\log x)\right] + 5x + \frac{2}{x} \log x$$

उदाहरण 6 : हल कीजिए

(i) $$x^4 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} - x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 1$$

(ii) $$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{4}{x} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{5}{x^2} \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^3} = 1$$

हल. (i) दिये गये अवकल समीकरण को x से विभाजित कर समघाती रैखिक अवकल समीकरण में परिवर्तित किया जा सकता है।

$$\therefore \frac{d^3y}{dx^3}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x}$$

माना की $z=\log x$ अर्थात $x=e^z$

अत: समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है,

$$\left[D(D-1)(D-2)+2D(D-1)-D+1\right]y=e^z \qquad \text{[जहाँ } D\equiv\frac{d}{dz}\text{]}$$

या $\qquad \left(D^3-D^2-D+1\right)y=e^{-z}$

या $\qquad (D-1)^2(D+1)y=e^{-z}$

अत: इसका सहायक समीकरण $(m-1)^2(m+1)=0$ होगा

$$\therefore m=1.1,-1$$

इसलिये पूरक फलन $(C.F.)=(c_1+c_2z)e^z+c_3e^{-z}$

$$=(c_1+c_2\log x)x+c_3x^{-1}$$

पुन: विशिष्ट समाकल $\qquad (P.I.)=\frac{1}{(D-1)^2(D+1)}e^{-z}=\frac{ze^{-z}}{4}=\frac{1}{4}x^{-1}$

अत: दिये हुये समीकरण का व्यापक हल होगा

$$y=(c_1+c_2\log x)x+c_3x^{-1}+\frac{1}{4}x^{-1}\log x$$

(ii) यहीं दिया हुआ समीकरण समघाती रैखिक अवकल समीकरण रूप में नही है, परन्तु इसे x^3 से गुणा कर समघाती रूप में बदला जा सकता है।

$$\therefore x^3\frac{d^3y}{dx^3}4x^2\frac{d^2y}{dx^2}5x\frac{dy}{dx}-2y=x^3$$

माना कि $z=\log x$ या $x=e^x$

$\therefore$ दिये हुये समीकरण का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$\left[D(D-1)(D-2)-4D(D-1)+5D-2\right]y=e^{3z}$$

या $\qquad \left[D^3-7D^2+11D-2\right]y=e^{3z}$

इसका सहायक समीकरण $m^3-7m^2+11m-2=0$ होगा

या $\qquad (m-2)\left(m^2-5m+1\right)=0$

$$\therefore m=2,\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right),\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)$$

अत: पूरक फलन $(C.F.)=c_1e^{2z}+c_2e^{\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{21}\right)z}+c_3e^{\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{21}\right)z}$

पुन: विशिष्ट समाकल $\qquad (P.I.)=\frac{1}{(D-2)\left(D^2-5D+1\right)}e^{3z}$

$$= \frac{e^{3z}}{(3-2)(9-15+1)} = \frac{e^{3z}}{-5}$$

अतः समीकरण का व्यापक हल होगा

$$y = c_1 e^{2z} + c_2 e^{\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})z} + c_3 e^{\frac{1}{2}(5-\sqrt{21})z} - \frac{1}{5} e^{3z}$$

$$y = c_1 x^2 + x^{\frac{5}{2}} \left[c_2 x^{\frac{1}{2}\sqrt{21}} + c_3 x^{-\frac{1}{2}\sqrt{21}} \right] - \frac{x^3}{5}$$

उदाहरण 7 (i) : निम्न अवकल समीकरण

$2x^2 y \frac{d^2y}{dx^2} + 4y^2 = x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx}$ को समघात अवकल समीकरण मे परिवर्तित करने

के लिये $y = u^2$ प्रतिस्थापित कर हल करो।

(ii) निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए

$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} 4y = x$,दिया हुआ है।

$y = 0$ जबकि $x = 1$, तथा $y = e^2$ जबकि $x = e$

हल : (i) दिया गया अवकल समीकरण है

$$2x^2 y \frac{d^2y}{dx^2} + 4y^2 = x^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx} \qquad \text{.......(1)}$$

यदि $y = u^2$ ले तो, $\frac{dy}{dx} = 2u\frac{du}{dx}$

तथा $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[2u\frac{du}{dx}\right] = 2\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2u\frac{d^2u}{dx^2}$

अतः समीकरण (1) का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$2x^2u^2\left[2\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2u\frac{d^2u}{dx^2}\right] + 4u^4 = x^2.4u^2\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2xu^2.2u\frac{du}{dx}$$

या $x^2 \frac{d^2u}{dx^2} - x\frac{du}{dx} + u = 0$ [समघात रैखिक अवकल समीकरण]................(2)

अब माना की $z = \log x$ अर्थात $x = e^z$

अतः समीकरण (2) का रूप निम्न होगा

$$\left[D(D-1) - D + 1\right]u = 0$$

या $(D^2 - 2D + 1)u = 0$

या $(D-1)^2 u = 0$

इसका सहायक समीकरण $(m-1)^2=0$ होगा

$$\therefore m=1,1$$

अत: समीकरण का पूरक फलन $(C.F.)=(c_1+c_2z)e^z=(c_1+c_2\log x)x$

इसलिए समीकरण का व्यापक हल होगा

$$u=(c_1+c_2\log x)x$$

या $\qquad y=u^2=x^2(c_1+c_2\log x)^2$

(ii) माना की $z=\log x$ अर्थात $x=e^z$

$\therefore$ दिये गये समीकरण का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$\left[D(D-1)-3D+4\right]y=e^z \quad \text{[जहाँ } D\equiv\frac{d}{dz}\text{]}$$

या $\qquad \left[D^2-4D+4\right]y=e^z$

अत: इसका सहायक समीकरण $m^2-4m+4=0$ होगा

या $\qquad (m-2)^2=0$

$$\therefore m=2,2$$

अत: पूरक फलन $(C.F.)=(c_1+c_2z)e^{2z}$

$$=(c_1+c_2\log x)x^2$$

तथा विशिष्ट समाकल $(P.I.)=\dfrac{1}{(D-2)^2}e^z=e^z=x$

अत: समीकरण का व्यापक हल निम्न होगा

$$y=(c_1+c_2\log x)x^2+x$$

परन्तु $\qquad y=0$ जबकि $x=1$

$$\therefore 0=c_1+1 \text{ या } c_1=-1$$

तथा $\qquad y=e^2$ जबकि $x=e$

$$\therefore e^2=(c_1+c_2)e^2+e$$

या $\qquad e=(-1+c_2)e+1$

$$\therefore c_2=\frac{2e-1}{e}=2-e^{-1}$$

अत: समीकरण का हल निम्न होगा

$$y=\left[-1+\left(2-e^{-1}\right)\log x\right]x^2+x$$

उदाहरण 8 : निम्न लिखित अवकल समीकरणो को हल कीजिए-

(i) $(3x+2)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3(3x+2)\dfrac{dy}{dx}-36y=3x^2+4x+1$

(ii) $(x+1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+(x+1)\dfrac{dy}{dx}=(2x+3)(2x+4)$

हल (i) : माना कि $3x+2=e^z$ अर्थात $z=\log(3x+2)$

$\therefore$ दिये हुये समीकरण का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$\left[3^2D(D-1)+3.3D-36\right]y=3\left(\frac{e^z-2}{3}\right)^2+4\left(\frac{e^z-2}{3}\right)+1$$ [जहाँ $D\equiv\dfrac{d}{dz}$]

या $$\left[9D^2-36\right]y=\frac{e^{2z}-1}{3}$$

अत: इसका सहायक समीकरण $9\left(m^2-4\right)=0$ होगा

$$\therefore m=\pm2$$

इसलिए पूरक फलन $(C.F.)=c_1e^{2z}+c_2e^{-2z}=c_1(3x+2)^2+c_2(3x+2)^{-2}$

तथा विशिष्ट समाकल $(P.I.)=\dfrac{1}{9\left(D^2-4\right)}\left[\dfrac{e^{2z}-1}{3}\right]$

$$=\frac{1}{27}.\frac{1}{D^2-4}e^{2z}-\frac{1}{27}\frac{1}{D^2-4}e^{0z}$$

$$=\frac{1}{27}.z.\frac{1}{2D}e^{2z}-\frac{1}{27}\frac{1}{0-4}$$

$$=\frac{z}{54}\int e^{2z}dz+\frac{1}{108}$$

$$=\frac{z}{54}.\frac{e^{2z}}{2}+\frac{1}{108}$$

$$=\frac{ze^{2z}+1}{108}$$

$$=\frac{\log(3x+2).(3x+2)^2+1}{108}$$

अत: समीकरण का व्यापक हल होगा

$$y=c_1(3x+2)^2+c_2(3x+2)^{-2}+\frac{1}{108}\left[(3x+2)^2.\log(3x+2)+\right]$$

(ii) माना कि $(x+1)=e^z$ अर्थात $z=\log(x+1)$

$\therefore$ दिये हुये समीकरण का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$\left[D(D+1)+D\right]y=\left(2e^z+1\right)\left(2e^z+2\right)$$ [जहाँ $D\equiv\dfrac{d}{dz}$]

या $$D^2y=2\left(2e^z+1\right)\left(e^z+1\right)$$

अत: इसका सहायक समीकरण $m^2=0$ होगा (m में द्विघाती होने पर)

$m = 0, 0$ (ध्यान दीजिये)

इसलिये पूरक फलन $(C.F.) = (c_1 + c_2 z) e^{0z} = c_1 + c_2 \log(x+1)$

तथा विशिष्ट समाकल $(P.I.) = \frac{1}{D^2}.2(2e^z + 1)(e^z + 1)$

$$= \frac{1}{D^2}\left[4e^{2z} + 6e^z + 2\right]$$

$$= e^{2z} + 6e^z + z^2$$

$$= (x+1)^2 + 6(x+1) + \left[\log(x+1)\right]^2$$

$$= x^2 + 8x + 7 + \left[\log(x+1)\right]^2$$

अत: समीकरण का व्यापक हल होगा

$$y = c_1 + c_2 \log(x+1) + x^2 + 8x + 7 + \left[\log(x+1)\right]^2$$

या $y = c'_1 + c'_2 \log(x+1) + x^2 + 8x + \left[\log(x+1)\right]^2$, जहाँ $c'_1 = c'_1 + 7$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-

1. अवकल समीकरण

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = Q(x)$$

में स्वतन्त्र चर x को एक नये चर z से सम्बन्ध $x = e^z$ द्वारा अचर गुणांकों वाले रैखिक अवकल समीकरण में परिवर्तित किया जा सकता है (सत्य/असत्य)

2. अवकल समीकरण

$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$ के व्यापक हल में विशिष्ट समाकल ....होगा।

3. समघात रैखिक अवकल समीकरण

$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x^2$ के व्यापक हल मे पूरक फलन ....तथा विशिष्ट समाकल....................होगा।

4. समघात अवकल समीकरण

$x\frac{dy}{dx} + y = x$ का व्यापक हल ....होगा

5. समघात अवकल समीकरण $(x^2 + D^2 + 2xD - 2)y = 0$ का व्यापक हल ....होगा

7.3 सारांश

समघात रैखिक अवकल समीकरणों को स्वतन्त्र चर x तथा एक नये चर z में संबध $x = e^z$ द्वारा अचर गुणांको वाले रैखिक अवकल समीकरण में परिवर्तित किया जाता है, इसके पश्चात ईकाई 6 में दी गयी विधियों द्वारा हल करके अन्त में $z = \log x$ रखकर व्यापक हल प्राप्त करते हैं।

कई अवकल समीकरणों को स्वतन्त्र चर x तथा z में सम्बन्ध $a + bx = e^z$ प्रतिस्थापित कर अचर , गुणांको वाले रैखिक अवकल समीकरणों में परिवर्तित कर व्यापक हल प्राप्त किया जा सकता है समघात रैखिक अवकल समीकरणों को वैकल्पिक विधि द्वारा भी हल किया जा सकता है।

7.4 शब्दावली

समघात रैखिक अवकल समीकरण	Homogeneous linear differential equation
समाकल गुणांक	Integrating factor
पूरक फलन	Complementary function
विशिष्ट समाकल	Particular integral
व्यापक हल	General solution
समानेय	Reducible
सहायक समीकरण	Auxillary equation

7.5 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. सत्य 2. 0 3. $c_1 x + c_2 x^{-1}, \frac{x^3}{3}$ 4. $y = \frac{c_1}{x} + \frac{x}{2}$

5. $y = c_1 x^{-2} + c_2 x$

7.6 अभ्यास प्रश्न

निम्नलिखित अवकल समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए

1. 1. $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = x$

उत्तर $y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + \frac{x}{2}$

2. $x^2 \frac{d^2 y}{dx_2} - x \frac{dy}{dx} + 2y = x \log x$

उत्तर $y = x\left[c_1 \cos(\log x) + c_2 \sin(\log x)\right] + x \log x$

3. $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y = 10\left(x + \frac{1}{x}\right)$

उत्तर $y = c_1 x^{-1} + x\left[c_2 \cos\left(\log x\right) + c_3 \sin\left(\log x\right)\right] + 5x + 2x^{-1} \log x$

4. $(1+x)^2 \dfrac{d^2 y}{dx_2} + (1+x)\dfrac{dy}{dx} + y = 4\cos\log\left(x+1\right)$

उत्तर $y = c_1 \cos\left[\log\left(1+x\right)\right] + c_2 \sin\left[\log\left(1+x\right)\right] + 2\log\left(1+x\right)\sin\left[\log\left(1+x\right)\right]$

5. $\left(x^2 D^2 - 3xD + 5\right) y = \sin\left(1+x\right)$

उत्तर $y = x^2\left[c_1 \cos\left(\log x\right) + c_2 \sin\left(\log x\right)\right] + \dfrac{1}{8}\left[\sin\left(\log x\right) + \cos\left(\log x\right)\right]$

6. $x^3 \dfrac{d^3 y}{dx^3} + 3x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 8y = 65\cos\left(\log x\right)$

उत्तर $y = c_1 x^{-2} + x\left[c_2 \cos\left(\sqrt{3}\log x\right) + c_3 \sin\left(\sqrt{3}\log x\right)\right] + 8\cos\left(\log x\right) - \sin\left(\log x\right)$

7. $(x+a)^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} - 4(x+a)\dfrac{dy}{dx} + 6y = x$

उत्तर $y = c_1 (x+a)^2 + c_2 (x+a)^3 + \dfrac{1}{2}(x+a) - \dfrac{a}{6}$

8. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12\log x}{x^2}$

उत्तर $c_1 + c_2 \log\left(1+x\right) + 2\left(1+x\right)^3$

9. $(1+2x)\dfrac{d^2 y}{dx^2} - 6(1+2x)\dfrac{dy}{dx} + 16y = 8\left(1+2x\right)^2$

उत्तर $y = \left(1+2x\right)^2 \left[c_1 + c_2 \log\left(1+2x\right) + \left\{\log(1+2x)\right\}^2\right]$

10. $16(x+1)^4 \dfrac{d^4 y}{dx^4} + 96(x+1)^3 \dfrac{d^3 y}{dx^3} + 104(x+1)^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2}$

$+8\left(x+1\right)\dfrac{dy}{dx} + y = x^2 + 4x + 3$

उत्तर [$y = \left\{c_1 + c_2 \log\left(1+x\right)\right\}(1+x)^{\frac{1}{2}} + \left\{c_3 + c_4 \log\left(1+x\right)\right\}\left(1+x\right)^{-\frac{1}{2}}$

$+\dfrac{\left(1+x\right)^2}{225} + \dfrac{2}{9}\left(1+x\right)$]

इकाई-8 : युगपत अवकल समीकरण (Simultaneous Differential Equation)

इकाई की रूपरेखा

8.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ्ने के बाद आप एक स्वतन्त्र चर तथा दो या दो से अधिक चर वाले साधारण अवकल समीकरणों का हल ज्ञात कर सकेंगे, जिनमें युगपत् अवकल की संख्या आश्रित चरों की संख्या के बराबर होती है। इस इकाई में प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के, अवकल समीकरणों

को लघु विधियों से भी हल करेंगे एवम् आप जान पायेंगे की $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$

ज्यामितीय अर्थ क्या है

8.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम साधारण रैखिक अवकल समीकरणों का अध्ययन करेंगे जिनमें युगपत् अवकल समीकरणों की संख्या, आश्रित चर राशियो की संख्या के बराबर होती है। इस प्रकार के समीकरण अचर गुणांकों वाले युगपत् रैखिक अवकल समीकरण कहलाते है। इस इकाई में ही हम प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के तीन चर वाले युगपत् अवकल समीकरणों को हल करने की लघु विधियों का भी अध्ययन करेंगे ।

8.2 युगपत अवकल समीकरण

युगपत अवकल समीकरण निकाय को सामान्य रूप से निम्न प्रकार व्यक्त लिया जा सकता है-

$$f_1(D)x + f_2(D)y = f(t)$$

तथा $$g_1(D)x + g_2(D)y = g(t)$$

जहाँ x तथा y आश्रित चर राशियाँ तथा सकारक $D \equiv \frac{d}{dt}$ एवम् $f_{1,} f_{2,} g_1$ तथा g_2, D में बहुपद और $f(t), g(t)$ स्वतन्त्र चर t के फलन है ।

8.3 युगपत् अवकल समीकरणों को हल करने की विधियाँ

अचर गुणांक वाले युगपत् अवकल समीकरणों को कई बार युगपत् बीजीय समीकरणों की तरह हल किया जा सकता है, जो कि प्रतीकात्मक अथवा विलोपन विधि कहलाती है । युगपत् अवकल समीकरणों को अवकलन विधि द्वारा भी हल किया जा सकता है ।हम यहाँ दोनों विधियों का अध्ययन करेगें ।

8.3.1 प्रतीकात्मक विधि (अथवा विलोपन विधि)

युगपत् समीकरण निकाय का सामान्य रूप निम्न है-

$$f_1(D)x + f_2(D)y = f(t) \qquad ......(1)$$

$$g_1(D)x + g_2(D)y = g(t) \qquad ......(2)$$

उपरोक्त समीकरण (1) तथा (2) से y का विलोप करने के लिये समीकरण (1) को g_2 D तथा समीकरण (2) को $f_2(D)$ से सक्रिया कर घटाने पर

$$\left[f_1(D)g_2(D) - f_2(D)g_1(D)\right]x = \left[g_2(D)f(t) - f_2(D)g(t)\right] \qquad ......(3)$$

जो कि x और t में एक अचर गुणांको वाला एक घात अवकल समीकरण है, जिसे हल कर हम x ज्ञात कर सकते है । अब x के इस मान को समीकरण (1) या समीकरण (2) में रखकर y का मान ज्ञात किया जा सकता है,

यहाँ हम पहले समीकरण (1) तथा (2) से चर x का विलोप कर y तथा t में रैखिक समीकरण प्राप्त कर, चर भी ज्ञात कर सकते है, जिसके मान को समीकरण (1) या समीकरण (2) में रखकर x ज्ञात किया जा सकता है-

टिप्पणी1 : यहाँ $f_2(D)$ और $g_2(D)$ अचर गुणाँक वाले फलन है इसलिये

$$\left[f_2(D)g_2(D) \equiv g_2(D)f_2(D)\right]$$

टिप्पणी 2 : समीकरण (3) को सारणिक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है-

$$\begin{vmatrix} f_1(D) f_2(D) \\ g_1(D) g_2(D) \end{vmatrix} x = -\begin{vmatrix} f_2(D) f(t) \\ g_2(D) g(t) \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार,

$$\begin{vmatrix} f_1(D) f_2(D) \\ g_1(D) g_2(D) \end{vmatrix} y= \begin{vmatrix} f_1(D) f(t) \\ g_1(D) g(t) \end{vmatrix}$$

यह हल तभी सम्भव है जबकि-

$$\begin{vmatrix} f_1(D) f_2(D) \\ g_1(D) g_2(D) \end{vmatrix} \neq 0$$

टिप्पणी 3 : युगपत समीकरण (1) तथा (2) के व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या सारणिक

$\begin{vmatrix} f_1(D) f_2(D) \\ g_1(D) g_2(D) \end{vmatrix} \neq 0$ के व्यंजक में D की घात के बराबर होती है ।

8.3.2 अवकलन विधि

कई बार युगपत् अवकल समीकरणों में अवकलन कर एक आश्रित चर का किया जा सकता है । यदि युगपत् अवकल समीकरणों में t,x,y, $\frac{dy}{dt}$ और $\frac{dx}{dt}$ विद्यमान हो तो हम इनका t के सापेक्ष अवकलन कर दो समीकरण ओर प्राप्त करते है जिनमें t,x,y, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt}, \frac{d^2y}{dt}$ विद्यमान होगें, प्रकार प्राप्त चार समीकरणों से हम y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt}$ का विलोपन कर x तथा t में अवकल समीकरण प्राप्त करते हैं जिसको हल कर x का मान प्राप्त करते हैं, इसके पश्चात् दिये गये समीकरणों में से किसी एक में x का मान प्रतिस्थापित कर y का मान प्राप्त कर सकते है। यहाँ हम पहले x, $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt}$ का भी विलोपन कर y का मान ज्ञात कर तत्पश्चात् x का मान ज्ञात कर सकते है। यह आगे दिये गये उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगा।

उदाहरण 1 : हल कीजिए

$$\frac{d^2x}{dt}-3x-4y=0; \frac{d^2x}{dt}+x+y=0$$

हल: यहाँ हम दिये गये समीकरण निकाय को प्रतीकात्मक विधि से हल करेंगे, संकारक $\frac{d}{dt} \equiv D, \frac{d^2}{dt^2} \equiv D^2$ के प्रयोग से दिये हुये समीकरणों को प्रतीकात्मक में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है-

$(D^2 - 3)x-4y=0$ ....(1)

$X+(D^2+1)y=0$ ....(2)

x ज्ञात करना: समीकरण (1) को (D^2+1) से सक्रिया करने तथा (2) को 4 से गुणा करने पर

$(D^2+1)(D^2-3)x - 4(D^2+1)),y=0$ ....(3)

$4x+4(D^2+1)y = 0$ ....(4)

अब (3) व (4) को जोड़ने पर

$\{(D^2+1)(D^2-3)+4\}x = 0$

या $(D^4-2D^2+1)x = 0$

या $(D^2-1)x = 0$ ....(5)

यह एक अचर गुणांकों वाला रैखिक समीकरण है जिसका सहायक समीकरण (5) D = $\pm1, \pm1$ है

अत: (5) का व्यापक हल

x = $(C_1+C_2t)e^t + (C_3+C_4t)e^{-1}$ ....(6)

y ज्ञात करना: y का मान ज्ञात करने के लिये, x के मान को समीकरण (1) अथवा समीकरण (2) में रखा जा सकता है [समीकरण (2) में x का मान रखने पर हमें y में दो कोटि का अवकल समीकरण प्राप्त होगा, जिसे समाकलन कर ज्ञात करना होगा, लेकिन यदि x का मान समीकरण (1) में रखे तो y का मान बगैर समाकलन किये हुये प्राप्त कर सकते है] हम x का मान समीकरण (6) से समीकरण

(1) में रखेंगे; जिसके लिये हमें $\frac{d^2y}{dt^2}$ की आवश्यकता होगी, समीकरण (6) से (x का दो बार अवकलन करने पर)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (c_1+c_2t)e^t + (c_3+c_4t)e^{-1} + c_2 e^t - c_4 e^{-1} + c_2 e^t - c_4 - e^{-1}$$

समीकरण (1) में x तथा $\frac{d^2x}{dt^2}$ का मान रखने पर,

$$\left[(c_1+c_2t)e^t + (c_3+c_4t)e^{-t}\, 2c_2e^t - 2c_4e^{-t}\right]$$

$$-3\left[(c_1+c_2t)e^t + (c_3+c_4t)e^{-t}\right] - 4y = 0$$

$\therefore y = \frac{1}{2}(c_2-c_1-c_2t)e^t - \frac{1}{2}(c_3+c_4+c_4t)e^{-1}$ ....(7)

समीकरण (6) व (7) मिलकर दिये गये अवकल समीकरणों का व्यापक हल प्रदान करते है ।

टिप्पणी 1 : यहाँ $\begin{vmatrix} f_1(D) f_2(D) \\ g_1(D) g_2(D) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D^2-3-4 \\ 1D^2+1 \end{vmatrix}$

$=(D^2-3)(D^2+1)+4$

$=D^2 -2D+1 \neq 0$

जो कि D में चार घात का बहुपद है अतएव अवकल समीकरणों के व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या चार होगी ।

टिप्पणी 2 : समीकरण (1) व (2) से पहले x का विलोप कर y का मान ज्ञात करने पर, $(D^4-2D^2+1)y=0 \Rightarrow \left(D^2-1\right)^2 y=0$ इसकी सहायक समीकरण $\left(D^2-1\right)^2$ = 0 से D= $\pm 1 \pm 1 \Rightarrow y=(c'_1+c'_2)e^t+(c'_2+c'_4)e^{-1}$ ....(8)

जहाँ c'_1, c'_2, c'_3 तथा c'_4 स्वेच्छ अचर है ।

समीकरण (7) से प्राप्त स्वेच्छ अचर c'_1, c'_2, c'_3, c'_4 तथा समीकरण (8) से स्वेच्छ अचर c'_1, c'_2, c'_3, c'_4

आपस में स्वतन्त्र नहीं हैं क्योंकि इन्हें एक दूसरे के पदों में व्यक्त किया सकता है । यहाँ x, $\frac{d^2x}{dt^2}$ तथा y के मान क्रमशः समीकरण (6) तथा (7) से समीकरण (1) में रखने पर

$$\left[(c_1+c_2t)e^t+(c_3+c_4t)e^{-1}+c_2e^t-c_4e^{-1}+c_2e^t-c_4e^{-1}\right]$$

$$-\ 3\left[(c_1+c_2t)e^t+(c_3+c_4t)e^{-1}\right]$$

$$-4\left[(c_1+c_2t)e^t+(c_3+c_4t)e^{-1}\right]=0$$

$$\Rightarrow \left[2c_2-2c_1-2c_2t-4c_1-4c_2t\right]e^t-\left[2c_3+2c_4t+2c_4+4c_3+4c_4t\right]\ e^{-t}\ =\ 0$$

जो कि t में एक सर्वसमिका है अर्थात यह समीकरण सर्वथा सन्तुष्ट चाहिए

$\therefore (2c_2-2c_1-4c_1)-2(c_2+2c_2)t\ =\ 0$

तथा $(2c_3+2c_4+4c_3)+2(c_4+2c_4)t\ =\ 0$

$\Rightarrow 2c_2-2c_1-4c_1=0, c_2+2c_2=0$

तथा $2c_3+2c_4+4c_3,=0, c_4+2c_4=0$

$$\Rightarrow c_1=\frac{1}{2}\ (c_2-c_1), c_2=-\frac{1}{2}\ c_2, c_3=-\frac{1}{2}\ \left(c_3+c_4\right), c_4=-\frac{1}{2}\ c_4$$

अब c_1', c_2', $c_3' c_4'$, के इन मानों को समीकरण (8) में रखने पर

y=$\left[c_2-c_1-c_2t\right]\ e^t-\frac{1}{2}\left[c_3+c_4+c_4t\right]e^{-1}$ प्राप्त होगा जो की समीकरण (7) के समान है ।

उदाहरण 2 : हल कीजिए

$$\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t$$

$$\frac{dy}{dt}-x+3y=e^{2t}$$

हल: दिये हुये समीकरणों को प्रतीकात्मक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है-

$(D+5)x+y=e^t$ ....(1)

$-x+(D+3)y=e^{2t}$ ....(2)

समीकरण (1) को (D+3) से सक्रिया कर समीकरण (2) को घटाने पर

$$\{(D+3)(D+5)+1\}x=(D+3)e^t-e^{2t}$$

या $\{(D+8D+16)\}x=4e^t-e^{2t}$ ....(3)

(3) का सहायक समीकरण होगा-

$D^2+8D+16=0$ या $D=-4,4$

$\therefore$पूरक फलन (C.F)= $(c_1+c_2t)e^{-4t}$

तथा विशिष्ट समाकल (*P.I.*) = $\dfrac{1}{(D^2+8D+16)}\{4e^t-e^{2t}\}$

$$=\frac{4}{25}e^t-\frac{1}{36}e^{2t}$$

$x=(c_1+c_2t)e^{-4t}+\dfrac{4}{25}e^t-\dfrac{1}{36}e^{2t}$ ....(4)

तथा $\dfrac{dy}{dt}=-4(c_1+c_2t)e^{-4t}+\dfrac{4}{25}e^t-\dfrac{1}{18}e^{2t}+c_2e^{-4t}$ ......(5)

अब समीकरण (4) व (5) से x तथा $\dfrac{dy}{dt}$ का मान समीकरण (1) मे रखने पर

$y=-\dfrac{dy}{dx}-5x+e^t$

या $y=-(c_1+c_2+c_2t)e^{-4t}+\dfrac{1}{25}e^t+\dfrac{7}{36}e^{2t}$ ....(6)

समीकरण (4) व (6) मिलकर दिये गए अवकल समीकरणों के व्यापक हल प्रदान करते है।

अवकलन विधि द्वारा हल : समीकरण (1) का *t* के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\dfrac{d^2x}{dt^2}+5\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=e$

$\Rightarrow\dfrac{dy}{dt}=e^t-\dfrac{d^2x}{dt^2}-5\dfrac{dy}{dt}$ ....(7)

पुनः समीकरण (1) से, $y=e^t-\dfrac{dy}{dx}-5x$ ....(8)

समीकरण (7) व (8) से y तथा $\dfrac{dy}{dx}$ का मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\left[e^t-\frac{d^2x}{dt^2}-5\ \frac{dy}{dx}\right]-x+3\quad\left[e^t\ -5x\frac{dy}{dx}\right]=e^{2t}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+8\frac{dx}{dt}+16x=4e^t-e^{2t} \qquad ....(9)$$

जिसका सहायक समीकरण $D^2+8D+16$ से D=-4,4 अब इसको प्रथम विधि की तरह हल किया जा सकता है ।

उदाहरण 3 : हल कीजिए

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt}=-\omega y; \frac{dy}{dt}=\omega x$$

हल : दिये हु ये समीकरणों को प्रतीकात्मक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है-

$$Dx=\omega y=0 \qquad ....(1)$$

$$-\omega x+Dy=0 \qquad ....(2)$$

y को विलोप करने पर

$$\left(D^2+\omega^2\right)x=0 \qquad ....(3)$$

इसकी सहायक समीकरण, $\left(D^2+\omega^2\right)=0$ से $D=\pm\omega i$

$$\therefore x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t \qquad ....(4)$$

अब $y=-\frac{1}{\omega}\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\frac{1}{\omega}\left[-c_1\omega\sin\omega t+c_2\omega\cos\omega t\right]$

$$=c_1\sin\omega t-c_2\cos\omega t \qquad ....(5)$$

समीकरण (4) व (5) मिलकर दिये हुये अवकल समीकरणों का व्यापक हल प्रदान करते है ।

अवकलन विधि द्वारा हल : समीकरण (1) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega\frac{dx}{dt}=0$$

$\therefore D^2x+\omega(\omega x)=0$ [समीकरण (2) से]

या $(D^2+\omega^2)x=0$

अब हम इसे ऊपर दिये गये तरीके से हल कर सकते है ।

टिप्पणी : समीकरण (4) व समीकरण (5) को वर्ग करके जोड़ने पर

$$x^2+y^2=c_1^{\,2}+c_2^{\,2}$$

अतः यहीं पर यह प्रदर्शित होता है कि बिन्दू (x,y) वृत (6) पर स्थित होगा ।

उदाहरण 4 : हल कीजिए

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-2y=\cos t-7\sin t$$

$$\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+2x=4\cos t-3\sin t$$

हल : यहीं दिये गये समीकरण निकाय को हम प्रतीकात्मक विधि से हल करेंगे । समीकरणों को प्रतीकात्मक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता हैं;

$Dx+(D-2)y = 2\cos t - 7\sin t$ ....(1)

$(D+2)$x-Dy$=4\cos t - 3\sin t$ ....(2).

समीकरण (1) तथा (2) को क्रमश: D तथा (D - 2) से सक्रिंया कर जोड़ने पर

$$\left\{D^2+(D-2)(D+2)\right\}x = D[2\cos t - 7\sin t]+(D-2)[4\cos t - 3\sin t]$$

या $\left(D^2-2\right)x=-9\cos t$ ......(3)

समीकरण (3) अचर गुणांक वाली रैखिक समीकरण है,

जिसकी सहायक समीकरण D^2-2=0 से D=$\pm\sqrt{2}$

$\therefore$पूरक फलन (C.F)=$c_1e^{\sqrt{2}t}+c_2e^{-\sqrt{2}t}$

तथा विशिष्ट समाकल (P.I)=$(P.I)=\dfrac{1}{\left(D^2-2\right)}(-9\cos t$

$$=\frac{-9}{(-2)^2-2}\cos t = 3\cos t$$

$\therefore$x=$c_1e^{\sqrt{2}t}+c_2e^{-\sqrt{2}t}+3\cos t$ ....(4)

अब समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

y = D x + x -$3\cos t+5\sin t$ ....(5)

समीकरण (5) में x का मान रखने पर

y=$D\left[c_1e^{\sqrt{2}t}+c_2e^{-\sqrt{2}t}+3\cos t\right]+c_1e^{\sqrt{2}t}+c_2e^{-\sqrt{2}t}-3\cos t\ -3\cos t$ +5$\sin t$

या $y=\left[\sqrt{2c_1}e^{\sqrt{2}t}-\sqrt{2c_2}e^{-\sqrt{2}t}-3\sin t\right]+c_1e^{\sqrt{2}t}+c_2e^{-\sqrt{2}t}+5\sin t$

या y=$\left(1+\sqrt{2}\right)c_1e^{\sqrt{2}t}+\left(1-\sqrt{2}\right)c_2e^{-\sqrt{2}t}+2\sin t$ ......(6)

समीकरण (4) व (6) से प्राप्त x व y के मान ही अभीष्ट हल है ।

उदाहरण 5 : हल कीजिए-

$x\dfrac{dy}{dx}+z$ =0; $\dfrac{dz}{dx}+y=0$ (समघात रैखिक युगपत् अवकल समीकरण)

हल: दिये गये समीकरण है-

$x\dfrac{dy}{dx}+z$ =0 ....(1)

$x\dfrac{dy}{dx}+y$ =0 ....(2)

समीकरण (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}$=0..................(3)

$x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}$=0 [समीकरण (2) से $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{-y}{x}$]

या $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}$-y=0. ....(4)

जो की एक दो कोटि का समघात रैखिक अवकल समीकरण है अत: समीकरण (4) में x=e^t रखने पर इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$\left[D(D-1)+D-1\right]y=0$$

या $\left(D^2-1\right)$y=0 ....(5)

अत: सहायक समीकरण

D^2-1=0 से $D=\pm$1

$\therefore$ y=$c_1e^t+c_2e^{-t}$ या y=$c_1x+c_2x^{-1}$ ....(6)

पुन: (6) से,

$$\frac{dy}{dx}=c_1-\frac{c_2}{x^2}$$

अब $\frac{dy}{dx}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$x\left[c_1-\frac{c_2}{x^2}\right]+z=0$$

या z=$c_1x+c_2x^{-1}$ ....(7)

समीकरण (6) व (7) मिलकर दिये हुये अवकल समीकरणों के व्यापक हल है

उदाहरण 6 : हल कीजिए

$$\frac{dx}{dt}=ax+by;\ \frac{dy}{dt}=a'x+b'y$$

हल : दिये हुये समीकरणों को प्रतीकात्मक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है-

$\left(D^2-a\right)$x-by=0 ....(1)

$-a'x+\left(D^2-b'\right)$y=0 ....(2)

समीकरण (1) को $\left(D^2-b'\right)$ से सक्रिंया तथा समीकरण (2) को -b से गुणा करके जोड़ने पर$\left[(D-a)(D-b')-a,b\right]x=0$

या$\left[D^2-(a+b')D+(ab'-a'b)\right]x=0$ ....(3)

इसकी सहायक समीकरण

$$D^2-(a+b')D+(ab'-a'b)=0 \text{ से}$$

$$D=\frac{(a+b')\pm\sqrt{(a+b')^2-4(ab'-a'b)}}{2}$$

$=m_1,m_2$

$$=\frac{(a+b')\pm\sqrt{\left[(a-b')^2+4\,ab'-a'b\right]}}{2}$$

जहाँ $m_1 = \dfrac{(a+b')+\sqrt{(a-b')^2+4a'b}}{2}$ ......(4)

तथा $m_2 = \dfrac{(a+b')-\sqrt{(a-b')^2+4a'b}}{2}$ ....(5)

अत: (3) का व्यापक हल

$$x = c_1e^{m_1t}+c_2e^{m_2t} \qquad ......(6)$$

समीकरण (1) से,

$$y=\frac{1}{b}\left[\frac{dx}{dt}-ax\right]$$

$$=\frac{1}{b}\left[c_1m_1e^{m_1t}+c_2m_2e^{m_2t}-ac_1e^{m_1t}-ac_2e^{m_2t}\right]$$

$$\frac{1}{b}\left[(m1-a)c1em1t+(m2-a)c2mem2t\right] \qquad ....(7)$$

जहाँ m_1 तथा m_2 के मान समीकरण (4) व (5) से प्राप्त होंगे, अत: समीकरण (6) व (7) मिलकर दिये हुये अवकल समीकरणों के व्यापक हल प्रदान करते है ।

उदाहरण 7 : हल कीजिए

$$2\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dz}{dx}-4y=2x$$

$$2\frac{dy}{dx}+4\frac{dz}{dx}-3z=0$$

हल : दिये हुये समीकरणों को प्रतीकात्मक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\left(2D^2-4\right)y-Dz=2x \qquad ....(1)$$

$$2Dy+(4D-3)z=0 \qquad ....(2)$$

समीकरण (1) व (2) से z का विलोप करने पर

$$\left[\left(2D^2-4\right)(4D-3)+2D^2\right]y=(4D-3)\,(2x)$$

$$\left(8D^3-4D^2-16D+12\right)y=8-6x$$

या

$$\left(2D^3-D^2-4D+3\right)y=\frac{1}{2}\,(4-3x)$$

$$(D-1)(2D+3)(D-1)\,y=\frac{1}{2}\,(4-3x)$$

अतएव सहायक समीकरण

$(D-1)(2D+3)(D-1)$=0 से D=1,1 ,$-\frac{3}{2}$

$\therefore$ पूरक फलन(C.F)= $(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-\frac{3}{2}x}$

तथा विशिष्ट समाकल (P.I) = $\frac{1}{2}.\frac{1}{(3-4D-D^2+2D)}(4-3x)$

$$=\frac{1}{6}\left[1-\frac{(4D+D^2-2D^3)}{3}\right]^{-1}(4-3x)\,(4-3x)$$

$$\frac{1}{6}\left[1+\frac{4}{3}D+..........\right](4-3x)$$

$$=\frac{1}{6}\left[4-3x+\frac{4}{3}(-3)\right]=-\frac{x}{2}$$

$\therefore$ y=$(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-\frac{3}{2}x}-\frac{x}{2}$ ......(3)

तथा $\frac{dy}{dx}=e^x(c_1+c_2x+c_2)-\frac{3}{2}c_3e^{-\frac{3}{2}x}-\frac{1}{2}$ ......(4)

एवम् $-\frac{d^2y}{dx^2}=e^x(c_1+c_2x+2c_2)+\frac{9}{4}c_3e^{-\frac{3}{2}x}$ ......(5)

समीकरण (1) को 4 से गुणा कर समीकरण (2) में जोड़ने पर

$$8\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-16y3z=8x$$

या $3z8\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-16y-8x$ ......(6)

समीकरण (6) में $y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान रखने पर

$z=-2(c_1+c_2x-3c_2)e^x-\frac{1}{3}c_3e^{-\frac{3}{2}x}-\frac{1}{3}$ ......(7)

समीकरण (3) व (7) मिलकर दिये हुये अवकल समीकरणों का व्यापक हल प्रदान करते है ।

उदाहरण 8 : हल कीजिए

$$(5D+4)y-(2D+1)z=e^{-x}$$

$$(D+8)y-3z=5e^{-x}$$

हल : दिये गये समीकरण है :

$(5D+4)y-(2D+1)z=e^{-x}$ ......(1)

$(D+8)y-3z=5e^{-x}$ .....(2)

समीकरण (1) व (2) से z का विलोप करने पर

$$\left[3(5D+4)-(2D+1)(D+8)\right]y=3e^{-x}-5(2D+1)e^{-x}$$

या $\left[D^2+D-2\right]y=-4e^{-x}$

$\therefore$ सहायक समीकरण $D^2+D-2=0$ से D= -2,1 अत: पूरक फलन (C.F)= $c_1e^{-2x}+c_2e^{x}$

तथा विशिष्ट समाकलन (P.I)= $\dfrac{1}{\left(D^2+D-2\right)}\left(-4e^{-x}\right)=2e^{-x}$

$\therefore$ y= $c_1e^{-2x}+c_2e^{x}+2e^{-x}$ ......(3)

तथा $\dfrac{dy}{dx}=-2c_1e^{-2x}+c_2e^{x}-2e^{-x}$ .....(4)

समीकरण (2) में y तथा $\dfrac{dy}{dx}$ का मान समीकरण (3) व (4) से रखने पर

$$3z=\frac{dy}{dx}+8y-5e^{-x}$$

या z= $2c_1e^{-2x}+3c_2e^{x}+3e^{-x}$ .....(5)

समीकरण (3) व (5) मिलकर दिये हुये अवकल समीकरणों के व्यापक हल प्रदान करते है ।

उदाहरण 9 : हल कीजिए

$$\frac{dx}{dt}=ny-mz;\frac{dy}{dt}=lz-nx;\frac{dz}{dt}=mx-ly$$

हल : दिये हुये समीकरणों को प्रतीकात्मक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है ।

$Dx-ny+mz=0$ ......(1)

$nx+Dy-lz=0$ .....(2)

$-mx+ly+Dz=0$ ....(3)

समीकरण (1), (2) तथा (3) को क्रमश: 2x,2y, व 2z, से गुणा कर जोड़ने

$2xDx+2yDy+2zDz=0$

या $\dfrac{d}{dt}\left(x^2+y^2+z^2\right)=0$

समाकलन करने पर,

$x^2+y^2+z^2=c_1$ ......(4)

अब समीकरण (1) (2) व (3) को क्रमश: l,m व n से गुणा कर जोड़ने पर

$lDx+mDy+nDz$

समाकलन से, $lx+my+nz=c_2$

$2lxDx+2myDy+2nzDz=0$ ......(5)

पुन: समीकरण (1) (2) तथा (3) $2lx, 2my, 2nz$ से गुणा करके जोड़ने पर

$2lxDx+2myDy+2nzDz=0$

या $\frac{d}{dt}\left(lx^2+my^2+nz^2\right)=0$ =0

समाकलन करने पर,

$$lx^2+my^2+nz^2=c_3 \qquad ......(6)$$

समीकरण (4), (5) व (6) मिलकर दिये गये अवकल समीकरणों का व्यापक हल प्रदान करते है ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न- 1

1. साधारण रैखिक युगपत् अवकल समीकरणों को हल करने के लिये समीकरणों की संख्या आश्रित चर राशियों की संख्या के बराबर होनी चाहिए ।

(सत्य / असत्य)

2. सामान्य रूप में युगपत् अवकल समीकरण निम्न है-

$$f^1(D)x+f^2(D)y=f(t)$$
$$g^1(D)x+g^2(D)y=g(t)$$

इन्हें हल करने के लिये सारणिक

$\begin{vmatrix} f_1(D) & f_2(D) \\ g_1(D) & g_2(D) \end{vmatrix} \neq 0$ होना चाहिए (सत्य / असत्य)

3. प्रश्न संख्या 2 में युगपत् अवकल समीकरणों से y का विलोप करने पर x का मान निम्न सारणिक से प्राप्त होगा-

$\begin{vmatrix} f_1(D) & f_2(D) \\ g_1(D) & g_2(D) \end{vmatrix} x = - \begin{vmatrix} f_2(D) & f(t) \\ g_2(D) & g(t) \end{vmatrix}$ (सत्य / असत्य)

8.4 प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के युगपत अवकल समीकरण

प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के तीन चरों वाले युगपत् अवकल समीकरणों को हल करने की लघु विधियाँ ज्ञात की जा सकती है । इस विधि को व्यापक रूप में कितने भी चरों के लिये प्रयोग में लिया जा सकता है । प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के तीन घरो वाले युगपत् अवकल समीकरण का सामान्य रूप निम्न है-

$$P_1dx+Q_1dy+R_1dz \qquad ......(1)$$

$$P_2dx+Q_2dy+R_2dz \qquad .....(2)$$

जहाँ P_1, P_2 इत्यादि x, y, z के फलन है

समीकरण (1) और (2) को निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है

$$P_1\frac{dx}{dz}+Q_1\frac{dy}{dz}+R_1=0 \qquad ......(3)$$

$$P_2\frac{dx}{dz}+Q_2\frac{dy}{dz}+R_2=0 \qquad ......(4)$$

गुणन विधि से उपर्युक्त समीकरणों को हल करने पर

$$\frac{\frac{dx}{dz}}{Q_1R_2-Q_2R_1}=\frac{\frac{dy}{dz}}{R_1P_2-P_1R_2}=\frac{1}{P_1Q_2-P_2Q_1} \qquad ......(5)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{Q_1R_2-Q_2R_1}=\frac{dy}{R_1P_2-P_1R_2}==\frac{dz}{P_1Q_2-P_2Q_1} \qquad ......(6)$$

जो कि निम्न रूप के है

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad ......(7)$$

जहाँ P ,Q तथा R; x, y, z के फलन है, फलत: युगपत् अवकल समीकरण (1) व (2) को समीकरण (7) के रूप में भी लिखा जा सकता है । इन समीकरणों के सम्पूर्ण हल विद्यमान यदि इनके हल निम्न रूप में प्राप्त किये जा सके

$u(x,y,z)=c_1$ तथा $v(x,y,z)=c_2$ ....(8)

जहाँ u तथा v,(7) के दो स्वतन्त्र हल है तथा c_1 एवं c_2 दो स्वेच्छ अचर है यहाँ u तथा v स्वतन्त्र हल कहलायेंगे यदि u/v (या u/v) केवल एक अचर न है।

उदाहरणार्थ, u=$x^2+y^2+z^2$ तथा v=$3x+3y+3z$ स्वतन्त्र है, जबकि u= $2x+2y+2z$ तथा v=$3x+3y+3z$ स्वतन्त्र नहीं है।

8.4.1 $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ का ज्यामितीय रूप (अर्थ)

ठोस ज्यामिति से हम जानते है कि वक्र के बिन्दु (x,y,z) पर स्पर्श रेखा दिक् कोज्याऐं dx, dy तथा dz के समानुपाती होती है, अत: समीकरण निकाय प्रतिच्छेदी वक्रों के को प्रदर्शित करते है जिनके पृष्ठों $u(x,y,z)=c_1$ $v(x,y,z)$ के प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा की, कोज्याऐं P,Q,R के समानुपाती है । चूंकि अचर c_1 तथा c_2 अनन्त प्रकार के अनेक मान ग्रहण सकता है अत: हमें इस प्रकार के द्वि-अनन्त वक्र प्राप्त होंगे ।

8.4.2 $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ को हल करने की विधियाँ

यहीं दिये गये समीकरण का रूप है

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad ......(1)$$

प्रथम विधि- जब किन्हीं दो भिन्नों में से एक चर या तो अनुपस्थित हो या कट जाता हो, उदाहरणार्थ: fn P तथा Q दोनों में z चर अनुपस्थित हो या कट जाता है तब $\frac{dx}{P}$ $=\frac{dy}{Q}$ से x तथा y में-एक सम्बन्ध प्राप्त किया जा सकता है । इसी प्रकार दूसरी दो

भिन्नों $\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ से y तथा z में दूसरा सम्बन्ध प्राप्त किया जा सकता है, इस प्रकार प्राप्त दोनों सम्बन्धों से पूर्ण हल प्राप्त किया जा सकता है । (देखें उदाहरण-1)

द्वितीय विधि- यदि प्रथम विधि से एक समाकल ज्ञात हो जाए तथा दूसरा समाकल ज्ञात नहीं किया जा सके तो ऐसी स्थिति में हम प्रथम ज्ञात हल का प्रयोग कर दूसरा समाकल ज्ञात कर सकते है अर्थात् पूर्ण हल का एक भाग दूसरा भाग प्राप्त करने के काम में लिया जा सकता है, ऐसा करने में द्वितीय समाकल में प्रथम समाकल के अचर को हटाना चाहिए (देखे उदाहरण-2)

तृतीय विधि- यदि $l,m,n;x,y,z$ के फलन या अचर राशियाँ हो तब अनुपात-समानुपात सिद्धान्त से

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{ldx+mdy+ndz}{lP+mQ+nR} \qquad \text{.........(2)}$$

अब यदि गुणक l,m,n इस प्रकार के हो कि

$lP+mQ+nR=0$ हो तब $ldx+mdy+ndz=0$

या $du=0$ (यदि यह यथातथ अवकलज है)

$$\therefore u=c_1 \qquad \text{......(3)}$$

यह पूर्ण हल का एक भाग है । इसी प्रकार यदि L,M,N गुणक इस प्रकार है कि

$lP+mQ+nR=0$ हो तब $ldx+mdy+ndz=0$

या $du=0$ (यदि यह यथातथ अवकलज है)

$\therefore u=c_1$

$LP+MQ+NR=0$ हो तब

$Ldx+Mdy+Ndz=0$

या $dv=0$ (यदि यह यथातथ अवकलज है)

$\therefore v=c_2$

जो की यह पूर्ण हल का दूसरा भाग है अत: समीकरण (3) व (4) मिलकर समीकरण (1) का पूर्ण हल प्रदान करते है । (देखे उदाहरण 3,5,6,8)

चतुर्थ विधि- यदि $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{ldx+mdy+ndz}{lP+mQ+nR}$ मे $ldx+mdy+ndz$ (अंश), $lP+mQ+nR$ (हर) का यथातथ अवकलज हो, तब प्रथम तीन में से एक एवं अन्तिम भिन्न लेकर समाकलन करने पर पूर्ण हल का एक भाग ज्ञात किया जा सकता है । (देखें' उदाहरण-7)

टिप्पणी:- कई बार पूर्ण हल का एक भाग एक विधि से तथा दूसरा भाग विधि से ज्ञात किया जा सकता है । (देखें उदाहरण 4)

उदाहरण 1 : हल कीजिए

$$\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{zx}=\frac{dz}{xy}$$

हल : प्रथम दो भिन्नों को लेने पर

$$xdy = ydy$$

समाकलन करने पर

$$x^2 - y^2 = c_1 \qquad .....(1)$$

पुन: प्रथम तथा अन्तिम भिन्न से

$$xdx = ydz$$

समाकलन करने पर

$$x^2 - z^2 = c_2 \qquad ......(2)$$

समीकरण (1) व (2) मिलकर दिये हुये अवकल समीकरण का पूर्ण हल प्रदान करते है।

टिप्पणी (ज्यामितीय अर्थ) : समीकरण (1) व (2) से प्राप्त हल आयतीय परावलीय बेलन के दो कुलों के प्रतिच्छेदन को व्यक्त करते है।

उदाहरण 2 : हल कीजिए।

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-2}=\frac{dz}{3x^2\sin(y+2x)}$$

हल: प्रथम दो भिन्नों को लेने पर

$$2dx + dy = 0$$

समाकलन करने पर

$$2x + y = 0 \qquad ......(1)$$

पुन: प्रथम एवं अन्तिम भिन्न से अ

$$dx = \frac{dz}{3x^2\sin(y+2x)}$$

या $3x^2 \sin c_1 dx = dz$ $\quad \left[\ \because y+2x=c_1\right.$ समीकरण (1) से $\left.\right]$

समाकलन करने पर

$x^3 \sin c_1 + c_2 = z$

या $x^3 \sin(y+2x) = c_2$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) मिलकर दिये हुये अवकल समीकरण का पूर्ण हल प्रदान करते है।

उदाहरण 3 : हल कीजिए

$$\frac{dx}{mz-ny}=\frac{dy}{nx-lz}=\frac{dz}{ly-mx}$$

हल : दी गई अवकल समीकरण है-

$$\frac{dx}{mz-ny}=\frac{dy}{nx-lz}=\frac{dz}{ly-mx}$$

x, y, z को गुणक लेने पर

$$\frac{dx}{mz-ny}=\frac{dy}{nx-lz}=\frac{dz}{ly-mx}=\frac{xdx+ydy+zdz}{0}$$

$\therefore\ xdx+ydy+zdz=0$

या $\quad 2xdx+2ydy+2zdz=0$

या $\quad d\left(x^2+y^2+z^2\right)=0$

समाकलन करने पर में

$$x^2+y^2+z^2=c_1 \qquad \text{......(1)}$$

पुन: l, m, n को गुणक लेने पर

$$\frac{dx}{mz-ny}=\frac{dy}{nx-lz}=\frac{dz}{ly-mx}=\frac{ldx+mdy+ndz}{0}$$

$\therefore\ ldx+mdy+ndz=0$

$x+my+nz=c_2$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) मिलकर दिये हुये अवकल समीकरण का पूर्ण हल प्रदान करते है।

टिप्पणी (ज्यामितीय अर्थ) : समीकरण (1) व (2) से दिये गये हल वृतों को व्यक्त करते है।

उदाहरण 4 : हल कीजिए

$$\frac{dx}{y^2+z^2-x^2}=\frac{dy}{-2xy}=\frac{dz}{-2xz}$$

हल : अवकल समीकरण है

$$\frac{dx}{y^2+z^2-x^2}=\frac{dy}{-2xy}=\frac{dz}{-2xz} \qquad \text{.......(1)}$$

अन्तिम दोनों भिन्नों को लेने पर

$$\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

पुनः समाकलन करने पर $y=c_1 z$ ....(2)

पुन: समीकरण (1) में x, y, z गुणक लेने पर

प्रत्येक भिन्न $\dfrac{dz}{-2xz}=\dfrac{xdx+ydy+zdz}{-x\left(x^2+y^2+z^2\right)}$

$$\frac{dz}{z}=\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{x^2+y^2+z^2}$$

समाकलन करने पर $\log z + \log c_2 = \log\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

या $\quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2 z$ ....(3)

समीकरण (2) व (3) मिलकर दिये हुये अवकल समीकरण का पूर्ण हल प्रदान करते है।

उदाहरण 5 : हल कीजिए

$$\frac{dx}{x\left(y^2 - z^2\right)} \frac{dy}{y\left(z^2 - x^2\right)} = \frac{dz}{z\left(x^2 - y^2\right)}$$

हल : x, y, z को क्रमशः गुणक लेने पर

$$\frac{dx}{x\left(y^2 - z^2\right)} \frac{dy}{y\left(z^2 - x^2\right)} = \frac{dz}{z\left(x^2 - y^2\right)} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$$

$xdx + ydy + zdz = 0$

समाकलन से, $x^2 + y^2 + z^2 = c_1$ ....(1)

पुनः $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ को गुणक लेने पर

$$\frac{dx}{x\left(y^2 - z^2\right)} \frac{dy}{y\left(z^2 - x^2\right)} = \frac{dz}{z\left(x^2 - y^2\right)} = \frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}}{0}$$

$$\therefore \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0$$

समाकलन से, $xyz = c_2$

........(2)

समीकरण (1) व (2) मिलकर दिये हुये अवकल समीकरण का पूर्ण हल प्रदान करते है।

उदाहरण 6 : हल कीजिए

$$\frac{dx}{x\left(y^2 - z^2\right)} = \frac{dy}{y\left(z^2 - x^2\right)} = \frac{dz}{z\left(x^2 - y^2\right)}$$

हल : $x, y, -1$ को क्रमश : गुणक लेने पर

$$\frac{dx}{x\left(y^2 - z^2\right)} = \frac{dy}{y\left(z^2 - x^2\right)} = \frac{dz}{z\left(x^2 - y^2\right)} = \frac{xdx + ydy - dz}{0}$$

$\therefore xdx + ydy - dz = 0$

समाकलन से, $x^2 + y^2 - 2z = c_1$ ....(1)

पुनः $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ को क्रमशः गुणक लेने पर

$$\frac{dx}{x\left(y^2-z^2\right)}=\frac{dy}{y\left(z^2-x^2\right)}=\frac{dz}{z\left(x^2-y^2\right)}=\frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}}{0}$$

$$\therefore \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0$$

समाकलन से, $xyz=c_1$

समीकरण (1) व (2) मिलकर दिये हुये अवकल समीकरण का पूर्ण हल प्रदान करते है।

उदाहरण 7 : हल कीजिए

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

हल : प्रथम दो भिन्न लेने पर

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

समाकलन करने पर $x=c_1y$ ......(1)

पुनः x, y, z गुणक लेने पर

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{xdx+ydy+zdz}{x^2+y^2+z^2-az\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$x^2+y^2+z^2=u^2$ लेने पर

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-au}=\frac{udu}{u^2-azu}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-au}=\frac{du}{u-az}=\frac{du+dz}{(1-a)(u+z)}$$

द्वितीय तथा अन्तिम भिन्न से,

$$\frac{dy}{y}=\frac{du+dz}{(1-a)(u+z)}$$

समाकलन करने पर,

$$(1-a)\log y=\log(u+z)+\log c_2$$

$$y^{(1-a)}=c_2(u+z)=c_2\left[z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right] \quad ......(2)$$

समीकरण (1) व (2) मिलकर दिये हुये अवकल समीकरण का पूर्ण हल प्रदान करते है।

उदाहरण 8 : निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए

$$\frac{adx}{(b-c)yz}=\frac{bdy}{(c-a)zx}=\frac{cdz}{(a-b)xy}$$

हल : ax, by, cz को क्रमशः गुणक लेने पर

$$\frac{adx}{(b-c)yz}=\frac{bdy}{(c-a)zx}=\frac{cdz}{(a-b)xy}=\frac{a^2xdx+b^2ydy+c^2zdz}{0}$$

$$\therefore a^2xdx+b^2ydy+c^2zdz=0$$

समाकलन से $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=c_1$ ......(1)

पुनः x, y, z को गुणक लेने पर

$$\frac{adx}{(b-c)yz}=\text{..............}=\frac{a^2xdx+b^2ydy+c^2zdz}{0}$$

$\therefore axdx+bydy+czdz=0$

समाकलन से, $ax^2+by^2+cz^2=c_2$ ......(2)

समीकरण. (1) व (2) मिलकर दिये गये अवकल समीकरण का पूर्ण हल प्रदान करते है ।

उदाहरण 9 : हल कीजिए

$$\frac{dx}{\cos(x+y)}=\frac{dy}{\sin(x+y)}=\frac{dz}{z}$$

हल: दी गई अवकल समीकरण है

$$\frac{dx}{\cos(x+y)}=\frac{dy}{\sin(x+y)}=\frac{dz}{z}$$

प्रथम दो भिन्नो को लेने पर

$$\frac{dx+dy}{\cos(x+y)+\sin(x+y)}=\frac{dx-dy}{\cos(x+y)-\sin(x+y)}$$

या $$\frac{\cos(x+y)-\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\sin(x+y)}.(dx+dy)=dx-dy$$

समाकलन करने पर

$$\log\left[\cos(x+y)+\sin(x+y)\right]=x-y+\log c_1$$

या $\left[\cos(x+y)+\sin(x+y)\right]e^{x-y}=c_1$ ......(1)

पुनः $$\frac{dz}{z}=\frac{(dx+dy)}{\sqrt{2}\sin\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)}$$

या $$\sqrt{2}\frac{dz}{z} = \operatorname{cosec}\left[x+y+\frac{\pi}{4}\right][dx+dy]$$

समाकलन से

$$\sqrt{2}\log z = \log\tan\left\{\frac{1}{2}(x+y)+\frac{\pi}{4}\right\}+\log c_2$$

या $$z^{\sqrt{2}}\cot\left\{\frac{1}{2}(x+y)+\frac{\pi}{8}\right\} = c_2 \qquad ....(2)$$

समीकरण (1) व (2) मिलकर दिये गये अवकल समीकरण का पूर्ण हल प्रदान करते है।

उदाहरण 10 : हल कीजिए.

$$\frac{dx}{x^2-yz} = \frac{dy}{y^2-zx} = \frac{dz}{z^2-xy}$$

हल : दी गई अवकल समीकरण है

$$\frac{dx}{x^2-yz} = \frac{dy}{y^2-zx} = \frac{dz}{z^2-xy}$$

$$\frac{dx-dy}{x^2-yz-y^2+zx} = \frac{dy-dz}{y^2-xy-z^2+xy} = \frac{dz-dx}{z^2-xy-x^2+y^2}$$

या $$\frac{dx-dy}{x-y} = \frac{dy-dz}{y-z} = \frac{dz-dx}{z-x}$$

प्रथम दो भिन्न लेने पर

$$\frac{dx-dy}{x-y} = \frac{dy-dz}{y-z}$$

समाकलन करने पर

$$\log(x-y) = \log(y-z)+\log c_1$$

$\frac{x-y}{y-z} = c_1$ प्राप्त होगा ....(2)

अतएव (x-y)=$c_1(y-z)$, $(y-z) = c_2(z-x)$ दोनों मिलकर अवकल समीकरण का पूर्ण हल प्रदान करते है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न-2

1. 1.तीन चरों वाले प्रथम घात के अवकल समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है-

   $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ (सत्य/असत्य)

   जहाँ $PQR; x, y, z$ के फलन है ।

2. निम्न अवकल समीकरण

   $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$ के पूर्ण हल का एक भाग $x+y+z=c_1$

है तो, दूसरा भाग ज्ञात करो ।

8.5 सारांश

युगपत् अवकल समीकरणों को सामान्य रूप

$$f_1(D)x + f_2(D)y = f(t)$$

$$g_1(D)x + g_2(D)y = f(t)$$

से व्यक्त किया जाता है । जहाँ x, y आश्रित चर राशियाँ तथा $f(t), g(t)$ स्वतंत्र चर t के फलन है । यहाँ आश्रित चरों की संख्या, युगपत् अवकल समीकरणों की संख्या के बराबर होती है । ये युगपत् अवकल समीकरण विलोपन अथवा अवकलन विधि द्वारा हल किये जाते है ।

प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के तीन चरों वाले युगपत् अवकल समीकरणों को सामान्य रूप में निम्न प्रकार लिखा जाता है-

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

जहाँ $PQR; x, y, z$ के फलन होते है, इन्हें कई विधियों से हल किया जा सकता है । दिये हुये निकाय के हल पृष्ठों $u = c_1$ तथा $v = c_1$ के प्रतिच्छेदन वक्र को प्रदर्शित करते है । यहाँ प्रदर्शित वक्रों का निकाय द्वि-अनन्त होता है।

8.6 शब्दावली

युगपत् अवकल समीकरण	Simul tan eous differential equation
प्रतीकात्मक विधि	Symbolic method
विलोपन विधि	E lim ination method
द्विव-अनन्त	Doubly inf inite

8.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न- 1

(1) सत्य (2) सत्य (3) सत्य

स्वमूल्यांकन प्रश्न- 2

(1) सत्य (2) $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$ जहाँ c_2 एक अचर है ।

8.8 अभ्यास प्रश्न

निम्नलिखित. युगपत् अवकल समीकरणों को हल कीजिए

1. $\frac{dx}{dt} - 7x + y = 0; \frac{dy}{dt} - 2x - 5y = 0$

उत्तर $x = e^{6t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$

$$y = e^{6t}\left[(c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t\right]$$

2. $$\frac{dx}{dt} - 2x - 3y = t; \frac{dy}{dt} - 3x + 2y = e^{2t}$$

उत्तर $x = c_1e^t + c_2e^{-5t} + \frac{3}{7}e^{2t} - \frac{2}{5}t - \frac{13}{25}$

3. $$y = c_1e^t + c_2e^{-5t} + \frac{4}{7}e^{2t} - \frac{3}{5}t - \frac{12}{25}$$

$$+2x - 3y = 0; \frac{dy}{dt} + 3x + 2y = 2e^{2t}$$

उत्तर $x = c_1e^t + c_2e^{-5t} - \frac{6}{7}e^{2t}$

4. $$y = c_1e^t + c_2e^{-5t} + \frac{8}{7}e^{2t}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = 0; \frac{dy}{dt} + 5x + 3y = 0$$

उत्तर $x = c_1\cos t + c_2\sin t$

$$y = \frac{1}{2}(c_2 + 2c_1)\cos t + \frac{1}{2}(2c_2 - c_1)c_2\sin t$$

5. $$\frac{dy}{dt} + 4x + 3y = t; \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = e^{t}$$

उत्तर $x = c_1e^{-7t} + c_2e^{-2t} + \frac{5}{14}t - \frac{31}{196} - \frac{1}{8}e$

$$y = \frac{1}{3}\left(3c_1e^{-7t} - 2c_2e^{-2t} - \frac{3}{7}t + \frac{5}{8}e^t \frac{27}{98}\right)$$

6. $$2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dz}{dx} - 4y = 2x$$

$$2\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx} - 3z = 0$$

$$y = (c_1 + c_2x)e^x + c_3e^{\frac{3x}{2}} - \frac{x}{2}$$

$$z = -2(c_1 + c_2x - 3c_2)e^x - \frac{1}{3}c_3e^{\frac{3x}{2}} - \frac{1}{3}$$

7. $$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$$

उत्तर $x^2 + y^2 = c_1x; + y = c_2z$

8. $$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{nxy}$$

उत्तर $y-x=c_1xy; z=\frac{nxy}{x-y}\log\left(\frac{y}{x}\right)+c_2$

9. $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{3}=\frac{dz}{5z\tan(y-3x)}$

उत्तर $y-3x=c_1; 5z(y-3x)=c_2e^{5x}$

10. $\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=\frac{dy}{y(z^2-x^2)}=\frac{dz}{(x^2-y^2)}$

उत्तर $x^2+y^2+z^2=c_1; 5z=c_2$

11. $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}$

उत्तर $(y-x)=c_1(z-y);(z-y)^2(x+y+z)=c_2$

12. $\frac{xdx}{z^2-2yz-y^2}=\frac{dy}{y+z}=\frac{dz}{y-z}$

उत्तर $y^2-z^2-2yz=c_1;\ x^2+y^2+z^2=c_2$

13. $\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=\frac{dy}{y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{-z(x^2+y^2)}$

उत्तर $x^2-y^2-z^2=c_1; xyz=c_2$

14. $\frac{dx}{y^3x-2x^4}=\frac{dy}{2y^4-x^3y}=\frac{dz}{9z(x^3-y^3)}$

उत्तर $xyz^{1/3}=c_1; x^3+y^3=c_2x^2y^2$

15. $\frac{dx}{x^2+y^2+yz}=\frac{dy}{x^2+y^2-xz}=\frac{dz}{z(x+y)}$

उत्तर $x-y-z=c_1;\frac{x^2+y^2}{z^2}=c_2$

इकाई : 9 n वें कोटि के यथातथ अवकल समीकरण, अस्तित्व एवं अद्वितीयता प्रक्ये (Exact Differential Equations of n^{th} order, Existence and Uniqueness Theorem)

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ्ने के बाद आप यथातथ (यथार्थ) अवकल समीकरण एवं यथातथ बनाये जा सकने वाले समीकरणों के बारे में जान पायेगें। आप जान पायेगें कि किसी n वें कोटि के यथातथ रैखिक अवकल समीकरण को कैसे हल किया जा सकता है। इसी प्रकार अस्तित्व एवं अद्वितीयता प्रमेय से हम उन प्रतिबन्धों को जान पायेगें जिससे कि किसी प्रथम कोटि के अवकल समीकरण के प्रारम्भिक मान समस्या के अद्वितीय हल का अस्तित्व है।

9.1 प्रस्तावना

इकाई 3 में हमने प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के $Mdx + Ndy = 0$ रूप के अवकल समीकरण तथा इसके यथातथ होने के आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ का अन किया। इस इकाई में हम एक से अधिक कोटि के रैखिक अवकल समीकरणों का अध्ययन करेंगे जो या तो यथातथ है या यथातथ बनाये जा सकते है।

इस इकाई में हम प्रथम कोटि के साधारण अवकल समीकरण के प्रारम्भिक मान समस्या के अद्वितीय हल के अस्तित्व एवं अद्वितीयता प्रमेय का भी अध्ययन करेंगे।

9.2 n वे कोटि के यथातथ रैखिक अवकल समीकरण

अवकल समीकरण

$$\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad \text{.........(1)}$$

को इससे अगले निम्न कोटि के समीकरण

$$\left(1+x^2\right)+\frac{dy}{dx}+xy=c \text{ (अचर)} \qquad \text{.....(2)}$$

के अवकलन से प्राप्त किया जा सकता है यहाँ (1) यथातथ अवकल समीकरण कहलाता है । इस प्रकार अवकल समीकरण

$$f\left(\frac{d^ny}{dx^n},............,\frac{dy}{dx},y\right)=Q(x) \qquad \text{......(3)}$$

n कोटि का यथार्थ समीकरण कहलाता है यदि इसे (n - 1) कोटि (अर्थात एक कम कोटि)

$$\phi\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},............,\frac{dy}{dx},y\right)=\int Q(x)dxc \qquad \text{........(4)}$$

के रूप के समीकरण का केवल अवकलन कर व्युत्पन्न किया जा सके। यहाँ समीकरण (4), (3) का प्रथम समाकल कहलाता है।

9.2.1 n वें कोटि के रैखिक समीकरण की यर्थाथता का प्रतिबन्ध

माना की n वीं कोटि का रैखिक अवकल समीकरण है

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+............+P_ny=Q(x) \qquad \text{..........(5)}$$

जहाँ $P_0, P_1, ..., P_n$ चर x के फलन है इनके उत्तरोत्तर अवकलजो को P' P'' P''' .... $P^{(n)}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

अब माना कि उपरोक्त समीकरण यथातथ है अर्थात समीरकण (5), (n - 1)कोटि के समीकरण के अवकलन द्वारा प्राप्त किया जा सकता है । हम जानते हैं कि P_0

$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ का केवल एक बार अवकलन करके प्रथम पद $P_0\frac{d^ny}{dx^n}$ प्राप्त किया जा सकता है अत: (5) के प्रथम समाकल का निम्न रूप होगा ।

$$P_0\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q_1\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+............+Q_{n-1}y=\int Q(x)\,dx+\mathrm{c} \qquad .....(6)$$

जहाँ $Q_1, Q_2............+Q_{n-1}$; चर x फलन है

(6) x सापेक्ष अवकलन करने पर

$${}_0\frac{d^ny}{dx^n}+(P_0'+Q_1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+(Q_1'+Q_2)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+..........$$

$$+(Q'_{n-2}+Q_{n-1})\frac{dy}{dx}.+Q_{n-1}y=Q(x) \qquad ....(7)$$

समीकरण (5) व (7) समरूप होने चाहिए अत: अवकलजो के गुणाको तुलना करने पर

$$P_0=P_0, P_1=P_0'+Q_1, P_2=Q_1'+Q_2P_3=Q_2'+Q_3..................$$

$$P_{n-1}=Q'_{n-2}+Q_{n-1} \text{ तथा } P_n=Q'_{n-1} \qquad ....(8)$$

अब समीकरण (5) के यथार्थ होने का प्रतिबन्ध ज्ञात करने के लिये (8) में हम सभी Q लुप्त कर P सम्बन्ध ज्ञात करेगे अत:

$$Q_1=P_1-P_0'$$

$$Q_2=P_2-Q_1'=P_2-(P_1'-P_0'')=P_2-P_1'+P_0''$$

$$Q_3=P_3-Q_2'=P_3-(P_2'-P_1''+P_0''')=P_3-P_2'+P_1''-P_0'''$$

....

....

$$Q_{n-1}=P_{n-1}-Q_{n-2}'=P_{n-1}-P_{n-2}'-P_{n-3}-............+(-1)^{n-1}P0^{n-1} \qquad ....(9)$$

तथा (8) से $P_n=Q_{n-1}'$

अत: (9) के अवकलन से

$$P_n=P_{n-1}'-P_{n-2}''-P_{n-3}-............(-1)^{n-1}P_0^n$$

या $P_n=P_{n-1}'-P_{n-2}''-P_{n-3}+...............+(-1)^{n-1}P_0^n$ ....(10)

यह समीकरण (5) के यथार्थ होने का अभीष्ट प्रतिबन्ध है। इस प्रकार यदि समीकरण (5) के लिये यथार्थता प्रतिबन्ध (10) सन्तुष्ट होता है तो (5) का प्रथम समाकल निम्न ' लिखा जा सकता है।

$$P_0+\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+(P_1+P_0')\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+(P_2-P_1'+P_0'')\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}+..........$$

$$+........+\left\{P_{n-1}-P_{n-2}''-P_{n-3}''........+(-1)^{n-1}P_0^{n-1}\right\}y\int Q(x)\,dx+c \,........(11)$$

टिप्पणीः हमे समीकरण (10) व (11) को याद रखना चाहिए, प्रश्नों में सीधा प्रयोग मे लिया जा सकता है ।

9.2.2 यथार्थ समीकरण को हल करने की क्रियाविधि-

(1) सर्वप्रथम समीकरण को पूर्ण रूप में लिखेंगे यदि इसमें कोई पद उपस्थित नहीं है तो उसका गुणांक शून्य लेगें।

(2) फिर दी गयी समीकरण की मानक रूप (5) से तुलना करके दे गे $P_0\ P_1$........आदि लिखेगे

(3) अब व्यजंक $P_n - P_{n-1} - P_{n-2}{}'' - P_{n-3}{}''........+(-1)^n P_0^n$ का मान ज्ञात करेंगे, यदि इसका मान शून्य है तो दी गई समीकरण यथार्थ होगी।

(4) अब दिये गये समीरकरण का अभीष्ट प्रथम समाकल (11) से ज्ञात किया जा सकता है।

(5) पुन: प्रथम समाकल के लिये भी यथार्थता का परीक्षण करते है यदि यह भी यथार्थ है तो इसका प्रथम समाकल (दिये गये समीकरण का द्वितीय समाकल) इसी क्रियाविधि से ज्ञात करते है।

(6) इस तरीके से हल करते हुये हमें सामान्यत: $\frac{dy}{dx} + Py = Q,$,रूप का समीकरण प्राप्त होता है, यदि यह भी यथार्थ है तो ऊपर दी गई क्रियाविधि से हल किया जा सकता है। यदि यह यथार्थ नहीं है तो यह प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण है जिसको आसानी से हल किया जा सकता है। (देखे उदाहरण 1 से 7)

9.2.3 समाकल गुणक

कई बार दिया हुआ समीकरण यथार्थ नहीं होता परन्तु इसको- x किसी उपयुक्त फलन से गुणा कर यथार्थ बनाया जा सकता है, इस फलन को समाकल गुणक या समाकल गुणांक (I,F)कहते है ।

यदि समीकरण के गुणांक $P_0, P_1, P_2 ...., P_n; x$ के बहुपद फलन ($A_0x^r + A_1x^s + ...$ प्रकार के) हो, तो इसका समाकल गुणक x^m रूप का होगा, ऐसी स्थिति में समीकरण को x^m गुणा कर यथार्थता के प्रतिबन्ध का प्रयोग कर अज्ञात कर समीकरण को हल करते है। यदि समीकरण के गुणांक $P_0, P_1, P_2 ...., P_n$ त्रिकोणमितीय फलन हो तो इसका समाकल गुणक भी त्रिकोणमितीय फलन होगा जिसे जाँच और भूल सुधार विधि से ज्ञात किया जाता है। (देखे उदाहरण 8 से 11)

उदाहरण 1: हल कीजिये

$$x\frac{d^3y}{dx^3}\left(x^2+x+3\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(4x+2\right)\frac{dy}{dx}+2y=0$$

हल : दिया गया समीकरण निम्न है

$$x\frac{d^3y}{dx^3}+\left(x^2+x+3\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(4x+2\right)\frac{dy}{dx}+2y=0 \qquad ....(1)$$

समीकरण (1) की मानक फप से तुलना करने पर

$P_0 = x, P_1 = x^2 + x + 3, P_2 = 4x + 2$ तथा $P_3 = 2$

अब दी गई समीकरण (1) यथार्थ होगी यदि $P_3 - P_2' + P_1'' - P_0''' = 0$

अर्थात $2 - 4 + 2 - 0 = 0$, जो कि सत्य है, अत: यथार्थता का प्रतिबन्ध संतुष्ट होता है इसलिये समीकरण का प्रथम समाकल होगा

$$p_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + (P_1' + P_0')\frac{dy}{dx} + (P_2 - P_1' + P_0')y = c_1$$

या $$x\frac{d^2 y}{dx^2} + \left\{(x^2 + x + 3) - 1\right\}\frac{dy}{dx} + \left\{(4x + 2) - (2x + 1)\right\}y = c_1$$

या $$x\frac{d^2 y}{dx^2} + \left\{x^2 + x + 2\right\}\frac{dy}{dx} + (2x + 1)y = c_1 \qquad \text{..............(2)}$$

पुन: समीकरण (2) से

$$P_0 = x, P_1 = x^2 + x + 2, P_2 = 2x + 1 \text{ तथा } Q = c_1$$

अब यथार्थता प्रतिबन्ध से,

$$P_2 - P_1' + P_0'' = (2x + 1) - (2x + 1) + 0 = 0$$

अत: समीकरण (2) के लिये भी यथार्थता का प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता है ।

इसलिये समीकरण (2) का प्रथम समाकल होगा

$$P_0 \frac{dy}{dx} - (P_1 + P_0')y = \int Q dx + c_2$$

या $$x\frac{dy}{dx} + \left\{(x^2 + x + 2) - 1\right\}y = \int Q dx + c_2$$

या $$x\frac{dy}{dx} + (x^2 + x + 1)y = c_1 x + c_2 \qquad \text{............(2)}$$

पुन: समीकरण (3) से,

$$P_0 = x, P_1 = x^2 + x + 1 \text{ तथा } Q = c_1 x + c_2$$

जो कि यथार्थता का प्रतिबन्ध $P_1 - P_0' = 0$ सन्तुष्ट नहीं करता । अतः समीकरण (3) को हल करने के लिये इसे रैखिक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x} + 1 + x\right) = c_1 + \frac{c_1}{x}$$

इसका समाकल गुणाक $(I.F.) = e^{\int \left(\frac{1}{x} + 1 + x\right)dx} = xe^{\left(\frac{x}{2}\right)(x+2)}$

$$\therefore yxe^{\left(\frac{x}{2}\right)(x+2)} = \int \left(c_1 + \frac{c_2}{x}\right)xe^{\left(\frac{x}{2}\right)(x+2)}dx + c_3$$

या $\quad yxe^{(x/2)(x+2)} = \int (c_1x+c_2)e^{\left(\frac{x}{2}\right)(x+2)}dx + c_3$

जो कि दिये गये समीकरण (1) का अभीष्ट हल होगा ।

उदाहरण 2 : हल कीजिये

$$\left(x^3-x\right)\frac{d^3y}{dx^3}+\left(8x^2-3\right)\frac{d^2y}{dx^2}+14x\frac{dy}{dx}++4y=\frac{2}{x^3}$$

हल : दिया गया समीकरण निम्न है

$$\left(x^3-x\right)\frac{d^3y}{dx^3}+\left(8x^2-3\right)\frac{d^2y}{dx^2}+14x\frac{dy}{dx}++4y=\frac{2}{x^3} \qquad \text{........(1)}$$

समीकरण (1) की मानक रूप से तुलना करने पर

$P_0 = x^3 - x, P_1 = 8x^2 - 3, P_2 = 14x, P_3 = 4$ तथा $Q = \frac{2}{x^3}$

अब दी गई समीकरण (1) यथार्थ होगी यदि मे $P_3 - P_2' + P_1'' - P_0''' = 0$

अर्थात $4-14+16-6=0$, जो कि सत्य है अतः यथार्थता का प्रतिबन्ध समीकरण (1)का प्रथम समाकल होगा

$$P_0\frac{d^2y}{dx^2}+=\left(P_1+P_0'\right)\frac{dy}{dx}+\left(P_2-P_1'+P_0''\right)y=\int Qdx+c_1$$

या

$$\left(x^3-x\right)\frac{d^2y}{dx^2}\left\{\left(8x^2-3\right)-\left(3x^2-1\right)\right\}+\frac{dy}{dx}+\left\{14x-16x+6x\right\}y=\int 2x^{-3}dx+c_1$$

या $\quad \left(x^3-x\right)\frac{d^2y}{dx^2}\left(5x^2-2\right)+\frac{dy}{dx}+4y = x^{-2}+c_1$

पुनः समीकरण (2) से, $P_0 = x^3 - x, P_1 = 5x^2 - 2$, $P_2 = 4x$ तथा $Q = -x^{-2} + c_1$

अब यथार्थता प्रतिबन्ध से,

$$P_2 - P_1' + .P_0'' = 4x - 10x + 6x = 0$$

अतः समीकरण (2) के लिये भी यथार्थता का प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता है इसलिये समाकल (2) का प्रथम समाकल होगा

$$P_0\frac{dy}{dx}+\left(P_1+P_0'\right)y=\int Qdx+c_2$$

या $\quad \left(x^3-x\right)\frac{dy}{dx}+\left\{\left(5x^2-2\right)-\left(3x^2-1\right)\right\}y=\int\left(-x^2+c_1\right)dx+c_2$

या $\quad \left(x^3-x\right)\frac{dy}{dx}\left(2x^2-1\right)y=\frac{1}{x}c_1x+c_2 \qquad \text{.............(3)}$

पुनः समीकरण (3) से ।

$P_0 = x^3 - x, P_1 = 2x^2 - 1$ तथा $Q = \frac{1}{x} c_1 x + c_2$

जो कि यथार्थता का प्रतिबन्ध $P_1 - P_0' = 0$ सन्तुष्ट नहीं करता, अत: (3) यथातथ नहीं है परन्तु प्रथम कोटि का रैखिक समीकरण है जिसको निम्न में लिखा जा सकता है

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x^2 - 1}{x^3 - x} y = \frac{1}{x^2\left(x^2 - 1\right)} + \frac{c_1}{x^2 - 1} + \frac{c_2}{x^2\left(x^2 - 1\right)}$$

इसका समाकलन गुणांक $(I.F.)$ $= e^{\int \frac{2x^2 - 1}{x\left(x^2 - 1\right)} dx} = e^{\int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - 1}\right) dx}$

$$= e^{\log x + \frac{1}{2}\log\left(x^2 - 1\right)} = x\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\therefore \quad yx\sqrt{x^2 - 1} = \int \left(\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{c_1 x}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{c_2}{x\sqrt{x^2 - 1}} \right) dx + c_3$$

$$= \sec^{-1} x + c_1\sqrt{x^2 - 1} + c_2 \log\left\{x + \sqrt{x^2 - 1}\right\} + c_3$$

उदाहरण 3 : हल कीजिये

हल : दिया गया समीकरण है

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \left(x^2 - 3\right)\frac{d^2 y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

समीकरण (1) की मानक रूप से तुलना करने पर

$$P_0 = x, P_1 = x^2 - 3, P_2 = 4x \text{ तथा } P_3 = 2$$

अब दी गई समीकरण (1) यथार्थ होगी यदि $P_3 - P_2' + P_1'' - P_0''' = 0$

अर्थात $2 + 4 + 2 - 0 = 0$, जो कि सत्य है, अत: यथार्थता का प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता है इसलिये समीकरण (1) का प्रथम समाकल होगा

$$P_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(P_1 + P_0'\right)\frac{dy}{dx} + \left(P_2 - P_1' + P_0''\right) y = c_1$$

या $$x\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(x^2 - 4\right)\frac{dy}{dx} + 2xy = c_1 \qquad \text{.........(2)}$$

पुन: समीकरण (2) से

$$P_0 = x, P_1 = x^2 - 4, P_2 = 2x \text{ तथा } Q = c_1$$

अब यथार्थता प्रतिबन्ध से

$$P_2' - P_1'' + P_0''' = 2x - 2x + 0 = 0$$

अत: समीकरण (2) के लिये भी यथार्थता का प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता है इसलिये समीकरण (2) का प्रथम समाकल होगा

$$P_0\frac{dy}{dx}+\left(P_1-P_0{}'\right)y=\int\ Qdx+c_2$$

या $$x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-5\right)y=c_1x+c_2$$

या $$x\frac{dy}{dx}+\left(x-\frac{5}{x}\right)y=c_1x+\frac{c_2}{2}$$

जो कि यथार्थ समीकरण नहीं अपितु प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण है जिसका समाकल

गुणांक $$(I.F.)=e^{\int\left(x-\frac{5}{x}\right)dx}=\frac{1}{x^5}e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\therefore\ y.\frac{1}{x^5}e^{\frac{x^2}{2}}=\int\ \left(c_1+\frac{c_2}{2}\right).\frac{1}{x^5}e^{\frac{x^2}{2}}dx+c_3$$

या $$y=x^5e^{\frac{x^2}{2}}=\left[c_1\int\ \frac{1}{x^5}e^{\frac{x^2}{2}}dx+c_2\int\ x^{-6}e^{\frac{x^2}{2}}dx\right]+c_3$$

जो कि दिये गये समीकरण (1) का अभीष्ट हल होगा

उदाहरण 4 : हल कीजिये

$$\left(ax-bx^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+2a\frac{dy}{dx}+2by=x$$

हल : यहाँ $P_0=ax-bx^2, P_1=2a, P_2=2b$ तथा $Q=x$

अब दी गई समीकरण यथार्थ होगी यदि $P_2-P_1{}'+P_0{}''=0$

अर्थात $2b-0-2b=0$,जो कि सत्य है, अत: यर्थाथता का प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता है इसलिये दिये गये अवकल समीकरण का प्रथम समाकल होगा

$$P_0\frac{dy}{dx}+\left(P_1-P_0{}'\right)y=\int\ Qdx+c_1$$

या $$\left(ax-bx^2\right)\frac{dy}{dx}+\left[2a-\left(a-2bx\right)\right]y=\frac{x^2}{2}+c_1$$

या $$\left(ax-bx^2\right)\frac{dy}{dx}+\left(a-2bx\right)y=\frac{x^2}{2}+c_1 \qquad ......(1)$$

पुन: समीकरण (1) से

$$P_0=ax-bx^2, P_1=a+2bx\ \text{ तथा }\ Q=\frac{x^2}{2}+c_1$$

जो कि यथार्थता का प्रतिबन्ध $P_1-P_0{}'=0$ सन्तुष्ट नहीं करता । अत: समीकरण (1) यथातथ नहीं है अपितु प्रथम कोटि का रैखिक समीकरण है इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$\frac{dy}{dx}+\frac{a+2bx}{ax-bx^2}y=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(a-bx)}+\frac{c_1}{x(a-bx)}$$

इसका समाकल गुणांक $(I.F.)=e^{\int\left(\frac{a+2bx}{ax-bx^2}\right)dx}=e^{\int\left(\frac{1}{x}+\frac{3b}{a-bx}\right)dx}=\frac{x}{(a-bx)^3}$

$$\therefore y\frac{x}{(a-bx)^3}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{(a-bx)^4}dx+c_1\int\frac{1}{(a-bx)^4}dx+c_2$$

$$=\int\frac{\frac{a^2}{b^2}\sin^4\theta.\frac{2a}{b}\sin\theta\cos\theta d\theta}{2a^4\cos^8}+\frac{c_1}{3b(a-bx)^3}+c_2\quad\left[bx=a\sin^2\theta\text{ रखने पर}\right]$$

$$\frac{1}{ab^3}\int\tan^5\theta\sec^2\theta d\theta+\frac{c_1}{3b(a-bx)^3}+c_2\quad\left[\therefore\tan^2\theta=\frac{bx}{a-bx}\right]$$

$$=\frac{1}{6ab^3}\tan^6\theta+\frac{c_1}{3b(a-bx)^3}+c_2$$

$$=\frac{1}{6ab^3}\frac{b^3x^3}{(a-bx)^3}+\frac{c_1}{3b(a-bx)^3}+c_2$$

या $yx=\frac{x^3}{6a}+\frac{c_1}{3b}+c_2(a-bx)^3$

जो कि दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल होगा

उदाहरण 5 : हल कीजिये

(i) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{(1-x^2)}$

(ii) $(1+x)^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0$

हल : $P_0=x^2, P_1=3x, P_2=1$ तथा $Q=\frac{1}{(1-x)^2}$

अब दी गई समीकरण यथार्थ होगी, यदि $P_2-P_1'+P_0''=0$

अर्थात $1-3+2=0$,जो कि सत्य है अतः यथार्थता का प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता है इसलिये दिये गये समीकरण का प्रथम समाकल होगा

$$P_0\frac{dy}{dx}+(P_1-P_0')y=\int Qdx+c_1$$

या $x^2\frac{dy}{dx}+(3x-2x)y=\int\frac{1}{(1-x^2)}dx+c_1$

या $x^2\frac{dy}{dx}+xy=\frac{1}{1-x}+c_1$

जो कि यथातथ समीकरण नहीं है, परन्तु प्रथम कोटि का रैखिक समीकरण है जिसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2(1-x)}+\frac{c_1}{x^2}$$

जिसका समाकल गुणांक $(I.F.)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\log x}=x$

$$\therefore\ yx=\int\left[\frac{1}{x^2(1-x)}+\frac{c_1}{x^2}\right]xdx+c_2$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{c_1}{x}\right)dx+c_2$$

$$yx=\log\frac{x}{1-x}+c_1\log+c_2$$

जो कि दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल है ।

(ii) $P_0=1+x^2, P_1=3x, P_2=1$

अब दी गई समीकरण यथार्थ है क्योंकि $P_2-P_1'+P_0''=1-3+2=0$ अत: दिए गये अवकल समीकरण का प्रथम समाकल होगा

$$P_0\frac{dy}{dx}+(P_1-P_0')y=c_1$$

या $$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+xy=c_1$$

जो कि यथातथ समीकरण नहीं है, परन्तु प्रथम कोटि का रैखिक समीकरण है जिसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता हैं

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1+x^2}y=\frac{c_2}{1+x^2}$$

जिसका समाकल गुणांक $(I.F.)=e^{\int\frac{x}{1+x^2}dx}=\sqrt{1+x^2}$

$$\therefore\ y\sqrt{1+x^2}=\int\left(\frac{c_1}{1+x^2}\right).\sqrt{1+x^2}\,dx+c_2$$

$$=c_1\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx+c_2$$

$$=c_1\log\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]+c_2$$

जो कि दिये हुये समीकरण का अभीष्ट हल है ।

उदाहरण 6 : प्रदर्शित कीजिये की समीकरण

$$\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=\sec^2 x$$

यथातथ है तथा इसे हल कीजिये, जहाँ $y=0, y'=0$ जबकि $x=0$

हल : यहाँ $P_0=1+x^2, P_1=4x, P_2=2$ तथा $Q=\sec^2 x$

अब दी गई समीकरण यथार्थ होगी यदि $P_2-P_1'+P_0''=0$

अर्थात $2-4+2=0$, जो कि सत्य है, अत: यथार्थता का प्रतिबन्ध सन्तुष्ट है अत: दिये गये समीकरण का प्रथम समाकल होगा

$$p_0\frac{dy}{dx}+\left(P_1'-P_0'\right)y=\int Qdx+c_1$$

या $$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+\left(4x-2x\right)y=\int sce^2 xdx+c_1$$

या $$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy=\tan x+c_1 \qquad \text{........(1)}$$

चूंकि $x=0,\ y=0,\ y=1\ \therefore c_1=1$

अत. समीकरण (1) का रूप होगा,

$$\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy=\tan x+1$$

जो कि यथातथ समीकरण नहीं है, परन्तु प्रथम कोटि का रैखिक समीकरण है जिसको निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{1+x^2}\ y=\frac{\tan x}{\left(1+x^2\right)}+\frac{2x}{\left(1+x^2\right)}$$

जिसका समाकल गुणांक $(I.F.)=e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}=1+x^2$

$$\therefore y\left(1+x^2\right)=\int\left(\frac{\tan x}{\left(1+x^2\right)}\right)\left(1+x^2\right)dx+\int dx+c_2$$

या $$y\left(1+x^2\right)=\log\sec x+x+c_2 \qquad \text{.......(2)}$$

अब समीकरण (2) में $x=0,\ y=0$ रखने पर $c_2=0$

अत: समीकरण (2) से

$$y\left(1+x^2\right)=\log\sec x+x$$

उदाहरण 7 : हल कीजिये

$$\left(1+x+x^2\right)\frac{d^3y}{dx^3}+\left(3+6x\right)\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}=0$$

6 हल : दिया गया समीकरण निम्न है ।

$$\left(1+x+x^2\right)\frac{d^3y}{dx^3}+\left(3+6x\right)\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{..........(1)}$$

समीकरण (1) की मानक रूप से तुलना करने पर

$P_0=1+x+x^2, P_1=3+6x, P_2=6$ तथा $P_3=0$

अब दी गई समीकरण यथार्थ होगी यदि $P_3-P_2'+P_1''-P_0'''$ =0

जो कि सत्य है, अत: यथार्थता का प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता है इसलिये समीकरण (1) का प्रथम समाकल होगा ।

$$P_0\frac{d^2y}{dx^2}+\left(P_1+P_0'\right)\frac{dy}{dx}+\left(P_2-P_1'+P_0''\right)y=c_1$$

$$\left(1+x+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(2+4x\right)\frac{dy}{dx}+2y=c_1 \qquad \text{............(2)}$$

पुन: समीकरण (2) से

$P_0=1+x+x^2, P_1=2+4x, P_2=2$ तथा $Q=c_1$

अत: यथार्थता प्रतिबन्ध से,

$P_2-P_1'+P_0''=2-4+2=0$

अत: समीकरण (2) के लिये भी यथार्थता का प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता है इसलिए समीकरण (2) का प्रथम समाकल होगा

$$P_0\frac{dy}{dx}+\left(P_1-P_0'\right)y=\int c_1dx+c_2$$

या $$\left(1+x+x^2\right)\frac{dy}{dx}+\left(1+2x\right)y=c_1x+c_2 \qquad \text{......(3)}$$

पुन समीकरण (3) से

$P_0=1+x+x^2, P_1=1+2x$ तथा $Q=c_1x+c_2$

अब यथार्थता प्रतिबन्ध से,

$P_1-P_0'(1+2x)-(1+2x)=0$

अत: समीकरण (3) के लिये भी यथार्थता का प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता है इसलिए समीकरण (3) का प्रथम समाकल होगा।

$$P_0y=\int Qdx+c_3$$

या $$\left(1+x+x^2\right)y=c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3$$

जो कि दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल है ।

उदाहरण 8 : हल कीजिये ।

$$\sqrt{x}\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+3y=x$$

हल : दिया गया अवकल समीकरण निम्न है ।

$$x^{\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+3y=x \qquad ....(1)$$

दिया गया समीकरण (1) यथार्थ नहीं है अत: दिये गये समीकरण को यथार्थ बनाने के लिये सर्वत्र समाकलन गुणांक $(I.F.), x^m$ से गुणा करने पर

$$x^{m+\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dx^2}+2x^{m+1}\frac{dy}{dx}+3x^m y=x^{m+1} \qquad ....(2)$$

यहीं $P_0=x^{m+\frac{1}{2}}, P_1=2x^{m+1}, P_2=3x^m$ तथा $Q=x^{m+1}$

चूंकि समीकरण (2) यथार्थ है अत: $P_2-P_1'+P_0''=0$

अर्थात $3x^m-2(m+1)x^m+\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{1}{2}\right)x^{m-\frac{3}{2}}=0$

या $-2x^m+\left(m-\frac{1}{2}\right)+\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{1}{2}\right)x^{m-\frac{3}{2}}=0$

जिससे ऊ $m-\frac{1}{2}=0, \ \therefore m=\frac{1}{2}$

अत: $m=\frac{1}{2}$ समीकरण (2) में रखने पर

$$x\frac{d^2.y}{dx^2}+2x^{3/2}\frac{dy}{dx}+3x^{1/2}y=x^{3/2} \qquad ....(3)$$

समीकरण (3) यथार्थ है अत: इसका प्रथम समाकल होगा

$$P_0\frac{dy}{dx}+(P_1-P_0')\,y=\int Q dx+c_1$$

या $$x\frac{dy}{dx}+\left(2x^{3/2}-1\right)y=\int x^{3/2}dx+c_1$$

या $$x\frac{dy}{dx}+\left(2x^{3/2}-1\right)y=\frac{2}{5}x^{5/2}c_1$$

या $$\frac{dy}{dx}+\left(2x^{1/2}-\frac{1}{x}\right)y=\frac{2}{5}x^{3/2}+\frac{c_1}{x} \qquad ....(4)$$

जो कि प्रथम कोटि का रैखिक समीकरण है अत: इसका

समाकल गुणांक $(I.F.)=e^{\int\left(2x^{1/2}-\frac{1}{x}\right)dx}=\frac{1}{x}e^{\left(\frac{4}{3}\right)x3/2}$

$$\therefore y\frac{1}{x}e^{\left(\frac{4}{3}\right)x^{3/2}}=\int\frac{2}{5}x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}e^{\left(\frac{4}{3}\right)x^{3/2}}dx+c_1\int\frac{1}{x^2}e^{\left(\frac{4}{3}\right)x^{3/2}}+c_2$$

$$=\frac{1}{5}e^{\left(\frac{4}{3}\right)x3/2}+c_1\int\frac{1}{x^2}e^{\left(\frac{4}{3}\right)x3/2}dx+c_2$$

उदाहरण 9 : हल कीजिये

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}+x^2(x-1)\frac{dy}{dx}+xy=x^3-4$$

हल: दिया गया अवकल समीकरण निम्न है ।

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}+x^2(x-1)\frac{dy}{dx}+xy=x^3-4 \quad \text{.................}(1)$$

यह समीकरण यथातथ नहीं है अत: इसे यथार्थ बनाने' के लिये सर्वत्र समाकल गुणांक $(I.F.), x^m$' से गुणा करने पर

$$x^{m+4}\frac{d^2y}{dx^2}+x^{m+2}(x-1)\frac{dy}{dx}+x^{m+1}y=x^m\left(x^3-4\right) \quad \text{.........}(2$$

6, यहाँ $P_0=x^{m+4}, P_1=x^{m+2}(x-1), P_2=x^{m+1}$ तथा $Q=x^m\left(x^3-4\right)$

चूँकी समीकरण (2) यथार्थ है अत: $P_2-P_1'+P_0''$ =0 अर्थात

$$x^{m+1}-\left\{(m+3)x^{m+2}-(m+2)x^{m+1}\right\}+(m+4)(m+3)x^{m+2}=0$$

या $\quad (m+3)\left\{x^{m+1}+(m+2)x^{m+2}\right\}=0$

या $\quad m+3=0, \therefore m=-3$

अब m का मान (2) में रखने पर

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x^2}y=1-\frac{4}{x^3}$$

जो कि यथातथ समीकरण है, अत: इसका प्रथम समाकल निम्न होगा

$$= P_0\frac{dy}{dx}+\left(P_1-P_0'\right)y = \int\left(1-\frac{4}{x^3}\right)dx+c_1$$

या $\quad x\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x+-\frac{2}{x^2}+c_1$

जो कि यथातथ समीकरण नहीं है परन्तु प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण है जिसको निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x^2}y=1+\frac{2}{x^3}+\frac{c_1}{x}$$

इसका समाकल गुणांक $(I.F.) = e^{\int -\frac{1}{x^2}dx}=e^{\frac{1}{x}}$

$$\therefore ye^{1/x}=\left(1+\frac{2}{x^3}+\frac{c_1}{x}\right)e^{1/x}dx+c_2$$

$$=\int\left(1+\frac{c_1}{x}\right)e^{1/x}dx-2\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{1/x}+c_2$$

उदाहरण 10 : हल कीजिये

$$\sin^2 x\frac{d^2y}{dx^2}=2y$$

हल : दिया गया समीकरण $\sin^2 x$ से विभाजित करने पर निम्न है।

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\cos ec^2 xy=0 \qquad \text{.......(1)}$$

जो कि यथार्थ नहीं है, उपरोक्त समीकरण को सर्वत्र $\cot x$ से गुणा करने पर

$$\cot x\frac{d^2y}{dx^2}+0\frac{dy}{dx}-2\cot x\cos ec^2 xy=0 \qquad \text{.......(2)}$$

यहाँ $P_0=\cot x, P_1=0, P_2=-2\cot x\cos ec^2 x$

अत: समीकरण (2) यथार्थ होगी यदि $P_2-P_1'+P_0''=0$

अर्थात $-2\cot x\cos ec^2 x-0+2\cot x\cos ec^2 x=0,$ अत:

यथार्थता का प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होता है इसलिये प्रथम समाकल होगा

$$P_0\frac{dy}{dx}+\left(P_1-P_0'\right)\ y=c_1$$

या $$\cot x\frac{dy}{dx}+\cos ec^2 x.y=c_1$$

या $$\frac{dy}{dx}+\frac{\cos ec^2 x}{\cot x}y=c_1\tan x$$

जो कि प्रथम कोटि का रैखिक समीकरण है जिसका समाकल गुणांक

$$\left(I.F.\right)=e^{\int\frac{\cos ec^2 x}{\cot x}dx}=e^{-\log\cot x}=\tan x$$

$$\therefore y\tan x=c_1\int\tan^2 xdx+c_2$$

$$=c_1\int\ \left(\sec^2 x-1\right)dx+c_2$$

$$=c_1\ \left(\tan x-x\right)+c_2$$

या $y=c_1\left(1-x\cot x\right)+c_2\cot x$

जो कि दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल है

उदाहरण 11 : हल कीजिये

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\cot x\frac{dy}{dx}+2y=\cos x$$

हल : दिया गया अवकल समीकरण निम्न है

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\cot x\frac{dy}{dx}+2y=\cos x \qquad \text{......(1)}$$

जो कि यथार्थ नहीं है, उपरोक्त समीकरण को सर्वत्र $\sin x$ से गुणा पर

$$\sin x\frac{d^2y}{dx^2}-\cos x\frac{dy}{dx}+2\sin x.y=\sin x\cos x \qquad \text{......(2)}$$

यहाँ $p_0=\sin x, P_1=-\cos x, P_2=2\sin x$ तथा $Q=\sin x\cos x$

अब दी गई समीकरण (2) यर्थाथ होगी यदि $P_2 - P_1' + P_0'' = 0$

अर्थात $2\sin x - \sin x - \sin x = 0$,जो कि सत्य है इसलिये समीकरण (2) का प्रथम समाकल होगा।

$$P_0 \frac{dy}{dx} + (P_1 - P_0')y = \int Qdx + c_1$$

या $\sin x \dfrac{dy}{dx} - 2\cos x . y = \dfrac{\sin^2 x}{2} + c_1$

या $\dfrac{dy}{dx} - 2\cot x . y = \dfrac{\sin x}{2} + c_1 \operatorname{cosec} x$

जो कि प्रथम कोटि का रैखिक समीकरण है जिसका समाकल गुणांक

$$(I.F.) = e^{-2\int \cot x dx} = e^{-2\log \sin x} = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore y \operatorname{cosec}^2 x = \int \left(\frac{1}{2} \sin x + c_1 \operatorname{cosec} x \right) = \operatorname{cosec}^2 x dx + c_2$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} \operatorname{cosec} x + c_1 \operatorname{cosec}^3 x \right) dx + c_2$$

$$= \frac{1}{2} \log \tan\left(\frac{x}{2}\right) - c_1 \left[\frac{1}{2} \operatorname{cosec} x \cot x - \frac{1}{2} \log \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right] + c_2$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

1. निम्न समीकरण की यथार्थता का प्रतिबन्ध लिखिये ।

$$P_0 \frac{d^3 y}{dx^3} + P_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + P_2 \frac{dy}{dx} + P_3 y = 0$$

2. निम्न समीकरण यथार्थ है।

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \qquad \text{(सत्य/असत्य)}$$

3. निम्न समीकरण यथार्थ है।

$$\left(x^2 - x\right)\frac{d^2 y}{dx^2} + 2(2x+1)\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \qquad \text{(सत्य /असत्य)}$$

4. निम्न समीकरण को यथार्थ बनाने के लिये समाकल गुणांक ज्ञात करो।

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^2}$$

5. निम्न यर्थाथ समीकरण का प्रथम समाकल ज्ञात करो।

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^x$$

9.3 हल का अस्तित्व एव अद्वितीयता

पूर्व इकाईयों में हमने अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन किया। हम यहाँ प्रथम कोटि के अवकल समीकरण के प्रारम्भिक मान समस्या के अद्वितीय हल के अस्तित्व के लिये प्रतिबन्धों का अध्ययन करेगें।सर्वप्रथम हम प्रारम्भिक मान समस्याऐ, पिकार्ड का प्रमेय तथा लिपशीज् प्रतिबन्ध का अध्ययन करेगें।

9.3.1 प्रारम्भिक मान समस्याऐं

ऐसी समस्याऐं जहाँ अवकल समीकरण को हल करने के लिये प्रारम्भिक बिन्दु पर सभी प्रतिबन्ध ज्ञात हो, प्रारम्भिक मान समस्याऐं कहलाती है । उदाहणार्थ

$$\frac{dy}{dx} f(x,y), y(x_0) = y_0 \qquad \text{.........(1)}$$

एक प्रारम्भिक मान समस्या है।

9.3.2 पिकार्ड की उत्तरोत्तर सन्निकटन् विधि

प्रथम कोटि तथा प्रथम क्रम के अवकल समीकरण का व्यापक रूप निम्न है।

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{......(2)}$$

इसका वैशलेषिक विधि से व्यापक हल निम्न रूप का प्राप्त होता है।

$y = F(x) + c$, जहाँ c स्वतन्त्र अचर है ।

अवकल समीकरण के साथ यदि एक बिन्दु(x_0, y_0) ज्ञात हो तो अचर c का मान ज्ञात किया जा सकता है परन्तु हम यहाँ ऐसे समीकरणों को संख्यात्मक विधि से हल करेगें, इसके लिये अनेक विधियाँ है। जिसमें से एक पिकार्ड की उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि है। इस विधि में हम निम्न प्रारम्भिक मान समस्या पर विचार करेगें।

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x,y), y(x_0) = y_0 \qquad \text{........(3)}$$

जहाँ $f(x,y)$, $xy-$ समतल में स्थित किसी आयत

$R: |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b, (a, > b0)$ पर परिभाषित एक सतत वास्तविक फलन है, (3) का हल ज्ञात करने के लिये सर्वप्रथम सीमा x_0 से x (y के सापेक्ष सीमाऐ y_0 से y) के मध्य, समाकलन करने पर

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$$

या $$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$$

या $$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx \qquad \text{.........(4)}$$

समीकरण (4) के दाहिने पक्ष के समाकल का मान, y का मान x के पदों में रखकर ज्ञात किया जा सकता है, जो कि हमे ज्ञात नहीं है इस प्रकार के समीकरण को

उत्तरोत्तर सानकटन् विधि से हल किया जा सकता है, समीकरण (4) के दाहिने पक्ष y में के स्थान पर y_0 रखने पर y का प्रथम सन्निकटन प्राप्त होता है अब यदि y के प्रथम सन्निकटन को y_1 से निरूपित करे तो

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \ y_0\ )dx \qquad ......(5)$$

समीकरण (5) का समाकल्य केवल x का फलन है क्योंकि y_0 अचर राशि है अत: यह समाकलित किया जा सकता है। इसी प्रकार समीकरण (4) में y के स्थान पर y_1 रखने पर हमें y का द्वितीय सन्निकटन y_2 प्राप्त होगा।

अर्थात $$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx \qquad ....(6)$$

व्यापक रूप में हमे y का n वीं सन्निकटन y_n निम्न रूप में प्राप्त होगा

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx$$

इस प्रकार हमें सन्निकटन हलो का निम्न अनुक्रम प्राप्त होगा ।

$$y_1(x), y_2(x)\, y_3, (x), ...y_n(x)............$$

उदाहरण 1 : पिकार्ड विधि से निम्न अवकल समीकरण का हल तृतीय सन्निकट तक ज्ञात कीजिये ।

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1$$

हल : दिया हुआ समीकरण निम्न है

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = x + y, \text{ जहाँ } y = 1 \text{ जबकि } x = 1 \qquad ......(1)$$

हम जानते है कि पिकार्ड विधि से प्रारम्भिक मान समस्या का n वी सन्निकटन निम्न होगा ।

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx \qquad ....(2)$$

अब (1) व (2) की तुलना से

$$y_n = 1 + \int_0^x (x, + y_{n-1})dx$$

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x, + y_0)dx$$

$$= 1 + \int_0^x (x, +1)dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

पुन: $$y_2 = 1 + \int_0^x (x, + y_1)dx$$

$$= 1 + \int_0^x \left(x + 1 + x + \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$$

तथा $$y_3 = 1 + \int_0^x (x + y_2) + dx$$

$$=1+\int_0^x\left(1+x+x^2+\frac{x^3}{6}\right)$$

$$1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{24}$$

9.3.3 लिपशीज् प्रतिबन्ध

यदि कोई फलन $f(x,y), xy$ समतल में स्थित किसी आयत $R;\{|x-x_0|\le a; |y-y_0|\le b, (a,b>0)\}$ पर परिभाषित एक सतत वास्तविक फलन है तो f, y के सापेक्ष R पर लिपशीज प्रतिबन्ध सन्तुष्ट करता है यदि एक धनात्मक अचर K का अस्तित्व है कि R में बिन्दुओं के प्रत्येक युग्म $(x,y_1),(x,y_2)$ के लिये $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le K|y_2-y_1|$

जहाँ अचर K लिपशीज् स्थिरांक कहलाता है ।

प्रमेय 1 : यदि वास्तविक फलन $f(x,y)$ एव $\frac{\delta f}{\delta y}$ एक आयत R में सतत् है, जहाँ

$R;\{(x,y)|x-x_0|\le a; |y-y_0|\le b, (a,b>0)\}$ तथा किसी धनात्मक अचर K के लिये

$$\left|\frac{\delta f(x,y)}{\delta y}\right|\le K, \forall (x,y)\in R$$

तो R में $f(x,y)$ लिपशीज् प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करता है तथा K लिपशीज् स्थिरांक है।

उपपत्ति. आयत R में किन्ही दो बिन्दुओं (x,y_1) एवं (x,y_2) के लिये मध्यमान प्रमेय से

$$f(x,y_2)-f(x,y_1)=\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial y}(y_2-y_1), y_1<\eta<y_2$$

अब, चूंकि बिन्दु $(x,\eta)\in R$, अतः $\left|\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial y}\right|\le K$ से

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le K|y_2-y_1|$$

अर्थात $f(x,y), R$ में लिपशीज् प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करता है ।

उदाहरण 1 : प्रदर्शित कीजिये कि फलन $f(x,y)=xy^2$ आयत R में, जहाँ

$$R; |x|\le 1, |y|\le 1$$

पशीज प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करता है, लेकिन पट्टी $S; |x|\le 1, |y|<\infty$ पर संतुष्ट नहीं करता।

हल : यहाँ $\left|f\left(x,y_1\right)-f\left(x,y_2\right)\right|=|x|\left|y_1{}^2-y_1{}^2\right|$

$$\le |y_1-y_2||y_1+y_2| \quad \left(\because |x|\le 1\right)$$

$$\le 2|y_1-y_2| \quad \left\{\because |y_1+y_2|\le |y_1|+|y_2|=2\right\}$$

अतएव फलन $f\left(x,y\right)=xy^2$ आयत R में लिपशीज् प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करता है लिपशीज् स्थिरांक 2 है

पुन: $\left|\dfrac{f\left(x,y_1\right)-f\left(x,0\right)}{y_1-0}\right| |=||x|y_1|\to\infty$,जबकि$|y_1|\to\infty$, यदि $|x|\ne 0,$

जिससे प्रदर्शित होता है कि फलन $f\left(x,y\right)=xy^2$ पट्टी $S;|x|\le 1,|y|<\infty$ पर लिपशीज् प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट नहीं करता ।

9.3.4 प्रारम्भिक मान समस्या के हल का अस्तित्व एवं अद्‌वितीयता

यदि प्रारम्भिक मान समस्या निम्न है ।

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|+|y|=0 \text{ , } y\left(0\right)=1$$

तो इस समस्या का कोई हल नहीं होगा ।

इसी प्रकार यदि प्रारम्भिक मान समस्या निम्न है

$$\frac{dy}{dx}=x^2 \text{ , } y\left(0\right)=1$$

तो समाकलन करने पर $y=\dfrac{x^3}{3}+c,$ जहाँ स्वेच्छ c अचर है, अब $y\left(0\right)=1$ अर्थात $x=0$, $y=0$ से हमें $c=1$ प्राप्त होगा ।

अत: इस समस्या का केवल एक हल $y=\dfrac{x^3}{3}+1$ होगा

अन्त: में यदि हम प्रारम्भिक मान समस्या निम्न लेते है ।

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-1}{x}, y\left(0\right)=1$$

तो समाकलन करने पर $y-1=cx,$ अब $x=0$, $y=1$ से हम c का मान ज्ञात नहीं कर सकते, अतएव $y-1=cx,$ जहाँ c स्वेच्छ अचर है के अनन्त हल होगें, उपरोक्त तीनो उदाहरणों से

स्पष्ट है कि प्रारम्भिक मान समस्या

$\dfrac{dy}{dx} f\left(x,y\right) y\left(x_0\right)=y_0$ का केवल एक हल या अनन्त हल अथवा कोई हल नहीं होगा। इससे हमारे सामने प्रश्न उठता है कि किसी प्रारम्भिक मान समस्या के हल का अस्तित्व है ? अगर है तो क्या वह अद्‌वितीय है?

हम किसी प्रारम्भिक मान समस्या को बिना किसी प्रमेय के उपयोग के हल करके अथवा परिक्षण द्वारा उसके हल के अस्तित्व एवं अद्वितीयता के बारे में ज्ञात कर सकते है, लेकिन जब समीकरण पूर्व में दी गई विधियों से हल नहीं होता तो इस स्थिति में अस्तित्व एवम् आद्वितीयता प्रमेय उपयोगी साबित होती है।

9.4 अस्तित्व एवं अद्वितीयता प्रमेय

प्रमेय : (i)यदि फलन $f(x,y)$ आयत R वास्तविक तथा संतत फलन है जहाँ

$R;|x-x_0|\le a;|y-y_0|\le b,(a,b>0)$

(i) R पर $f|x,y|\le M$

(ii) फलन f,R में y के सापेक्ष लिपशीज् प्रतिबन्ध

$\left|f(x,y_1)-f(x,y_1)\right|\le|y_1-y_2|$

को सन्तुष्ट करता है, जहाँ K लिपशीज् स्थिरांक है तब अन्तराल $|x-x_0|\le h$ में प्रारम्भिक मान समस्या

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$

के एक अद्वितीय का अस्तित्व होगा, जहाँ $h<$न्यून $\left(a,\frac{b}{m}\right)$

उपपत्ति : हल का अस्तित्व

इस प्रमेय की उपपत्ति उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि से करेगें । दिये हुये को काम में लेने पर प्रारम्भिक मान समस्या के लिये (पिकार्ड विधि से) उत्तरोत्तर सन्निकटन निम्न प्राप्त होगें।

$$\left.\begin{aligned}
y_1(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)\,dx\\
y_2(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_1)\,dx\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_{n-2}(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-2})\,dx\\
y_n(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})\,dx
\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots(1)$$

अतएव हमें उत्तरोत्तर सन्निकटन $y_1(x),y_2(x),\dots\dots\dots,y_n(x),\dots\dots\dots$ का अनुक्रम प्राप्त होता है।

अब हम सिद्ध करेगें कि(i) अनुक्रम $y_1(x),y_2(x),\dots\dots\dots,y_n(x),\dots\dots\dots$ सतंत फलन $f(x)$ को सामान्यत: अभिसृत होता है (ii) $y(x)$ प्रारम्भिक मान समस्या

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),y(x_0)=y_0$$ का हल है

(i) चूँकी $y_n(x_0) = y_0(x) + \{y_1(x) - y_0(x)\} + \{y_2(x) - y_1(x)\} + ...$

$+ .... + \{y_n(x) - y_{n-1}(x)\}$

अतः $y_n(x_0)$ फलनो की श्रेणी

$$y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \{y_n(x) - y_{n-1}(x)\} \qquad ....(3)$$

का n वीं आशिंक योगफल है

अब अनुक्रम $\{y_n(x)\}$ अभिसृत होगा यदि श्रेणी (3) अभिसृत होगी । इसे सिद्ध करने के लिये $|y_n(x) - y_{n-1}(x)|$ को ज्ञात करेगें ।

समीकरण (1) से

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$$

$$\therefore |y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx\right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x} |f(x, y_0)||dx| \le M|x - x_0| \qquad ......(4)$$

इसी प्रकार $|y_2 - y_1| = \left|\int_{x_0}^{x} \{f(x, y_1) - f(x, y_0)\} dx\right|$

$$\le \int_{x_0}^{x} |f(x, y_1) - f(x, y_0)||dx|$$

$$P_2 - P_1{}' + P_0{}'' \quad \le K\int_{x_0}^{x} |y_1 - y_0||dx|$$

$$\le KM \int_{x_0}^{x} |x - x_0||dx| \qquad [\ (4) \text{ से }]$$

$$\le KM \frac{|x - x_0|^2}{\underline{|2}}$$

अतः या $y_2|(x) - y_1(x)| \le KM \dfrac{|x - x_0|^2}{\underline{|2}}$ या $|y_2(x) - y_1(x)| \le \dfrac{KMh^2}{\underline{|2}}$

अब हम गणितीय आगमन विधि से सिद्ध कर सकते है की n के प्रत्येकमान के लिये

$$|y_2(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{MK^{n-1}h^n}{\underline{|n}}$$

अब (5) का निम्न फलनों की श्रेणी में उपयोग करने पर

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + ... + (y_n - y_{n-1}) + ... \qquad .....(6)$$

$$\le y_0 + Mh + \frac{1}{\underline{|2}} MKh^2 + ... + \frac{1}{\underline{|n}} MK^{n-1}h^n + ...$$

$$\le y_0 + \frac{M}{K}\left[e^{Kh} - 1\right] \qquad ....(7)$$

चूँकि (7)का दाहिना पक्ष अभिसारी है इसलिये बायीं पक्ष भी अभिसारी होगा, वाईस्ट्रांस M परीक्षण से श्रेणी (6) अन्तराल $|x-x_0| \le h$ एक समान अभिसृत होगी, चूँकी (6) के पद x के सतत फलन है, अत. इनका योगफल

$\underset{n\to\infty}{Lt}\, y_n(x) = y(x) \qquad \left[\because y_n = y_0 + \sum_{n=1}^{n}(y_n - y_{n-1})\right]$ भी सतत होगा।

(ii) अब हम सिद्ध करेगें कि सीमा फलन $y = (yx)$ प्रारम्भिक मान

$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y = (x_0) = y_0$ को सन्तुष्ट करता है, अर्थात समस्या का अभीष्ट हल है।

चूँकी $y_n(x)$.फलन $y(x)$ को अन्तराल $|x-x_0| \le h$ में एक समान अभिसृत होता है एवं लिपशीज् प्रतिबन्ध $|f(x,y), f(x,y_n)| \le K|y-y_n|$ से दर्शित होता है कि $f[x,y_n(x)]\, f[x,y(x)]$ को एक समान अभिसृत होता है तथा (7) से

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]dx$$

या $$\underset{n\to 0}{Lt}\, y_n(x) = y_0 \int_{x_0}^{x} + \underset{n\to 0}{Lt}\, f[x, y_{n-1}(x)]dx$$

या $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \underset{n\to 0}{Lt}\, f[x, y_{n-1}(x)]dx$$

या $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y(x)]dx \qquad \text{......(8)}$$

(8) के दाहिने पक्ष में समाकल्य x का सतत फलन है अतएव समाकल अवकलनीय होगा तथा सीमा

फलन $y(x)$ अन्तराल $[x_0 - h, x_0 + h]$ में प्रारम्भिक मान समस्या

$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0$ को सन्तुष्ट करेगा, इसलिये $y(x)$,प्रारम्भिक मान समस्या का एक हल है-

<u>हल की अद्वितीयता</u>

अब हम सिद्ध करेगें प्रारम्भिक मान समस्या का केवल एक हल $y = y(x)$ है । यदि सम्भव हो तो माना की $y(x)$ तथा $Y(x)$ प्रारम्भिक मान समस्या के दो भिन्न हल है पुन: माना की अन्तराल $|x-x_0| \le h$ में $|Y(x) - y(x)| \le B$ ....(9)

अब (8) से

$$|Y(x) - y(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}[f\{x, Y(x)\} - f\{x, Y(x)\}]dx\right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x} |f\{x, Y(x)\} - f\{x, Y(x)\}||dx|$$

अत: लिपशीज् प्रतिबन्ध से

$$\left|Y(x)-y(x)\right| \le K\int_{x_0}^{x} f\left[x, y_{n-1}(x)\right]\left|dx\right| \qquad ......(10)$$

पुन: (9) से,

$$\left|Y(x)-y(x)\right| \le KB\left|x-x_0\right| \qquad .....(11)$$

अब (11) का मान (10) के समाकल में रखने पर

$$\left|Y(x)-y(x)\right| \le K^2B\int_{x_0}^{x} \left|x-x_0\right|\left|dx\right|$$

$$\le K^2B\frac{\left|x-x_0\right|^2}{\underline{|2}}$$

इसी प्रक्रिया को लगातार करने पर हमें प्राप्त होगा।

$$\left|Y(x)-y(x)\right| \le K^n B\frac{\left|x-x_0\right|}{\underline{|n}} \le B\frac{(Kh)^n}{\underline{|n}} \quad \left[\because \left|x-x_0\right| \le h\right]$$

चूँकी श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(Kh)^n}{\underline{|n}}$ अभिसारी है अत :

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\frac{B(Kh)^n}{\underline{|n}} = 0$$

$$\therefore \left|Y(x)-y(x)\right| = 0$$

या $Y(x) = y(x)$

अत: हल $y = y(x)$ अद्‌वितीय है।

टिप्पणी: इस प्रमेय को अस्तित्व प्रमेय कहते है क्योंकि इससे ज्ञात होता है प्रारम्भिक मान समस्या का एक हल होगा तथा अद्‌वितीयता प्रमेय से ज्ञात होता है कि यह हल होगा।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. पिकार्ड विधि से निम्न समीकरण का हल प्रथम सन्निकटन तक प्राप्त कीजिये।

   $$\frac{dy}{dx} = x + y^2, y(0) = 0$$

2. फलन $f(x,y) = xy^2$ आयत R में जहाँ से $R; |x| \le 1 |y| \le 1$ लिपशीज् को सन्तुष्ट करता है क्योंकि

   $\left|f(x,y_2) - f(x,y_1)\right| \le 2\left|y_2 - y_1\right|$ तो लिपशीज् स्थिरांक का मान होगा ?

9.5 सारांश

अवकल समीकरण

$f\left(\frac{d^n y}{dx^n},\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},.........,\frac{dy}{dx},y\right)=Q(x),n$ कोटि का यर्थाथ समीकरण कहलाता है

यदि इसे $(n-1)$ कोटि के $\phi\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},.........,\frac{dy}{dx},y\right)=\int Q(x)dx+c$ के रूप समीकरण का केवल अवकलन कर, व्युत्पन्न किया जा सके।जो कि इसका प्रथम समाकल कहलायेगा।

यदि n कोटि का रैखिक अवकल समीकरण निम्न है।

$P_0\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+.........+P_n y$ तो यह यर्थाथ होगा यदि।

$P_n-P'_{n-1}+P''_{n-2}-...........+(-1)^n P_0^n$ का मान शून्य हो, इस स्थिति में प्रथम निम्न होता है

$$P_0\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+(P_1-P'_0)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+.........+$$
$$\left\{P_{n-1}-P'_{n-2}+P''_{n-3}-...........+(-1)^n P_0^{n-1}\right\}y=\int Q(x)dx+c$$

प्रथम कोटि के अवकल समीकरण के प्रारम्भिक मान समस्या का संख्यात्मक हल पिकार्ड के प्रमेय का उपयोग कर ज्ञात किया जा सकता है, इनके हल के अस्तित्व तथा अद्वितीयता को समस्या को हल करके अथवा अस्तित्व एवम् अद्वितीयता प्रमेय के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

9.6 शब्दावली

उत्तरोत्तर अवकलज	*Successive* derivatives
प्रथम समाकल	*First integral*
पिकार्ड की उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि	*Picard's method of Successive approximation*
संख्यात्मक हल	*Numerical solution*
प्रारम्भिक मान समस्या	*Initial value problem*
प्रथम सन्निकटन	*First approximation*
उत्तरोत्तर सन्निकटन	*Successive approximation*
लिपशीज् प्रतिबन्ध	*Lipschitz condition*
लिपशीज् स्थिराक	*Lipschitz constant*
अस्तित्व एवं अद्वितीयता प्रमेय	*Existence and uniqueness theorem*
एक समान अभिसृत	*Uniformly converges*
सीमा फलन	*Limit function*

9.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न-

1. $P_3 - P_2' + P_1'' P_0''' = 0$
2. सत्य
3. सत्य
4. समाकल गुणांक $(I.F) = x^2$
5. $\frac{dy}{dx} + y = e^x + c,$ जहाँ c अचर है

स्वमूल्यांकन प्रश्न- 2

1. प्रथम सन्निकट $y_1 = \frac{x^2}{2}$
2. लिपशीज् स्थिराक $K = 2$

9.8 अभ्यास प्रश्न

(1) निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिये।

$$\left(x^2 - x\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(2x+1\right)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

उत्तर : $y\left(x-1\right)^5 = c_2 x^3 + c_1\left(x^4 - 4x^3 \log x - 6x^2 + 2x - \frac{1}{3}\right)$

(2) $$\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 1 + 3x^2$$

उत्तर ; $y\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2} + c_1 \log\left[x + \sqrt{1+x^2}\right] + c_2$

(3) $$\frac{d^2y}{dx^2} + 2e^x\frac{dy}{dx} + 2e^x y = x^2$$

उत्तर ; $ye^{2x} = \int \frac{1}{3}x^3 e^{2x}.dx + \int c_1 e^{2x}.dx + c_2$

(4) $$\frac{d^3y}{dx^3} + \cos x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\sin x\frac{dy}{dx} - y\cos x = \sin 2x$$

उत्तर ; $ye^{\sin x} = \int \left(c_1 x + c_2\right)e^{\sin x}dx - \frac{1}{2}\left(\sin x - 1\right)e^{\sin x} + c_3$

(5) $$x^3\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 2y = 1$$

उत्तर ; $y = -\frac{1}{4}\left(x+2\right) + \frac{1}{2}c_1 x + c_2 x e^{2/x}$

(6) $2x^2(x+1)\frac{d^2y}{dx^2}+x(x+3)\frac{dy}{dx}-3y=x^2$ (संकेत $m=-2,\frac{1}{2}$)

उत्तर ; $5(x+1)=\frac{5}{7}+c_1x+c_2xe^{-3/2}$

(7) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\tan x\frac{dy}{dx}+3y=\tan^2 x.\sec x$ (संकेत $I.F.=\cos x$)

उत्तर ; $y\sec^3 x=\frac{1}{4}\sec^4 x-x\left(\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x\right)+\frac{2}{3}\log\sec x+\frac{1}{6}\tan^2 x$

$+c_1\left(\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x\right)+c_2$

(8) $x^5\frac{d^2y}{dx^2}+2x^2\frac{dy}{dx}+(3-6x)x^2y=x^4+2x-5$ (संकेत $I.F=\frac{1}{x^2}$)

उत्तर ; $\frac{y}{x^3}.e^{-3/x}=\int\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{x^3}\log x+\frac{5}{x^4}+\frac{c_1}{x^3}\right).\frac{1}{x^3}e^{-3/2}dx+c_2$

(9) पिकार्ड विधि से निम्न समीकरण के हल का तृतीय सन्निकटन प्राप्त कीजिये ।

$\frac{dy}{dx}=x^2-y, y(0)=0$

उत्तर ; $y_1=\frac{x^3}{3}, y_2=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{12}x^4, y_3=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{60}x^5$

(10) पिकार्ड विधि से निम्न समीकरण के 'हल का तृतीय सन्निकटन प्राप्त कीजिये ।

$\frac{dy}{dx}=2y-2x^2-3, y(0)=2$

उत्तर $y_1=2+x-\frac{2x^3}{3}, y_2=2+x+x^2-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{3}, y_3=2+x+x^2-\frac{x^4}{3}-\frac{2}{15}x^5$

(11) निम्न प्रारम्भिक मान समस्या

$\frac{dy}{dx}=2xy, y(0)=1$ के लिये पिकार्ड की विधि से प्रथम तीन सन्निकटन y_1, y_2, y_3 ज्ञात कीजिये।

उत्तर : $y_1=1+x^2, y_2=1+x^2+\frac{x^4}{3}, y_3=1+x^2+\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{15},$

(12) प्रदर्शित कीजिये कि $f(x,y)=x^2+y^2$ आयत R में लिपशीज् प्रतिबन्धो को सन्तुष्ट करता है जहाँ

$R:|x|\le a,|y|\le b$

यहाँ लिपशीज् स्थिरांक का मान भी ज्ञात कीजिये।

उत्तर :लिपशीज् स्थिरांक $K=2b$

इकाई-10 द्‌वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण-1 (Linear Differential Equations of Second Order-1)

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप द्‌वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरणों के हल ज्ञात करने की विधियों के बारे में जान पायेंगे, आप जान पायेंगे की पूरक फलन में विद्‌यमान एक समाकल के ज्ञात होने अथवा प्रथम अवकलज को हटाकर पूर्ण हल किस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है।

10.1 प्रस्तावना

इकाई 6 तथा 7 में हमने रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने की विधियों का अध्ययन किया, इस इकाई में हम द्‌वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरणों के हल करने की कुछ विधियों का अध्ययन करेंगे, जबकि ये पूर्व इकाईयों में दी गई विधियों द्‌वारा हल नहीं हो पाते है।

10.2 द्‌वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण

अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$ (मानक रूप) ....(1)

या $D^2y+PDy+Qy=R,\quad D\equiv\frac{d}{dx}$

या $\left(D^2+PD+Q\right)y=R$

जहाँ P,Q और R केवल x के फलन (विशेष स्थिति में अचर) है, द्‌वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण कहलाते है। इस प्रकार के समीकरणों को हल करने की

कोई व्यापक विधि नहीं है लेकिन यदि पूरक फलन का एक समाकल ज्ञात हो अथवा प्रथम अवकलज हटाकर समान्य रूप में समानयन द्वारा हम पूर्ण हल की प्राप्ति कर सकते हैं।

10.2.1 पूर्ण हल की प्राप्ति: जबकि पूरक फलन का एक समाकल ज्ञात हो

यदि दिये हुए अवकल समीकरण के पूरक फलन में विद्यमान एक समाकल ज्ञात हो तो हम इस समीकरण को प्रथम कोटि के समीकरण में परिवर्तित कर पूर्ण हल प्राप्त कर सकते है-

माना की $y=u$ समीकरण (1) के पूरक फलन का एक समाकल है अत: यह अवकल समीकरण

$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ का एक हल होगा।

अत: $$\frac{d^2u}{dx^2}+P\frac{du}{dx}+Qu=0 \qquad ....(2)$$

पुन: माना की $y=uv$ समीकरण (1) का पूर्ण हल है, जहाँ v, x का फलन है तब

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2}=u\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}.\frac{du}{dx}+v\frac{d^2v}{dx^2}$$

अब $y, \frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\left(u\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}.\frac{du}{dx}+v\frac{d^2v}{dx^2}\right)+P\left(u\frac{du}{dx}+v\frac{dv}{dx}\right)+Q(uv)=R \qquad .....(3)$$

या $$u\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}\left(2\frac{du}{dx}+Pu\right)+v(0)=R \qquad [\text{ समीकरण (2) से }]$$

या $$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)\frac{dv}{dx}=\frac{R}{u} \quad ....(4)$$

अब यदि $\frac{dv}{dx}=p$ ले तो $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$, अत: समीकरण (4) से

$$\frac{dp}{dx}+\left(P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)p=\frac{R}{u}$$

जो कि p तथा x में एक रैखिक समीकरण है अत: इसका समाकल गुणांक

$$(I.F.)=e^{\int\left(P+\frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right)dx}$$

$$e^{\int Pdx.}\, e^{\int \frac{2}{u}du.}=e^{\int Pdx+2\log u}=u^2.e^{\int Pdx}$$

अत: समीकरण (5) का हल होगा

$$p.u^2.e^{\int Pdx} = \int \left(\frac{R}{u}.u^2.e^{\int Pdx}\right)dx + c_1$$

या $$P = \frac{1}{u^2} e = ^{-\int pdx} \int\left(Rue^{-\int pdx}\right)dx + \frac{1}{u^2}\cdot e^{-\int pdx} \quad ....(6)$$

समीकरण (6) से $p = \frac{dv}{dx}$ का मान प्राप्त होगा, जिसके समाकलन करने पर

$$v = \int pdx + c_1 \quad ......(7)$$

समीकरण (7) से प्राप्त v के इस मान से हम सम्बन्ध $y = uv$ की सहायता से y मान प्राप्त कर सकते है, y का यह मान समीकरण (1) का पूर्ण हल होगा। इसमें दो स्वेच्छ अचर होंगे।

(A) समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$ में निरीक्षण द्वारा पूरक फलन में विद्यमान एक समाकल ज्ञात करना।

माना कि दिया हु आ समीकरण है-

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

(i) यदि $y = e^{mx}$ समीकरण (8) के पूरक फलन का एक समाकल है तो $\frac{dy}{dx} = me^{mx}$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = m^2e^{mx}$$

$y, \frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के इन मानों को समीकरण (8) में रखने पर

$$\left(m^2 + Pm + Q\right)e^{mx} = 0$$

या $$m^2 + Pm + Q = 0$$

अत: e^{mx} पूरक फलन का एक समाकल है यदि,

$$m^2 + Pm + Q = 0$$

यदि $m = 1$ हो तो e^x पूरक फलन का एक समाकल होगा यदि $I + P + Q = 0$

प्रकार यदि $m = -1$ हो तो e^{-x} पूरक फलन का एक समाकल होगा य $I - P + Q = 0$

(ii) माना कि $y = x^m$ समीकरण (8) के पूरक फलन का एक समाकल है तो $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$ तथा

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

इन मानों को समीकरण (8) में रखने पर

$$m(m-1)x^{m-2} + Pmx^{m-1} + Qx^m = 0$$

या $\left[m(m-1)+Pmx+Qx^2\right]x^{m-2}=0$

या $m(m-1)+Pmx+Qx^2=0 \quad (\because x^{m-2}\neq 0)$

अब यदि $m=1$ हो तो, पूरक फलन का एक समाकल होगा यदि $P+Qx=0$ इसी प्रकार यदि $m=2$ हो तो

x^2 पूरक फलन का एक समाकल होगा यदि $2+2Px+qx^2=0$. उपर्युक्त (i) तथा (ii) से प्राप्त परिणामों को एक सारणी में निम्न प्रकार लिख सकते है-

यदि पूरक फलन का एक समाकल होगा

यदि	पूरक फलन का एक समाकल होगा
$I+P+Q=0$	$y=e^x$
$I-P+Q=0$	$y=e^{-x}$
$m^2+Pm+Q=0$	$y=e^{mx}$
$P+Qx=0$	$y=x$
$2+2Px+qx^2=0$	$y=x^2$
$m(m-1)+Pmx+Qx^2=0$	$y=x^m$

(B) द्वितीय कोटि के रैखिक समीकरण को हल करने की क्रियाविधि:-

जबकि पूरक फलन का एक समाकल ज्ञात किया जा सकता है-

(1) अवकल समीकरण को मानकरूप $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$ में लिखेंगे।

(2) पूरक फलन का एक समाकल दी गई सारणी से ज्ञात करेंगे ।

(3) $y=uv$ लेकर, $\frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान रखकर v तथा x में अवकल समीकरण प्राप्त करेंगे ।

(4) $\frac{dy}{dx}=p$ रखकर, p तथा x में रैखिक समीकरण को हल कर p प्राप्त करेगे।

(5) अब इस रैखिक समीकरण को हल करके v मान प्राप्त कर सम्बन्ध $y=uv$ की सहायता से पूर्ण हल प्राप्त करेंगे।. (देखे उदाहरण 1 से 7 तक)

10.2.2 पूर्ण हल की प्राप्ति: सामान्य रूप में समानयन द्वारा

द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$ ......(1)

में प्रथम अवकलज हटाकर सामान्य रूप $\frac{d^2y}{dx^2}+Iv=S$ में व्यक्त करना।

रैखिक समीकरण (1) के पूरक फलन का एक भाग ज्ञात होने पर पूर्ण हल प्राप्त किया जा सकता है, परन्तु हमेशा पूरक फलन का एक भाग ज्ञात नहीं किया जा सकता, ऐसी

परिस्थिति में समीकरण का सामान्य रूप में समानयन कर पूर्ण हल प्राप्त किया जा सकता हैं यह विधि पूरक फलन के भाग पर निर्भर नहीं करती।

इसके लिये माना कि $y = uv$ समीकरण (1) का व्यापक हल है।जहाँ u तथा v, x के फलन है तथा u इसके पूरक फलन का एक भाग नहीं है। इसका x के सापेक्ष करने पर

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \quad \text{तथा} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = v\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}.\frac{dv}{dx} + u\frac{d^2v}{dx^2}$$

$y, \frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के इन मानों को समीकरण (1) में रखने पर

$$u\frac{d^2v}{dx^2} + u\frac{dv}{dx}\left(P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{d^2v}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu\right) \qquad ....(2)$$

यहीं u का चयन इस प्रकार करते है कि प्रथम अवकलज वाला $\frac{dv}{dx}$ लुप्त हो जाये, अर्थात

$P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx}$ = 0 का मान शून्य हो

$\because P + \frac{2}{u}\frac{du}{dx}$ =0

या $\frac{du}{u} = -\frac{P}{2}dx$

इसका समाकलन करने पर

$$\log u = -\int \frac{P}{2}dx \text{ या } u = e^{-\frac{1}{2}\int Pdx} \qquad ....(3)$$

इसलिये समीकरण (2) से

$$u\frac{d^2v}{dx^2} + v\left(\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu\right) = R$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{v}{u}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu\right) = \frac{R}{u} \qquad ....(4)$$

चूँकी $\frac{du}{dx} - \frac{P}{2}u$

तथा $\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{2}\left[P\frac{du}{dx} + u\frac{dP}{dx}\right]$

$$= -\frac{1}{2}\left[P\left(-\frac{P}{2}u\right) + u\frac{dP}{dx}\right]$$

$$= \frac{P^4}{2}u - \frac{u}{2}\frac{dP}{dx} \qquad ....(5)$$

इन मानो को समीकरण (4) में रखने पर

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{v}{u}\left\{\frac{P^4}{2}u-\frac{u}{2}\frac{dP}{dx}-\frac{P^2}{2}u+Qu\right\}=\frac{R}{u}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left\{Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}\right\}v=Re^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}+Iv=S \qquad ....(6)$$

जहाँ $\quad I=Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$

तथा $\quad S=\frac{R}{u}=R.e^{\frac{1}{2}\int Pdx}$

समीकरण (6), समीकरण (1) का सामान्य रूप है इसको आसानी से हल किया जा सकता है, यदि I,

या तो अचर हो अथवा $\frac{1}{x^2}$ का समानुपाती हो ।

(A) द्वितीय कोटि के रैखिक समीकरण को सामान्य रूप में समानयन कर हल करने की क्रिया विधि:

(1) अवकल समीकरण को मानकरूप $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy,=R$ में लिखेंगे ।

(2) प्रथम अवकलज हटाने के लिये $u=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$ मानेंगे।

(3) दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल $y=uv$ मानकर सामान्य रूप $\frac{d^2y}{dx^2}+Iv=S$ प्राप्त करेंगे।

जहाँ $I=Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$ तथा $S=\frac{R}{u}=Re^{\frac{1}{2}\int Pdx}$ है।

(4) पूर्व इकाईयों में दी गई विधियों से इसको हल कर v प्राप्त करेंगे।

(5) अब सम्बन्ध $y=uv$ की सहायता से पूर्ण हल प्राप्त करेंगे।

(देखें उदाहरण 8 से 2)

उदाहरण 1: हल कीजिए

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-\left(x^2+2x\right)\frac{dy}{dx}+\left(x+2\right)y=x^3e^x$$

हल: दिये हुये समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\left(1+\frac{2}{x}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)y=xe^x ....(1)$$

यहाँ $P-\left(1+\frac{2}{x}\right), Q=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$ तथा $R=xe^x$

$\therefore P+Qx=0$ इस प्रकार $y=x$ पूरक फलन का एक भाग है ।

अत: माना कि y = vx समीकरण (1) का पूर्ण हल है, तब

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \text{ तथा } \frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dv}{dx}+x\frac{d^2v}{dx^2}$$

अब $y, \frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के मान समीकरण (1) में रखने पर

$\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{dv}{dx}=e^x$ ....(2)

पुन: माना $\frac{dv}{dx}=p$ $\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$

अत: समीकरण (2) से,

$\frac{dv}{dx}-p=e^x$

जो कि p तथा x में प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण है जिसका समाकलन गुणांक

$(I.F.)=e^{-\int dx}=e^{-x}$

अत: समीकरण (3) का हल होगा

$pe^{-x}=\int e^x . e^{-x}dx+c_1=x+c_1$

$\therefore p=\frac{dv}{dx}=xe^x+c_1e^x$

पुन: समाकलन करने पर

$v=xe^x-e^x+c_1e^x+c_2$

अत: दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल निम्न होगा

$y=vx=x^2e^x-xe^x+c_1xe^x+c_2x$

उदाहरण 2 : हल कीजिए

$x\frac{dy}{dx}-y=(x-1)\left(\frac{d^2y}{dx^2}-x+1\right)$

हल: दिये हुये समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{x-1}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x-1}y=x+1 \qquad ......(1)$$

यहीं $P-\frac{x}{x-1}$ $Q-\frac{x}{x-1}$ तथा $R=x-1$

$\therefore P+Qx=0$, इस प्रकार $y=x$ पूरक फलन का एक भाग है अतः माना कि $y=xv$ समीकरण (1) का पूर्ण हल है, तब

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \text{ तथा } \frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dv}{dx}+x\frac{d^2v}{dx^2}$$

अब $y, \frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\left(x\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}\right)-\frac{x}{x-1}\left(v+x\frac{dv}{dx}\right)+\frac{x}{x-1}vx=x-1$$

या $$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{x-1}\right)\frac{dv}{dx}=\frac{x-1}{x} \qquad ....(2)$$

पुनः माना $\frac{dv}{dx}=p, \ \therefore \frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$

अतः समीकरण (2)

$$\frac{dp}{dx}\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{x-1}\right)p=\frac{x-1}{x} \qquad ....(3)$$

जो कि p तथा x में प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण है जिसका समाकल गुणाक

$$(I.F.)=e^{\int\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{x-1}\right)dx}=\frac{x^2}{x-1}e^{-x}$$

अतः समीकरण (3) का हल होगा-

$$p.\frac{x^2}{x-1}e^{-x}=\int xe^{-x}dx+c_1=-e^{-x}(1+x)+c_1$$

$$\therefore P=\frac{dv}{dx}=\frac{dp}{dx}=-\frac{(x^2-1)}{x^2}+c_1\frac{(x-1)}{x^2}e^x=-1+\frac{1}{x^2}+c_1\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^x$$

पुनः समाकलन करने पर

$$v=-x+\frac{1}{x}+c_1+\frac{e^x}{x}+c_2$$

अतः दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल निम्न होगा

$$y=vx=-x^2-1+c_1e^x+c_2x$$

$$=c_1e^x+c_2x-(1+x^2)$$

उदाहरण 3 : हल कीजिए

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}-y=e^x$$

हल: दिये हुये समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1-x}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=\frac{e^x}{x}$$

यहाँ $\quad P=\frac{1-x}{x}$, $Q=-\frac{1}{x}$ तथा $R=\frac{e^x}{x}$

$\therefore 1+P+Q=0,$ इस प्रकार $y=e^x$ पूरक फलन का एक भाग है । अत: माना $y=ve^x$ समीकरण (1) का पूर्ण हल है, तब

$$e^x\left[\left(x\frac{d^2v}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}\right)\frac{x-1}{x}\left(\frac{dv}{dx}+v\right)-\frac{1}{x}v\right]=\frac{e^x}{x}$$

या $\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x}$ ....(2)

पुन: माना $\frac{dv}{dx}=p \quad \therefore \frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$

अत: समीकरण (2) से

$$\frac{dp}{dx}+\left(1+\frac{1}{x}\right)p=\frac{1}{x} \qquad ....(3)$$

जो कि p तथा x में प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण है, जिसका समाकल गुणांक

$$(I.F.)=e^{\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx}=xe^x$$

अब समीकरण (3) का हल होगा

$$p.xe^x\int\frac{1}{x}.xe^xdx+c_1=e^x+c_1$$

$$\therefore p=\frac{dv}{dx}=\frac{1}{x}+c_1\frac{e^{-x}}{x}$$

पुन: समाकलन करने पर

$$v=\log x+c_1\int x^{-1}e^{-x}dx+c_2$$

अत: दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल निम्न होगा

$$y=ve^x=e^x\log x+c_1e^x\int x^{-1}e^{-x}dx+c_2e^x$$

उदाहरण 4: हल कीजिए

$$(x+2)\frac{d^2y}{dx^2}-(2x+5)\frac{dy}{dx}+2y=(x+1)e^x$$

हल: दिये हुये समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{2x+5}{x+2}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{2}{x+2}\right)y=\frac{x+1}{x+2}e^x \qquad ......(1)$$

यहाँ $P = -\frac{2x+5}{x+2}$, $Q = \frac{2}{x+2}$, $R = \frac{2}{x+2}$,

अब $m^2 + Pm + Q = 0$ से,

$$m^2 - \left(\frac{2x+5}{x+2}\right)m + \frac{2}{x+2} = 0$$

या $$\frac{m-2}{x+2}\left[mx + (2m-1)\right] = 0$$

$$\therefore m = 2$$

इस प्रकार $y = e^{2x}$ प्रकार फलन का एक भाग है।

अत: माना कि $y = v.e^{2x}$ समीकरण (1) का पूर्ण हल है, तब

$$\frac{dy}{dx} = 2ve^{2x} + e^{2x}\frac{dv}{dx} \text{ तथा } \frac{d^2v}{dx^2} = 4ve^{2x} + 4ve^{2x}\frac{dv}{dx} + e^{2x}\frac{d^2v}{dx^2}$$

इन मानो को समीकरण (1) में रखने पर

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2} + 4\frac{dv}{dx} + 4v\right)e^{2x} - \left(\frac{2x+5}{x+2}\right)\left(\frac{dv}{dx} + 2v\right)e^{2x} + \frac{2ve^{2x}}{x+2} = \frac{x+1}{x+2}e^{x}$$

या $$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{2x+3}{x+2}\frac{dv}{dx} = \frac{x+1}{x+2}e^{-x}$$

पुन: माना $\frac{dy}{dx} = p \quad \therefore \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$

अत: समीकरण (2) से,

$$\frac{dp}{dx} + \frac{2x+3}{x+2}p = \frac{x+1}{x+2}e^{-x}$$

जो कि p तथा x में प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण है जिसका गुणाक

$$(I.F) = e^{\int\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)dx} = \frac{e^{2x}}{x+2}$$

अत: समीकरण (3) का हल होगा

$$p.\frac{e^{2x}}{x+2} = \int\frac{(x+1)e^{x}}{(x+2)^2}dx + c_1$$

$$= \int\left\{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}\right\}e^{x}dx + c_1$$

$$= \frac{e^{x}}{x+2} + c_1$$

$$\therefore p = \frac{dp}{dx} = e^{-x} + c_1(x+2)e^{-2x}$$

पुन: समाकलन करने पर

$$v=-e^{-x}-\frac{1}{4}c_1\left(2x+5\right)e^{-2x}+c_2$$

अतः दिये हुए समीकरण का पूर्ण हल है

$$y=ve^{2x}=-e^{-x}-\frac{1}{4}c_1\left(2x+5\right)e^{-2x}+c_2e^{2x}$$

उदाहरण 5 : हल कीजिए

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=0;\ x+\frac{1}{x}$$ एक समाकल दिया है ।

हल: दिये हुये समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x^2}y=0 \qquad \text{.......(1)}$$

यहाँ $P=\frac{1}{x}, Q=-\frac{1}{x^2}$ तथा $R=0$

यदि $y=x+\frac{1}{x}$ पूरक फलन का एक समाकल है तो

माना कि $y=v\left(x+\frac{1}{x}\right)$ समीकरण (1) का पूर्ण हल है, तब

$$\frac{dy}{dx}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dv}{dx}+v\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \text{तथा}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{d^2v}{dx^2}+2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\frac{dv}{dx}+\frac{2v}{x^3}$$

अब $y\frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{d^2v}{dx^2}+2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\frac{dv}{dx}+\frac{2v}{x^3}\right]+\frac{1}{x}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dv}{dx}+v\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{x^2}v\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$$

या $$x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{d^2v}{dx^2}+\left[2x^2\left(x\frac{1}{x^2}\right)+x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\frac{dv}{dx}=0$$

या $$x^2\left(x^2+1\right)\frac{d^2v}{dx^2}+\left[2x^2\left(x^2-1\right)+\left(x^2+1\right)\right]\frac{dv}{dx}=0$$

या $$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{3x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}\frac{dv}{dx}=0$$

पुनः माना $\frac{dv}{dx}=p \quad \therefore \frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$

अतः समीकरण (2) से,

$$\frac{dp}{dx}\frac{3x^2-1}{x\left(x^2+1\right)}p=0$$

चर पृथक् कर भिन्नों में खंडित करने पर

$$\frac{dp}{p}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4x}{x^2+1}\right)dx$$

समाकलन से,

$$\log p=\log x-2\log\left(x^2+1\right)+\log c_1$$

$$\therefore\ p=\frac{dv}{dx}=\frac{c_1x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

पुन: समाकलन करने पर

$$v=-\frac{c_1}{2\left(x^2+1\right)}+c_2$$

अत दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल निम्न होg?

$$y=v\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\frac{c_1}{2x}+c_2\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{A}{x}+Bx$$

टिप्पणी : दिया गया समीकरण समघात रैखिक अवकल समीकरण है

अत: माना की $x=e^z$ अर्थात $z=\log x$

$$\therefore\left[D\left(D-1\right)+D-1\right]y=0,\ \text{जहाँ}\ D\equiv\frac{d}{dz}$$

या $\left(D^2-1\right)\ y=0$

अत: इसका सहायक समीकरण $m^2-1=0$ होगा

$$\therefore\ m=\pm1$$

अत: पूरक फलन $(C.F.)$ $=Ae^{-z}+Be^z$

अत: दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल निम्न होगा

$$y=Ae^{-z}+Be^z=\frac{A}{x}+Bx$$

उदाहरण 6 : हल कीजिए

$$x\left(x\cos x-2\sin x\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(x^2+2\right)\sin x\frac{dy}{dx}-2\left(x\sin x+\cos x\right)y=0$$

हल: दिये हुये समीकरण को मानक रूप में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\left(x^2+2\right)\sin x}{x\left(x\cos x-2\sin x\right)}\frac{dy}{dx}-\frac{2\left(x\sin x+\cos x\right)}{x\left(x\cos x-2\sin x\right)}y=0 \quad ....(1)$$

यहीं $P = \frac{(x^2+2)\sin x}{x(x\cos x - 2\sin x)}$ $Q = -\frac{2(x\sin x + \cos x)}{x(x\cos x - 2\sin x)}$ तथा $R = 0$

निरीक्षण द्वारा हम देखते है कि $2Px + Qx^2 + 2 = 0$

$\therefore y = x^2$ पूरक फलन का एक भाग है अत:

माना की $y = vx^2$ समीकरण (1) का पूर्ण हल है, तब

$$\frac{dy}{dx} + 2vx + x^2\frac{dv}{dx} \text{ तथा } \frac{d^2y}{dx^2} = x^2\frac{d^2v}{dx^2} + 4x\frac{dv}{dx} + 2v$$

इन मानों को समीकरण (1) में रखने पर

$$\left[x^2\frac{d^2v}{dx^2} + 4x\frac{dv}{dx} + 2v\right] + \frac{(x^2+2)\sin x}{x(x\cos x - 2\sin x)}\left[x^2\frac{dv}{dx} + 2vx\right]$$

$$-\frac{2(x\sin x + \cos x)}{x(x\cos x - 2\sin x)}vx^2 = 0$$

या
$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left[\frac{4}{x} + \frac{(x^2+2)\sin x}{x(x\cos x - 2\sin x)}\right]\frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{.................(2)}$$

पुन: माना $\frac{dv}{dx} = p, \ \therefore \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$

अत: समीकरण (2) से,

$$\frac{dp}{dx} + \left[\frac{4}{x} + \frac{(-x^2-2)\sin x}{x^2\cos x - 2\sin x}\right]p = 0$$

या
$$\frac{dp}{p} + \left[\frac{4}{x} + \frac{(-x^2-2)\sin x}{x^2\cos x - 2\sin x}\right]dx$$

समाकलन करने पर

$$\log p = -4\log x + \log\left(x^2\cos x - 2x\sin x\right) + \log c_1$$

$$\therefore p = \frac{dv}{dx}\frac{c_1.x\left(x^2\cos x - 2x\sin x\right)}{x^4}$$

$$= \frac{c_1}{x^2}\cos x - \frac{2c_1}{x^3}\sin x$$

पुन: समाकलन करने पर,

$$v = \frac{c_1}{x^2}\sin x + c_2$$

अत: दिये गये समीकरण का पूर्ण हल निम्न होगा

$$y = vx^2 = c_1\sin x + c_2.x^2$$

उदाहरण : हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-9y=0;$$ जिसका एक हल $y=x^3$ है।

हल: दिये हुये समीकरण को मानक रूप में रखने

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{9}{x^2}y=0$$

यहीं $\quad P=\frac{1}{x} \quad ,Q-\frac{9}{x^2}$ तथा $R=0$

माना की $y=vx^3$ समीकरण (1) का पूर्ण हल है, तब

$$\frac{dy}{dx}=x^3\frac{dy}{dx}+3vx^2 \text{ तथा } \frac{d^2y}{dx^2}=x^3\frac{d^2v}{dx^2}++6x^2\frac{dv}{dx}+6vx$$

इन मानों को समीकरण (1) में रखने पर

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}=x^3\frac{d^2v}{dx^2}++6x^2\frac{dv}{dx}+6vx\right)+\frac{1}{x}\left(x^3\frac{dy}{dx}+3vx^2\right)-\frac{9}{x^2}.vx^3=0$$

या $$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{7}{x}\frac{dv}{dx}=0 \qquad \text{........(2)}$$

पुन: माना $\frac{dv}{dx}=p, \ \therefore \frac{d^2v}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$

अत: समीकरण (2) से.

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{7}{x}p=0 \text{ या } \frac{dp}{dx}=-\frac{7}{x}dx$$

समाकलन करने पर $\log p=-7\log x+\log c_1$

या $$p=\frac{dp}{dx}=c_1x^{-7}$$

पुन: समाकलन करने पर

$$v=-\frac{1}{6}c_1x^{-6}+c_2$$

अत: दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल निम्न होगा

$$y=vx^3=-\frac{1}{6}c_1x^{-3}+c_2x^{-3}=Ax^{-3}+Bx^3$$

टिप्पणी : दिया हुआ अवकल समीकरण निम्न है

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-9y=0$$ (समघात रैखिक अवकल समीकरण)

माना की $x=e^z$ अर्थात $z=\log x$

$\therefore\left[D(D-1)+D-9\right]y=0$, जहाँ $D\equiv\frac{d}{dz}$

या $D^2-9=0$

इसका सहायक समीकरण $m^2 - 9 = 0$ होगा

$\therefore m = \pm 3$ अत : पूरक फलन

$$(C.F.) = Ax^{-3z} + Bx^{3z}$$

अत: दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल निम्न होगा

$$y = Ax^{-3z} + Bx^{3z} = Ax^{-3} + Bx^{3}$$

(प्रथम अवकलज को हटाकर सामान्य रूप में व्यक्त कर पूर्ण हल की प्राप्ति)

उदाहरण 8 : हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + \left(4x^2 - 1\right)y = -3e^{x^2}\sin 2x$$

हल : दिया गया समीकरण मानक रूप में है अत:

$$P = -4x, Q 4x^2 - 1 \text{ तथा } R = -3e^{x^2}.\sin 2x$$

प्रथम अवकलज को हटाने के लिये हम u का चयन इस प्रकार करते है की

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int P dx} = e^{-\frac{1}{2}\int(-4x)dx} = e^{x^2}$$

दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल $y = uv$ ले तो इसका सामान्य रूप होगा

$$\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = S$$

जहाँ $I = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx} = \left(4x^2 - 1\right) - \frac{1}{4}(-4x)^2 - \frac{1}{2}(-4) = 1$

तथा $S = Re^{\frac{1}{2}\int P dx} = -3e^{x^2}\sin 2x . e^{\frac{1}{2}\int(-4x)dx} = -3e^{x^2}\sin 2x . e^{-x^2} = -3\sin 2x$

अत: समीकरण (1) से

$$\frac{d^2v}{dx^2} + v = -3\sin 2x$$

या $\left(D^2 + 1\right)v = -3\sin 2x$, जहाँ $D \equiv \frac{d}{dx}$ ....(2)

जो कि अचर गुणाको वाला रैखिक समीकरण है, इसका सहायक समीकरण

$\therefore m^2 = \pm i = 0$ होगा।

$\therefore m = \pm i$

अंत: पूरक फलन $(C.F.) = c_1\cos x + c_2\sin x$

पुन: विशिष्ट समकल $(P.I.) = \frac{1}{D^2 + 1}(-3\sin 2x)\frac{-3\sin 2x}{2^2 + 1} = \sin 2x$

$\therefore v = c_1\cos x + c_2\sin x + \sin 2x$

अत: दिये हुए अवकल समीकरण का पूर्ण हल निम्न है-

$y = uv = e^{x^2}.\left[c_1\cos x + c_2\sin x + \sin 2x\right]$

उदाहरण 9 : हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{4x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{6x^{\frac{4}{3}}}-\frac{6}{x^2}\right)y=0$$

हल : दिया गया समीकरण मानक रूप में है अत:

$$P=\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\ ,Q\frac{1}{4x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{6x^{\frac{4}{3}}}-\frac{6}{x^2}\ \text{ तथा }\ R=0$$

प्रथम अवकलज हटाने के लिये हम u का चयन इस प्रकार करते है कि

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^{1/3}}}=e^{-\frac{3}{4}x^{\frac{2}{3}}}$$

दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल $y=uv$ ले तो इसका सामान्य रूप होगा

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=S \qquad \text{............(1)}$$

जहाँ $\quad I=Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$

$$=\frac{1}{4x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{6x^{\frac{4}{3}}}-\frac{6}{x^2}-\frac{1}{4}.\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}=-\frac{6}{x^2}$$

तथा $\quad S=Re^{\frac{1}{2}\int Pdx}=0$

अत: समीकरण (1) से

$$\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{6}{x^2}v=0$$

या $\quad x^2\frac{d^2v}{dx^2}-6v=0 \qquad$ ....(2)

जो कि एक समघाती रैखिक अवकल समीकरण है इसे हल करने के लिए माना $x=e^x$ अर्थात $z=\log x$

$$\therefore\left[D\left(D-1\right)-6\right]v=0,\ \text{ जहाँ }\ D\equiv\frac{d}{dx}$$

या $\quad\left[D^2-D-6\right]v=0$

इसका सहायक समीकरण $m^2-m-6=0$ होगा।

या $\quad(m+2)(m-3)=0$

$$\therefore m=-2,3$$

अत: पूरक फलन $(C.F.)=c_1e^{-2z}+c_1e^{3z}=c_1x^{-2}+c_2e^3$

या $\therefore v=c_1x^{-2}+c_2e^3$

इसलिये दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल निम्न है

$$y=uv=e^{\frac{3}{4}.x^{2/3}}=\left(c_1x^{-2}+c_2e^3\right)$$

उदाहरण 10 : हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+\left(4x^2-3\right)y=e^{x^2}$$

हल: यहाँ $P=-4x, Q=4x^2-3$ तथा $R=e^{x^2}$

माना $y=uv$ जहाँ $u=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}=e^{-\frac{1}{2}\int(-4x)dx}=e^{x^2}$

समीकरण का पूर्ण हल $y=uv$ लेने पर इसका सामान्य रूप निम्न होगा

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=S \qquad \text{..................(1)}$$

जहाँ $I=Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$

$$=\left(4x^2-3\right)-\frac{1}{4}(-4x)-\frac{1}{2}(-4)=-1$$

तथा $S=Re^{\frac{1}{2}\int Pdx}=e^{\frac{1}{2}\int(-4x)dx}=e^{x^2}.e^{x^{-2}}=1$

अत: समीकरण (1) से,

$$\frac{d^2v}{dx^2}-v=1$$

या $\left(D^2-1\right)v=1$, जहाँ $D\equiv\frac{d}{dx}$

जो कि अचर गुणांकों वाला रैखिक समीकरण है इसका सहायक समीकरण $m^2-1=0$ होगा

$\therefore m=\pm1$

अत: पूरक फलन $(C.F.)=c_1e^x+c_2e^{-x}$

पुन: विशिष्ट समाकल $(P.I.)=\frac{1}{D^2-1},1=-1$

$$\therefore v=c_1e^x+c_2e^{-x}-1$$

अत: दिये हुये अवकल समीकरण का पूर्ण हल निम्न है

$$y=uv=e^{x^2}\left[c_1e^x+c_2e^{-x}-1\right]$$

उदाहरण 10 : हल कीजिए

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^2 x\frac{dy}{dx}\right)+\cos^2 .y=0$$

या $\frac{d^2y}{dx^2}-2\tan x\frac{dy}{dx}+y=0$

हल : यहाँ $P=-2\tan x$,$Q=1$ तथा $R=0$, प्रथम अवकलज हटाने के लिये हम u का चयन इस

प्रकार करते है कि $u=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}=e^{-\frac{1}{2}\int(-2\tan x)dx}=e^{\log\sec x}=\sec x$

दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल $y=uv$ ले तो इसका सामान्य रूप होगा

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=S \qquad \text{...........(1)}$$

जहाँ $I=,Q=1\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$

$$1-\frac{1}{4}(-2\tan x)^2-\frac{1}{2}\left(-\sec^2 x\right)$$

$$=1-\tan^2 x+\sec^2 x=2$$

तथा $S=Re^{\frac{1}{2}\int Pdx}=0$

अतः समीकरण (1) से,

$$\frac{d^2v}{dx^2}+2v=0$$

या $\left(D^2+1\right)v=0$, जहाँ $D\equiv\frac{d}{dx}$

जो कि अचर गुणाको वाला रैखिक समीकरण है इसका सहायक समीकरण $m^2+2=0$ होगा

$\therefore m=\pm\sqrt{2i}$

अतः पूरक फलन $(C.F.)==c_1\cos\sqrt{2x}+c_2\sin\sqrt{2x}$

$\therefore v=c_1\cos\sqrt{2x}+c_2\sin\sqrt{2x}$

इसलिये दिये हुये अवकूल समीकरण का पूर्ण हल निम्न है

$y=uv=\sec x\left(c_1\cos\sqrt{2x}+c_2\sin\sqrt{2x}\right)$

उदाहरण 12 : हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y=\frac{\sin 2x}{x}$$

हल : यहाँ $P=\frac{2}{x}$,$Q=1$ तथा $R=\frac{\sin 2x}{x}$

प्रथम अवकलज को हटाने के लिए

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{2}{x}dx}=e^{-\log}=\frac{1}{x}$$

तथा $$I =, Q = 1\frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}\frac{dP}{dx}$$
$$1 - \frac{1}{4}.\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2}.2\left(-\frac{4}{x^2}\right) = 1$$
$$S = Re^{\frac{1}{2}\int Pdx} = \frac{R}{u} = \sin 2x$$

माना कि दिए हुये अवकल समीकरण का पूर्ण हल $y = uv$ है तो इसका सामान्य रूप होगा $m^2 + 1 = 0$

$\therefore m = \pm i$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + Iv = S$$

$$\therefore \frac{d^2v}{dx^2} + v = \sin 2x$$

या $\left(D^2 + 1\right)v = \sin 2x$,जहाँ $D \equiv \frac{d}{dx}$

जो कि अचर गुणाको वाला रैखिक समीकरण है इसका सहायक समीकरण $m^2 + 1 = 0$ होगा।

$\therefore m = \pm i$

अतः पूरक फलन $(C.F.) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

तथा विशिष्ट समाकल $(P.I.) = \frac{1}{D^2+1}\sin 2x, = \frac{\sin 2x}{-4+1} = -\frac{1}{3}\sin 2x$

$$\therefore v = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$$

अतः दिये हुये अवकल समीकरण का पूर्ण हल निम्न है।

$$y = uv = \frac{1}{x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}\sin 2x\right)$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न

1. द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण के पूरक फलन का एक समाकल ज्ञात हो तो पूर्ण हल प्राप्त किया जा सकता है। (सत्य/असत्य)
2. द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$ में यदि $1 + P + Q = 0$ है तो .... पूरक फलन का एक् समाकल होगा तथा $y = x$ पूरक फलन का एक समाकल होगा यदि .... है।
3. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - \cot x\frac{dy}{dx} - (1 - \cot x)y = e^x \sin$ में पूरक फलन का एक भाग ...... होगा।

4. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{x-1}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x-1}y=x$ में पूरक फलन का एक

5. भाग............ होगा

10.3 सारांश

द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$ के पूरक फलन में विद्यमान एक समाकल को कई बार निरीक्षण द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है। इस समाकल के ज्ञात होने के उपरान्त समीकरण को प्रथम कोटि के अवकल समीकरण में परिवर्तित कर इसका पूर्ण हल प्राप्त किया जा सकता है।

पूरक फलन में विद्यमान समाकल ज्ञात नहीं होने की स्थिति में अवकल समीकरण में प्रथम अवकलज को हटाकर समीकरण को सामान्य रूप में परिवर्तित कर पूर्ण हल प्राप्त किया जा सकता है।

10.4 शब्दावली

समाकल गुणांक	*Integrating factor*
पूरक फलन	*Complementary Function*
विशिष्ट समाकल	*Particular* int*egral*
पूर्ण हल	*Complete solution*
सहायक समीकरण	*Auxibulary equation*
सामान्य रूप	*Normal form*
समानयन	Re*duction*

10.5 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. सत्य 2. $y=e^x$, $P+Qx=0$
2. $y=e^x$, चूंकि $1+P+Qx=0$ हैं 4. $y=e^x$, चूंकि $P+Qx=0$ है।

10.6 अभ्यास. प्रश्न

निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए

1. $x\frac{d^2y}{dx^2}-(2x+1)\frac{dy}{dx}+(x+1)y=(x^2+x-1)e^{2x}$

ऊ. $y=xe^{2x}+c_1x^2e^x+c_2e^x$

2. $x\frac{d^2y}{dx^2}-(2x-1)\frac{dy}{dx}+(x-1)y=0$

उ. $y=(c_1\log x+c_2)$

3. $x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-\cot x)\frac{dy}{dx}-y.\cot x=\sin^2 x$

उ. $y = c_2 e^{-x} + c_1(\sin x - \cos x) - \frac{1}{10}(\sin 2x - 2\cos 2x)$

4. $\sin^2 x \frac{d^2y}{dx^2} = 2y$

उ. $y = c_1 - c_1.x\cot x + c_2 \cot x$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x^2}y = 2x - 1$

उ. $y = x^3 \log x + x^2 + c_1 x^3 + c_2 x$

6. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$

उ. $y = -\frac{1}{9}x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - c_1\left\{\sqrt{1-x^2} + x\sin^{-1}x\right\} + c_2 x$

7. $\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy}{dx} + xy = x$

उ. $y = 1 + c_1 x\int e^{\frac{x^3}{3}}.x^{-2}dx + c_2 x$

8. 8. $\frac{d^2y}{dx^2} - \cot x + \frac{dy}{dx} - (1-\cot x)y = e^x \sin x$

उ. $y = -\frac{1}{2}e^x \cos x - \frac{1}{5}c_1 e^{-x}(\cos x + 2\sin x) + c_2 e^x$

9. $(3-x)\frac{d^2y}{dx^2} - (9-4x) + \frac{dy}{dx} + (6-3x)y = 0$

उ. $y = c_1 e^{3x}(183 - 150x + 42x^2 - 4x^3)c_2 e^x$

10. $\frac{d^2y}{dx^2} - ax + \frac{dy}{dx} + a^2(x-1)y = 0;$ जिसका एक हल $y = e^{ax}$ है

उ. $y = c_1 e^{ax}\int e^{\left(\frac{1}{2}ax^2 - 2ax\right)}dx + c_2 e^{ax}$

11. निम्न अवकल समीकरणों को सामान्य रूप में समानयन करके हल कीजिए-

$D^2y - 2\tan xDy + 5y = e^x \sec x$

उ. $y = \sec x\left(c_1 \cos\sqrt{6}x + c_2 \sin\sqrt{6}x + \frac{1}{7}e^x\right)$

12. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x} + \frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)y = xe^x$

उ. $y = x\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{e^x}{2}\right)$

13. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2(x^2 - x)\frac{dy}{dx} + (x^2 + 2x + 2)y = 0$

उ. $y = \left(c_1 x + c_2\right) x e^{x}$

14. $^{2}\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\tan x \dfrac{dy}{dx} - \left(a^2+1\right) y = 0$

उ. $y = \left(c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}\right)\sec x$

15. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2+5\right) y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$

उ. $y = \left\{c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4}x\right\}, e^{-\frac{x^2}{2}}$

16. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{4x^2}\left(-8 + x^{\frac{1}{2}} + x\right) = 0$

उ. $y = \left(c_1 x^2 + c_2 x^{-1}\right) e^{\frac{x}{2}}$

17. $x\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right) - 2x\dfrac{dy}{dx} + 2y + x^2 y = 0$

उ. $y = x\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right)$

18. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2+1\right) y = x^2 + 3x$

उ. $y = x + \left(c_1 x + c_2 x\right) e^{\frac{x^2}{2}}$

19. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2} + y\right)\cot x + 2\left(\dfrac{dy}{dx} + y\tan x\right) = \sec x$

उ. $y = \left[\dfrac{1}{2}\left(\tan x - x\right) + c_1 x + c_2\right]\cos x$

20. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2-8\right) y = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$

उ. $y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - \dfrac{1}{9}\left(x^2 + \dfrac{2}{9}\right)\right]$

इकाई-11: दिवतीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण-2 (Linear Differential Equations of Second Order-2)

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्धेश्य

इस इकाई को पढ्ने के बाद आप द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरणों के हल ज्ञात करने की अन्य विधियों के बारे में जान पायेंगे, आप जान पायेंगे की स्वतन्त्र चर x को एक नये चर z में परिवर्तित कर अथवा $f(D)$ को संक्रियात्मक गुणनखण्डों में वियोजित कर समीकरण का पूर्ण हल किस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है ।

11.1प्रस्तावना इकाई 10 में हमने द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने की विधियों का अध्ययन किया, जहाँ आश्रित चर y को v में परिवर्तित किया गया था । इस इकाई में हम स्वतन्त्र चर x को दूसरे चर z में परिवर्तित कर समीकरण का हल प्राप्त करेंगे जहाँ z, x का उपयुक्त फलन होगा, ये समीकरण $f(D)$ को संक्रियात्मक गुणनखण्डो में वियोजित करके भी आसानी से हल किये जा सकते है ।

11.2 द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण

अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R$ (मानक रूप) ....(1)

या $D^2y+PDy+Qy=R$, जहाँ $D\equiv\frac{d}{dx}$

या $\left(D^2+PD+Q\right)y=R$

या $f\left(D\right)y=R$

जहाँ P, Q और R केवल x के फलन (विशेष स्थिति में अचर) है, द्‌वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण कहलाते है । ये समीकरण स्वतन्त्र चर x को दूसरे चर में परिवर्तित कर अथवा $f(D)$ को संक्रियात्मक गुणनखण्ड़ो में वियोजित कर सरलतापूर्वक हल किये जा सकते है ।

11.2.1 पूर्ण हल की प्राप्ति: स्वतन्त्र चर परिवर्तन द्‌वारा

अवकल समीकरण (1) को हल करने के लिये स्वतन्त्र चर x को z में परिवर्तन करते है, जहाँ

$z = f(x)$, तो अवकल गणित से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}$$

$\frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\left[\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\right] + P\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + Qy = R$$

या $$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\cdot\frac{dy}{dz} + \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}y = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

या $$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1y = R_1 \qquad .....(2)$$

जहाँ $$P_1 = \frac{\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \text{ तथा } R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \qquad ......(3)$$

यहीं P_1, Q_1 तथा R_1, x के फलन है, परन्तु इनको z तथा x में दिये गये सम्बन्ध $z = f(x)$ की सहायता से z के फलन में व्यक्त किया जा सकता है ।

यहाँ z का x के फलन के रूप में चयन दो विभिन्न स्थितियों से किया जा सकता है ।

स्थिति 1: यदि हम z का चयन इस प्रकार करे कि समीकरण (2) में $\frac{dy}{dx}$ का गुणांक शून्य हो

जाये अर्थात $P_1 = 0$, अतः

$$\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}=0 \text{ या } \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{dz}{dx}}=-P$$

समाकलन करने पर $\log\frac{dz}{dx}=\int -Pdx$

या $\frac{dz}{dx}=e^{\int -Pdx}$ और z=$\int e^{-\int Pdx}.dx$

[यहाँ हम समाकल के अंचराक को नहीं लिखेगे क्योंकि हम केवल z तथा x में सम्बन्ध ज्ञात करना चाहते
हैं ।]

अत: समीकरण (2) का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$\frac{d^2y}{dz^2}+Q_1y=R_1 \qquad ....(4)$$

यह समीकरण आसानी से हल किया जा सकता है यदि Q_1 का मान अचर या $\frac{1}{z^2}$ का समानुपाती आ जाये

स्थिति 2: यदि हम z का चयन इस प्रकार करे कि समीकरण (2) में Q_1 अचर हो जाये

($Q_1=a^2$, यदि Q धनात्मक है) अर्थात

$$\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=a^2 \text{ या } a\frac{dz}{dx}=\sqrt{Q}\Rightarrow az=\int\sqrt{Q}dx$$

तो समीकरण (2) का परिवर्तित रूप होगा

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P_1\frac{dy}{dz}+a^2y=R_1 \qquad ....(5)$$

यह समाकलनीय है यदि P_1 का मान अचर या, शून्य आ जाये

टिप्पणी 1: यहाँ हम $Q_1=-a^2$ लेगें यदि Q ऋणात्मक हैं ।

टिप्पणी 2: हमें P_1, Q_1 तथा R_1 के मान याद रखने चाहिए ।

टिप्पणी 3: हमें z का मान केवल $P_1=0$ या $Q_1=\pm a^2$ मानकर हल करना है ।

टिप्पणी 4:कई बार समीकरण का हल ज्ञात करने के लिये z का चयन दोनो प्रकार से रना सम्भव होता है ।

स्वतन्त्र चर x को परिवर्तित कर हल ज्ञात करने की क्रियाविधि:-

(1) z का मान या $P_1=0$ या $Q_1=\pm a^2$ चुनकर ज्ञात करना चाहिए, सामान्यत: Q_1 को अचर मानकर हल करना ज्यादा आसान होता है ।

(2) P_1, Q_1 तथा R_1 के मान समीकरण (3) से ज्ञात कर परिवर्तित समीकरण (2) को प्राप्त करेंगे ।

(3) परिवर्तित समीकरण (2) को हल करेगें ।

(4) अन्त में, सम्बन्ध $z = f(x)$ से z का मान x के पदों में लिखकर अभीष्ट हल ज्ञात करेगें (देखे उदाहरण 1 से 9)

11.2.2 पूर्ण हल की प्राप्ति: संक्रियात्मक गुणनखण्डों द्वारा

माना कि द्वितीय कोटि का रैखिक अवकल समीकरण प्रतीकात्मक रूप में निम्न है ।

$(D^2 + PD + Q)y = R$ ....(6), [जहाँ $D \equiv \frac{d}{dx}$]

अब $f(D)$ को दो रैखिक गुणनखण्डों $f_1(D)$ तथा $f_2(D)$ में इस प्रकार वियोजित करते है कि समीकरण (6) निम्न रूप में लिखा जा सके

$f_1(D)\left[f_2(D)y\right] = R$ ....(7)

या $f_2(D)\left[f_1(D)y\right] = R$ ....(8)

ये समीकरण दो चरणो में हल किय जा सकते है । (देखे उदाहरण 10 से 14)

टिप्पणी: सामान्यत: गुणनखण्ड $f_1(D)$ तथा $f_2(D)$ क्रमविनिमेय नहीं होते, अतएव हमें सत्यापन करके ही इन्हे समीकरण (7) या (8) के रूप में लिखना चाहिऐ । जो की उदाहरण (10 से 14) के अन्त में दी गई टिप्पणीयों से स्पष्ट हो जायेगा ।

उदाहरण 1:हल कीजिए

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4x^3y = x^5$$

हल: (प्रथम विधि)- दिये गये समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}.\frac{dy}{dx} + 4x^2y = x^4$$

यहाँ $P = -\frac{1}{x}, Q = 4x^2$ तथा $R = x^4$

अब स्वतन्त्र चर x को एक नये चर z में परिवर्तित करने पर, समीकरण (1) परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1y = R_1 \qquad ....(2)$$

जहाँ $P_1 = \dfrac{\dfrac{d^2z}{dx^2} + P\dfrac{dz}{dx}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}, Q_1 = \dfrac{Q}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}$ तथा $R_1 = \dfrac{R}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}$

यहाँ हम चर z का चयन इस प्रकार करते है कि $P_1 = 0$ हो जाये

अर्थात $\dfrac{d^2z}{dx^2}+P\dfrac{dz}{dx}=0$ या $\dfrac{d^2z}{dx^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{dz}{dx}=0$

समाकलन करने पर, $z=\int e^{\int \frac{1}{x}dx}.dx=\int e^{\log x}.dx=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}$

$$\therefore Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{4x^2}{x^2}=4 \text{ तथा } R_1=\frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{x^4}{x^2}=x^2$$

अब P_1, Q_1 तथा R_1 के मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dz^2}+4y=x^2$$

या $\dfrac{d^2y}{dz^2}+4y=2z$,या $\left(D^2+4\right)y=2z$ [जहाँ $D\equiv\dfrac{d}{dz}$]

अत: इसका सहायक समीकरण $m^2+4=0$ होगा

$\therefore m=\pm 2i$

इसलिये पूरक फलन $\left(C.F.\right)=c_1\cos 2z+c_2\sin 2z$

पुन: विशिष्ट समाकल $\left(P.I.\right)=\dfrac{1}{D^2+4}.2z=\dfrac{z}{2}$

फलत: पूर्ण हल $y=c_1\cos 2z+c_2\sin 2z+\dfrac{z}{2}$

$$=c_1\cos x^2+c_2\sin x^2+\frac{x^2}{4}$$

द्वितिय विधि: यदि z का चयन इस प्रकार से किया जाये कि $Q_1=a^2=4$ हो जाये, अर्थात

$$Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=4$$

$$\therefore \frac{4x^2}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=4 \text{ या } \frac{dz}{dx}=x$$

समाकलन करने पर, $z=\dfrac{x^2}{2}$

अत: $$P_1=\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{1-\frac{1}{x}.x}{x^2}=0$$

तथा $R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{x^4}{x^2} = x^2$

अब P_1, Q_1 तथा R_1 के मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 4y = x^2 \text{ या } \frac{d^2y}{dz^2} + 4y = 2z$$

शेष हल प्रथम विधि के अनुसार ज्ञात किया जा सकता है

टिप्पणी : $a^2 = 4$ हमनें अपनी सुविधा के लिये लिया है । यहाँ 4 के स्थान पर और कोई धनात्मक मान लेने पर भी हमें समान हल प्राप्त होगा

उदाहएग 2:हल कीजिए

$$\left(1+x^2\right)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

हल : दिए गए समीकरण को मानक रूप में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{4}{\left(1+x^2\right)^2}.y = 0 \qquad ......(1)$$

यहाँ $P = \frac{2x}{1+x^2}, Q = \frac{4}{\left(1+x^2\right)^2}$ तथा $R = 0$

स्वतन्त्र चर x को एक नये चर z में परिवर्तित करने पर, समीकरण (1) का परिवर्तित रूप निम्न होगा

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \qquad ....(2)$$

जहाँ $P_1 = \frac{\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, $Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ तथा $R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$

यहाँ हम चर z का चयन इस प्रकार करते है कि $P_1 = 0$ हो जाये,

अर्थात $\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} = 0$ या $\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2x}{1+x^2}\frac{dz}{dx} = 0$

समाकलन करने पर

$$z = \int e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}.dx} dx = \int e^{-\log\left(1+x^2\right)}.dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x$$

$$\therefore Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{4/\left(1+x^2\right)^2}{1/\left(1+x^2\right)^2} = 4 \text{ तथा } R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 0$$

अब P_1, Q_1 तथा R_1 के मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dz^2}+4y=0 \text{ या } \left(D^2+4\right)y=0 \text{ ,जहाँ } D\equiv\frac{d}{dz}$$

अतः इसका सहायक समीकरण

$m^2+4=0$ होगा

$\therefore m=\pm 2i$

इसलिये पूरक फलन $(C.F.)=c_1\cos 2z+c_2\sin 2z$

फलतः पूर्ण हल $y=c_1\cos 2z+c_2\sin 2z$

$$y=c_1\cos\left(2\tan^{-1}x\right)+c_2\sin\left(2\tan^{-1}x\right)$$

$$=c_1.\frac{1-x^2}{1+x^2}+c_2.\frac{2x}{1+x^2}$$

या $y\left(1+x^2\right)=c_1\left(1-x^2\right)+2c_2x$

टिप्पणी : माना कि $\tan^{-1}x=\theta \therefore x=\tan\theta$

अतः $\cos\left(2\tan^{-1}x\right)=\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

तथा $\sin\left(2\tan^{-1}x\right)=\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2x}{1+x^2}$

द्वितिय विधिः यदि z का चयन इस प्रकार किया जाये कि $Q_1=4$ हो जाये

अर्थात् $Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=4$

$$\therefore \frac{4/\left(1+x^2\right)^2}{\left(dz/dx\right)^2}=4 \text{ या } \frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

समाकलन करने पर $z=\tan^{-1}x$

अतः $$P_1=\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{2x}{\left(1+x^2\right)}.\frac{1}{\left(1+x^2\right)}}{\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}}=0$$

तथा $$R_1=\frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=0$$

अब P_1, Q_1 तथा R_1 के मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dz^2}+4y=0 \text{ या } \left(D^2+4\right)y=0$$

शेष हल प्रथम विधि के अनुसार किया जा सकता है

उदाहरण 3 : हल कीजिए

$$\cos x\frac{d^2y}{dx^2}+\sin x\frac{dy}{dx}-2y\cos^3 x=2\cos^5 x$$

हल: दिये गए समीकरण को सर्वत्र $\cos x$ से विभाजित कर मानक रूप में लिखने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\tan x\frac{dy}{dx}-2\cos^2 x.y=2\cos^4 x \qquad ....(1)$$

यहाँ $P=\tan x, Q=-2\cos^2 x$ तथा $R=2\cos^4 x$

अब स्वतन्त्र चर x को एक नये चर z में परिवर्तित करने पर, समीकरण (1) का परिवर्तित रूप निम्न होगा $\frac{d^2y}{dz^2}+P_1\frac{dy}{dz}+Q_1y=R_1$ .....(2)

जहाँ $P_1=\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, $Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ तथा $R_1=\frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$

यहीं हम चर z का चयन इस प्रकार करते है कि $P_1=0$ हो जाये

अर्थात $\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}=0$ या $\frac{d^2z}{dx^2}+\tan x.\frac{dz}{dx}=0$

समाकलन करने पर

$$z=\int e^{-\int \tan x dx}.dx=\int e^{\log\cos x}.dx=\int\cos x dx=\sin x$$

$$\therefore Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{-2\cos^2 x}{\cos^2 x}=-2 \text{ तथा } R_1=\frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\frac{2\cos^4 x}{\cos^2 x}=2\cos^2 x$$

अब P_1, Q_1 तथा R_1 के मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dz^2}-2y=2\cos^2 x \text{ या } \frac{d^2y}{dz^2}-2y=2\left(1-z^2\right)$$

या $\left(D^2-2\right)y=2\left(1-z^2\right)$, [जहाँ $D\equiv\frac{d}{dz}$]

अत: इसका सहायक समीकरण $m^2-2=0$ होगा,

$$\therefore m=\pm\sqrt{2}$$

इसलिए पूरक फलन $(C.F.)=c_1e^{\sqrt{2}z}+c_2e^{-\sqrt{2}z}$

पुन: विशिष्ट समाकल $(P.I.)=\frac{1}{\left(D^2-2\right)}2\left(1-z^2\right)=z^2$

फलत: पूर्ण हल $y=c_1e^{\sqrt{2}z}+c_2e^{-\sqrt{2}z}+z^2$

$$y=c_1e^{\sqrt{2}\sin x}+c_2e^{-\sqrt{2}\sin x}+\sin^2 x$$

द्वितीय विधि: यदि z का चयन इस प्रकार किया जाये कि $Q_1=-2$ हो जाये, अर्थात

$$Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = -2$$

$$\therefore \frac{-2\cos^2 x}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = -2 \quad \text{या} \quad \frac{dz}{dx} = \cos x$$

समाकलन करने पर, $z = \sin x$

अतः $P_1 = \dfrac{\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \dfrac{-\sin x + \tan x.\cos x}{\cos^2 x} = 0$

तथा $R_1 = \dfrac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \dfrac{2\cos^4 x}{\cos^2 x} = 2\cos^2$

अब P_1, Q_1 तथा R_1 के मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 2y = 2\cos^2 x$$

या $\left(D^2 - 2\right)y = 2\left(1 - z^2\right)$

शेष हल प्रथम विधि के अनुसार ज्ञात किया जा सकता है-

उदाहरण 4: हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \cot x\frac{dy}{dx} - \sin^2 x.y = \cos x - \cos^3 x$$

हल : दिया गया समीकरण मानक रूप में है इसलिये यहाँ

$P = -\cot x, Q = -\sin^2 x$ तथा $R = \cos x - \cos^3 x$

अब स्वतंत्र चर x को एक नये चर z में परिवर्तित करने पर, दिया गया समीकरण निम्न रूप में परिवर्तित हो जाता है

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \qquad \text{.........(1)}$$

जहाँ $P_1 = \dfrac{\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, $Q_1 = \dfrac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ तथा $R_1 = \dfrac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$

अब यदि z का चयन इस प्रकार से किया जाये कि $Q_1 = -1$ हो. जाये

अर्थात $Q_1 = \dfrac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = -1$

$$\therefore -\frac{\sin^2 x}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = -1 \text{ या } \frac{dz}{dx} = \sin x$$

समाकलन करने पर $z = -\cos x$

अतः $P_1 = \dfrac{\dfrac{d^2z}{dx^2} + P\dfrac{dz}{dx}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = \dfrac{\cos x + (-\cot x)\sin x}{\sin^2 x} = 0$

तथा $R_1 = \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{\sin^2 x} = \dfrac{\cos x\left(1-\cos^2 x\right)}{\sin^2 x} = \cos x$

अब P_1 , Q_1 तथा R_1 के मानों को समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dz^2} - y = \cos x$$

या $\dfrac{d^2y}{dz^2} - y = -z \; [\because z = -\cos x]$

या $\left(D^2 - 1\right)y = -z$, जहाँ $D \equiv \dfrac{d}{dz}$

अतः इसका सहायक समीकरण $m^2 - 1 = 0$ होगा, $\therefore m = \pm 1$

इसलिये पूरक फलन $(C.F.) = c_1 e^z + c_2 e^{-z}$

पुनः विशिष्ट समाकल $(P.I.) = \dfrac{1}{D^2 - 1}(-z) = \left(1 - D^2\right)^{-1} z = \left(1 + D^2 + ...\right) z = z$

अतएव समीकरण का पूर्ण हल होगा

$$y = c_1 e^z + c_2 e^{-z} + z$$
$$= c_1 e^{-\cos x} + c_2 e^{\cos x} - \cos x$$

उदाहरण 8: हल लीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx} + 4x^2 e^{-2x} y = 4\left(x^2 + x^3\right)e^{-3x}$$

हल: यहाँ $P = 1 - \dfrac{1}{x}, Q = 4x^2 e^{-2x}$ तथा $R = 4\left(x^2 + x^3\right)e^{-3x}$

अब स्वतन्त्र चर x को एक नये चर z में परिवर्तित करने पर दिया गया समीकरण निम्न रूप में परिवर्तित हो जाता है ।

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1 y = R$$

जहाँ $P_1 = \dfrac{\dfrac{d^2z}{dx^2} + P\dfrac{dz}{dx}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}, Q_1 = \dfrac{Q}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}$ तथा $R_1 = \dfrac{R}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}$

अब यदि z का चयन इस प्रकार से किया जाये कि $Q_1 = 4$ हो जाये

अर्थात $Q_1 = \dfrac{Q}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = 4$

$\therefore \dfrac{4x^2e^{-2x}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = 4$ या $\dfrac{dz}{dx} = xe^{-x}$

समाकलन करने पर $z = -(1+x)e^{-x}$

अतः $P_1 = \dfrac{\dfrac{d^2z}{dx^2} + P\dfrac{dz}{dx}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = \dfrac{(1-x)e^{-x} + \left(1-\dfrac{1}{x}\right)xe^{-x}}{x^2e^{-2x}} = 0$

तथा $R_1 = \dfrac{R}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} = \dfrac{4\left(x^2+x^3\right)e^{-3x}}{x^2e^{-2x}} = 4(1+x)e^{-x} = -4z$

अब P_1, Q_1 तथा R_1 के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 4y = -4z$$

या $\left(D^2+4\right)y = -4z$, जहाँ $D \equiv \dfrac{d}{dz}$

अत: इसका सहायक समीकरण $m^2 + 4 = 0$ होगा, $\therefore m = \pm 2i$

इसलिये पूरक फलन $(C.F.) = c_1 \cos 2z + c_2 \sin 2z$

पुन: विशिष्ट समाकल $(P.I.) = \dfrac{1}{D^2+4}(-4z) = -z$

अतएव समीकरण का पूर्ण हल निम्न होगा

$$y = c_1 \cos 2z + c_2 \sin 2z - z$$

$$= c_1 \cos\left\{2(1+x)e^{-x}\right\} - c_2 \sin\left\{2(1+x)e^{-x}\right\} + (1+x)e^{-x}$$

उदाहरण 6 : हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\tan x - 3\cos x)\frac{dy}{dx} + 2\cos^2 x.y = \cos^4 x$$

हल : दिया गया समीकरण मानक रूप में है अतएव यहाँ

$P = \tan x - 3\cos x$, $Q = 2\cos^2 x$ तथा $R = \cos^4$

अब स्वतन्त्र चर x को नये चर z में परिवर्तित करने पर समीकरण निम्न रूप में परिवर्तित हो जाता है

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P_1\frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \quad \text{..................(1)}$$

अब यदि z का चयन इस प्रकार किया जाये की $Q_1 = 2$ हो जाये अर्थात

$$Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 2$$

$$\therefore \frac{2\cos^2 x}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = 2 \text{ या } \frac{dz}{dx} = \cos x, \therefore z = \sin x$$

अत : $P_1 = \dfrac{\dfrac{d^2z}{dx^2} + P\dfrac{dz}{dx}}{(dz/dx)^2} = \dfrac{-\sin x + (\tan x - 3\cos x).\cos x}{\cos^2 x} = -3$

तथा $R_1 = \dfrac{R}{(dz/dx)^2} = \dfrac{\cos^4 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x = (1-z^2)$

अब इन मानों को समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 3\frac{dy}{dz} + 2y = (1-z^2)$$

या $\quad (D^2 - 3D + 2)y = (1-z^2)$, जहाँ $D \equiv \dfrac{d}{dz}$

इसका सहायक समीकरण $m^2 - 3m + 2 = 0$ होगा $\therefore m = 1, 2$

अत: पूरक फलन $(C.F.) = c_1e^{2z} + c_2e^z$

पुन: विशिष्ट समाकल $(P.I.) = \dfrac{1}{D^2 - 3D + 2}(1-z^2)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}D + \frac{D^2}{2}\right)^{-1}(1-z^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}D - \frac{D^2}{2} + \frac{9}{4}D^2 + ...\right)(1-z^2)$$

$$= -\frac{1}{4}(2z^2 + 6z + 5)$$

अतएव समीकरण का पूर्ण हल होगा

$$y = c_1e^{2z} + c_1e^z - \frac{1}{4}(2z^2 + 6z + 5)$$

$$= c_1 e^{2\sin x} + c_2 e^{\sin x} - \frac{1}{4}\left(2\sin^2 x + 6\sin x + 5\right)$$

उदाहरण 7 : हल कीजिए

$$x\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3 y = 8x^3 \sin x^2$$

हल: दिया गया समीकरण मानक रूप में निम्न होगा

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - 4x^2 y = 8x^2 \sin x^2 \qquad ....(1)$$

यहाँ $P = -\frac{1}{x}, Q = -4x^2$ तथा $R = 8x^2 \sin x^2$

अब स्वतन्त्र चर x को एक नये चर z में परिवर्तित करने पर दिया गया समीकरण निम्न रूप में रूपान्तरित हो जाता है

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + P_1 \frac{dy}{dz} + Q_1 y = R_1 \qquad ....(2)$$

अब यदि z का चयन इस प्रकार से किया जाये कि $Q_1 = -4$ हो जाये

अर्थात $Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = -4$

$$\therefore \frac{-4x^2}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = -4 \text{ या } \frac{dz}{dx} = x, \ \therefore z = \frac{x^2}{2}$$

अतः $P_1 = \dfrac{\frac{d^2 z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \dfrac{1 + \left(-\frac{1}{x}\right).x}{x^2} = 0$

तथा $R_1 = \dfrac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \dfrac{8x^2 \sin x^2}{x^2} = 8\sin x^2 = 8\sin 2z$

अब P_1, Q_1 तथा R_1 के मानो को समीकरण (2) में रखने पर

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - 4y = 8\sin 2z$$

या $\left(D^2 - 4\right) y = 8\sin 2z$, जहाँ $D \equiv \frac{d}{dz}$

अत: इसका सहायक समीकरण $m^2 - 4 = 0$ होगा $\therefore m = \pm 2$

इसलिये पूरक फलन $(C.F.) = c_1 e^{2z} + c_2 e^{-2z}$

पुनः विशिष्ट समाकल $(P.I.)=\dfrac{1}{D^2-4}8\sin 2z=\dfrac{8}{-4-4}\sin 2z=-\sin 2z$

अतएव समीकरण का पूर्ण हल होगा

$$y=c_1e^{2z}+c_2e^{-2z}-\sin 2z$$
$$=c_1e^{x^2}+c_2e^{-x^2}-\sin x^2$$

उदाहरण 8: हल कीजिए

$$x^6\frac{d^2y}{dx^2}+3x^5\frac{dy}{dx}+a^2y=\frac{1}{x^2}$$

हलः दिये गये समीकरण को मानक रूप में रखने के लिये सर्वत्र x^6 से विभाजित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{3}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{a^2}{x^6}y=\frac{1}{x^8} \qquad \text{..........(1)}$$

यहाँ $P=\dfrac{3}{x}, Q=\dfrac{a^2}{x^6}$ तथा $R=\dfrac{1}{x^8}$

अब स्वतन्त्र चर x को एक नये चर z में परिवर्तित करने पर समीकरण निम्न रूप में रूपान्तरित हो जाता है

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P_1\frac{dy}{dz}+Q_1y=R_1 \qquad \text{.....(2)}$$

अब यदि z का चयन इस प्रकार किया जाये कि $Q_1=a^2$ हो जाये,

अर्थात $Q_1=\dfrac{Q}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}=a^2$

$$\therefore\ \frac{\left(a^2/x^6\right)}{\left(dz/dx\right)^2}=a^2 \text{ या } \frac{dz}{dx}=\frac{1}{x^3}$$

समाकलन करने पर $z=-\dfrac{1}{2x^2}$

अतः $P_1=\dfrac{\dfrac{d^2z}{dx^2}+P\dfrac{dz}{dx}}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{-3}{x^4}+\dfrac{3}{x}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)}{\dfrac{1}{x^6}}=0$

तथा $R_1=\dfrac{R}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{1}{x^8}}{\dfrac{1}{x^6}}=\dfrac{1}{x^2}=-2z$

इन मानो को समीकरण (2) में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dz^2}+a^2y=-2z$$

या $\left(D^2+a^2\right)y=-2z$, जहाँ $D\equiv\frac{d}{dz}$

इसका सहायक समीकरण $m^2+a^2=0$

अत: पूरक फलन $(C.F.)=c_1\cos az+c_2\sin az$

पुन: विशिष्ट समाकल $(P.I.)=\frac{1}{D^2+a^2}(-2z)=\frac{-2z}{a^2}$

अतएव समीकरण का पूर्ण हल होगा,

$$y=c_1\cos az+c_2\sin az-\frac{2z}{a^2}$$

$$=c_1\cos\left(\frac{-a}{2x^2}\right)+c_2\sin\left(\frac{-a}{2x^2}\right)+\frac{1}{a^2x^2}$$

उदाहरण 9 : हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(3\sin x-\cot x)\frac{dy}{dx}+2\sin^2 x.y=e^{-\cos x}.\sin^2 x$$

हल : यहाँ $P=3\sin x-\cot x$, $Q=2\sin^2 x$ तथा $R=e^{-\cos x}.\sin^2 x$

यदि z का चयन इस प्रकार किया जाये की $Q_1=2$ हो जाये, अर्थात

$$Q_1=\frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=2$$

$$\therefore\ \frac{2\sin^2 x}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=2 \text{ या } \frac{dz}{dx}=\sin x,\ \therefore\ z=-\cos x$$

अत: $P_1=\dfrac{\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\dfrac{\cos x+(3\sin x-\cot x)\sin x}{\sin^2 x}=3\quad\therefore m=\pm ai$

तथा $R_1=\dfrac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=\dfrac{e^{-\cos x}.\sin^2 x}{\sin^2 x}=e^{-\cos x}=e^z$

अत: परिवर्तित समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=e^z$$

या $\left(D^2+3D+2\right)y=e^z$, जहाँ $D\equiv\frac{d}{dz}$

इसका सहायक समीकरण $m^2+3m+2=0$ होगा

या $\quad (m+1)(m+2)=0 \therefore m=-1,-2$

अत: पूरक फलन $(C.F.)=c_1e^{-z}+c_2e^{-2z}$

पुन: विशिष्ट समाकल $(P.I.)=\dfrac{1}{D^2+3D+2}.e^z=\dfrac{e^z}{6}$

अतएव समीकरण का पूर्ण हल होगा

$$y=c_1e^{-z}+c_2e^{-2z}+\frac{e^z}{6}$$

$$=c_1e^{\cos x}+c_2e^{2\cos x}+\frac{1}{6}.e^{-\cos x}$$

(संक्रियात्मक गुणनखण्डों द्‌वारा हल किये गये उदाहरण)

उदाहरण 10 : हल कीजिए

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(x-2)\frac{dy}{dx}-2y=x^3$$

हल : दिया गया समीकरण प्रतीकात्मक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है ।

$$\left[xD^2+(x-2)D-2\right]y=x^3 \text{ जहाँ } D\equiv\frac{d}{dx}$$

या $\quad \left[xD^2+xD-2D-2\right]y=x^3$

या $\quad \left[xD(D+1)-2(D+1)\right]y=x^3$

या $\quad (xD-2)(D+1)y=x^3$ ....(1)

अब माना $\quad (D+1)y=v$ ....(2)

अत: समीकरण (1) से

$$(xD-2)\,v=x^3$$

या $\quad x\dfrac{dv}{dx}-2v=x^3$

या $\quad \dfrac{dv}{dx}-\dfrac{2}{x}\,v=x^2$ ....(3)

जो कि v तथा x में रैखिक समीकरण है अत: इसका 2

समाकल गुणांक $(I.F)=e^{-\int\frac{2}{x}}dx=e^{-2\log x}=\dfrac{1}{x^2}$

अत: समीकरण (3) का हल होगा

$$v.\frac{1}{x^2}=\int\frac{1}{x^2}.x^2dx+c_1$$

या $\quad v=x^3+c_1x^2$ ....(4)

v का मान समीकरण (2) में रखने पर

$$(D+1)y = x^3 + c_1x^2 \qquad ....(5)$$

या $$\frac{dy}{dx} + y = x^3 + c_1x^2$$

जो कि एक रैखिक समीकरण है

समाकल गुणांक $(I.F) = e^{\int dx} = e^x$

$$\therefore ye^x = \int e^x\left(x^3 + c_1x^2\right)dx + c_2$$

या $$y = x^3 + (c_1 - 3)x^2 + (6 - 2c_1)x + (2c_1 - 6) + c_2e^{-x}$$

जो कि दिये गये समीकरण का हल है ।

टिप्पणी: यहाँ हम $(xD-2)(D+1)y = x^3$ को

$(D+1)(xD-2)\ y = x^3$ नही लिख सकते है

क्योंकि $(D+1)(xD-2)\ y = \left[xD^2 + (x-1)D - 2\right]y$

उदाहरण 11 : हल कीजिए

$$(x+2)\frac{d^2y}{dx^2} - (2x+5)\frac{dy}{dx} + 2y = (1+x)e^x$$

हल : दिये हुए समीकरण को प्रतीकात्मक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है ।

$$\left\{(x+2)D^2 - (2x+5)D + 2\right\}y = (1+x)e^x \qquad .....(1)$$

या $$\left\{(x+2)D^2 - (2x+4)D + 2\right\}y = (1+x)e^x$$

या $$\left\{(x+2)D(D-2) - (D-2)\right\}y = (1+x)e^x$$

$$\therefore \left\{(x+2)D - 1\right\}(D-2)y = (1+x)e^x \qquad ....(2)$$

अब माना कि $(D-2)y = v$ ....(3)

अत: समीकरण (2) से $\left\{(x+2)D-1\right\}v = (1+x)e^x$

या $$(x+2)\frac{dv}{dx} - v = (1+x)e^x$$

या $$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x+2}v = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)e^x \qquad ....(4)$$

जो कि v तथा x में रैखिक समीकरण है इसका

समाकल गुणाक $(I.F) = e^{-\int \frac{1}{x+2}dx} = \frac{1}{x+2}$

अत: समीकरण (4) का हल होगा

$$v\left(\frac{1}{x+2}\right) = \int \frac{x+1}{(x+2)^2}e^x dx + c_1$$

या $$v.\frac{1}{x+2} = \int \frac{(x+2)-1}{(x+2)^2} e^x dx + c_1$$

$$= \int \frac{(x+2)-1}{(x+2)^2} e^x dx + c_1$$

$$= \int \left[\frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} \right] e^x dx + c_1$$

$$= \frac{1}{x+2} .e^x dx + c_1$$

$$\therefore v = e^x + c_1 (x+2)$$

v समीकरण (3) में रखने पर

$$\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + c_1 (x+2) \text{................(5)}$$

यहाँ, x में रैखिक समीकरण है. इसका

समाकल गुणांक $(I.F) = e^{-\int \frac{1}{x+2} dx} dx = e^{-2x}$

अत: समीकरण (5) के, हल होगा

$$ye^{-2x} = \int e^{-2x} \left[e^x + c_1 (x+2) \right] dx + c_2$$

$$= -e^{-x} - \frac{1}{4} c_1 (2x+5) e^{-2x} + c_2$$

$$\therefore y = -e^{-x} - \frac{1}{4} c_1 (2x+5) + c_2 x^{2x}$$

जो कि दिये गये समीकरण का हल होगा

टिप्पणी: यहाँ हम $\{(x+2)D-1\}(D-2)y = (1+x)e^x$ को

$(D-2)\{(x+2)D-1\}y = (1+x)e^x$ नही लिख सकते

क्योंकि $(D-2)\{D+1\}y = \left[(x+2)D^2 - 2(x+2)D + 2\right]y$

उदाहरण 12: हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-3)\frac{dy}{dx} - 6xy = e^{-x^2}$$

हल : दिया गया समीकरण प्रतीकात्मक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है ।

$\{D^2 + (2x-3)D - 6x\} y = e^{-x^2}$ जहाँ $D \equiv \frac{d}{dx}$

या $\{D^2 + 2xD - 3D - 6x\} y = e^{-x^2}$

या $\{(D+2x)D - 3(D+2x)\} y = e^{-x^2}$

या $(D+2x)(D-3) y = e^{-x^2}$ ....(1)

अब माना कि $(D-3)y=v$ ....(2)

अतः समीकरण (1) से , $(D+2x)v=e^{-x^2}$

या $\dfrac{dv}{dx}+2xv=e^{-x^2}$ ....(3)

जो की v तथा x में रैखिक समीकरण है, अत: इसका

समाकल गुणांक $(I.F)=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$

अत: समीकरण (3) का हल होगा

$$v.e^{x^2}=\int e^{x^2}.e^{-x^2}dx+c_1$$

या $v=xe^{-x^2}+c_1e^{-x^2}$ ....(4)

v का मान समीकरण (2) में रखने पर

$$(D-3)y=xe^{-x^2}+c_1e^{-x^2}$$

या $\dfrac{dy}{dx}-3y=xe^{-x^2}+c_1e^{-x^2}$ ....(5)

जो कि एक रैखिक समीकरण है इसका

समाकल गुणाक $(I.F)=e^{\int -3dx}=e^{-3x}$

$$\therefore ye^{-3x}=c_1\int e^{-(x^2+3x)}dx+\int xe^{-(x^2+3x)}dx+c_2$$

$$=c_1\int e^{-(x^2+3x)}dx-\frac{1}{2}\int(-2x-3)e^{-(x^2+3x)}-\frac{3}{2}\int e^{-(x^2+3x)}dx+c_2$$

$$=\left[\left(c_1-\frac{3}{2}\right)\int e^{-(x^2+3x)}dx\right]-\frac{1}{2}e^{-(x^2+3x)}+c_2$$

$$\therefore y=\left[\left(c_1-\frac{3}{2}\right)\int e^{-(x^2+3x)}dx\right]e^{3x}-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c_2e^{3x}$$

अत: समीकरण (5) का हल होगा

$$y=Ae^{3x}\int e^{-(x^2+3x)}dx+Be^{3x}-\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

जहाँ $A=c_1-\dfrac{3}{2}, B=c_2$

टिप्पणी: यहाँ हम $(D+2x)(D-3)y=e^{-x^2}$ को $(D-3)(D+2x)y=e^{-x^2}$ नही लिख सकते क्योंकि

$$(D-3)(D+2x)y=\left[D^2+(2x-3)D+(2-6x)\right]y$$

उदाहरण 13: हल कीजिए

$$\left[xD^2+(1-x)D-2(1+x)\right]y=e^{-x}(1-6x)$$

हल : दिया गया समीकरण निम्न है ।

$$\left[xD^2+(1-x)D-2(1+x)\right]y=e^{-x}(1-6x) \qquad ....(1)$$

या $$\left[xD^2-2xD+D-2(1+x)\right]y=e^{-x}(1-6x)$$

या $$\left[xD(D-2)+(x+1)D-2(1+x)\right]y=e^{-x}(1-6x)$$

या $$\left[xD(D-2)+(x+1)(D-2)\right]y=e^{-x}(1-6x)$$

या $$\left[xD+(x+1)\right][D-2]y=e^{-x}(1-6x) \qquad ....(2)$$

अब माना की $(D-2)y=v$ ....(3)

अत: समीकरण (2) से

$$\left[xD+(x+1)\right]v=e^{-x}(1-6x)$$

या $$x\frac{dv}{dx}+(x+1)v=e^{-x}(1-6x)$$

या $$\frac{dv}{dx}+\left(1+\frac{1}{x}\right)v=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-6\right)$$

जो कि v तथा x में रैखिक समीकरण है इसका

समाकल गुणांक $(I.F)=e^{\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx}=xe^x$

$$\therefore v.xe^x=\int xe^x.e^{-x}\left(\frac{1}{x}-6\right)dx+c_1$$

या $$v.xe^x=\int(1-6x)dx+c_1$$

या $$v=\int(1-3x)e^{-x}+c_1e^{-x}.x^{-1}$$

v का मान समीकरण (3) में रखने पर

$$(D-2)y=(1-3x)e^{-x}+c_1e^{-x}x^{-1}$$

या $$\frac{dy}{dx}-2y=(1-3x)e^{-x}+c_1e^{-x}x^{-1}$$

जो कि y तथा x में रैखिक समीकरण है इसका

समाकल गुणांक

$$(I.F)=e^{\int -2dx}=e^{-2x}$$

$$\therefore ye^{-2x}=\int(1-3x)e^{-3x}dx+c_1\int e^{-3x}.x^{-1}dx+c_2$$

या $$y=xe^{-x}+c_1e^{2x}\int e^{-3x}.x^{-1}dx+c_2e^{2x}$$

जो कि दिये गये समीकरण का हल होगा

टिप्पणी :यहाँ हम $\left[xD+(x+1)\right][D-2]y=e^{-x}(1-6x)$ को

$[D-2]\left[xD+(x+1)\right]y=e^{-x}(1-6x)$ नहीं लिख सकते क्योंकि

$$[D-2]\left[xD+(x+1)\right]y=\left[xD^2+(2-x)D-(2x+1)\right]y$$

उदाहरण 14 : हल कीजिए

$$x^2D^2y+Dy-\left(1+x^2\right)y=e^{-x}$$

हल : दिया गया समीकरण निम्न है

$$\left[x^2D^2+D-\left(1+x^2\right)\right]y=e^{-x} \qquad ....(1)$$

या $$\left[x^2D^2-x^2+D-1\right]y=e^{-x}$$

या $$\left[x^2\left(D-1\right)\left(D+1\right)+\left(D-1\right)\right]y=e^{-x}$$

या $$\left[x^2D+x^2+1\right]\left[D-1\right]y=e^{-x} \qquad ....(2)$$

अतः माना कि $\left(D-1\right)y=v$ ....(3)

इसलिये समीकरण (2) से

$$\left[x^2D+x^2+1\right]v=e^{-x}$$

या $$x^2\frac{dv}{dx}+\left(x^2+1\right)v=e^{-x}$$

या $$\frac{dv}{dx}+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)v=\frac{1}{x^2}e^{-x}$$

जो कि v तथा x में रैखिक समीकरण है इसका समाकल गुणांक

$$\left(I.F\right)=e^{\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}=e^{\left(x-\frac{1}{x}\right)}$$

$$\therefore ve^{x-\frac{1}{x}}=\int e^{x-\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2}e^{-x}dx+c_1$$

$$=\int e^{-\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2}e^{-x}dx+c_1$$

$$=e^{-\frac{1}{x}}+c_1$$

या $$v=e^{-x}+c_1e^{\frac{1}{x}-x}$$

v का मान समीकरण (3) रखने पर

$$\frac{dy}{dx}-y=e^{-x}+c_1e^{\frac{1}{x}-x}$$

जो कि y तथा x में रैखिक समीकरण है जिसका समाकल गुणांक -

$$\left(I.F\right)=e^{-\int dx}=e^{-x}$$

$$\therefore ye^{-x}=\int e^{-x}.\left[e^{-x}+c_1e^{\frac{1}{x}-x}\right]dx+c_2$$

$$=\int e^{-2x}dx+c_1\int e^{\frac{1}{x}-2x}dx+c_2$$

इसलिये $y = c_2 e^x - \frac{e^{-x}}{2} + c_1 e^x \int e^{-2x+\frac{1}{x}} dx$

जो कि दिये गये समीकरण का हल होगा

टिप्पणी 1 : यहाँ हम $\left[x^2 D + x^2 + 1\right]\left[D-1\right] y = e^{-x}$ को

$\left[D-1\right]\left[x^2 D + x^2 + 1\right] y = e^{-x}$ नहीं लिख सकते, क्योंकि

$$\left[D-1\right]\left[x^2 D + x^2 + 1\right] y = \left[x^2 D^2 + (2x+1) D - \left(x^2 + 1 - 2x\right) D\right] y$$

टिप्पणी 2: आपने देखा कि उदाहरण 12,13,14 के हल में ऐसे समाकल उसी रूप में लिखे गये है जिनको हल नहीं किया जा सकता

स्वमूल्यांकन प्रश्न

(1) यदि अवकल समीकरण $\frac{d^2 y}{dx^2} + \tan x.\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$ में $z = \sin x$ रखे तो .... समीकरण का पूर्ण हल होगा ।

(2) यदि अवकल समीकरण

$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + 4x^2 y = x^4$ में $z = x^2$ रखें तो समीकरण का परिवर्तित रूप .... होगा ।

(3) द्‌वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण

$\left(D^2 + PD + Q\right) y = R$ या $f\left(D\right) y = R$ में $f\left(D\right)$ के रैखिक गुणनखण्ड

$f_1\left(D\right)$ तथा $f_2\left(D\right)$ सदैव क्रमविनिमेय होते है

अथति $f_1\left(D\right), f_2\left(D\right) y = f_2\left(D\right) f_1\left(D\right) y$ सदैव सत्य होता है । (सत्य /असत्य)

11.3 सारांश

द्‌वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण

$\frac{d^2 y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Q_1 y = R_1$ या $f\left(D\right) y = R$ में स्वतन्त्र चर x को एक नये चर z में परिवर्तित करने

पर हमें निम्न रूप का समीकरण प्राप्त होता है ।

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Q_1 y = R_1$$

जहाँ $P_1 = \frac{\frac{d^2 z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, Q_1 = \frac{Q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}, R_1 = \frac{R}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$

इस समीकरण में $P_1 = 0$ या $Q_1 = \pm a^2$ (अचर), रखकर आसानी से हल प्राप्त किया जा सकता है, इन समीकरणों में $Q_1 = \pm a^2$ रखकर z का मान ज्ञात करना ज्यादा

आसान होता है । द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण संक्रियात्मक गुणनखण्डों द्वारा भी हल किये जा सकते है, $f(D)$ को दो रैखिक गुणनखण्डों $f_1(D)$ तथा $f_2(D)$ में वियोजित पर समीकरण निम्न रूप का प्राप्त होगा

$$f_1(D)\, f_2(D)\, y = R$$

या $$f_2(D)\, f_1(D)\, y = R$$

अब इस समीकरण को दो चरणों मे आसानी से हल किया जा सकता ।

यहाँ गुणनखण्ड $f_1(D)$ तथा $f_2(D)$ सामान्यतः क्रमविनिमेय नहीं होते है ।

11.4 शब्दावली

पूरक फलन	Complementary function
विशिष्ट समाकल	Particular integral
पूर्ण हल	Complete solution
समाकलनीय	Integrable
सक्रियात्मक गुणनखण्ड	Operational factors
वियोजित	Resolved
क्रमविनिमेय	Commutative

11.5 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. $y = c_1 \cos(\sin x + c_2)$, क्योंकि $z = \sin x$ लेने पर $Q_1 = 1$, $P_1 = 0$ एवं $R_1 = 0$ प्राप्त होगा, इसलिये परिवर्तित समीकरण $\dfrac{d^2y}{dz^2} + y = 0$ का पूर्ण हल $y = c_1 \cos(\sin x + c_2)$ प्राप्त होगा।

2. $\dfrac{d^2y}{dz^2} + y = \dfrac{z}{4}$, क्योंकि $z = x^2$ रखने पर $P_1 = 0, Q_1 = 1$ तथा $R_1 = \dfrac{z}{4}$ प्राप्त होगा,

3. इसलिये परिवर्तित समीकरण $\dfrac{d^2y}{dz^2} + y = \dfrac{z}{4}$ प्राप्त होगी ।

4. असत्य

11.6 अभ्यास प्रश्न

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए

1. $$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3 y = 4x^3 \sin x^2$$

उ. $$y = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}\sin x^2$$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(1 + 4e^x\right)\frac{dy}{dx} + 3e^{2x}.y = e^{2\left(x+e^x\right)}$$

उ. $y = c_1 e^{e^x} + c_2 e^{3e^x} - e^{2e^x}$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + (\tan x - x)^2 \dfrac{dy}{dx} - n(n-1)\sec^4 x . y = 0$

उ. $y = c_1 e^{-n\tan x} + c_2 e^{(n-1)\tan x}$

4. $(x^3 - x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + n^2 x^3 y = 0$

उ. $y = c_1 \cos\left[n\sqrt{x^2 - 1} + c_2\right]$

5. $x^4 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x^3 \dfrac{dy}{dx} + n^2 y = 0$

उ. $y = c_1 \cos\left(c_2 - \dfrac{n}{x}\right)$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \cot x \dfrac{dy}{dx} + 4y \cos ec^2 x = 0$

उ. $y = c_1 \cos\left(2\log\tan\dfrac{x}{2}\right) + c_2 \sin\left(2\log\tan\dfrac{x}{2}\right)$

7. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (4x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 4x^3 y = 2x^3$

उ. $y = (c_1 + c_2 x^2)e^{x^{-2}} + \dfrac{1}{2}$

8. $(a^2 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{a^2}{x}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^2}{a} y = 0$

उ. $y = c_1 \cos\left\{c_2 \pm \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a}}\right\}$

निम्न अवकल समीकरणों को सक्रियात्मक गुणनखण्डों द्वारा हल कीजिए

1. $\left[(x+3)D^2 - (2x+7)D + 2\right]y = (x+3)^2 e^x$

उ. $y = -\dfrac{c_1}{4}(2x+7) - (x+4)e^x + c_2 e^{2x}$

2. $3x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + (2 + 6x - 6x^2)\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$

उ. $y = \dfrac{c_1}{3} e^{\frac{2}{3x}} \int x^{-2} . e^{\left\{2x - \frac{2}{3x}\right\}} dx + c_2 e^{\frac{2}{3x}}$

3. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - (x+2)\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^3$

उ. $y = -x^3 + a(x^2 + 2x + 2) + be^x$

4. $xy'' + (1-x)y' - y = e^x$

3. $y = c_2 e^x + c_1 e^x \left[\int \frac{e^{-x}}{x} dx \right] + e^x \log x$

5. $x \frac{d^2 y}{dx^2} + (x-1) \frac{dy}{dx} - y = x^2$

3. $y = x^2 + a(x-1) + be^{-x}$

इकाई 12 द्‌वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण-3 (Linear Differential Equations of सेकंड order-3)

इकाई की रूपरेखा

12.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढने के बाद आप द्‌वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरणो के हल हेतु विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की कुछ विधियो के बारे में जाने पायेंगे । आप जान पायेंगे कि यदि किसी

द्‌वितीय कोटि के अवकल समीकरण का सम्पूर्ण पूरक फलन ज्ञात है तो इसकी सहायता से विशिष्ट समाकल को भी ज्ञात किया जा सकता हैं ।

12.1 प्रस्तावना

इकाई 10 तथा 11 में हमने द्‌वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने की विधियों का अध्ययन किया । कई बार विशिष्ट समाकल पूर्व में दी गई विधियों से ज्ञात करना कठिन होता है, इस स्थिति मे प्राचल विचरण तथा अनिर्धारित गुणाको की विधि विशिष्ट समाकल ज्ञात करने में सहायक सिद्ध होती है । इस इकाई में हम उक्त दोनों विधियों का अध्ययन करेंगे ।

12.2 द्‌वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण

हम जानते हैं की अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R \qquad ....(1)$$

जहाँ P, Q तथा R, x के फलन है द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण कहलाते है । यदि इनका सम्पूर्ण पूरक फलन ज्ञात हो तो प्राचल विचरण अथवा अनिर्धारित गुणांको की विधि विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की सशक्त विधियाँ है ।

12.2.1 प्राचल विचरण विधि

माना की द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण (1) का पूरक फलन $(C.F)$ निम्न है । $y = c_1 u + c_2 v$ ......(2)

जहाँ c_1 एव c_2 अचर राशियाँ है तथा u, v समीकरण

$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ के दो समाकल हल हैं अत:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + Qu = 0 \qquad ....(3)$$

तथा
$$\frac{d^2v}{dx^2} + P\frac{dv}{dx} + Qv = 0 \qquad ....(4)$$

स्पष्टत: $y = c_1 u + c_2 v$ समीकरण (1) का पूर्ण हल नहीं हैं क्योंकि $R \neq 0$ अतः c_1 तथा c_2 केवल अचर न होकर चर राशियाँ होनी चाहिए, इसलिये माना की समीकरण (1) का पूर्ण हल निम्न हैं ।

$$y = Au + Bv \qquad ....(5)$$

जहाँ A तथा B अचर नहीं अपितु x के अज्ञात फलन हैं ताकि (1) सन्तुष्ट रहे। यहाँ A तथा B का चयन इस प्रकार करते हैं की

$$\frac{dA}{dx}.u + \frac{dB}{dx}.v = 0$$

या
$$A_1 u + B_1 v = 0 \qquad ....(6)$$

अब समीकरण (5) का अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dA}{dx}u + A\frac{du}{dx} + \frac{dB}{dx}v + B\frac{dv}{dx}$$

$$= A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx} \text{ [समीकरण (6) से]}$$

या
$$\frac{dy}{dx} = A_1 u + B_1 v$$

तथा
$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dA}{dx}.\frac{du}{dx} + B\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dB}{dx}.\frac{dv}{dx}$$

या
$$\frac{d^2y}{dx^2} = Au_2 + A_1u_1 + Bv_2 + B_1v_1$$

अब $y, \frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$(Au_2 + A_1u_1 + Bv_2 + B_1v_1) + P(Au_1 + Bv_1) + Q(Au + Bv) = R$$

या $A(u_2 + Pu_1 + Qu) + B(v_2 + Pv_1 + Qv) + (A_1u_1 + B_1v_1) = R$

परन्तु (3) व (4) से A तथा B के गुणांक शून्य हैं अत:

$$A_1u_1 + B_1v_1 = R \qquad ....(7)$$

समीकरण (6) तथा (7) को हल करने पर

$$\frac{A_1}{-v} = \frac{B_1}{u} = \frac{R}{uv_1 - u_1v}$$

अत: $A_1 = \frac{dA}{dx} = \frac{-vR}{uv_1 - u_1v}$

तथा $B_1 = \frac{dB}{dx} = \frac{uR}{uv_1 - u_1v}$

इनका समाकलन करने पर,

$A = f(x) + c_3$ तथा $B = g(x) + c_4$ (माना)

अब A तथा B के मान (5) में रखने पर

$$y = [f(x) + c_3]u + [g(x) + c_4]v$$
$$= uf(x) + vg(x) + c_3u + c_4v$$

जो की समीकरण (1) का पूर्ण हल होगा जहाँ c_3 तथा c_4 स्वेच्छ अचर हैं ।

क्रियाविधि:-

सर्वप्रथम दिये गये अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$ का पूरक फलन $(C.F)$ ज्ञात करेंगे, माना की पूरक फलन $y = c_1u + c_2v$ हैं, जहाँ c_1 तथा c_2 अचर हैं ।

अब c_1 तथा c_2 के स्थान पर A तथा B लिखेंगे तथा पूर्ण हल $y = Au + Bv$ तो मानेंगे ।

A तथा B को x के फलन मानते हुए दो समीकरण $A_1u_1 + B_1v = 0$ तथा $A_1u_1 + B_1v_1 = R$ प्राप्त करेंगे

अब दोनों समीकरणों को हल कर $A_1 = \frac{dA}{dx}$ तथा $B_1 = \frac{dB}{dx}$ ज्ञात करेंगे ।

समाकलन करके A तथा B प्राप्त करेंगे, अब $y = Au + Bv$ में A तथा B के मान रखकर दिये गये अवकल समीकरण का पूर्ण हल प्राप्त करेंगे ।

(देखे उदाहरण 1 से 10)

टिप्पणी (1) :- इकाई 10 में हमने एक ऐसी विधि का अध्ययन किया था, जिसमे पूरक फलन का केवल एक भाग ज्ञात होना आवश्यक था जबकि इस विधि में सम्पूर्ण पूरक फलन ज्ञात होना चाहिए

अत: पूर्व मे दी गई वह विधि इस विधि से अधिक श्रेष्ठ है । '

टिप्पणी (2): इस विधि का प्रयोग निम्न स्थितियों में उपयुक्त रहता जबकि

(i) यदि प्राचल विचरण विधि से ही हल ज्ञात करने के निर्देश हो ,

(ii) सम्पूर्ण पूरक फलन ज्ञात हो तथा पूर्व में दी गई विधियों विशिष्ट समाकल ज्ञात करना कठिन हो

टिप्पणी(3) :- यहाँ पूरक फलन के स्वेच्छ अचरों को बदलकर चर फलन मानकर हल प्राप्त किया जाता है । इसलिए इस विधि का नाम प्राचल विचरण विधि है ।

12.2.2 अनिर्धारित गुणांक विधि

कुछ समीकरणों मे विशिष्ट समाकल ज्ञात करने के लिए प्राचल विचरण विधि का प्रयोग काफी लम्बा तथा कठिन हो जाता है । अनिर्धारित गुणांको की विधि एक असमघाती रैखिक अवकल समीकरण का विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की विधि है, जो की इसके दायें पक्ष के फलन R पर निर्भर करती है । यह विधि आगे दिये गये उदाहरणों से अधिक स्पष्ट हो जायेगी ।

(देखे उदाहरण 11 से 13)

उदाहरण (1): प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=x$$

हल : दिया गया समीकरण निम्न हैं

$$\left(D^2+1\right)y=x \qquad ....(1)$$

इसका सहायक समीकरण

$m^2+1=0$ होगा $\therefore m=\pm i$

अत: पूरक फलन $\left(C.F\right)=c_1\cos x+c_2\sin x$ जहां c_1 तथा c_2 अचर राशियाँ हैं ।

माना कि दिये हुये समीकरण (1) का पूर्ण हल है ।

$$y=A\cos x+B\sin x \qquad ......(2)$$

जहाँ A तथा B, x के फलन हैं । A तथा B का चयन इस प्रकार करते हैं कि

$$\frac{dA}{dx}\cos x+\frac{dB}{dx}\sin x=0 \qquad ....(3)$$

अब समीकरण (2) का अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=-Asinx+B\cos x+\frac{dA}{dx}\cos x+\frac{dB}{dx}\sin x$$

$=-Asinx+B\cos x$ [समीकरण(3)से]

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\cos x - Bsinx - sinx\frac{dA}{dx} + \cos x\frac{dB}{dx}$$

अब समीकरण (1) में y तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के मान रखने पर

$$-sinx\frac{dA}{dx} + \cos x\frac{dB}{dx} = x \qquad ....(4)$$

समीकरण (3) व (4) को हल करने पर

$$\frac{dA}{dx} = -xsinx \text{ तथा } \frac{dB}{dx} = x\cos x$$

समाकलन करने पर,

$$A = -\int xsinx + c_3 = x\cos x - \sin x + c_3$$

तथा $B = \int x\cos xdx + c_4 = x\sin x + \cos x + c_4$

अत: (2) से दिये गये समीकरण (1) का पूर्ण हल निम्न हैं

$$y = (x\cos x - \sin x + c_3)\cos x + (x\sin x + \cos x + c_4)\sin x$$

$$= c_3\cos x + c_4\sin x + x$$

उदाहरण(2):- प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos ecx$$

हल :- दिया समीकरण निम्न है

$$(D^2+1) + y = \cos ecx \qquad ....(1)$$

इसका सहायक समीकरण $m^2+1=0$ होगा, $\therefore m = \pm i$

अत: पूरक फलन $(C.F) = c_1\cos x + c_2\sin x$ जहाँ c_1 तथा c_2 अचर राशियाँ हैं ।

माना कि दिये गये समीकरण (1) का पूर्ण हल हैं ।

$$y = A\cos x + Bsinx \qquad ......(2)$$

जहाँ A तथा B, x के फलन हैं । A तथा B का चयन इस प्रकार करते हैं कि

$$\frac{dA}{dx}\cos x + \frac{dB}{dx}\sin x = 0 \qquad ....(3)$$

अब समीकरण (2) का अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = -Asinx + B\cos x + \frac{dA}{dx}.\cos x + \frac{dB}{dx}.\sin x$$

$$= -A\sin x + B\cos x \text{ [समीकरण (3) में]}$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\cos x - Bsinx - \frac{dA}{dx}\sin x + \frac{dB}{dx}\cos x$$

अब समीकरण (1) में y तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के मान रखने पर

$$-Bsinx\frac{dA}{dx}+\cos x\frac{dB}{dx}=\cos ecx \qquad ....(4)$$

समीकरण (3) व (4) को हल करने पर

$$\frac{dA}{dx}=-1 \text{ तथा } \frac{dB}{dx}=\cot x$$

इनका समाकलन करने पर

$$A=-\int dx+c_3=-x+c_3$$

तथा $\quad B=\int \cot x dx+c_4=\log\left(\sin x\right)+c_4$

अतः (2) से दिये समीकरण (1) का पूर्ण हल निम्न हैं ।?

$$y=\left(-x+c_3\right)\cos x+\left[\log\left(\sin x\right)+c_4\right]\sin x$$

$$=c_3\cos x+c_4\sin x-x\cos x+\sin x.\log(\sin x)$$

उदाहरण (3) :- प्राचल विचरण विधि द्वारा हल किजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=\sec ax$$

हल :- दिया गया अवकल समीकरण निम्न हैं

$$\left(D^2+a^2\right)y=\sec ax \qquad ....(1)$$

इसका सहायक समीकरण $m^2+a^2=0$ होगा, $\therefore m=\pm ai$

अतः पूरक फलन $\left(C.F\right)=c_1\cos ax+c_2\sin ax,$ जहाँ c_1 तथा c_2 राशियाँ हैं ।

माना की दिये हुये समीकरण (1) का पूर्ण हल हैं

$$y=A\cos ax+B\sin ax \qquad ......(2)$$

हाँ A तथा B, x के फलन है । A तथा B का चयन इस प्रकार करते हैं कि

$$\frac{dA}{dx}\cos ax+\frac{dB}{dx}\sin ax=0 \qquad ......(3)$$

अब समीकरण (2) का अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=-Aa\sin ax+Ba\cos ax+\frac{dA}{dx}\cos ax+\frac{dB}{dx}\sin ax$$

$$=-Aa\sin ax+Ba\cos ax \qquad \text{[समीकरण (3) से]}$$

तथा $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=-Aa^2\cos ax-Ba^2\sin ax+a\cos ax\dfrac{dB}{dx}-a\sin ax\dfrac{aA}{dx}$

अब समीकरण (1) में y तथा $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ के मान रखने पर

$$-a\sin ax\frac{dA}{dx}+a\cos ax\frac{dB}{dx}=\sec ax \qquad ....(4)$$

समीकरण (3) व (4) को हल करने पर

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{1}{a}\tan ax \text{ तथा } \frac{dB}{dx} = \frac{1}{a}$$

इनका समाकलन करने पर

$$A = -\frac{1}{a}\int \tan ax dx + c_3 = \frac{1}{a^2}\log\cos ax + c_3$$

तथा $$B = \frac{1}{a}\int dx + c_4 = \frac{x}{a} + c_4$$

अतः (2) से दिए गए समीकरण का पूर्ण हल निम्न है ।

$$y = \left(\frac{1}{a^2}\log\cos ax + c_3\right)\cos ax + \left(\frac{x}{a} + c_4\right)\sin ax$$

$$= c_3\cos ax + c_4\sin ax + \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax.\log\cos ax$$

उदाहरण (4) : प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिए -

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 4\tan 2x$$

हल :- दिया गया समीकरण निम्न है ।

$$\left(D^2 + 4\right)y = 4\tan 2x \qquad ....(1)$$

इसका सहायक समीकरण $m^2 + 4 = 0$ होगा $\therefore m = \pm 2i$

अतः पूरक फलन $\left(C.F\right) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x,$ जहाँ c_1 तथा c_2 अचर राशियाँ है।

माना की दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल है ।

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x \qquad ....(2)$$

A तथा B, x के फलन है A तथा B का चयन इस प्रकार करते है । कि

$$\frac{dA}{dx}\cos 2x + \frac{dB}{dx}\sin 2x = 0 \qquad ....(3)$$

अब समीकरण (2) का अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x + \frac{dA}{dx}\cos 2x + \frac{dB}{dx}\sin 2x$$

$$= -2A\sin 2x + 2B\cos 2x \{ \text{ समीकरण 3 से } \}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2\sin 2x\frac{dA}{dx} + 2\cos 2x\frac{dB}{dx}$$

अब समीकरण (1) मे y तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के मान रखने पर

$$-2\sin 2x\frac{dA}{dx} + 2\cos 2x\frac{dB}{dx} = 4\tan 2x \qquad ....(4)$$

समीकरण (3) व (4) को हल करने पर

$$\frac{dA}{dx}=-\frac{2\sin^2 2x}{\cos 2x} \text{ तथा } \frac{dB}{dx}=2\sin 2x$$

समाकलन करने पर

$$A=-\int\frac{2\sin^2 2x}{\cos 2x}dx+c_3=-2\int\frac{\left(1-\cos^2 2x\right)}{\cos 2x}dx+c_3\int 2\left(\cos 2x-\sec 2x\right)dx+c_3$$

$$=\sin 2x-\log\left(\sec 2x+\tan 2x\right)+c_3$$

तथा $B=2\int\sin 2x dx+c_4=-\cos 2x+c_4$

अत: (2) से समीकरण का पूर्ण हल निम्न हैं ।

$$y=\left[\sin 2x-\log\left(\sec 2x+\tan 2x\right)+c_3\right]\cos 2x+\left[-\cos 2x+c_4\right]\sin 2x$$

$$=c_3\cos 2x+c_4\sin 2x-\cos 2x.\log\left(\sec 2x+\tan 2x\right)$$

उदाहरण (5) : प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिए

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x^2e^x$$

हल : दिया गया समीकरण निम्न है ।

$$\left(x^2D^2+xD-1\right)y=x^2e^x \qquad ....(1)$$

इस समीकरण का पूरक फलन ज्ञात करने के लिये हम निम्न समीकरणों को हल करेंगे।

$$\left(x^2D^2+xD-1\right)y=0$$

जो की एक द्वितीय कोटि का समाघात समीकरण है अत: इसमें $x=e^x$ या $z=\log x$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\left[D\left(D-1\right)+D-1\right]y=0 \text{ ,जहाँ } D\equiv\frac{d}{dz}$$

या $\left(D^2-1\right)y=0$

अत: दिये हुये समीकरण का पूरक फलन $\left(C.F\right)=c_1e^z+c_2e^{-z}=c_1x+c_2x^{-1}$

जहाँ c_1 तथा c_2 अचर राशियाँ है ।

माना की दिये हुये समीकरणों (1) का पूर्ण हल है ।

$$y=Ax+Bx^{-1} \qquad ....(2)$$

जहाँ A तथा B के फलन है । A तथा B का चयन इस प्रकार करते है, कि

$$\frac{dA}{dx}.x+\frac{dB}{dx}.x^{-1}=0 \qquad ....(3)$$

अब समीकरण (2) का अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=A-Bx^{-2}+\frac{dA}{dx}.x+\frac{dB}{dx}.x^{-1}$$

$=A-Bx^{-2}$ [समीकरण 3 से]

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dx}.x^{-2} + 2Bx^{-3}$$

अब समीकरण (1) मे $y, \frac{dy}{dx}$ तथा $\frac{d^2y}{dx^2}$ के मान रखने पर

$$\frac{dA}{dx} - \frac{dB}{dx}.x^{-2} = e^x$$

समीकरण (3) व (4) को हल करने पर

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{2}e^x \text{ तथा } \frac{dB}{dx} = -\frac{1}{2}x^2e^x$$

इनका समाकलन करने पर

$$A = \frac{1}{2}\int e^x dx + c_3 = \frac{1}{2}e^x + c_3$$

तथा $B = -\frac{1}{2}\int x^2e^x dx + c_4 = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + c_4$

अत: दिये हुए समीकरण का पूर्ण हल निम्न है ।

$$y = \left[\frac{1}{2}e^x + c_3\right]x + \left[-\frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + c_4\right]x^{-1}$$

$$= c_3x + c_4x^{-1} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x$$

उदाहरण (6):- प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिए

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 3y = \cos\sqrt{x}$$

हल :- दिया गया समीकरण निम्न हैं

$$\left(2x^2D^2 + 7xD + 3\right)y = \cos\sqrt{x} \qquad \text{..........(1)}$$

इस समीकरण का पूरक फलन ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम निम्न समीकरण को हल करेगे ।

$$\left(2x^2D^2 + 7xD + 3\right)y = 0$$

जो कि एक द्वितीय कोटि का समघात समीकरण है । अत: इसमें $x = e^z$ या $z = \log x$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\left(2D(D-1) + 7D + 3\right)y = 0 \text{ जहाँ } D \equiv \frac{d}{dz}$$

या $\left(2D^2 + 5D + 3\right)y = 0$

या $(D+1)(2D+3)y = 0$

इसका सहायक समीकरण $(m+1)(2m+3) = 0$ होगा $\therefore m = -1, -\frac{3}{2}$

अत: दिये गये समीकरण का पूरक फलक $(C.F)$ निम्न है ।

$$y = c_1 e^{-z} + c_2 e^{-\frac{3}{2}z} = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-\frac{3}{2}} \qquad ....(2)$$

माना की दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल हैं

$$y = Ax^{-1} + Bx^{-\frac{3}{2}} \qquad ....(3)$$

जहाँ A तथा B, x के फलन है । A तथा B के मान निम्न से प्राप्त होगे ।

$$\frac{dA}{dx}.x^{-1} + \frac{dB}{dx}.x^{-\frac{3}{2}} = 0 \qquad ....(4)$$

या $$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}.x^{-\frac{1}{2}} = 0$$

तथा $$-\frac{dA}{dx}.x^{-2} - \frac{3}{2}\frac{dB}{dx}.x^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2x^2}\cos\sqrt{x}$$

या $$-2\frac{dA}{dx} - 3\frac{dB}{dx}x^{-\frac{1}{2}} = \cos\sqrt{x} \qquad ....(5)$$

समीकरण (4) व (5) को हल करने पर

$$\frac{dA}{dx} = \cos\sqrt{x} \quad \text{तथा} \quad \frac{dB}{dx} = -\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$$

इनका समाकलन करने

$$A = \int \cos\sqrt{x}\,dx + c_3 = 2\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right) + c_3$$

तथा $B = -\int \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx + c_4 = -\left(2x\sin\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 4\sin\sqrt{x}\right) + c_4$

अत: दिये हुए समीकरण का पूर्ण हल निम्न है ।

$$y = \left[2\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right) + c_3\right]x^{-1} + \left[-4\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - (4-2x)\sin\sqrt{x} + c_4\right]x^{-\frac{3}{2}}$$

टिप्पणी. समीकरण (4) तथा (5) को निम्न समीकरणों से भी प्राप्त किया जा सकता है ।

$A_1 u + B_1 v = 0$ तथा $A_1 u_1 + B_1 v_1 = R$ यहाँ $u = x^{-1}, v = x^{\frac{-3}{2}}$ तथा समीकरण(1) को मानक रूप में रखने पर $R = \frac{1}{2x^2}\cos\sqrt{x}$

उदाहरण (7) : प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिये

$$(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = (1-x)^2$$

हल : दिया गया समीकरण मानक रूप में निम्न है

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x}{1-x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1-x}y = (1-x) \qquad ......(1)$$

यहाँ $$P = \frac{x}{1-x}, Q = -\frac{1}{1-x} \quad \text{तथा} \quad R = 1-x$$

निरीक्षण द्वारा हम देखते है कि $P+Qx=0$ अतः $y=x$ पूरक फलन का एक भाग होगा, इसी प्रकार $1+P+Q=0$ अत: $y=e^x$ से पूरक फलन का दूसरा भाग होगा इसलिये पूरक फलन $(C.F)=c_1x+c_2e^x, c_1$ तथा c_2 अचर राशियाँ है ।

माना की दिये हुये समीकरण (1) का पूर्ण हल है

$$y=Ae^x+Bx \qquad ....(2)$$

जहाँ A तथा B, x के फलन है । A तथा B के मान निम्न से होंगे

$$\frac{dA}{dx}.e^x+\frac{dB}{dx}.x=0 \qquad ....(3)$$

तथा $$\frac{dA}{dx}.e^x+\frac{dB}{dx}.x=1-x \qquad ....(4)$$

समीकरण (3) व (4) का हल करने पर

$$\frac{dA}{dx}=-xe^x \text{ तथा } \frac{dB}{dx}=1$$

इनका समाकलन करने पर

$$A=-\int xe^{-x}dx+c_3=e^{-x}(x+1)+c_3$$

तथा $$B=\int dx+c_4=x+c_4$$

अत: (2) से समीकरण का पूर्ण हल निम्न है

$$y=\left[e^{-x}(x+1)+c_3\right]e^x+\left[x+c_4\right]x$$

$$=c_3e^x+c_4x+1+x+x^2$$

उदाहरण (8): $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}-(1-x^2)y=x$

हल : दिया गया समीकरण मानक रूप मे निम्न हैं

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{4x}{1-x^2}\frac{dy}{dx}-\frac{1+x^2}{1-x^2}y=\frac{x}{1-x^2} \qquad ....(1)$$

यहाँ $$P=\frac{4x}{1-x^2}, Q=-\frac{1+x^2}{1-x^2} \text{ तथा } R=\frac{x}{1-x^2}$$

प्रथम अवकलज को हटाने के लिये,

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int pdx}=e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}=e^{-\log(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}$$

यदि दिए गए समीकरण का पूर्ण हल $y=uv$ ले तो इसका सामान्य रूप

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=S \qquad ....(2)$$

जहाँ $$I=Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}=-\frac{1+x^2}{1-x^2}-\frac{4x}{(1-x^2)^2}+\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=1$$

एवं $S = \frac{R}{u} = x$

अतः समीकरण (2) से

$$\frac{d^2v}{dx^2} + v = x \qquad ....(3)$$

या $\left(D^2 + 1\right)v = x$ जहाँ $D \equiv \frac{d}{dx}$

इसका सहायक समीकरण $m^2 + 1 = 0$ होगा $\therefore m = \pm i$

अतः पूरक फलन, $\left(C.F\right) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

माना की दिये हुये समीकरण (3) का पूर्ण हल है ।

$$v = A\cos x + B\sin x \qquad ....(4)$$

जहाँ A तथा B, x के फलन है । A तथा B के मान निम्न से प्राप्त होगे

$$\frac{dA}{dx}.\cos + \frac{dB}{dx}.\sin x = 0 \qquad ....(5)$$

तथा $-\frac{dA}{dx}\sin x + \frac{dB}{dx}\cos x = x \qquad ....(6)$

समीकरण (5) व (6) को हल करने पर

$$\frac{dA}{dx} = -x\sin x \text{ तथा } \frac{dB}{dx} = x\cos x$$

इनका समाकलन करने पर

$$A = -\int x\sin x dx + c_3 = x\cos x - \sin x + c_3$$

तथा $B = \int x\cos x dx + c_4 = x\sin x + \cos x + c_4$

अतः समीकरण (4) से

$$v = \left(x\cos x - \sin x + c_3\right)\cos x + \left(x\sin x + \cos x + c_4\right)\sin x$$

$$= c_3 \cos x + c_4 \sin x + x$$

अतः समीकरण (1) का पूर्ण हल निम्न होगा

$$y = uv = \left(c_3 \cos x + c_4 \sin x + x\right).\frac{1}{1 - x^2}$$

उदाहरण (9): प्राचल विचरण विधि द्वारा हल किजिए

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\left(1 + x\right)\frac{dy}{dx} + 2\left(1 + x\right)y = x^3$$

हल: दिये गये समीकरण को सर्वत्र x^3 से विभाजित कर मानक रूप में रखने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2\left(1 + x\right)}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{2\left(1 + x\right)}{x^2}y = x \qquad ....(1)$$

यहाँ $P = \frac{-2\left(1 + x\right)}{x}, Q = \frac{2\left(1 + x\right)}{x^2}$ तथा $R = x$

निरीक्षण द्वारा हम देखते हैं कि $P+Qx=0$ अतः $y=x$ पूरक फलन का एक भाग होगा, अब

समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2(1+x)}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{2(1+x)}{x^2}y=0$ में $y=vx$ रखने पर

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{-2-2x}{x}+\frac{2}{x}.1\right)\frac{dv}{dx}=0$$

या $\left(D^2-2D\right)v=0$ या $D(D-2)v=0$

अतः सहायक समीकरण $m(m-2)=0$ से $m=0,2$

$$\therefore v=c_1e^{0x}+c_2e^{2x}=c_1+c_2e^{2x}$$

इसलिये पूरक फलन $(C.F), y=vx=\left(c_1+c_2e^{2x}\right)x=c_1x+c_2xe^{2x}$

माना की दिये हुये समीकरण (1) का पूर्ण हल हैं ।

$$y=Ax+Bxe^{2x} \qquad \text{.........(2)}$$

जहाँ A तथा B, x के फलन हैं । A तथा B के मान निम्न से प्राप्त होंगे

$$\frac{dA}{dx}.x+\frac{dB}{dx}xe^{2x}=0 \qquad \text{........(3)}$$

तथा $$\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}.(1+2x).e^{2x}=x \qquad \text{.........(4)}$$

समीकरण (3) व (4) को हल करने पर

$$\frac{dA}{dx}=-\frac{1}{2} \text{ तथा } \frac{dB}{dx}=\frac{1}{2}e^{-2x}$$

इनका समाकलन करने पर

$$A=-\frac{1}{2}\int dx+c_3=-\frac{x}{2}+c_3$$

तथा $$B=\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx+c_4=-\frac{e^{-2x}}{4}+c_4$$

अतः (2) से समीकरण का पूर्ण हल निम्न हैं

$$y=\left(-\frac{x}{2}+c_3\right)x+\left(-\frac{1}{4}e^{-2x}+c_4\right)xe^{-2x}$$

$$=c_3x+c_4xe^{2x}-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}x$$

उदाहरण (10):- प्राचल विचरण विधि द्वारा हल किजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(\tan x-3\cos x)\frac{dy}{dx}+2y\cos^2 x=\cos^4 x$$

हल. यहाँ $P=\tan x-3\cos x$, $Q=2\cos^2 x$ तथा $R=\cos^4 x$

दिये हुये समीकरण का पूरक फलन $(C.F.)$ निम्न होगा

$$y = c_1 e^{2\sin x} + c_2 e^{\sin x}$$ [देखे इकाई 11, उदाहरण (6)]

माना की समीकरण का पूर्ण हल है ।

$$y = Ae^{2\sin x} + Be^{sinx} \qquad ....(1)$$

जहाँ A तथा B, x के फलन हैं । A तथा B के मान निम्न से प्राप्त होगें

$$\frac{dA}{dx}.e^{2\sin x} + \frac{dB}{dx}.e^{\sin x} = 0 \qquad ......(2)$$

तथा $$\frac{dA}{dx}.2e^{2\sin x} + \frac{dB}{dx}.e^{\sin x} = \cos^3 x \qquad ....(3)$$

समीकरण (2) व (3) को हल करने पर

$$\frac{dA}{dx} = \cos^3 x.e^{-2\sin x} \text{ तथा } \frac{dB}{dx} = -\cos^3 x.e^{-\sin x}$$

इनका समाकलन करने पर

$$A = \int \cos^3 x.e^{-2\sin x} dx + c_3 = \int \left(1 - \sin^2 x\right) e^{-2\sin x}.\cos x dx + c_3$$

$$= -\int \left(1 - t^2\right) e^{2t} dt + c_3 \text{ ,जहाँ } -\sin x = -\cos x dx = dt$$

$$= -e^{2t}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right] + c_3$$

$$= -e^{-2\sin x}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin x\right] + c_3$$

तथा $$B = -\int \cos^3 x.e^{-\sin x} dx + c_4 = -\int \left(1 - \sin^2 x\right) e^{-\sin x}.\cos x dx + c_4$$

$$= \int \left(1 - t^2\right) e^{2t} dt + c_4 \quad \text{जहाँ } -\sin x = t, -\cos x dx = dt$$

$$= e^t\left[1 - t^2 + 2t - 2\right] + c_4 = e^t\left[2t - t^2 - 1\right] + c_4$$

$$= e^{-\sin x}\left[-2\sin x - \sin^2 x - 1\right] + c_4$$

अत: (1) से दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल हैं

$$y = c_3 e^{2\sin x} + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4} + c_4 e^{\sin x} - 2\sin x - \sin^2 x - 1$$

$$= c_3 e^{2\sin x} + c_4 e^{\sin x} - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x - \frac{5}{4}$$

उदाहरण 11 : निम्न समीकरण को हल किजिए. तथा इसका विशिष्ट समाकल अनिर्धारित गुणांको की विधि से ज्ञात कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\tan x\frac{dy}{dx} + 5y = \sec x.e^x$$

हल: यहाँ $P = -2\tan x$, $Q = 5$ तथा $R = \sec x.e^x$

प्रथम अवकलज को हटाने के लिए हम u का चयन इस प्रकार करते हैं की दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल $y = uv$ ले तो इसका सामान्य रूप होगा

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=S \qquad \text{..........(1)}$$

जहाँ $\quad I=Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}$

$$=5-\tan^2 x+\sec^2 x=6$$

तथा $\quad S=\frac{R}{u}=\frac{\sec x.e^x}{\sec x}=e^x$

अत: समीकरण (1) से

$$\frac{d^2v}{dx^2}+6v=e^x \qquad \text{........(2)}$$

या $\quad \left(D^2+6\right)v=e^x$ जहाँ $D\equiv\frac{dy}{dx}$

इसका सहायक समीकरण $m^2+6=0$ होगा, $\therefore m=\pm\sqrt{6}i$

अत: पूरक फलन. $\left(C.F\right)=c_1\cos\sqrt{6}x+c_2\cos\sqrt{6}x$ ......(3)

अब हम विशिष्ट समाकल अनिर्धारित गुणांको की विधि से ज्ञात करेंगे

माना की दक्षिण पक्ष में $f\left(x\right)=e^x$ के संगत परीक्षण हल $v=Ae^x$ हैं, जहाँ A अनिर्धारित गुणांक है जिसका मान इस प्रकार हैं कि v का मान (2) को सन्तुष्ट करें । अब v तथा इसके अवकजलो का मान (2) में प्रतिस्थापित करने पर

$$Ae^x+6Ae^x=e^x\Rightarrow 7A=1 \text{ या } A=\frac{1}{7}$$

अत: (2) का विशिष्ट हल $\frac{e^x}{7}$ होगा,

$$\therefore v=c_1\cos\sqrt{6}x+c_2\sin\sqrt{6}x+\frac{e^x}{7}$$

इसलिये दिये गये समीकरण का पूर्ण हल निम्न हैं

$$y=uv=\left(c_1\cos\sqrt{6}x+c_2\sin\sqrt{6}x+\frac{e^x}{7}\right)\sec x$$

उदाहरण 12 : निम्न समीकरण को हल किजिए तथा इसका विशिष्ट समाकल अनिर्धारित गुणांकों की विधि से ज्ञात कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+\left(4x^2-1\right)y=-3e^{x^2}\sin 2x$$

हल: यहाँ $P=-4x$, $Q=4x^2-1$ तथा $R=-3e^{x^2}\sin 2x$

प्रथम अवकलज को हटाने के लिये हम u का चयन इस प्रकार करते हैं कि

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int pdx}=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$$

दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल $y=uv$ ले तो इसका सामान्य रूप निम्न होगा

$$\frac{d^2v}{dx^2}+v=-3\sin 2x$$ [देखें इकाई 10 (8)]

या $$\left(D^2+1\right)v=-3\sin 2x \qquad ....(1)$$

अत: इसका सहायक समीकरण $m^2+1=0$ होगा, $\therefore m=\pm i$

इसलिये पूरक फलन $\left(C.F\right)=c_1\cos x+c_2\sin x$

अब हम विशिष्ट समाकल अनिर्धारित गुणांकों की विधि से ज्ञात करेगें '

माना की दक्षिण पक्ष में $f\left(x\right)=-3\sin 2x$ के संगत परीक्षण हल $v=A\sin 2x+B\cos 2x$ हैं यहाँ A तथा B अनिर्धारित गुणांक हैं, इनके मान इस प्रकार हैं कि v मान (1) को सन्तुष्ट करें । अब v तथा इसके अवकलंजो के मान को (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$-4A\sin 2x-4B\cos 2x+A\sin 2x+B\cos 2x=-3\sin 2x$$

या $$-3A\sin 2x-3B\cos 2x=-3\sin 2x$$

$$\therefore -3A=-3,-3B=0\Rightarrow A=1,B=0$$

इसलिये (1) का विशिष्ट हल $\sin 2x$ होगा,

$$\therefore v=c_1\cos x+c_2\sin x+\sin 2x$$

अत: दिये गये समीकरण का पूर्ण हल निम्न होगा,

$$y=uv=\left(c_1\cos x+c_2\sin x+\sin 2x\right)e^{x^2}$$

उदाहरण 13: निम्न समीकरण को हल कीजिए तथा इसका विशिष्ट समाकल अनिर्धारित गुणांको की विधि से ज्ञात कीजिए

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-8\right)y=x^2e^{\frac{-x^2}{2}}$$

हल: यहाँ $P=2x$, $Q=x^2-8$ तथा $R=x^2e^{\frac{-x^2}{2}}$

प्रथम अवकलज को हटाने के लिए हम u का चयन इस प्रकार हैं की

$$u=e^{-\frac{1}{2}\int pdx}=e^{-\int xdx}=e^{\frac{-x^2}{2}}$$

दिये हुये समीकरण का पूर्ण हल $y=uv$ ले तो इसका सामान्य रूप,

$$\frac{d^2v}{dx^2}+Iv=S$$

जहाँ $$I=Q-\frac{1}{4}P^2-\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}$$

$$=x^2-8-\frac{1}{4}\left(4x^2\right)-\frac{1}{2}\left(2\right)=-9$$

तथा $$S=\frac{R}{u}=\frac{x^2e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\frac{x^2}{2}}}=x^2$$

अतः समीकरण (1) से

$$\frac{d^2v}{dx^2} - 9v = x^2$$

या $\left(D^2 - 9\right)v = x^2$ जहां $D \equiv \frac{d}{dx}$

ख अतः इसका सहायक समीकरण $m^2 - 9 = 0$ होगा, $m = \pm 3$ इसलिये पूरक फलन '

$$\left(C.F\right) = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$$

अब हम विशिष्ट समाकल अनिर्धारित गुणांको की विधि से ज्ञात करेगे, ।

माना की दक्षिण पक्ष मे $f\left(x\right) = x^2$ के संगत परीक्षण हल

$v = A_0 + A_1x + A_2x^2$ है, यहाँ A_0, A_1 तथा A_2 अनिर्धारित गुणांक है इनके मान इस प्रकार है कि v का मान (2) को संतुष्ट करें । अब v तथा अवकलजो के मान (2) में प्रतिस्थापित करने पर ।

$$2A_2 - 9\left(A_0 + A_1x + A_2x^2\right) = x^2$$

या $\left(2A_2 - 9A_0\right) - 9A_1x - 9A_2x^2 = x^2$

$$\therefore 2A_2 - 9A_0 = 0, -9A_1 = 0 \text{ तथा } -9A_2 = 1$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{-1}{9}, A_1 = 0, A_0 = \frac{-2}{81}$$

इसलिये (2) का विशिष्ट हल $-\frac{2}{81} - \frac{-1}{9}x^2$ होगा

$$\therefore v = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}\,\frac{-2}{81} - \frac{-1}{9}x^2$$

अतः दिये गये समीकरण का पूर्ण हल निम्न होगा

$$y = uv = \left(c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}\,\frac{-2}{81} - \frac{-1}{9}x^2\right)e^{\frac{-x^2}{2}}$$

टिप्पणी : अनिर्धारित गुणांको की विधि से अवकल समीकरणों का विशिष्ट समाकल ज्ञात करते समय दक्षिण पक्ष $f\left(x\right)$ के पदों के संगत परीक्षण हल निम्न मान सकते है

क्र.सं	$f(x)$	परीक्षण हल
1.	$f(x) = P(x); (x), x$ का n कोटि का बहुपद	$A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_nx^n$
2.	a^x	Aa^x
3.	e^x	Ae^x
4.	$\sin ax$ या $\cos ax$	$A\sin ax + B\cos ax$
5.	$b^x \sin ax$ या $b^x \sin ax$	$b^x\left[A\sin ax + B\cos ax\right]$
6.	$a^xP\left(x\right)$	$a^x\left[A_0 + A_1x + ... + A_nx^n\right]$

जहाँ $A, B, A_0, A_1, \ldots\ldots$ इत्यादि अनिर्धारित गुणांक है, जिनके मान समीकरण में परीक्षण हल तथा इसके अवकलजों के मान प्रतिस्थापित करके ज्ञात किये जा सकते है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न-

1. प्राचल विचरण विधि से विशिष्ट समाकल ज्ञात करने के लिये पूरक फलन ज्ञात होना आवश्यक है । (सत्य 7 असत्य)
2. प्राचल विचरण विधि में यदि समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Q = R$ का पूर्ण हल $y = Au + Bv$ माने, जहाँ A तथा B, x के फलन u तथा v पूरक फलन के समाकल है तो $A_1 = \frac{dA}{dx}$ तथा $B_1 = \frac{dB}{dx}$ के मान निम्न 'से प्राप्त होगें $(a)\, A_1u + B_1v = 0$ तथा $(b)\, A_1u_1 + B_1v_1 = R$ (सत्य/असत्य)
3. अनिधारित गुणांकों की विधि से विशिष्ट समाकल ज्ञात करते यदि दक्षिण पक्ष में $f(x) = e^x$ हो तो सर्वप्रथम संगत परीक्षण हल $y = Ae^x$ चाहिए, जहाँ A अनिर्धारित गुणांक है । (सत्य/असत्य)
4. यदि अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x$ है तो अनिर्धारित गुणांक विधि से x के संगत परिक्षण हल $y = A + Bx$ ले तो $A = 1$ तथा $B = 0$ प्राप्त होगा । (सत्य असत्य)

12.3 सारांश

द्वितीय कोटि के रैखिक अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R$ का सम्पूर्ण पूरक फलन ज्ञात करने के बाद कई बार विशिष्ट समाकल इप्रत करना आसान नहीं होता तो प्राचल विचरण विधि से भी विशिष्ट समाकल ज्ञात किया जा सकता है परन्तु कुछ समीकरणों में इस विधि प्रयोग काफी कठिन हो जाता है इस स्थिति में अनिर्धारित गुणांको की विधि बहु त उपयोगी सिद्ध होती है ।

12.4 शब्दावली

प्राचल विचरण विधि	Method of variation of Parameters
अनिर्धारित गुणांको की विधि	Method of undet er mined coefficients
द्विमूल	Double root
चर घांताकी फलन	Exponential function
परीक्षण हल	Trial solution

12.5 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. सत्य 2.सत्य

2. सत्य 4.असत्य' $A=0$ तथा $B=1$ प्राप्त होगा ।

12.6 अभ्यास प्रश्न

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिए

1. $$\frac{d^2y}{dx^2}+9y=\sec 3x$$

उ. $$y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{\cos 3x}{9}.\log\cos 3x+\frac{x}{3}.\sin 3x$$

2. $$(x+2)\frac{d^2y}{dx^2}-(2x+5)\frac{dy}{dx}+2y=(1+x)e^x$$

उ. $$y=c_1(2x+5)+c_2e^{2x}-e^x$$

3. $$x\frac{dy}{dx}-y=(x-1)\left[\frac{d^2y}{dx^2}-x+1\right]$$

उ. $$y=c_1e^x+c_2x+(x^2+x+1)$$

4. $$\frac{d^2y}{dx^2}-y=\frac{2}{1+e^x}$$

उ. $$y=c_1e^x+c_2e^{-x}-1+e^x\log(1+e^{-x})-e^{-x}\log(1+e^x)$$

5. 5. $y_2-2y_1+y=e^x$

उ. $$y=(c_1+c_2x)e^x+\frac{1}{2}e^x$$

6. 6. $y_2-3y_1+2y=e^{2x}+x^2$

उ. $$y=c_1e^x+c_2e^{2x}+xe^{2x}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}+\frac{1}{2}x^2$$

7. $$\frac{d^2y}{dx^2}+(1-\cot x)\frac{dy}{dx}-y\cot x=\sin^2 x$$

उ. $$y=c_1(\sin x-\cos x)+c_2e^{-x}+\frac{1}{10}(2\cos 2x-\sin 2x)$$

8. $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

उ. $$y=c_1\left(\sqrt{1-x^2}+x\sin^{-1}x\right)+c_2x-\frac{1}{9}x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

निम्न समीकरण को हल किजिए तथा इसका विशिष्ट समाकल अनिर्धारित गुणांकों की विधि से ज्ञात कीजिए

9. $$\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+\left(x^2+5\right)y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

З. $$y=\left(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{x}{4}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

10. $$x^6\frac{d^2y}{dx^2}+3x^5\frac{dy}{dx}+a^2y=\frac{1}{x^2}$$

З. $$y=c_1\cos\left(\frac{a}{2x^2}\right)-c_2\sin\left(\frac{a}{2x^2}\right)+\frac{1}{a^2x^2}$$

11. $$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y=\frac{\sin 2x}{x}$$

З. $$y=\frac{1}{x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{3}\sin 2x\right)$$

12. $$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(3\sin x-\cot x\right)\frac{dy}{dx}+2\sin^2 x.y=e^{-\cos x}.\sin^2 x$$

З. $$y=c_1e^{\cos x}+c_2e^{2\cos x}\sin+\frac{1}{6}e^{-\cos x}$$

इकाई-13 आंशिक अवकल समीकरण-1
(Partial Differential Equtation-1)

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप

1. आंशिक अवकल समीकरण एवं उनकी व्यूत्पत्ति को समझ सकेगें।
2. आंशिक अवकल समीकरण के हल, उनके प्रकार तथा ज्यामितीय अर्थ परिचित होंगे।
3. प्रथम कोटि के रैखिक आंशिक अवकल समीकरण को हल करने की लैग्रेंज विधि तथा तत्सम्बंधी अवधारणाओं को जानेंगे।

13.1 प्रस्तावना

दो या दो से अधिक स्वतंत्र चरों से युक्त फलन के आंशिक अवकलजों एवं स्वतंत्र तथा आश्रित चरों के मध्य सम्बंध आंशिक अवकल समीकरण कहलाता है। कई भौतिक परिघटनायें आशिक अवकल समीकरणों द्वारा व्यक्त होती हैं। इसलिये इन समीकरणों के हल को ज्ञात करने की विधियाँ अनुप्रयोगात्मक एवं गणितीय कौशल की दृष्टि से अत्यन्त महत्वपूर्ण हैं।

13.2 आंशिक अवकल समीकरण

माना z, स्वतंत्र चरों x तथा y पर आश्रित चर है। तब z के विभिन्न आंशिक अवकलजों के लिये हम निम्न संकेतन का प्रयोग करते हैं:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; q = \frac{\partial z}{\partial y}; r = \frac{\partial z}{\partial x^2}; s = \frac{\partial z}{\partial x \partial y}; t = \frac{\partial z}{\partial y^2}$$

अब चूंकि आश्रित चर के अवकलजों एवं चरों से युक्त समीकरण को आशिक अवकल समीकरण कहते हैं। फलत: निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण हैं।

$(1) xp + yq = 4z$.

$(2) p^2 + q^2 = 4z$

$(3) p + q = xy$

$(4) p^2 - q^2 = z$

$(5) r - 2t = y$

$(6) r^3 + q = 4$

13.2.1 आंशिक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात

कोटि:

आंशिक अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम आंशिक अवकलज की कोटि(order)को आंशिक अवकल समीकरण की कोटि. कहते हैं।

घात:

आंशिक आवकल समीकरण, (जो आंशिक अवकलजों के संदर्भ में पूर्णत: बीजीय एवं परिमेय है) में विद्‌यमान उच्चतम आंशिक अवकलज की घात को समीकरण की घात कहते हैं।

गत अनुच्छेद में वर्णित समीकरण (1), (3) प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के हैं एवं समीकरण (2) प्रथम कोटि तथा द्‌वितीय घात का है। इसी प्रकार समीकरण (5) द्‌वितीय कोटि एवं प्रथम घात का है। इस इकाई में हम प्रथम कोटि समीकरणों का अध्ययन करेंगे।

13.2.2 आशिक समीकरण का हल

अवकल समीकरण के हल से तात्पर्य उसके समाकलन से है। समाकलन से हमें आश्रित चर तथा अनाश्रित चरों तथा के मध्य एक सर्वसमिका प्राप्त होती है। किसी आशिक अवकल समीकरण के हल के तीन घटक होते हैं-पूर्ण समाकल (complete integral), व्यापक समाकल (General integral) एवं विचित्र समाकल (Singular integral) इनके ज्यामितीय अर्थ को आगे समझाया गया है।

संपूर्ण समाकल:

फलन $f(x,y,z,a,b)=0$ ....(1)

पर विचारते हैं जहाँ *a* तथा *b* स्वेच्छ नियतांक हैं। समीकरण (1) का x तथा y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}=0 \quad \text{या} \quad \frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}=0 \qquad ....(2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}=0 \quad \text{या} \quad \frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}=0 \qquad ......(3)$$

समीकरण (1) (2) एवं (3) से स्वेच्छ नियतांकों a तथा b का विलोपन करने पर हमें सम्बंध

$$F(x,y,z,p,q)=0 \qquad ....(4)$$

प्राप्त होता है। समीकरण (4) प्रथम कोटि का आशिक अवकल समीकरण है। विलोमत: यह भी सत्य है कि समीकरण (1) (4) का हल है। यहाँ ध्यान दीजिए कि समीकरण (1) (जो कि (4) का हल है ।) में स्वेच्छ नियतांको की संख्या दो से अधिक नहीं हो सकती क्योंकि अन्यथा उनके विलोपन के लिए दो से अधिक समीकरणों की आवश्यकता होगी एवं ऐसी स्थिति में अवकल समीकरण की कोटि भी इकाई से अधिक होगी। इस निष्कर्ष के आधार पर हम पूर्ण समाकल को परिभाषित करते है।

पूर्ण समाकल:

किसी अवकल समीकरण का वह समाकल जिसमें स्वेच्छ नियतांको की संख्या, स्वतंत्र चरों की संख्या के तुल्य होती है, पूर्ण समाकल कहलाता है। पूर्ण समाकल में विद्‌यमान नियताको को विशिष्ट मान देने से प्राप्त हल को विशिष्ट समाकल कहते हैं।

पूर्ण समाकल जो कि x,y तथा z में सम्बंध है, एक पृष्ठ को निरुपित करता है।

विचित्र समाकल:

समीकरणों $F(x,y,z,a,b)=0,\ \frac{\partial f}{\partial a}=0, \frac{\partial f}{\partial b}=0$ .....(5)

में a तथा b के विलोपन से x,y,z में प्राप्त सम्बंध विचित्र समाकल होता है। वस्तुत: a एवं b के विलोपन से पूर्ण समाकल में विद्‌यमान सभी पृष्ठों का अन्वालोप प्राप्त होता है। अतएव विचित्र समाकल, पूर्ण समाकल में विद्‌यमान पृष्ठों के अन्वालोप को निरूपित करता है। ध्यान दीजिये कि विचित्र समाकल ज्ञात करते समय अन्य सम्बंध भी प्राप्त होते है, अत: यह अवश्य सुनिश्चित करना चाहिये कि विचित्र समाकल दी गई आशिक अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है।

व्यापक हल (General Integral)

माना कि समीकरण (1) स्वेच्छ नियतांक b,a का फलन है। अर्थात् $b = \psi(a)$ तब समीकरण (1) को लिखते हैं $f(x,y,z,a,\psi(a))=0$ (6)

अब व्यापक समीकरण, समीकरणों (1) तथा

$$b=\psi(a) \qquad \text{.......(7)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \psi}{\partial a}=0 \qquad \text{........(8)}$$

में a के विलोपन से प्राप्त होता है।

वस्तुत: समीकरण (6), (7), (8) सामूहिक रूप से उस वक्र को दर्शाते हैं जो पृष्ठों के उस कुल पर स्थित है जिसका प्राचल a हैं। a के विलोपन से हमें इन पृष्ठों के कुल का अन्वालोप प्राप्त होता है। अत: हम कह सकतें है कि समीकरण (6), (7) से निरूपित पृष्ठ एवं (6), (7), (8) से निरुपित अभिलाक्षणिक वक्र इस अन्वालोप से स्पर्श होते हैं। अतएव व्यापक समाकल अभिलाक्षणिक वक्रो से, बने पृष्ठों के कुल के अनवालोप को निरूपित करता है।

13.3 आशिक अवकल समीकरणों की व्युत्पत्ति

हम जानते हैं कि आंशिक अवकल समीकरण आशिक अवकलजों एवं चरों के मध्य, सम्बंध होता है। अतएव इन समीकरणों की व्युत्पत्ति की जा सकती है। इनकी व्युत्पत्ति के दो प्रकार संभव हैं।

13.3.1 स्वेच्छ अचरों के विलोपन से

माना $f(x,y,z,a,b)=0$ ....(1)

में z स्वतंत्र चरों x तथा y पर आश्रित है तथा a एवं b स्वेच्छ अचर हैं । समीकरण(1) का x तथा y के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \text{........(2)}$$

तथा $$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

समीकरणों (1), (2) तथा (3) से स्वेच्छ अचरों a एवं b का विलोपन करने पर हमें सम्बंध

$$\phi(x,y,z,p,q)=0 \qquad \text{.........(4)}$$

प्राप्त होता जहाँ $p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}$

ध्यान दीजिये कि समीकरण (4) प्रथम कोटि का आंशिक अवकल समीकरण है जी समीकरण (1) में विद्यमान स्वेच्छ अचरों a तथा b के विलोपन से प्राप्त हुआ है। यहाँ ध्यान कि समीकरण (1) में स्वेच्छ अचरों की संख्या, स्वतंत्र चरों की संख्या से अधिक हो तो हमें द्वितीय अथवा उच्च कोटि के समीकरण प्राप्त होते हैं।

उदाहरण-1

a एवं b के विलोपन से निम्न व्यजंक का आशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये-

$z=ax+ay+b$

हल :

दिया है: $z = ax + ay + b$ ....(1)

समीकरण (1) का x एवं y के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$p = \frac{\partial z}{\partial x} = a, q = \frac{\partial z}{\partial y} = a$ अर्थात $p = q$ यहीं वांछित समीकरण है

उदाहरण-2

समीकरण $z = ax + by + a^2 + 2ab$ में a तथा b के विलोपन से आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये

हल:

दिया है $z = ax + by + a^2 + 2ab$ (1)

समीकरण (1) का x तथा y के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = a, q\frac{\partial z}{\partial y} = b$$

a तथा b के उपरोक्त मान समीकरण (1) में रखने पर

$z = xp + qy + p^2 + 2pq$ जो वांछित समीकरण है।

उदाहरण - 3

दिया है: - $\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

a, b, c के विलोपन 'से आशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये हल ?? ?? ??

दिया है - $\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ ....(1)

समीकरण (1) का x तथा y के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad ....(2)$$

$$\frac{2y}{b^2} + \frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad ....(3)$$

समीकरण (2) तथा (3) का क्रमशः x तथा y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{z}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad ....(4)$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{z}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad ....(5)$$

समीकरण (2) से $c^2 = -\frac{a^2 z}{x}\frac{\partial z}{\partial x}$ का मान (4) एवं (5) में रखने एवं सरलीकृत करने पर,

$$xz\frac{\partial^2 z}{\partial yz}+x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad ....(6)$$

पुन: समीकरण (3) से कलित $c^2=-\frac{b^2 z}{y}\frac{\partial z}{\partial y}$ का मान समीकरण (5) में रखने पर,

$$yz\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad ....(7)$$

इस प्रकार समीकरण (6) तथा (7) दिये गये व्यंजक से व्युत्पन्न होने वाली आंशिक अवकल समीकरण है:

उदाहरण -4

व्यंजक $z=Ae^{py}\sin px$ में A तथा p के विलोपन से व्युत्पन्न आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त कीजिए

हल :

दिया है:

$$z=Ae^{py}\sin px \qquad ...(1)$$

समीकरण (1) का x तथा के सापेक्ष y आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=Ape^{py}\cos px, \qquad .....(2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=Ape^{py}\sin px, \qquad ......(3)$$

पुन: - $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}=-Ap^2e^{py}\sin px, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=Ape^{py}\sin px,$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-p\frac{\partial z}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=p\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

अतः $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

उदाहरण-5

सिद्ध कीजिये कि आंशिक अवकल समीकरण $px+qy=z$ उन शंकुओं को निरूपित करता है जिनके शीर्ष मूल बिंदु पर हैं। क्या पृष्ठ $yz+zx+xy=0$ उपरोक्त समीकरण को संतुष्ट करता है?

हल

हम जानते हैं कि शंकु जिसका शीर्ष मूल बिंदु है, का व्यापक समीकरण निम्न प्रकार होता है:

$$ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2fyz+2gzx=0 \qquad ...(1)$$

जहाँ a,b,c,h,f,g प्राचल हैं।

समीकरण (1) का x तथा y के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर,

$$2ax+2czp+2fyp+2gpx+2gz+2hy=0$$

तथा $$2by+2czq+2fyq+2fz+2gxq+2hx=0$$

सरलीकरण पर $$ax+gz+hy+p(gx+cz+fy)=0$$

तथा $$by+fz+hx+q(fy+cz+gx)=0 \qquad ......(2)$$

समीकरण (2), (3) को क्रमश: x तथा y से गुणा करके योग करने पर

$$(ax^2+by^2+gzx+2hxy+fyz)+(px+qy)(cz+gx+fy)=0 \qquad ......(4)$$

समीकरण (1) से

$$ax^2+by^2+gzx+2hxy+fyz=-cz^2-fyz-gxz$$

अत: (4), (5) से

$$-(cz^2+fyz+gxz)+(px+qy)(cz+gx+fy)=0$$

या $$(px+qy-z)(cz+fy+gx)=0$$

$$\Rightarrow px+qy-z=0$$

अत: समीकरण (6) उन सभी शंकुओं को निरूपित करता है जिनके शीर्ष मूल बिन्दु हैं

पुन: 'दिया गया पृष्ठ $yz+zx+xy=0$ ...(7)

(7) को x,y के सापेक्ष अंशत: अवकलित करने पर

$$py+px+y+z=0 \qquad ...(8)$$

तथा $$xq+qy+x+z=0 \qquad .....(9)$$

$$\Rightarrow p=-\frac{(y+z)}{x+y}q=-\left(\frac{x+z}{x+y}\right)$$

p,q के ये मान समीकरण (6) को संतुष्ट करते हैं।

स्वमूल्यांकन प्रश्न-1

4. यदि x स्वतंत्र चरों μ तथा v पर आश्रित है तो आशिक अवकल समीकरण है-

$(i)\dfrac{\partial\mu}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=2\mu$ $\qquad$ $(ii)\ \dfrac{\partial\mu}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}=2x$

$(iii)\dfrac{\partial x}{\partial\mu}+\dfrac{\partial x}{\partial v}=1$

(iv) इनमें से कोई नहीं

2. समीकरण $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y^2}+\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\dfrac{1}{x^2}$ के लिये सत्य है-

(i) यह प्रथम कोटि एवं प्रथम घात का है।

(ii) यह प्रथम कोटि एवं द्वितीय घात का है।

(iii) यह प्रथम कोटि एवं तृतीय घात का है।

(iv) यह तृतीय कोटि एवं प्रथम घात का है।

2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ के लिये संकेतन है-

$(i) p \ (ii) r \ (iii) s \ (iv) t$

3. $f(x, y, z, a, b,) = 0$ में a तथा b के विलोपन से प्राप्त अवकल समीकरण के लिये सत्य है-

(i) यह द्वितीय कोटि का समीकरण होगा।

(ii) यह प्रथम कोटि का सामान्य (ordinary) अवकल समीकरण होगा।

(iii) यह द्वितीय कोटि का बीजीय समीकरण होगा।

(iv) यह प्रथम कोटि का आंशिक अवकल समीकरण होगा।

13.3.2 स्वेच्छ फलन के विलोपन से

माना x, y तथा z के दो फलन u तथा v सम्बंध

$\phi(u, v) = 0$ (1)

से निरूपित होते हैं जहाँ ϕ स्वेच्छ फलन है। समीकरण (1) का x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \qquad .....(2)$$

तथा
$$\frac{\partial \phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \qquad ...(3)$$

उपरोक्त समीकरणों (2) .(3) से ϕ का विलोपन करने पर

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$$

या $Pp + Qq = R$ (4)

$$P = \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, y)} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$Q = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$R = \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, x)} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

इस प्रकार एक स्वेच्छ फलन ϕ के विलोपन से p तथा q में प्रथम कोटि की समीकरण प्राप्त होती है। यदि एक से अधिक स्वेच्छ फलन हों तो उच्चकोटि की समीकरण प्राप्त होती हैं। समीकरण (4) को लैंग्रेंज समीकरण भी कहते हैं।

उदाहरण- 1

व्यजंक $z = e^{ax+by} f(ax-by)$ में फलन f के विलोपन से व्युत्पन्न होने वाला आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये

हल

$$z = e^{ax+by} f(ax-by) \ldots (1)$$

समीकरण (1) का x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = ae^{ax+by} f(ax-by) + ae^{ax+by,} f'(ax-by) \qquad \text{........(2)}$$

तथा $\frac{\partial z}{\partial y} = q = be^{ax+by} f(ax-by) - be^{ax+by,} f'(ax-by)$ ....(3)

समीकरण (2) एवं (3) से

$$b\frac{\partial z}{\partial x} + a\frac{\partial z}{\partial y} = 2abe^{ax+by} f(ax-by)$$

$$= 2abz$$

जो कि वांछित समीकरण है।

उदाहरण-2

व्यंजक $z = f(x^2 + y^2)$ में फलन f के विलोपन से व्युत्पन्न आशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये

हल:

$$z = f(x^2 + y^2)$$

समीकरण (1) का x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2) \qquad \text{.......(2)}$$

तथा $q = \frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'(x^2 + y^2)$ ....(3)

समीकरण (2), तथा (3) से $f'(x^2 + y^2)$ का विलोपन करने पर

$\frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial y}$ फलतः $\frac{y.\partial z}{\partial x} - \frac{x\partial z}{\partial y} = 0$ वांछित समीकरण है।

उदाहरण-3

यदि $\phi(\mu, v) = 0$ स्वेच्छ फलन है जहां $\mu = x + y + z,\ \ v = x^2 + y^2 - z^2$ तब ϕ के विलोपन से व्युत्पन्न आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये

हल:

$$\phi(\mu, v) = 0 \qquad \text{........(1)}$$

जहां $\mu = x + y + z, \quad v = x^2 + y^2 - z^2$ (2)

समीकरण (1) का x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + p\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \qquad ....(3)$$

तथा $$\frac{\partial \phi}{\partial \mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \qquad ....(4)$$

अब समीकरण (3), (4) से ϕ के विलोपन से

$$\frac{\frac{\partial \phi}{\partial \mu}}{\frac{\partial \phi}{\partial v}} = -\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + p\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)} = -\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + q\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)}$$

या $$\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + p\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + q\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad (5)$$

अब $$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 1 = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 2y, \frac{\partial v}{\partial z} = -2z$$

उपरोक्त मान समीकरण (5) में रखने पर

$$(1+p)(2y - 2qz) = (1+q)(2x - 2pz)$$

या $$(1+p)(y - qz) = (1+q)(x - pz)$$

या $$(y+z)p - (x-z)q = x - y \quad (6)$$

समीकरण (6) वांछित अवकल समीकरण है ।

उदाहरण-4

व्यंजक $y = F(x+at) + f(x-at)$ में फलन F तथा f के विलोपन से आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त कीजिये

हल

$$y = F(x+at) + f(x-at) \qquad ....(1)$$

समीकरण (1) के तथा के सापेक्ष आंशिक अवकलन से,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = F'(x+at) + f'(x-at)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F''(x+at) + f''(x-at) \qquad ....(2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = aF'(x+at) - af'(x-at)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 F''(x+at) + a^2 f''(x-at) \qquad \text{.........(3)}$$

समीकरण (2), (3) से

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

उदाहरण-5

$z = 2f\left(\log y + \frac{1}{x^2}\right)$ से f का विलोपन कीजिये

हल:

दिये गये समीकरण का x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = 2f'\left(\log y + \frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

तथा $$\frac{\partial z}{\partial y} = q = 2f'\left(\log y + \frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{y}\right)$$

समीकरण (1) (2) से f' का विलोपन करने पर

$$x^3 p = -2qy \text{ या } x^3 p + 2qy = 0$$

उदाहरण-6

$z = yf(x) + xg(y)$ में स्वेच्छ फलनों f तथा g के विलोपन से व्युत्पन्न आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये

हल:

z का x तथा y के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = yf' + g \quad (1)$$

तथा $$q = \frac{\partial z}{\partial y} = f + xg' \quad (2)$$

पुन: $$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r = yf'' \quad (3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t = xg'' \quad (4)$$

तथा $$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f' + g' \quad (5)$$

(1) तथा (2) से

$$f' = \frac{[p-g]}{y}, g' = \frac{q-f}{x}$$

अत: (5) से $s = \frac{[p-g]}{y} + \left[\frac{q-f}{x}\right]$ या $sxy = px + qy - z$

उदाहरण-7

स्वेच्छ फलन f, के विलोपन से व्युत्पन्न आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये जहाँ

$$f = (x^2 + y^2 + z^2, z^2 - 2xy) = 0$$

हल:

माना $u = x^2 + y^2 + z^2,\ v = z^2 - 2xy$

अतः $f = (u,v) = 0$ (1)

समीकरण (1) का x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ या } (2x + 2zp)\frac{\partial f}{\partial u} + (2zp - 2y)\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \text{ .....(2)}$$

तथा $$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ या } (2y + 2zq)\frac{\partial f}{\partial u} + (2zq - 2x)\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \text{ ......(3)}$$

समीकरणों (2) एवं (3) से $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ का विलोपन करने पर

$$(2x - 2zp)(2zq - 2x) = (2zp - 2y)(2y + 2zq)$$

सरल करने पर, $$(p-q)z = y - x$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-2

1. समीकरण $lx + my + nz = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$ में स्वेच्छ फलन ϕ के विलोपन से जनित आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये
2. निम्न समीकरणों में अचर a तथा b अथवा स्वेच्छ फलन ϕ, ψ के विलोपन से जनित समीकरण ज्ञात कीजिये।

   $(i) ax^2 + by^2 + z^2 = 1$

   $(ii) z = (x-a)^2 + (y-b)^2$

   $(iii) az + b = a^2 x + y$

   $(iv) z = x + y + \phi(x, y)$

   $(v) z = \phi(x - at) + \psi(x + at)$

13.4 प्रथम कोटि के रैखिक आंशिक अवकल समीकरण (लैंग्रेंज विधि)

प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरण को रैखिक (linear) कहते हैं यदि यह p तथा q में प्रथम घास का है। बहुधा समीकरण

$$P(x,y)p + Q(x,y)q = zS(xy) + R(xy) \qquad \text{.....(1)}$$

को रैखिक कहा जाता है जो कि p, q तथा z में प्रथम घात का है। इसी प्रकार समीकरण

$$P(x,y,z)p+Q(x,y,z)q=R(x,y,z) \qquad ....(2)$$

एवं $$P(xy)p+Q(xy)q=R(xyz) \qquad ....(3)$$

क्रमशः Quasilinear, तथा Semilinear, कहलाते हैं। समीकरण $x^2p+y^2q=z^2$ तथा $xzp+yzq=xy$ क्रमशः Quasilinear तथा Semilinear हैं। वे समीकरण जो उपरोक्त प्रकार के नहीं है अरैखिक (Nonlinear) कहलाते है।

इस अनुच्छेद में हम समीकरण (2) को हल करने की लैग्रेंज विधि पर विचार करेंगे। यह विधि निम्न तीन प्रमेयों पर आधारित है।

प्रमेय-1

समीकरण (2) का प्रत्येक समाकल, समीकरण $P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0$ .....(4)

का भी समाकल होता है। इसका विलोम भी सत्य है।

प्रमेय-2 समीकरण निकाय - $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ ....(5)

का प्रत्येक समाकल, समीकरण (4) को संतुष्ट करता है एवं विलोम भी सत्य है।

प्रमेय-3

यदि $u=$ नियतांक, $v=$ नियतांक, समीकरण (5) के दो स्वतंत्र समाकल हैं तब $\phi(u,v)=0$ समीकरण (1) को संतुष्ट करता है जहाँ ϕ स्वेच्छ फलन है।

उपरोक्त प्रमेयों का महत्वपूर्ण निष्कर्ष यह है कि यदि $u=$ नियतांक व $v=$ नियतांक समीकरण (5) के दो स्वतंत्र समाकल हैं, तो $\phi(u,v)=0$ समीकरण (1) का समाकल है। समीकरण (5)को समीकरण (1) का सहायक समीकरण कहते हैं। अतएव लैग्रेंज विधि के निम्न चरण हैं

चरण-I

समीकरण $Pp+Qq=R$ का सहायक समीकरण $\frac{dx}{p}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ लिखिये।

चरण-II

इन सहायक समीकरणों से दो स्वतंत्र समाकल $u=$ नियतांक $v=$ नियतांक प्राप्त कीजिये।

चरण-III

स्वेच्छ फलन $\phi(u,v)=0$ समीकरण (1) का हल होता हैं। इस हल को $u=\phi(v)$ या $v=\phi(u)$ रूप में भी लिखते हैं।

टिप्पणी:1

लैग्रेंज विधि से प्राप्त समाकल, समीकरण (1) के सभी प्रकार के हल (पूर्ण हल,व्यापक हल तथा विचित्र हल) प्रदान करता है। इसलिये समीकरण (1) पूर्णतया हल मानी जाती है यदि हल $\phi(u,v)=0$ रूप का है।

टिप्पणी: 2

$Pp + Qq = R$ प्रकार की समीकरण की लैग्रेंज विधि में सहायक समीकरणों

$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ को हल करने के लिये चार स्थितियाँ बनती है

प्रथम स्थिति:

x, y, z में से कोई चर अनुपस्थित रहता है अथवा किन्हीं दो अनुपातों में निरसित (cancel) हो जाता है। इस स्थिति में सामान्य विधि से समाकल प्राप्त किया जाता हैं। इसी प्रकार अन्य अनुपातों से दूसरा समाकल प्राप्त कर सकतें हैं

द्‌वितीय स्थिति:

इस स्थिति में सहायक समीकरण का केवल एक समाकल प्रथम स्थिति में वर्णित विधि से प्राप्त होता है। तब इस समाकल के उपयोग से दूसरा समाकल प्राप्त करतें हैं। ध्यान दीजिये कि द्‌वितीय समाकल में प्रथम समाकल के समाकलन नियतांक को बाद में हटा दिया जाता है।

तृतीय स्थिति:

माना P, Q, R चर x, y, z के फलन हैं तब

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz}{P_1 P + Q_1 Q + R_1 R} \qquad ......(2)$$

यदि $P_1 P + Q_1 Q + R_1 R = 0$ ....(3)तब $P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz = 0$

समीकरण (3) के समाकलन से हम प्राप्त करतें हैं

$$u(x, y, z) = c_1$$

यहाँ P_1, Q_1, R_1 को गुणक कहते हैं। नये गुणकों P_2, Q_2, R_2 के उपयोग से अन्य समाकल $v(x, y, z) = c_2$ प्राप्त करते हैं। बहुधा इस विधि से एक समाकल ही मिलता है। तब पूर्व वर्णित विधियों से अन्य समाकल प्राप्त करते हैं।

चतुर्थ स्थिति:

माना P_1, Q_1, R_1 गुणक हैं। तब समीकरण (1) का प्रत्येक अनुपात

$$\frac{P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz}{P_1 P + Q_1 Q + R_1 R} \qquad ....(2)$$

माना उपरोक्त अनुपात में अंश $P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz$ हर $P_1 P + Q_1 Q + R_1 R$ का यथातथ (Exact) अवकलज है। तब समीकरण (1) के उपयुक्त अनुपात एवं (2) से एक समाकल प्राप्त होता है। अन्य गुणकों P_2, Q_2, R_2 के उपयोग से अन्य समाकल प्राप्त किया जा सकता है।दिये गये निम्न

उदाहरणों से प्रक्रिया और स्पष्ट होगी।

टिप्पणी-3

यदि z, स्वतंत्र चरों $x_1, x_2, x_3 ..... x_n$ पर आश्रित हैं तो हमें लैग्रेंज समीकरण का व्यापकीकृत रूप प्राप्त होता है:

$$P_1\frac{\partial z}{\partial x}+P_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+........+P_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=R \qquad ....(1)$$

यहीं $P_1, P_2......P_n, R$ स्वतंत्र चरों $x_1, x_2, ...x_n$ के फलन हैं। समीकरण (1) के सहायक समीकरण हैं $\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=......\frac{dx_n}{P_n}$ ....(2)

समीकरण (2) के n स्वतंत्र हल होंगे। माना ये हल

$V_1 = C_1, V_2 = C_2.....V_n = C_n$ हैं। तब समीकण (1) का हल $\phi(V_1, V_2, ...V_n) = 0$ होगा, जहाँ ϕ स्वेच्छ फलन है।

टिप्पणी-4:

लैग्रेज़ समीकरण $pP + qQ = R$ का व्यापक हल $\phi(v, u) = 0$ रूप का होता है। इस हल में पूर्ण, सामान्य तथा विचित्र समाकल सन्निहित होते हैं परन्तु इसमें "विशेष समाकल" अन्तर्विष्ट नहीं होता है। उदाहरणार्थ समीकरण $2p - 3q = 2\sqrt{z}$ के दो हल, $3x + 2y = c_1, \frac{y}{3}+\sqrt{z} = c_2$ हैं। अत व्यापक हल $\phi\left(3x+2y, \frac{y}{3}+\sqrt{z}\right)=0$ होगा। परन्तु हम पाते हैं कि $z = 0$, $2p - 3q = 2\sqrt{z}$ को संतुष्ट करता है क्योंकि $z = 0$ $\Rightarrow p\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \ q\frac{\partial z}{\partial y}=0$ लेकिन हल $z = 0$ को $U = 3x + 2y,\ \ V=\frac{y}{3}\sqrt{z}$ प्रकार से निरूपित करना असंभव है। फलत: $Z = 0$ विशेष समाकल है।

उदाहरण-1

हल कीजिये $\cos(x + y)p = \sin(x + y)q = z$

हल:

दिये गये समीकरण के सहायक समीकरण हैं:

$$\frac{dx}{Cos(x+y)}=\frac{dy}{Sin(x+y)}=\frac{dz}{z}$$

अतएव प्रत्येक अनुपात $=\frac{dx+dy}{Cos(x+y)+Sin(x+y)}$

$$=\frac{d(x+y)}{Cos(x+y)+Sin(x+y)}$$

अतएव $=\frac{d(x+y)}{Cos(x+y)+Sin(x+y)}=\frac{dz}{z}$

माना $x + y = v$

$$\frac{dv}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos v+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin v\right)}=\frac{dz}{z}$$

या $$\frac{dv}{\sqrt{2}Cos\left(\frac{\pi}{4}v\right)} = \frac{dz}{z}$$

समाकलन करने पर

$$\sqrt{2}\log z + \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}-\frac{v}{2}\right) = \text{ नियतांक}$$

या $$z^{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{x+y}{2}\right) = \text{ नियतांक}$$

पुन: प्रत्येक अनुपात $\dfrac{dx-dy}{\cos(x+y)-\sin(x+y)}$

अतएव $$\frac{d(x+y)}{\cos(x+y)+\sin(x+y)} = \frac{d(x-y)}{\cos(x+y)-\sin(x+y)}$$

या $$d(x-y) = \frac{\cos(x+y)-\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\sin(x+y)}d(x+y)$$

समाकलन करने पर,

$$(x-y) = \log\{Cos(x+y)+Sin(x+y)\}+\log c$$

जहाँ $\log c$ नियताक है

या $$e^{y-x}\{Cos(x+y)+Sin(x+y)\} = \text{ नियतांक}$$

अतएव दी गई समीकरण का हल है:

$$\phi\left\{z^{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{x+y}{2}\right)\right\}, e^{y-x}\{\cos(x+y)+\sin(x+y)\} = 0$$

जहाँ ϕ स्वेच्छ फलन है।

उदाहरण-2

हल कीजिये $\dfrac{y^2z}{z}p + xzq = y^2$

हल:

दिये गये समीकरण का सहायक समीकरण है:

$$\frac{dx}{y^2\, z/x} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y^2} \qquad ......(1)$$

$$x^2dx - y^2dy = 0 \qquad ....(2)$$

(2) को समाकलित करने पर, $x^3 - y^3 =$ नियतांक

पुन: समीकरण (1) से, $\dfrac{dx}{y^2\, z/x} = \dfrac{dz}{y^2}$ या $xdx = zdz$ ......(3)

(3) के समाकलन से, $x^2 - y^2 =$ नियतांक

अत: दिये समीकरण का हल $\phi(x^3 - y^3, x^2 - y^3) = 0$ है जहाँ ϕ स्वेच्छ फलन है।

उदाहरण -3

हल कीजिये

$$y^2 p - xyq = x(z-2y)$$

हल:

दिये गये समीकरण के सहायक समीकरण हैं:

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{x(z-2y)} \qquad ....(1)$$

प्रथम दो अनुपातों से,

$$xdx = ydy = 0 \qquad ......(2)$$

(2) के समाकलन से,

$$x^2 + y^2 = \text{नियतांक} \qquad ......(3)$$

पुन: अंतिम दो अनुपातों सें,

$$\frac{dz}{dy} = -\left(\frac{z-2y}{y}\right)$$

$$\frac{dz}{dy} + \frac{z}{y} = 2 \qquad ....(4)$$

समीकरण (4) z तथा y में रैखिक अवकल समीकरण है जिसका हल है:

$$z(I.F) = \int 2(I.F.)dy$$

जबकि समीकरण (4) के लिये $I.F = e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{\log e^y} = y$

अत: (4) का हल है

$$zy = \int 2ydy + \text{ नियतांक}$$

या $zy - y^2 =$ नियतांक ....(5)

अत: समीकरण (1) का हल है:

$$\phi(x^2 + y^2, zy - y^2) = 0$$

उदाहरण-4

हल कीजिये

$$p + 2q = 5z + \sin(y - 2x)$$

हल:

दिये गये समीकरण के सहायक समीकरण हैं

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{5z + \sin(y-2x)} \qquad ....(1)$$

प्रथम दो अनुपातों से, $-2dx + dy = 0$ ....(2)

(2) के समाकलन से, $-2x + y = 0$ नियतांक $= c_1$ ....(3)

समीकरण (3) का (1) में प्रयोग करने से

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{5z + \sin c_1} \qquad ....(4)$$

(4) के समाकलन से, $x - \left(\frac{1}{5}\right) \log(5z - \sin c_1) =$ नियतांक

या $\quad 5x - \log(5z + \sin c_1) =$ नियतांक $= c_2$

अतः वांछित हल

$$\phi\{5x - \log(5z + \sin(y - 2x)), y - 2x\} = 0$$

जहाँ ϕ स्वेच्छ फलन है।

उदाहरण-5

हल कीजिये $xyp + y^2 q = xyz - 2x^2$

हल :

दिये गये समीकरण के सहायक समीकरण हैं

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{xyz - 2x^2} \qquad ....(1)$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0 \quad ....(2)$$

समीकरण (2) के समाकलन से, $\log x - \log y = \log c_1$

अथवा $\frac{x}{y} = c_1 \qquad ....(3)$

समीकरण (3) से प्राप्त $x = c_1 y$ का समीकण (1) में उपयोग से,

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{c_1 z y^2 - 2c_1^2 y^2}$$

या $\quad c_1 dy - \frac{dz}{z - 2c_1^2} = 0$

समाकलन पर, $c_1 y - \log(z - 2c^2{}_1) =$ नियतांक $= c_2$

या $\quad x - \log(z - 2(x^2/y^2)) = c_2 \qquad \left[\because c_1 = \frac{x}{y}\right]$

अतः वांछित हल हैं $\phi\left(\frac{x}{y}, x - \log\left(z - \frac{2x^2}{y^2}\right)\right) = 0,$

जहाँ ϕ स्वेच्छ फलन है।

उदाहरण-8

हल कीजिये $z(x + y)p + z(x - y)q = x^2 + y^2$

हल:

सहायक समीकरण हैं $\frac{dx}{z(x+y)}=\frac{dy}{z(x-y)}=\frac{dz}{x^2-y^2}$ ....(1)

समीकरण (1) में $x, y, -z$ गुणक लेने पर

(1) का प्रत्येक अनुपात

$$=\frac{ydx+xdy+zdz}{yz(x+y)+xz(x-y)-z(x^2+y^2)}=\frac{ydx+xdy-zdz}{0}$$

अत: $ydx+xdy-zdz=0$

या $d(xy)-d\left(\frac{z^2}{2}\right)=0$

समाकलन करने पर, $xy-\frac{z^2}{2}=$ नियतांक $=c_1$

पुन: समीकरण (1) में $x,-y,-z$ गुणक लेने पर

(1) का प्रत्येक अनुपात $=\frac{xdx+ydy-zdz}{0}$

या $xdx-ydy-zdz=0$

समाकलन पर, $x^2-y^2-z^2=$ नियतांक $=c_2$

अत: वांछित हल होगा $\phi\left(xy-\frac{z^2}{2}, x^2-y^2-z^2\right)=0$

उदाहरण-7

हल कीजिये $x(y^2-z^2)p-(x^2+z^2)yq=(x^2+y^2)z$

हल:

सहायक समीकरण हैं

$$\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=\frac{dy}{-y(x^2+z^2)}=\frac{dz}{(x^2+y^2)z} \qquad \text{..........(1)}$$

समीकरण (1) में x, y, z गुणक लेने पर, प्रत्येक अनुपात

$$=\frac{xdx+ydy+zdz}{x^2(y^2-z^2)-y^2(x^2+z^2)+z^2(x^2+y^2)}=\frac{xdx-ydy-dz}{0}$$

अत: $xdx-ydy-zdz=0$

समाकलन पर, $x^2+y^2+z^2=$ नियताक $=c_1$

पुन: समीकरण (1) में $\frac{1}{x},\frac{-1}{y},\frac{-1}{z}$ गुणक लेने पर

प्रत्येक अनुपात $=\dfrac{\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}-\frac{dz}{z}}{y^2-z^2-x^2-z^2+x^2+y^2}$

$$=\frac{\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}-\frac{dz}{z}}{0}$$

या $\quad \frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}-\frac{dz}{z}=0$

समाकलन करने पर, $\log x-\log y-\log z=\log c_2$

या $\quad \frac{x}{yz}=c_2$

फलत: वांछित हल : $\phi\left(x^2+y^2+z^2,\frac{x}{yz}\right)=0$

उदाहरण- 8

हल कीजिये $x^2p+y^2q=nxy$

हल :

सहायक समीकरण हैं- $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{nxy}$ ....(1)

प्रथम दो अनुपातों से, $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}$

समाकलन पर, $\frac{-1}{x}+\frac{1}{y}=c_1 \Rightarrow \frac{y-z}{xy}=c_1$ ....(2)

यहाँ c_1 नियतांक है

$\frac{1}{x},\frac{-1}{y},\frac{c_1}{n}$ गुणक लेने पर समीकरण (1) का प्रत्येक अनुपात

$$=\frac{\frac{1}{x}dx-\frac{1}{y}dy+\frac{c_1}{n}dz}{x-y+c_1xy}=\frac{\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}+c_1\frac{dz}{n}}{0}$$

$$[\because c_1xy=y-z]$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}+c_1\frac{dz}{n}=0$$

समाकलन पर, $\log x-\log y+\frac{c_1}{n}z=$ नियतांक

$\Rightarrow \frac{c_1}{n}z+\log\frac{x}{y}=$ नियतांक

$\Rightarrow z+\frac{n}{c_1}\log\frac{x}{y}=$ नियतांक

या $\quad z+\frac{nxy}{y-x}\log\frac{x}{y}=c_2$ ....(3)

c_2 नियतांक है

वांछित हल: है -$\phi\left(\frac{y-x}{xy}, z+\frac{nxy}{y-x}\log\frac{x}{y}\right)=0$

उदाहरण-9

हल कीजिये $(y^3x-2x^4)p+(2y-x^3y)q=9z(x^3-y^3)$

हल:

सहायक समीकरण है: $\frac{dx}{y^3x-2x^4}=\frac{dy}{2y^4-x^3y}=\frac{dz}{9z(x^3-y^3)}$ ....(1)

गुणक $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{3z}$ चुनने से समीकरण (1) का प्रत्येक अनुपात

$$=\frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{3z}}{y^3-2x^3+2y^3-x^3+3x^3-3y^3}=\frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{3z}}{0}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{3z}=0$$

समाकलन पर, $\log x+\log y+\log z^{1/3}=$ नियतांक $=\log c_1$

या $xyz^{1/3}=c_1$ ....(2)

पुन: समीकरण (1)के प्रथम दो अनुपातों से $\frac{dx}{y^3x-2x^4}=\frac{dy}{2y^4-x^3y}$

$\Rightarrow (2y^4-x^3y)dx+(2x^4-y^3x)dy=0$ ....(3)

समीकरण (3) को x^3y^3 से भाग देने पर

$$\left(\frac{2y}{x^3}-\frac{1}{y^2}\right)dx+\left(\frac{2x}{y^3}-\frac{1}{x^2}\right)dy=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{dy}{x^2}-\frac{2y}{x^3}dx\right)+\left(\frac{dx}{y^2}-\frac{2x}{y^3}dy\right)=0$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{y}{x^2}\right)+d\left(\frac{x}{y^2}\right)=0$$

समाकलन पर $\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=c_2$ ....(4)

अत: हल है $\phi\left(xyz^{1/3},\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}\right)=0$

उदाहरण -10

हल कीजिये $(z+e^x)p+(z+e^y)q=z^2-e^{x+y}$

हल:

लैग्रेंज की सहायक समीकरण हैं-

$$\frac{dx}{z+e^x}=\frac{dy}{z+e^y}=\frac{dz}{z^2-e^{x+y}} \qquad ....(1)$$

समीकरण (1) में गुणक $-ze^{-x},1,e^{-x}$ चुनने पर प्रत्येक अनुपात

$$=\frac{-ze^{-x}dx+dy+e^{-x}dz}{-z^2e^{-x}-z+z+e^y+z^2e^{-x}-e^y}=\frac{-ze^{-x}dx+dy+e^{-x}dz}{0}$$

$$\Rightarrow -ze^{-x}dx+dy+e^{-x}dz=0$$

$$\Rightarrow d(ze^{-x}+y)=0$$

समाकलन पर, $\Rightarrow ze^{-x}+y=c_1$ ....(2)

पुन: समीकरण (1) में 1, $ze^{-y},-e^{-y}$ गुणक चुनने पर

प्रत्येक अनुपात $=\dfrac{dx-ze^{-y}dy+e^{-y}dz}{z+e^x-z^2e^{-y}-z+z^2e^{-y}-e^x}$

$$=\frac{dx-ze^{-y}dy+e^{-y}dz}{0}$$

$$\Rightarrow dx-ze^{-y}dy+e^{-y}dz=0$$

$$\Rightarrow d(x+ze^{-y})=0$$

समाकलन पर $\Rightarrow x+ze^{-y}=c_2$ ....(3)

(2) तथा (3) से वांछित हल $\Rightarrow \phi(ze^{-x}+y,x+ze^{-y})=0$

उदाहरण- 11

हल कीजिये $y^2(x-y)p+x^2(y-x)q=z(x^2+y^2)$

सहायक समीकरण हैं

$$\frac{dx}{y^2(x-y)}=\frac{dy}{x^2(y-x)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)} \qquad ....(1)$$

प्रथम दो अनुपातों सें $\dfrac{dx}{y^2}=\dfrac{dy}{-x^2}\Rightarrow x^2dx+y^2dy=0$

समाकलन पर, $x^3+y^3=c_1$ (c_1 नियतांक हैं) ....(2)

पुन: 1,-1,0 को गुणक लेने पर समीकरण (1) का

प्रत्येक अनुपात $=\dfrac{dx-dy}{y^2(x-y)+x^2(x-y)}=\dfrac{dx-dy}{(x-y)(x^2-y^2)}$

अत: समीकरण (1) के तृतीय अनुपात एवं समीकरण (3) से

$$\frac{dz}{z(x^2+y^2)}=\frac{dx-dy}{(x-y)(x^2+y^2)}\Rightarrow\frac{dz}{z}=\frac{dx-dy}{x-y}$$

समाकलन करने पर, $\log z-\log(x-y)=\log c_2$

या $\dfrac{z}{x-y}=c_2$ (c_2 नियतांक है) ....(4)

अत: वांछित हल है: $\phi(x^3+y^3,\dfrac{z}{x-y})=0$

जहाँ ϕ स्वेच्छ फलन है

उदाहरण- 12

हल कीजिये $(x^2-y^2-z^2)p+2xyq=2xz$

हल:

सहायक समीकरण हैं $\dfrac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dz}{2xz}$ ....(1)

अंतिम दो अनुपातो से $\dfrac{dy}{z}-\dfrac{dz}{z}=0$

समाकलन पर, $y=c_1 z,$ .... (2)

जहाँ c_1 नियतांक हैं

प्रथम एवं अंतिम अनुपातों से $\dfrac{dx}{x^2-(1+a^2)z^2}=\dfrac{dz}{2xz}$

या $\dfrac{2xdx}{dz}-\dfrac{x^2}{z}=-(1+a^2)z$ ....(3)

माना $x^2=t$ अत: $\dfrac{2xdx}{dz}=\dfrac{dt}{dz}$

$\therefore \dfrac{dt}{dz}-\dfrac{t}{z}=-(1+a^2)z$ ....(4)

समीकरण (4) रैखिक है, जिसका समाकलन गुणक (I.F.)

$=e^{-\int\frac{dz}{z}}=e^{-\log z}=\dfrac{1}{z}$

अत: (4) का हल होगा $t\left(\dfrac{1}{z}\right)=\int -(1+a^2)z.\dfrac{1}{z}dz+$ नियतांक

$=-(1+a^2)z+$ नियतांक

या $\dfrac{x2}{z}+(1+a2)z=$ नियतांक

8 अत: (2), (5) दिये गये समीकरण के दो स्वतंत्र समाकल हैं।

फलत: प्रदत्त समीकरण का हल $\phi\left(y/z,\dfrac{x2}{z}+(1+a^2)z\right)=0$ है

उदाहरण -13

हल कीजिये- $(x+y-z)(p-q)+a(px-qy+x-y)=0$

हल

माना $x+y=u, x-y=v$

तब $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}$

एवं $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}++\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}$

p एवं q के उपरोक्त मान दिये समीकरण में रखने एवं सरलीकरण पर

$$(2u-2z+au)\frac{\partial z}{\partial v}+av\frac{\partial z}{\partial u}=-av ....(1)$$

समीकरण (1) $Pp+Qq=R$ रूप का है जहां

$$p'=\frac{\partial z}{\partial v},'q'=\frac{\partial z}{\partial u}$$

अत: सहायक समीकरण हैं:

$$\frac{dv}{2u-2z+au}=\frac{du}{av}=\frac{dz}{-av} \quad ....(2)$$

अंतिम दो अनुपातों से, $du+dz=0$

समाकलन पर, $u+z=$ नियतांक $=c_1$

पुन:, प्रथम दो अनुपातों से,

$$\frac{dv}{2u-2z+au}=\frac{du}{av} \text{ या } \frac{dv}{2u-2(c_1-u)+au}=\frac{du}{av}$$

या $\quad avdv=(4u+au-2c_1)du$

समाॅकलन पर $\dfrac{av^2}{2}-2u^2+2c_1u-\dfrac{au^2}{2}=$ नियतांक $=c_2$

या - $\dfrac{av^2}{2}-2u^2+2(u+z)u-\dfrac{au^2}{2}=c_2$

या - $\dfrac{av^2}{2}+2uz-\dfrac{au^2}{2}=c_2$

अत: हल है: $\phi\left(u+z,\dfrac{av^2}{2}+2uz-\dfrac{au^2}{2}\right)=0$

जहाँ $u=x+y,\quad v=x-y$

उदाहरण-14 हल कीजिये-

$$(p-q)\left(e^{x+y}+xyz\right)+\left(yq-xp\right)\left(z+xye^{-x-y}\right)+\left(x-y\right)\left(1-z^2\right)=0$$

हल:

माना $\quad e^{x+y}=u,\quad xy=v$

तब $\quad p=\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^{x+y}\dfrac{\partial z}{\partial u}+y\dfrac{\partial z}{\partial v}$

एवं $\quad q=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^{x+y}\dfrac{\partial z}{\partial u}+x\dfrac{\partial z}{\partial v}$

अत: दिये गये समीकरण का नया रूप होगा-

$$(u+vz)(y-x)\frac{\partial z}{\partial v}+\left(z+\frac{v}{u}\right)(y-x)u\frac{\partial z}{\partial u}-(y-x)(1-z^2)=0$$

या $$(u+vz)\frac{\partial z}{\partial v}(v+uz)\frac{\partial z}{\partial u}=1-z^2$$ ....(1)

समीकरण (1) " $Pp+Qq=R$ " रूप का है जिसके सहायक समीकरण हैं-

$$\frac{dv}{u+vz}=\frac{du}{v=uz}=\frac{dz}{1-z^2}$$

$$\therefore \frac{d(u+v)}{(u+v)(1+z)}=\frac{d(u-v)}{(v-u)(1-z)}=\frac{dz}{1-z^2}$$

प्रथम एवं अंतिम अनुपातों से

$$\frac{d(u+v)}{(u+v)}=\frac{dz}{1-z}$$

समाकलन से, $\log(u+v)+\log(1-z)=\log c_1$

या $$(u+v)-(1-z)=c_1$$ ....(2)

यहीं c_1 नियतांक है ।

पुन: $$\frac{d(u-v)}{v-u}=\frac{dz}{1+z}$$

समाकलन पर, $\log(1+z)+\log(u-v)=\log c_2$

या $$(1+z)-(u-v)=c_2$$ ....(3)

जहाँ c_2 नियतांक है-

अत: वांछित हल है : $\{(u+v)(1-z),(u-v)(1+z)\}=0$

उदाहरण-15 हल कीजिये-

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+t\frac{\partial z}{\partial t}-az-\frac{xy}{t}=0$$

हल: दिया गया समीकरण

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+t\frac{\partial z}{\partial t}=az+\frac{xy}{t}$$ ....(1)

$P_1\frac{\partial z}{\partial x}+P_2\frac{\partial z}{\partial y}+P_3\frac{\partial z}{\partial t}=R$ रूप का है।

(1) के सहायक समीकरण होंगे-

$$\frac{dz}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dt}{t}=\frac{dz}{az+xy/t}$$ ....(2)

समीकरण (2) के प्रथम दो अनुपातों से, $y=c_1x$ ....(3)

समीकरण (2) के प्रथम एवं तृतीय अनुपातों से, $t=c_2x$ ....(4)

समीकरण (2) के प्रथम एवं चतुर्थ अनुपातों से

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{az+xy/t}\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{dz}{az+\frac{c_1x}{c_2}} \qquad \left[\because t=c_2x\ ,y=c_1x\right]$$

$$\Rightarrow\frac{dz}{dx}-\frac{az}{x}=\frac{c_1}{c_2} \qquad \text{................(5)}$$

समीकरण (5) प्रथम घात प्रथम कोटि का रैखिक समीकरण हैं

अत: इसका हल

$$z(I.F.)=\int\frac{c_1}{c_2}(I.F.)dx+c_3$$

$$I.F.=e^{-\int\frac{a}{x}dx}=x^{-a}$$

अत: (5) का हल

$$zx^{-a}=\frac{c_1}{c_2}\int x^{-a}dx+c_3$$

या $$zx^{-a}=\frac{c_1}{c_2}\frac{x^{1-a}}{1-a}+c_3$$

या $$\frac{z}{x^a}-\frac{y}{t}.\frac{x^{1-a}}{1-a}=C_3 \qquad \left[\because\frac{c_1}{c_2}=\frac{y}{t}\right] \qquad \text{.........(6)}$$

समीकरण (3), (4), (8) से अभीष्ट हल-

$$\left\{\frac{y}{x},\frac{1}{x},\frac{z}{x^a}-\frac{y}{t}.\frac{x^{1-a}}{1-a}\right\}=0$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-3

1. हल कीजिये-

$(i) z=xp+yq+a\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$(ii)(u+y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(u+z+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(u+x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$

$(iii)x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$

$(iv)x^2(y-z)p+y^2(z-x)q=z^2(x-y)$

$(v)p-2q=3x^2\sin(y+2x)$

$(vi)z(p-q)=z^2+(x+y)^2$

$(vii)\left(\frac{y-z}{yz}\right)p+\left(\frac{z-x}{zx}\right)q=\frac{x-y}{xy}$

13.4.1 लैग्रेंज के रैखिक समीकरण की ज्यामितीय व्याख्या:-

लैग्रेंज का रैखिक आंशिक अवकल समीकरण है:

$$Pp+Qq+(-1)R=0 \qquad \text{........(1)}$$

इसके सहायक समीकरण

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad \text{.........(2)}$$

हम जानते हैं कि यदि $u=c_1, v=c_2$ समीकरण (2) के दो स्वतंत्र समाकल है तो $\phi(u,v)=0$ समीकरण (1) का पूर्ण समाकल होता हैं तथा $\phi(u,v)=0$ पृष्ठ कुल को निरूपित करता है जिसके पृष्ठों पर समाकल वक्र $u=c_1, v=c_2$ स्थित होते हैं।

ज्यामिति से हम जानते हैं कि पृष्ठ $f(x,y,z)=0$ के किसी बिन्दु (x,y,z) पर अभिलम्ब के दिक् अनुपात $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$ या $p,q,-1$ होते हैं। इस प्रकार यह अभिलम्ब समाकल वक्रों पर लम्बवत् है। फलत: समीकरण (1) का हल $\phi(u,v)=0$ समीकरण (2) समाकल वक्रों का रेखा पथ है, क्योंकि समीकरण (1) एक पृष्ठ कुल को निरूपित करता है जिसके किन्हीं भी दो पृष्ठों के प्रतिच्छेदन से समीकरण (2) का एक समाकल वक्र प्राप्त होता है।

13.4.2 दिये गये वक्र से गुजरने वाले समाकल पृष्ठ :

हमने पूर्व अनुच्छेद में लैग्रेंज समीकरण $Pp+Qq=R$ के व्यापक हल को प्राप्त करने की विधि को समझा है। इस व्यापक हल की सहायता से किसी दिये गये वक्र से गुजरने वाले समाकल पृष्ठ को ज्ञात करने की दो विधियाँ है:

प्रथम विधि :

माना $Pp+Qq=R$ ......(1)

दिया गया समीकरण है, जिसके दो स्वतंत्र हल है-

$$u(x,y,z)=c_1; v(x,y,z)=c_2 \qquad \text{......(2)}$$

अब हम समीकरणों $\phi(x,y,z)=0, \psi(x,y,z)=0$ .....(3)

से दिये जाने वाले वक्र से गुजरने वाले समाकल पृष्ठ को ज्ञात करने के लिये समीकरण (2) एवं (3) से x,y,z का विलोपन करके नियतांकों c_1,c_2 में सम्बन्ध प्राप्त करते हैं। इस सम्बन्ध में c_1,c_2 को क्रमश: $u(x,y,z), v(x,y,z)$ से प्रतिस्थापित करने पर वंछित समाकल पृष्ठ की प्राप्ति होती है।

द्वितीय विधि :

माना दिया गया वक्र प्राचलिक रूप $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ ......(4)

में है, जहाँ t प्राचल है। तब समीकरण (2) होगा

$$u\{x(t),y(t),z(t)\}=c_1, v\{x(t),y(t),z(t)\}=c_2 \qquad \text{......(5)}$$

समीकरण (5) से t का विलोपन करके c_1 तथा c_2 में सम्बन्ध प्राप्त किया जाता है। इस सम्बन्ध में c_1, c_2 को क्रमश: $u(x,y,z)$ तथा $v(x,y,z)$ से प्रतिस्थापित करके वांछित पृष्ठ प्राप्त होता है।

13.4.3 दिये गये पृष्ठ-कुल के लाम्बिक पृष्ठ

(Surfaces orthogonal to a given system of surfaces):

माना पृष्ठ $z = \phi(x, y)$ ....(1)

एक पृष्ठ-कुल $f(x,y,z) = c$ ....(2)

(जहाँ c प्राचल है) को प्रत्येक सदस्य को समकोणत: प्रतिच्छेद करता है।

अब चूंकि इसके किसी बिन्दु (x,y,z) पर अभिलम्ब के दिक् अनुपात $p, q, -1$ अतएव

$$p\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial y} + (-1)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$p\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad ....(3)$$

अब समीकरण (3) यह इंगित करता है कि इसके किसी भी समाकल पृष्ठ पर अभिलन्ब, समीकरण (2) के प्रत्येक पृष्ठ के अभिलम्ब के लम्बवत् है, जो एक ही बिन्दु से गुजरते हैं, इस प्रकार विलोमत: समीकरण

(3) प्रत्येक समाकल पृष्ठ, (2) के प्रत्येक पृष्ठ को लाम्बिकत: प्रतिच्छेदन है। निष्कर्षत: (2) को लाम्बिकत प्रतिच्छेद करने वाले पृष्ठ समीकरण

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial f}{\partial z}} \quad ....(4)$$

से प्राप्त समाकल वक्रों के रेखा पथ होते हैं।

उदाहरण-1 समीकरण $2y(z-3)p + (2x-z)q = (2x-3)y$ का समाकल पृष्ठ कीजिये जो कि वृत $x^2 + y^2 = 2x, z = 0$ से गुजरता है।

हल: प्रदत्त समीकरण है-

$$2y(z-3)p + (2x-z)q = (2x-3)y \quad ......(1)$$

वृत्त: $\quad x^2 + y^2 = 2x, z = 0$ ......(2)

समीकरण (1) के सहायक समीकरण है-

$$\frac{dx}{2y(z-3)} = \frac{dy}{2x-z} = \frac{dz}{(2x-3)y} \quad ....(3)$$

गुणक $\frac{1}{2}, y, -1$ के उपयोग से समीकरण (3) का प्रत्येक अनुपात

$$= \frac{\frac{1}{2}dx + ydy - dz}{y(z-3) + y(2x-z) - (2x-3)y} = \frac{\frac{1}{2}dx + ydy - dz}{0}$$

$$\frac{1}{2}dx + ydy - dz = 0 \qquad ....(4)$$

(4) का समाकलन करने पर $x + y^2 - 2z = c_1$ ....(5)

जहाँ c_1 नियतांक है

पुन: समीकरण (3) के प्रथम एवं तृतीय अनुपात से

$$(2x-3)dx - 2(z-3)dz = 0$$

समाकलन पर, ...(6)

$$x^2 - 3x - z^2 + 6z = c_2$$

जहाँ c_2 नियताक है।

दिये गये वृत्त का प्राचलिक समीकरण

$$x = t, y = \sqrt{(2t - t^2)}, z = 0 \qquad ....(7)$$

समीकरण (7) को समीकरण (5) एवं (6) में प्रयुक्त करने पर,

$$t^2 - 3t = c_1, 3t - t^2 = c_2$$

अर्थात् $c_1 + c_2 = 0$ ....(8)

समीकरण (5), (6) एवं (8) से c_1, c_2 के विलोपन से वांछित समाकल पृष्ठ,

$$\left(x + y^2 - 2z\right) + \left(x^2 - 3x - z^2 + 6z\right) = 0$$

या $\quad x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4z = 0$

उदाहरण-2 समीकरण $x^2 p + y^2 q + z^2 = 0$ का वह समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिये जिसमें वक्र $xy = x + y, z = 1$ विद्‌यमान है।

हल: दिये गये समीकरण के सहायक समीकरण है-

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{-z^2} \qquad ....(1)$$

समीकरण (1) के दो स्वतंत्र हल $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = c_1, \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c_2$ हैं जहाँ c_1, c_2

नियतांक है ......(2)

दिया गया वक्र है: $xy = x + y, z = 1$ ......(3)

समीकरण (2) में $z = 1$ रखने पर

$$\frac{1}{x} = c_1, -1, \frac{1}{y} = c_2 - 1 \qquad ......(4)$$

पुन: (3) से, $xy = x + y$ या $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ ......(5)

समीकरण (4) एवं (5) से, $c_1 - 1 + c_2 - 1 = 1$

या $c_1 + c_2 = 3$ ......(6)

समीकरण (2), (6) से c_1, c_2 के विलोपन करने से वांछित समाकल पृष्ठ,

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3$$

या $2xy + yz + zx = 3xyz$

उदाहरण-3 समीकरण $yp - 2xyq = 2xz$ का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिये जिसमें वक्र $x = t, y = t^2, z = t^3$ विद्‌यमान है।

हल: दिये गये समीकरण के सहायक समीकरण है-

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-2xy} = \frac{dz}{2xz} \qquad \text{........(1)}$$

समीकरण (1) के दो स्वतंत्र समाकल है-

$$yz = c_1 \qquad \text{......(2)}$$

$$x^2 + y = c_2 \qquad \text{......(3)}$$

अब दिये गये वक्र के प्राचलिक समीकरण -

$$x = t, y = t^2, z = t^3 \qquad \text{......(4)}$$

समीकरण (2), (3) में (4) प्रतिस्थापित करने पर

$$c_1 = t^5, c_2 = 2t^2 \qquad \text{......(5)}$$

या $c_2^5 = 32c_1^2$ ......(6)

(2), (3) एवं (6) से c_1, c_2 का विलोपन करने पर वांछित पृष्ठ

$$(x^2 + y^2)^5 = 32y^2z^2$$

उदाहरण -4 आंशिक अवकल समीकरण $(x+y)p+(y-x-z)q = z$ के समाकल पृष्ठ को ज्ञात कीजिये जिसमें वक्र $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ विद्‌यमान है।

हल : दिये गये समीकरण के सहायक समीकरण

$$\frac{dx}{x-y} = \frac{dy}{y-x-z} = \frac{dz}{z} \qquad \text{......(1)}$$

समीकरण (1) का प्रत्येक अनुपात $= \dfrac{dx+dy+dz}{(x+y)+(y-x-z)+z}$

$$= \frac{dx+dy+dz}{0}$$

या $dx + dy + dz = 0$

समाकलन पर, $x + y + z = c_1$

जहाँ c_1 नियतांक है ।

पुन: समीकरण (1) के अंतिम दो अनुपातों से

$$\frac{dy}{y-(c_1-y)}=\frac{dz}{z} \qquad [\because x+z=c_1-y, (2) \text{ से }]$$

समाकलन पर

$$\frac{1}{2}\log(2y-c_1)-\log z = \text{ नियतांक } = \log a$$

या $\quad (2y-c_1)/z^2=c_2$

अतएव $\quad (y-x-z)/z^2=c_2 \qquad$ ......(3)

अब दिये वृत्त का समीकरण है-

$x^2+y^2=1, z=1 \qquad$ ......(4)

समीकरण (2), (3) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$x+y=c_1-1 \qquad ......(5)$$

$$y-x=c_2+1 \qquad ......(6)$$

चूँकि $\quad (x+y)^2+(y-x)^2=2(x^2+y^2) \qquad$ ......(7)

(4), (5), (6), (7) से

$$(c_1-1)^2+(c_2+1)^2=2(1)$$

या $\quad c_1^2+c_2^2-2c_1+2c_2=0 \qquad$ ....(8)

समीकरणों (2) एवं (3) से c_1, c_2 के मान (8) में प्रतिस्थापित करने पर, अभीष्ट समाकल पृष्ठ होगा-

$$(x+y+z)^2+\frac{(y-x-z)^2}{z^4}-2(x+y+z)+\frac{2(y-x-z)}{z^2}=0$$

उदाहरण-5 पृष्ठ कुल $\frac{z(x+y)}{3z+1}=c$ को लाम्बिकत: प्रतिच्छेदन करने वाले एवं वक्र $x^2+y^2=1, z=1$ से गुजरने वाला पृष्ठ ज्ञात कीजिये।

हल: माना $\quad f(x,y,z)=\frac{z(x+y)}{3z+1}=c \qquad$ ....(1)

फलत: $\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{z}{3z+1}, \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{z}{3z+1}, \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{x+y}{(3z+1)^2}$

अत: लाम्बिक पृष्ठ समीकरण $\quad p\frac{\partial f}{\partial x}+q\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}$

अर्थात् $\quad p\frac{z}{3z+1}+q\frac{z}{3z+1}=\frac{x+y}{(3z+1)^2} \qquad$ ....(2)

का हल होगा। समीकरण (2) को सरल करने पर

$$z(3z+1)p+z(3z+1)q=x+y \qquad ....(3)$$

समीकरण (3) के सहायक समीकरण

$$\frac{dx}{z(3z+1)}=\frac{dy}{z(3z+1)}=\frac{dz}{x+y}$$

समीकरण (4) के प्रथम दो अनुपातों से $dx-dy=0$ समाकलन पर $x-y=c_1$

पुन: समीकरण (4) में $x, y, -z(3z+1)$ गुणक लेने पर समीकरण (4) का प्रत्येक

अनुपात $= \dfrac{xdx+ydx-z(3z+1)dz}{0}$

या $xdx+ydy-z(3z-1)dz=0$

समाकलन पर, $x^2+y^2-2z^3-z^2=c_2$

फलत: दिये गये पृष्ठ कुल (1) को लाम्बिकत: प्रतिच्छेद करने वाला पृष्ठ

$x^2+y^2-2z^3-z^2=\phi(x-y)$ ....(7)

से दिया जाता है जहाँ ϕ स्वेच्छ फलन है । पुन: यह पृष्ठ (7) वृत्त $x^2+y^2=1, z=1$ से भी गुजरता है। अत: इनका प्रयोग (7) में करने पर,

$$1-2-1=\phi(x-y) \Rightarrow \phi(x-y)=-2$$

अत: अभीष्ट पृष्ठ है : $x^2+y^2-2z^3-z^2=-2$

13.5 सारांश

इस इकाई के आरम्भ में आपने आंशिक अवकल समीकरणों की अवधारणा, व्युत्पत्ति एवं उनके हलों के प्रकार तथा हलों के ज्यामितीय अर्थ को समझा। यह इकाई प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरण "लैग्रेंज समीकरण $Pp+Qq=R$ पर केंद्रित थी। आप लैग्रेंज समीकरण के ,हल की विधि, हल का तात्पर्य एवं लैग्रेंज समीकरण की ज्यामितीय व्याख्या के आधार सम्बन्धित अनुमयोग से परिचित हुये।

13.6 शब्दावली

आंशिक अवकल समीकरण	Partial differential equation
पूर्ण समाकल	Complete integral
व्यापक समाकल	General integral
विचित्र समाकल	Singular integral
विशिष्ट समाकल	Particular integral
समाकल वक्र	Integral curve
समाकल पृष्ठ	Integral surface
पृष्ठ-कुल	Family of surfaces

13.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न-1

1. (iii) 2. (iv) 3. (iii) 4. (iv)

स्वमूल्यांकन प्रश्न-2

1. $(lz-nx)q+(ny-mz)p=(mx-ly)$

2. $(i) z(px+qy)=z^2-1$

$(ii) 4z=p^2+q^2$

$(iii) pq=1$

$(iv) px-qy=x-y$

$(v) \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

उत्तर $\left[z=x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]$

(vi) $z=(x+a)(y+b)$

उत्तर $\left[z=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\right]$

2. स्वेच्छ फलन ϕ के विलोपन से आशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये-

$(i)\phi(x+y+z, x^2+y^2-z^2)=0$

उत्तर $(y+z)p-(x+z)q=x-y$

$(ii) z=e^{ny}\phi(x-y)$

उत्तर $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=nz$

$(iii) z=\phi(xy/z)$

उत्तर $x\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}y$

$(iv) z=(x-y)\phi(x^2+y^2)$

उत्तर $(x-y)py-(x-y)xq=(x+y)z$

3. स्वेच्छ फलनों ϕ तथा ψ के विलोपन से जनित आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये-

$(i) z=\phi(xy)+\psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$

उत्तर $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}+x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

$(ii) z=\phi(x\cos\alpha+y\sin\alpha-at)+\psi(x\cos\alpha+y\sin\alpha+at)$

उत्तर $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

$(iii) z=\phi(x^2-y)+\psi(x^2+y)$

उत्तर $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+4x^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

4. हल कीजिये-

$(i) a(p+q)=z$

उत्तर $\phi(x-y, y-az)=0$

$(ii) x^2 p+y^2 q+z^2 =0$

उत्तर $\phi\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}, \frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)=0$

$(iii)\ yzp+zxq=xy$

उत्तर $\phi(x^2-y^2, x^2-z^2)=0$

$(iv) p-2q=3x^2\sin(y+2x)$

$\phi\left(y+2x, x^3\sin\left(y+2x\right)\right)=0$

$(v) x^2(y-z)p+y^2(z-x)q=z^2(x-y)$

उत्तर $\phi\left(xyz, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=0$

$p+q=x+y+z$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-3

13.8 अभ्यास प्रश्न

1. निम्नांकित प्रश्नों के स्वेच्छ नियतांकों a तथा b के विलोपन से जनित आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये-

$(i)\phi\left\{\frac{x}{y}, \frac{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^{1-a}}\right\}=0$

$$(ii)\phi\left\{\frac{x-y}{y-z},\frac{y-z}{z-a},(x+y+z)^{1/3}(x-y)\right\}=0$$

$$(iii)\phi\left\{\frac{x}{y},\frac{y}{z},xyz-eu\right\}=0$$

$$(iv)\phi\left\{xyz,\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right\}=0$$

$$(v)\phi\{2x+y,x^2\sin(2x+y)-z\}=0$$

$$(vi)\phi\left[x+y,e^{2yx}\{(2+x)^2+z^2\}\right]=0$$

$$(vii)\phi\{x+y+z,xyz\}=0$$

$(i)z=ae^{bt}\sin x$ उत्तर- $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0\right]$

$(ii)2z=(ax+y)^2+b$ उत्तर- $\left[x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]$

$(iii)\ 2z=2axe^y+a^2e^{2y}+b$ उत्तर- $\left[x\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial z}{\partial y}\right]$

$(iv)z=ax+by+a^2+b^2)$ उत्तर- $\left[z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]$

$(v)z=(x+a)(y+b)$ उत्तर $\left[z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]$

2. स्वेच्छ फलन के विलोपन से आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये-

$(i)\phi(x+y+z,x^2+y^2-z^2)=0$

उत्तर $(y+z)p-(x+z)q=x-y$

$(ii)z=e^{ny}\phi(x-y)$

उत्तर $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=nz$

$(iii)z=\phi(xy/z)$

$x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}y$

$(iv)z=(x-y)\phi(x^2+y^2)$

उत्तर $(x-y)py-(x-y)xq=(x+y)z$

3. स्वेच्छ फलनों ϕ तथा ψ के विलोपन से जनित आंशिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये-

$(i) z=\phi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$

उत्तर $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$(ii) z=\phi(x\cos\alpha+y\sin\alpha-at)+\psi(x\cos\alpha+y\sin\alpha+at)$

उत्तर $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

$(iii) z=\phi(x^2-y)+\psi(x^2+y)$

उत्तर $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial x}+4x^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

4. हल कीजिये-

$(i) a(p+q)=z$

उत्तर $\phi(x-y, y-az)=0$

$(ii) x^2 p+y^2 q+z^2=0$

उत्तर $\phi\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z},\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)=0$

$(iii) yzp+zxp=xy$

$\phi(x^2-y^2, x^2-z^2)=0$

$(iv) p-2q=3x^2\sin(y+2x)$

उत्तर $\phi(y+2x, x^3\sin(y+2x))=0$

$(v) x^2(y-z)p+y^2(z-x)q=z^2(x-y)$

उत्तर $\phi\left(xyz,\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=0$

$(vi) p+q=x+y+z$

उत्तर $\phi(x-y, e^{-x}(2+x+y+z))=0$

$(vii) xyp+y(2x-y)q=2xz$

उत्तर $\phi(xy-x^2, z/xy)=0$

5. समीकरण $x(y^2+z)p-y(x^2+z)q=(x^2-y^2)z$ का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिये जिसमें वक्र $x+y=0, z=1$ विद्यमान है।

6. आंशिक अवकल समीकरण $(2xy-1)p+(z-2x^2)q=2(x-yz)$ का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिये जिसमें सरल रेखा $x=1, y=0$ विद्यमान है।

इकाई -14 आंशिक अवकल समीकरण-2
(PartialDifferential Equation-2)

इकाई की रूपरेखा

14.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप

1. प्रथम कोटि के अरैखिक आशिक अवकल समीकरण को हल करने की शार्पी विधि से परिचित होंगे।
2. कुछ समीकरणों के मानक रूप, जिनका हल प्राप्त करना अपेक्षाकृत सरल होता है, को हल करने की क्रियाविधि से अवगत होंगे।

14.1 प्रस्तावना

इकाई-13 में आपने प्रमुखत: प्रथम कोटि के रैखिक आंशिक अवकल समीकरण को हल करने की विधि को समझा था। इस इकाई में वर्णित शार्पी विधि, प्रथम कोटि के अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण को हल करने की व्यापक विधि है। यद्यपि यह विधि क्रियान्वन की दृष्टि से अपेक्षाकृत जटिल प्रतीत होती है, लेकिन इसकी गणितीय महत्ता को नकारा नहीं जा सकता है। इसके उपयोग से ही कुछ समीकरणों के मानक रूपों को हल करने की सरल विधियों का प्रतिपादन किया जाता है। इस ईकाई में मानक रूपों में दिये गये समीकरणों को हल करने की क्रियाविधि को भी समझाया गया है।कतिपय समीकरण यद्यपि मूलत: मानक रूप में नहीं होते हैं, परन्तु उनको उपयुक्त प्रतिस्थापन से मानक रूपों में परिवर्तित करके हल किया जाता है। मानक रूपों को हल

करने की विधियाँ व्यापक शार्पी विधि से अपेक्षाकृत छोटी एवं सरल होती हैं। यद्यपि इकाई के आरंभ में व्यापक शार्पी विधि को समझाया गया है परन्तु व्यावहारिक दृष्टिकोण से अभ्यास प्रश्नों को हल करते समय देखें कि क्या दिया गया समीकरण मानक रूप में है अथवा क्या उसका मानक रूप में रूपान्तरण संभव है। ऐसा सभव न होने पर ही शार्पी विधि का प्रयोग श्रेयस्कर है।

14.2 प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरण को हल करने की शार्पी विधि

शार्पी विधि (Charpit's method) : यह विधि प्रथम कोटि के अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण को हल करने की व्यापक विधि है।

प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरण का व्यापक स्वरूप

$$f(x,y,z,p,q)=0 \qquad \text{.........(1)}$$

होता है, जहाँ z, स्वतंत्र चरों x,y पर आश्रित है । इस विधि में एक नये फलन $F(x,y,z,p,q)=0$ को रचना की जाती है।

अब चूंकि $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy= pdx+qdy \qquad \text{........(3)}$$

समीकरण (1) एवं (2) को हल करके ज्ञात किये गये p तथा q के मान समीकरण (3) में रखकर इसका समाकलन करने पर समीकरण (1) का पूर्ण समाकल प्राप्त होता है।

समीकरण (1) एवं (2) को x के सापेक्ष आंशिकत: अवकलित करने पर

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial p}-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad \text{......(4)}$$

तथा $$\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad \text{.......(5)}$$

समीकरण (4) एवं (5) से $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ का विलोपन करने पर,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial p}-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad \text{...............(6)}$$

पुन. (1) तथा (2) का? के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0 \qquad \text{.........(7)}$$

तथा $$\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0 \qquad \text{.........(8)}$$

समीकरण (7), (8) से $\dfrac{\partial q}{\partial y}$ का विलोपन करने पर,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial q}-\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q}+\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial y}=0 \qquad ....(9)$$

$$\because p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x} \qquad ......(10)$$

अब समीकरण (6), (9) के योग करने पर (10) को प्रयोग करते हुए

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial p}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial p}+\left(-p\frac{\partial f}{\partial p}-q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$+\left(-\frac{\partial f}{\partial p}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+\left(-\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial F}{\partial v}=0$$

समीकरण (11) प्रथम कोटि का समीकरण हैं जिसमें F आश्रित चर तथा x, y, z, p, q स्वंतत्र चर हैं। अतएव (11) के सहायक समीकरण हैं।

$$\frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dz}{-p\frac{\partial f}{\partial p}-q\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dx}{-p\frac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dF}{0}$$

.......(12)

समीकरण (12) से प्राप्त हल, समीकरण (11) को संतुष्ट करते हैं। इसलिये (12) से p या q अथवा दोनों में एक सरलतम हल की प्राप्ति की जाती है। इस हल तथा (1) की सहायता से प्राप्त p तथा q के मान समीकरण (3) में रखकर समाकलन करने से (1) का पूर्ण समाकल प्राप्त होता है।

शार्पी विधि की क्रिया विधि:

1. समीकरण के सभी पदों को एक पक्ष में लिखे तथा इसे $f(x, y, z, p, q)=0$ निरूपित करें।
2. शार्पी के सहायक समीकरण लिखें।
3. इन सहायक समीकरणों से p या q अथवा दोनों प्राप्त करें। समीकरणों में वे अनुपात चुनें जिनसे इनकी प्राप्ति सुगमता से हो। यदि केवल p (या q) प्राप्त होता है तो दिये गये समीकरण की सहायता से q (या p) प्राप्त करें।
4. p, q के उपरोक्त मान $dz=pdx+qdy$ में रखकर समाकल करने पर पूर्ण समाकल प्राप्त करें।
5. व्यापक तथा विचित्र समाकल को इकाई-13 में वर्णित सामान्य विधियों से प्राप्त करें।

टिप्पणी :

आंशिक अवकल समीकरण पूर्णत हल की हुई मानी जाती है जब इसके पूर्ण समाकल, व्यापक समाकल, विचित्र समाकल ज्ञात किये जायें।

उदाहरण-1 पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये: $q=3p^2$

हल : यहाँ $f(x, y, z, p, q)=3p^2-q=0$ ....(1)

शार्पी के सहायक समीकरण है :

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}}\frac{dz}{-p\frac{\partial f}{\partial p}-q\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}}$$

अब $\frac{\partial f}{\partial x}=0=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}$ अत: समीकरण (2) से

$$\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}\Rightarrow dp=0\Rightarrow p=a \quad \text{(नियंताक)} \qquad ....(3)$$

(1) एवं (3) से, $q=3a^2$ ....(4)

अब चूंकि $dz=pdx+qdy$ ....(5)

समीकरण (3), (4) से p,q के मान (5) में रखने पर

$$dz=adx+3a^2dy$$

समाकलन करने पर, $dz=adx+3a^2dy$

समीकरण (6) अभीष्ट पूर्ति समाकल है।

उदाहरण : 2 शार्पी विधि से समीकरण $q-(z^2+p^2x^2+2pzx)=0$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये।

हल: दिया है कि $f(x,y,z,p,q)=z^2+p^2x^2+2pzx-q=0$ ......(1)

शार्पी के सहायक समीकरण है-

$$\frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dz}{-p\frac{\partial f}{\partial x}-q\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}} \qquad ....(2)$$

या $$\frac{dp}{2p(z+px)+2p(z+px)}=\frac{dq}{2q(z+px)}=\frac{dz}{-2px(z+px)+q}$$

$$=\frac{dx}{-2x(z+px)}=\frac{dy}{0}$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{q}=\frac{dx}{x}$$

समाकलन करने पर, $\log q=-\log x+\log a\Rightarrow q=\frac{a}{x}$ ....(3)

यहाँ a स्वेच्छ नियताक है। q का यह मान दिये गये समीकरण (1) में रखने पर

$$\left(z+px\right)^2=\frac{a^2}{x}\Rightarrow p=\frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{x}}-\frac{z}{x}$$

अब p,q के उपरोक्त मान $dz=pdx+qdy$ में रखने पर

$$dz=\left(\frac{\sqrt{a}}{x\sqrt{x}}-\frac{z}{x}\right)dz+\frac{a}{x}dy$$

या $\quad xdz + zdx = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} dx + ady$

या $\quad d(xz) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} dx + ady$

समाकलन करने पर, $xz = 2\sqrt{a}\sqrt{x} + ay + b,$ ....(5)

b स्वेच्छ नियतांक हैं। समीकरण (5) अभीष्ट हल है।

उदाहरण 3 शार्पी विधि से हल कीजिये।

$(i) z^4 p^2 + z^2 q^2 - 1 = 0$ $\qquad (ii) yzp^2 = q$

$(iii) \left(p^2 + q^2\right) = \frac{qz}{y}$ $\qquad (iv) q = px + p^2$

$(v) z^2 = pqxy$

$(vi) xp - yq - xqf(z - px - qy) = 0$

$(vii) p^2 + q^2 - 2pq \tanh 2y - \text{sec}\, h^2 2y = 0$

हल : $f(x, y, z, p, q) = p^2 z^4 + z^2 q^2 - 1 = 0$ ....(1)

शार्पी के सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{-p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}} \qquad ....(2)$$

$$\frac{dx}{-2pz^4} = \frac{dy}{-2qz^2} = \frac{dz}{-2p^2z^4 - 2q^2z^2} = \frac{dp}{p(4p^2z^3 + 2zq^2)} = \frac{dq}{q(4p^2z^3 + 2zq^2)}$$

अंतिम दो अनुपातों से $\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \Rightarrow p = aq,$ ....(3)

जहाँ a समाकलन नियतांक है।

(1) एवं (3) से $p = \frac{a}{z\sqrt{1+a^2z^2}}, q = \frac{1}{z\sqrt{1+a^2z^2}}$

p, q के उपरोक्त मान में रखने पर

$$dz = \frac{a}{z\sqrt{1+a^2z^2}} dx + \frac{1}{z\sqrt{1+a^2z^2}} dy$$

या $\quad z\sqrt{1+a^2z^2}\; dz = adx + dy$

समाकलन करने पर, $\int z\sqrt{1+a^2z^2} dz = ax + y$

माना $1 + a^2z^2 = U^2$ तब $2a^2zdz = 2UdU$

अतः $\int U.\frac{U}{a^2} dU = ax + y$

या $\quad \frac{1}{3a^2} U^3 = ax + y + b$ या $\left\{\frac{z\sqrt{1+a^2z^2}}{3a^2}\right\}^3 = ax + y + b$

b समाकलन नियंताक है

सरल करने पर अभीष्ट पूर्ण समाकल है-

$$(a^2z^2+1)^3 = 9a^4(ax+y+b)^2$$

$(ii)\, f(x,y,z,p,q) = yzp^2 - q = 0$ ....(1)

शार्पी के सहायक समीकरण है

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dz}{-p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}}$$

या $$\frac{dx}{-2yzp} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{-2yzp^2+q} = \frac{dp}{p^3y} = \frac{dq}{zp^2+qyp^2}$$ ....(2)

(2) से, $\frac{dp}{yp^3} = \frac{dy}{1} \Longrightarrow \frac{dp}{p^3} = ydy$

समाकलन करने पर, $\frac{1}{p^2} = a - y^2, a$ नियंताक हैं।

या $$p = \frac{1}{\sqrt{a-y^2}}$$ ....(3)

p के इस मान को दिये गये समीकरण में रखने पर

$$q = \frac{yz}{a-y^2}$$ ....(4)

अतः $$dz = pdx + qdy = \frac{dx}{\sqrt{a-y^2}} + \frac{yz}{(a-y^2)}dy$$

या $$dx = \sqrt{a-y^2}\,dz - \frac{yz}{(a-y^2)}dy$$

या $$dx = d\left\{z\sqrt{a-y^2}\right\}$$

समाकलन पर, $x = z\sqrt{a-y^2} + b$, जहाँ b नियंताक है

या $z^2(a-y^2) = (x+b)^2$ अभीष्ट पूर्ण समाकल है।

$(iii)\, f(x,y,z,p,q) = (p^2+q^2)y - qz = 0$ ....(1)

शार्पी के सहायक समीकरण हैं:

$$\frac{dp}{-pq} = \frac{dq}{p^2} = \frac{dz}{-2yp^2+qz-2q^2y} = \frac{dx}{-2py} = \frac{dz}{-2dy+z}$$ ......(2)

प्रथम दो अनुपातों से, $pdp + qdp = 0$

या $p^2+q^2 = a^2, a^2$ समाकलन नियतांक है ....(3)

(1) एवं (3) से $q = \frac{ay}{z}$ ......(4)

(3) एवं (4) से $p = \sqrt{q-q^2} = \frac{\sqrt{a}}{z}\sqrt{z^2-ay^2}$

अब $dz = pdx + qdy = \frac{\sqrt{a}}{z}\sqrt{z^2 - ay^2}\,dx + \frac{a}{z}ydy$

या $\frac{zdz - aydy}{\sqrt{z^2 - ay^2}} = \sqrt{a}dx$

समाकलन करने पर, $\sqrt{(z^2 - ay^2)} = \sqrt{a}x + b$

या $z^2 - ay^2 = \left(\sqrt{ax} + b\right)^2$ अभीष्ट हल हैं।

$(iv)\, f(x, y, z, p, q) = q - px - p^2 = 0$ ....(1)

शार्पी के सहायक समीकरण है:

$$\frac{dp}{-p} = \frac{dq}{0} = \frac{dz}{-p(-x-2p)-q} = \frac{dx}{-(-x-2p)} = \frac{dy}{-1}$$ ....(2)

अब $\frac{dq}{0} \Rightarrow dq = 0$ या $q == a, a$ नियतांक है ....(3)

(1) एवं (3) से, $p^2 + px - a = 0$ या $p = \frac{1}{2}\left[-x \pm \sqrt{x^2 + 4a}\right]$

अत: $dz = pdx + qdy$

$$\Rightarrow dz = \frac{-x}{2}dx \pm \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2 + 4a}dx\right] + ady$$

समाकलन करने पर

$$z = \frac{-x^2}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 4a} + 2a\log\left\{x + \sqrt{x^2 + 4a}\right\}\right] + ay + b$$

अभीष्ट पूर्ण समाकल है, (b नियतांक है)

$(v)\, f(x, y, z, p, q) = z^2 - pqxy = 0$ ....(1)

शार्पी के सहायक समीकरण हैं :

$$\frac{dp}{-pqy + 2pz} = \frac{dq}{-pqx + 2qz} = \frac{dz}{-p(-qxy) - q(-pxy)} = \frac{dx}{qxy} = \frac{dy}{pxy}$$ .....(2)

या $\frac{xdp + pdx}{x(-pqy + 2pz) + pqxy} = \frac{ydq + qdy}{y(-pqx + 2qz) + pqxy}$

या $\frac{xdp + pdx}{2pxz} = \frac{ydq + qdy}{2qyz}$

या $\frac{d(xp)}{xp} = \frac{d(yp)}{qy}$

समाकलन करने पर, $\log(xp) = \log(qy) + \log a,$

$\Rightarrow xp = aqy$ ....(3)

(1)एवं (3),से $p = \sqrt{a}\frac{z}{x}, q = \frac{z}{\sqrt{a}y}$

या $$p = c\frac{z}{x}, q = \frac{z}{cy}, \text{जहाँ } \sqrt{a} = c$$

$$\therefore dz = pdx + qdy = \frac{cz}{x}dx + \frac{z}{cy}dy$$

या $$\frac{dz}{z} = \left[c\frac{dx}{x} + \frac{dy}{cy}\right]$$ समाकलन करने पर, $z = x^c y^{1/c} b$, b नियतांक है।

$(vi) F(x, y, z, p, q) = xp - yq - xq \quad f(z - px - qy) = 0$

ध्यान दीजिये कि समीकरण (1) में $f, z - px - qy$ का फलन है।

अब शार्पी के सहायक समीकरण हैं:

$$\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dp}{-p\frac{\partial F}{\partial p} - q\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dx}{-\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial F}{\partial q}}$$

या $$\frac{dp}{p - q + xqpf'} = \frac{dq}{-q + xq^2 f' - xq^2 f'} = \frac{dz}{-p(x + x^2 qf') - q(-y - xyqf')}$$

$$= \frac{dx}{-x - xqf'} = \frac{dp}{-y - xyqf'}$$ ....(2)

अत: (2) का प्रत्येक अनुपात

$$= \frac{xdp + ydp}{xp - yq - qxf} = \frac{xdp + ydq}{0} \qquad [\because xp - yq = xqf,]$$

अतः $xdp + ydq = 0$

या $xdp + ydq + dz = dz$ [ध्यान दीजिये।]

या $xdp + ydp + pdx + qdy = dz \qquad [\because dz = pdx + qdy]$

$$(xdp + pdx) + (ydp + qdy) = dz$$

या $d(xp) + d(qy) = dz$

समाकलन करने पर, $z = xp + qy + a$, a नियतांक है।

अत: $xp + qy = z - a$ ....(3)

अत: दिये गये समीकरण से, $xp - qy = xqf(a)$ ....(4)

समीकरण (3) एवं (4) से

$$q = \frac{z - a}{2y + xf(a)} \qquad p = \frac{(z - a)\{y + xf(a)\}}{2\{2y + xf(a)\}}$$

$$\therefore dz = pdx + qdy$$

$$= (z - a).\frac{\{y + xf(a)\}}{x\{2y + xf(a)\}}dx + \frac{(z - a)dy}{2y + xf(a)}$$

या $$\frac{2dz}{z-a} = \frac{2ydx + 2xf(a)dx + 2xdy}{x\{2y + xf(a)\}}$$

$$= \frac{2d(xy) + 2xf(a)dx}{2xy + x^2 f(a)}$$

समाकलन करने पर,

$$2\log(z-a) = \log\left\{2xy + x^2 f(a)\right\} + \log b$$

$$(z-a)^2 = b\left\{2xy + x^2 f(a)\right\}$$

जहाँ b नियतांक है।

(vii) माना $f(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2 - 2pq\tanh 2y - \sec h^2 2y = 0$

तब शार्पी के सहायक समीकरण से

$$\frac{dp}{0} = \frac{dq}{-4pq\sec h^2 2y + 4\sec h^2 2y\tanh 2y} \text{ ....इत्यादि} =$$

$\Rightarrow dp = o$ या $p = a,$ a नियतांक है ....(2)

(1),(2) से $q^2 - 2aq\tanh 2y - \sec h^2 2y + a^2 = 0$

या $$q = \frac{2a\tanh 2y \pm \sqrt{4a^2\tanh^2 2y - 4a^2}}{2}$$

$$q - a\tanh 2y \pm \sqrt{1-a^2}\sec h^2 2y \qquad \text{........(3)}$$

अतः $dz = pdx + qdy$

$$= adx + \left\{a\tanh 2y \pm \sqrt{1-a^2}\sec h 2y\right\}dy$$

समाकलन करने पर, ...(4)

$$z = ax + \frac{a}{2}\log\sec h 2y \pm \sqrt{1-a^2}\int \sec h 2y dy$$

अब $$\int \sec h 2y = \int \frac{1}{\cosh 2y}dy = \int \frac{dy}{(e^{2y} + e^{-2y})/2}$$

$$= \int \frac{2e^{2y}dy}{1 + \left(e^{2y}\right)^2}$$

माना $e^{2y} = U \Rightarrow 2e^{2y}dy = dU$

अतः $$\int \sec h 2y dy = \int \frac{dU}{1+U^2} = \tan^{-1} U = \tan^{-1}(e^{2y})$$

फलतः $$z = ax + \frac{a}{2}\log\sec h 2y \pm \sqrt{1-a^2}\tan^{-1}(e^{2y})$$

उदाहरण -4 शार्पी विधि से समीकरण $2(y+qz)=q(xp+yq)$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये।

हल : दिये गये समीकरण के सहायक समीकरण हैं

$$\frac{dp}{-qp+p(2q)}=\frac{dq}{2-q^2+2q^2}=\frac{dx}{qx}=\frac{dy}{-2z+xp+2yq} \quad ....(1)$$

समीकरण (1) के प्रथम एवं तृतीय अनुपातों से, $\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$

समाकलन पर, $\log p=\log x+\log a$ जहाँ $\log a$ नियतांक है

$\Rightarrow p=ax$ ....(2)

p का उपरोक्त मान दिये गये समीकरण में रखने पर

$$q^2y+(ax^2-2z)q-2y=0 \quad ....(3)$$

समीकरण (3) द्विघाती है अतः

$$q=\frac{\left(2z-ax^2\right)+\sqrt{\left(ax^2-2z\right)^2+8y^2}}{2y} \quad ....(4)$$

p,q के उपरोक्त मान खंड $dz=pdx+qdy$ में रखने पर

या $$dz=axdx+\frac{\left(2z-ax^2\right)+\sqrt{\left(2z-ax^2\right)^2+8y^2}}{2y}dy \quad ....(5)$$

या $$2ydz-2axydy-\left(2z-ax^2\right)dy=\sqrt{\left(2z-ax^2\right)^2+8y^2}dy$$

अब $$2ydz-2axydx=yd\left(2z-ax^2\right)$$

अतः समीकरण (5) बनता है:

$$yd\left(2z-ax^2\right)-\left(2z-ax^2\right)dy=\sqrt{\left(2z-ax^2\right)^2+8y^2}dy \quad ....(6)$$

अब उपरोक्त समीकरण (6) का वाम पक्ष $=y^2d\left(\frac{2z-ax^2}{y}\right)$

अतएव $y^2d\left(\frac{2z-ax^2}{y}\right)=\sqrt{\left(2z-ax^2\right)+8y^2dy}$ ....(7)

माना $U=\frac{2z-ax^2}{y}$ तब समीकरण (6) बनता है:

$$\frac{dU}{\sqrt{U^2+8}}=\frac{dy}{y}$$

समाकलन करने पर, $\log\left[U+\sqrt{U^2+8}\right]=\log y+\log b,\ \ \log b$ नियतांक है।

अतएव $U=\sqrt{U^2+8}=by\Rightarrow U^2+8=\left(by-U\right)^2$

या $U^2+8=b^2y^2+U^2-2byU$

1. फलत : $Uy = \frac{by^2}{2} - \frac{4}{b}$

अत: $$\left(\frac{2z - ax^2}{y}\right) y = \frac{by^2}{2} - \frac{4}{b}$$

या $$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{b}{4} y^2 - \frac{2}{b}$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-1

1. निम्नलिखित में सही कथन है-

(i) शार्पी विधि से पूर्ण समाकल प्राप्त होता है।

(ii) शार्पी विधि से रैखिक एथ अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण का व्यापक हल संभव हैं।

(iii) शार्पी विधि में तथा के मान सम्बंध में प्रयुक्त किये जाते हैं।

(iv) उपरोक्त सभी

2. शार्पी विधि से पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये:

$(i)\, px + qy = pq$ $(ii)\left(p+q\right)\left(px+qy\right)=1$

$(iii) 2x\left(z^2q^2+1\right) = pz$ $\left(p^2+q^2\right)x = pz$

$(v)\, px + qy = z\sqrt{1 = pq}$

14.3 प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरणों के मानक रूप एवं उनका हल

मानक रूपों में समीकरणों के हल: आपने पूर्व अनुच्छेद में व्यापक हल विधि "शार्पी विधि" का अध्ययन किया है। इस विधि में अन्तर्निहित जटिलता को आपने अनुभव किया होगा। अब हम कुछ लघु विधियों को समझेंगे जिनकी सहायता से मानक रूपों में दिये गये समीकरण के हल की प्राप्ति सरल होती है। ऐसे समीकरणों के चार मानक रूप हैं। बहुधा समीकरण मानक रूप में नहीं होते है परन्तु उचित रूप के प्रतिस्थापन से उनका मानक रूप में रूपान्तरण संभव होता है।

14.3.1 मानक रूप $I : f(p,q) = 0$ समीकरण जिनमें केवल p तथा q है:

इस स्थिति में आशिक अवकल समीकरण है : $f(p,q) = 0$ ......(1)

(1) के शार्पी सहायक समीकरण होंगे-

$$\frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = \text{इत्यादि}$$

$\Rightarrow dp = 0, dq = 0$ या $p = a, q = b$ ......(2)

जहाँ a, b नियतांक है इस प्रकार कि $f(a,b) = 0$ ....(3)

$$\therefore dz = pdx + qdy = adx + bdy$$

समाकलन करने पर, $z = ax + by + c$ ......(4)

जहाँ c स्वेच्छ नियतांक है।

समीकरण (3) को हल करने पर, $b = F(a)$ संबध प्राप्त होता है।

अत: $z = ax + yF(a) + c$ ....(5)

समीकरण (5) में दो स्वेच्छ नियतांक a तथा c तथा दो स्वतंत्र चर x, y हैं फलत. (5) समीकरण (1) का पूर्ण समाकल है।

व्यापक समाकल (General solution) दिये गये समीकरण का व्यापक हल ज्ञात करने के लिये हम (5) में $c = \psi(a)$ लिखते है

अतएव $z = ax + yF(a) + \psi(a)$ ....(6)

अब a के सापेक्ष (6) का आंशिक अवकलन करने पर

$$0 = x + yF'(a) + \psi'(a) \quad ....(7)$$

समीकरण (6) एवं (7) से a का विलोपन करने पर प्राप्त सम्बंध व्यापक हल को निरूपित करता है।

विचित्र समाकल (Singular integral): समीकरण (5) का a तथा c के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$0 = x + yF'(a) \quad ....(8)$$

$$0 = 1 \quad ....(9)$$

विचित्र हल की प्राप्ति पूर्ण समाकल (5) एवं (5) का a तथा c के सापेक्ष आशिक अवकलन करने से प्राप्त समीकरणों में a तथा c के विलोपन से होती है। चूंकि यहीं समीकरण (9) निरर्थक है अत: $f(p,q) = 0$ रूप के समीकरण का विचित्र हल नहीं होता है।

$f(p,q) = 0$ **को हल करने की क्रिया विधि-**

1. $z = ax + by + c$ पूर्ण समाकल है, जहाँ नियतांक a तथा b, सम्बंध $f(p,q) = 0$ से व्यक्त होते हैं।
2. सामान्य समाकल ऊपर वर्णित विधि से प्राप्त करें।

उदाहरण -1 समीकरण $(qy - px)(y - x) = (p - q^2)$ का पूर्ण हल ज्ञात कीजिये।

हल. माना $x + y = U$, $xy = v$

तब $p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial U}+y\frac{\partial z}{\partial V}$ ....(1)

$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial U}+x\frac{\partial z}{\partial V}$ ....(2)

p और q के उपरोक्त मान दिये गये समीकरण में रखने पर

$$\frac{\partial Z}{\partial U}=\left(\frac{\partial z}{\partial V}\right)^2 \qquad ....(3)$$

माना $\frac{\partial z}{\partial U}=P,\frac{\partial z}{\partial V}=Q$ जहाँ U,V स्वतंत्र चर है

समीकरण (3) $F(P,Q)=0$ का है अत: इसका पूर्ण हल :

$$z=aU+\sqrt{aV}+c$$

या $z=a(x+y)+\sqrt{a}(xy)+c$

उदाहरण -2 निम्न समीकरण का पूर्ण समाकलन ज्ञात कीजिये।

$$\left(1-x^2\right)p^2y+x^2q=0$$

हल : दिये गये समीकरण को लिखा जा सकता है

$$\left(\frac{q}{y}\right)+\left\{\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}p\right\}^2=0$$

माना $U=\sqrt{1-x^2},V=\frac{y^2}{2}$

तब $p=\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\partial z}{\partial U}$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}=y\frac{\partial z}{\partial V}$$

p,q के उपरोक्त मान (1) में रखने पर

$$\left(\frac{\partial z}{\partial U}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial V}\right)=0 \qquad ....(2)$$

अब $P=\frac{\partial z}{\partial U},Q=\frac{\partial z}{\partial V}$ अत: समीकरण (2) $F(P,Q)=0$ रूप का है अतः (2) का

हल :

$$z=aU+bV+c, \text{ जहाँ } b=-a^2$$

या $z=a\sqrt{1-x^2}-\frac{a^2}{2}y+c$

उदाहरण -3 समीकरण $(p^2+q^2)(x^2+y^2)=1$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये।

हल: माना $x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta \Rightarrow r^2=x^2+y^2$

$$\theta=\tan^{-1}y/x$$

अब $$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$=\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$p=\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) \qquad ......(1)$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$=\frac{y\partial z}{r\partial r}+\frac{\partial z}{\partial \theta}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$=\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

p,q के ये मान दिये गये समीकरण में रखने पर

$$r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \qquad ......(3)$$

माना $R=\log r$ तब $\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial R}$

अतः $r\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial R}$

अतः समीकरण (3) से $\left(\frac{\partial z}{\partial R}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=1 \qquad ....(4)$

अब $P=\frac{\partial z}{\partial R}, Q=\frac{\partial z}{\partial \theta}$

अत: समीकरण (4) $F(P,Q)=0$ रूप का है जिसका हल $z=aR+b\theta+c$ जहाँ $b=\sqrt{1-a^2}$

$$=\frac{a}{2}\log(x^2+y^2)+\sqrt{1-a^2}\tan^{-1}\frac{y}{x}+c$$

उदाहरण-4 $x^2p^2+y^2q^2=z$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये।

हल : दिया है $x^2p^2+y^2q^2=z$

या

$$\left\{\frac{x}{\sqrt{z}}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}^2+\left\{\frac{y}{\sqrt{z}}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\}^2=1 \qquad ....(1)$$

माना $U=\log x,\ V=\log y$ एवं $2\sqrt{z}=\overline{Z}$

फलतः $dU=\frac{dx}{x},\ dV=\frac{dy}{y}\ \ d\overline{Z}=\frac{dz}{\sqrt{z}}$

फलत: समीकरण (1) का रूपान्तरण होगा

$$\left(\frac{\partial \overline{Z}}{\partial U}\right)^2+\left(\frac{\partial \overline{Z}}{\partial V}\right)^2=1 \qquad ....(2)$$

समीकरण (2) $F(P,Q)=0$ रूप का है जहाँ U,V स्वतंत्र चर तथा $P=\frac{\partial \overline{Z}}{\partial U}$, $Q=\frac{\partial \overline{Z}}{\partial V}$ इसका पूर्ण समाकल है $\overline{Z}=aU+bV+c$, जहाँ $b=\sqrt{1-a^2}$

या $\quad 2\sqrt{z}=a\log x+\sqrt{1-a^2}\log y+c$

या $\quad x^a y^{\sqrt{1-a^2}}=c'e^{2\sqrt{z}}$ जहाँ $c=-\log c'$

उदाहरण -5 हल कीजिये

$$x^2p2+y^2q^2=z^2$$

हल. दिया गया समीकरण

$$\left(\frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1 \qquad ....(1)$$

माना $\quad \frac{dx}{x}=dU,\frac{dy}{y}=dV,\frac{dz}{z}=d\overline{Z}$

फलत: $\quad \log x=U \quad \log y=V \quad \log z=\overline{Z}$

अत: समीकरण (1) का रूपान्तरण है-

$$\left(\frac{d\overline{Z}}{dU}\right)^2+\left(\frac{d\overline{Z}}{dU}\right)^2=1$$

समीकरण (2) $F(P,Q)=0$ का है अत: इसका पूर्ण समाकल

$$\overline{Z}=aU+bV+c,\ \text{जहाँ}\ b=\sqrt{1-a^2}$$

या $\quad \log z=a\log x+b\log y+\log c',.c=\log c'$

$$\Rightarrow z=x^a y^b c=c'x^a y^{\sqrt{1-a^2}}$$

उदाहरण-6 निम्न समीकरण का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये।

$$z^2p^2y+6zpxy+2zx^2q+4x^2y=0$$

हल : दिये गये समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\left(\frac{z\partial z}{x\partial x}\right)^2+6\left(\frac{z\partial z}{x\partial x}\right)+2\left(\frac{z\partial z}{y\partial y}\right)+4=0 \qquad ....(1)$$

माना $\quad x\partial x=\partial X \quad y\partial y=\partial Y\ , \quad z\partial z=\partial Z \qquad ....(2)$

फलत: $\quad \frac{x^2}{2}=X \quad \frac{y^2}{2}=Y \quad \frac{z^2}{2}=Z$

(2) को (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2+6\frac{\partial Z}{\partial X}+2\frac{\partial Z}{\partial Y}+4=0 \qquad ......(3)$$

समीकरण (3) $F(P,Q)=0$ रूप का है जहाँ

$P=\frac{\partial Z}{\partial X},\quad Q=\frac{\partial Z}{\partial Y}$ हैं। समीकरण (7) का पूर्ण समाकल है-

$$z=aX+bY+c,\text{ जहाँ } a^2+6a+2b+4=0$$

या $$z=a\frac{x^2}{2}+b\frac{y^2}{2}+c,\text{ जहाँ } a^2+6a+2b+4=0$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-2

1. हल कीजिये

$(i)\, p^2-q^2=4$

$(ii)(x+y)(p+q)^2+(x-y)(p-q)^2=1$

(संकेत $x+y=U^2, x-y=V^2$)

$(iii)\, p^2+q^2=npq$

$(iv) 3p^2-2q^2=4pq$

$(v)\, pq=k$

2. हल कीजिये

$(i)\, pq=x^m y^n z^l$

$(ii)\, p^2+q^2=z$

$(iii)\, p=2q^2+1$

$(iv)\, yp+x^2q^2=2x^2y$

14.3.2 मानक रूप II

$f(z,p,q)=0$ रूप के समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर x तथा y विद्‌यमान नहीं है।

समीकरण $f(z,p,q)=0$ ....(1)

के शार्पी सहायक समीकरण हैं-

$$\frac{dp}{p\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dq}{q\frac{\partial f}{\partial z}}\text{ या }\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}$$

समाकलन पर, $p=aq$ (a नियतांक है) ......(2)

$p=aq$ (1) में रखने पर

$$f(z,aq,q)=0$$

अब $dz=pdx+qdy=aqdx+qdy=q(adx+dy)$

माना $U=y+ax$ तब $dU=dy+adx$

अतः $dz=q(adx+dy)=qdU$ या $\frac{dz}{dU}=q$ ....(3)

$\because p=aq$ फलतः $p=a\frac{dz}{dU}$ ......(4)

अतः (1) (3), (4) से, $f\left(z, a\dfrac{dz}{dU}, \dfrac{dz}{dU}\right)=0$ ....(5)

समीकरण (5), z में प्रथम कोटि का अवकल समीकरण है जिसके हल में z तथा U में सम्बध प्राप्त होता है। U को $ax+y$ से प्रतिस्थापित करने पर $f\left(z,p,q\right)=0$ का पूर्ण समाकल प्राप्त होता है।

$f\left(z,p,q\right)=0$ रूप के समीकरण को हल करने की क्रिया विधि:

1. p तथा q को क्रमशः $a\dfrac{dz}{dU}, \dfrac{dz}{dU}$ से प्रतिस्थापित कीजिये।
2. प्राप्त समीकरण के समाकलन से z को U के फलन के रूप में प्राप्त कीजिये।
3. U के स्थान पर $y+ax$ रखिये।

प्राप्त सम्बंध, पूर्ण समाकल का निरूपण है।

टिप्पणीः उपरोक्त समीकरण $p=\dfrac{dz}{dU}, q=a\dfrac{dz}{dU}$ प्रतिस्थापन से भी होती है परन्तु इस स्थिति में $U=x+ay$ होगा।

उदाहरण-1 निम्नलिखित का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये।

$(i) z=pq \ (ii)(p^2z+q^2)=4/9$

$(iii) z^2(p^2+q^2+1)=\alpha$

हलः $(i) z=pq$

समीकरण (1) $f(z,p,q)=0$ रूप का है जिसमें x तथा y अनुपस्थित हैं।

$$p=\frac{dz}{dU}, q=a\frac{dz}{dU} \text{ जहाँ } U=x+ay \text{ है।}$$

अतः समीकरण (1) का नया रूप होगाः $z=a\left(\dfrac{dz}{dU}\right)^2$

$$\Rightarrow \int a\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int dU$$

या $\Rightarrow 2a\sqrt{z}=U+c$

या $4a^2z=\left(x+ay+c\right)^2$

(ii) दिया हैः $p^2z+q^2=4/9$ ....(1)

समीकरण (1) $f\left(z,p,q\right)=0$ रूप का है।

माना $p=\dfrac{dz}{dU}, q=a\dfrac{dz}{dU}$ जहाँ $U=x+ay$ है।

फलतः दिया गया समीकरणः $\left(\dfrac{dz}{dU}\right)^2 z+a^2\left(\dfrac{dz}{dU}\right)^2=4/9$

या $\left(\frac{dz}{dU}\right)^2\left(a^2+z\right)=4/9$

$\Rightarrow \int\sqrt{a^2+zdz}=\frac{2}{3}\int dU$

$\Rightarrow \frac{2}{3}\left(a^2+z\right)^{3/2}=\frac{2}{3}U+c$

$\Rightarrow \left(a^2+z\right)^{3/2}=U+\alpha$ जहाँ $\alpha=\frac{3}{2}c$

$\Rightarrow \left(a^2+z\right)^3=(x+ay+\alpha)^2 \quad \because U=x+ay$

$(iii)\left(z^2\right)\left(p^2+q^2+1\right)=\alpha$

माना $p=\frac{dz}{dU},q=\frac{dz}{dU}$ जहाँ $U=x+ay$ है।

अतः दिया गया समीकरण है:

$$z^2\left[\left(\frac{dz}{dU}\right)^2+a^2\left(\frac{dz}{dU}\right)^2+1\right]=\alpha$$

$$\Rightarrow z^2\left(1+a^2\right)\left(\frac{dz}{dU}\right)^2=\alpha-z^2$$

$$\int\frac{z}{\sqrt{\alpha-z^2}}dz=\int\frac{dU}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\left(\alpha-z^2\right)^{1/2}=\frac{U}{\sqrt{1+a^2}}+c$$

$$\Rightarrow\left(1+a^2\right)\left(\alpha-z^2\right)=\left(x+ay+\beta\right)^2$$

जहाँ $\beta=c\sqrt{1+a^2}$

उदाहरण -2 आंशिक अवकल समीकरण $p^2+\left(pq-1\right)z^2=0$ का पूर्ण हल ज्ञात कीजिये।

हल: दिया गया समीकरण $f\left(z,p,q\right)$ का है जिसमें x तथा y नहीं है।

माना $p=\frac{dz}{dU},q=a\frac{dz}{dU}$ जहाँ $U=x+ay$ है, तब दिये गये समीकरण का समानयित रूप होगा।

$\left(\frac{dz}{dU}\right)^2+z^2\left(a\frac{dz}{dU}\frac{dz}{dU}-1\right)=0$

$\Rightarrow\left(\frac{dz}{dU}\right)^2\left[1+z^2a\right]=z^2$

या $dU = \frac{\sqrt{1+az^2}}{z} dz$

या $\int dU = \int \frac{1+az^2}{z\sqrt{1+az^2}} dz = \int \frac{dz}{z\sqrt{1+az^2}} + \int \frac{azdz}{\sqrt{1+az^2}}$

या $U + c = -\sinh^{-1}\left(\frac{1}{z\sqrt{a}}\right) + \sqrt{1+az^2}$

या $x + ay + c = \sqrt{1+az^2} - \sinh^{-1}\left(\frac{1}{z\sqrt{a}}\right)$

उदाहरण-3 हल कीजिये $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3 = 27z$

हल : दिया गया समीकरण $f(p,q,z) = 0$ रूप का है जिसमें x तथा y विद्यमान नहीं हैं तथा

$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$

माना $U = x + ay$ तब $p = \frac{dz}{dU}, q = a\frac{dz}{dU}$ उपरोक्त प्रतिस्थापन से दिया गया समीकरण बनता है:

$$\left(\frac{dz}{dU}\right)^3 + a^3\left(\frac{dz}{dU}\right)^3 = 27z \qquad \text{.........(1)}$$

या $\frac{dz}{dU} = \frac{3z^{1/3}}{\left(1+a^3\right)^{1/3}}$ या $\int z^{-1/3} dz = \frac{3}{\left(1+a^3\right)^{1/3}} \int dU$

या $\frac{3}{2} z^{2/3} + c = \frac{3U}{\left(1+a^3\right)^{1/3}}$

या $z^{2/3}(1+a^3)^{1/3} = 2U - \frac{2}{3}c$

या $\left(1+a^3\right) z^2 = 8(x + ay + c')^3$, जहाँ $c' = -\frac{c}{3}$

यह समीकरण (1) का अभीष्ट पूर्ण हल है।

व्यापक हल: माना $c' = \psi(a)$ अतएव

$\left(1+a^3\right) z^2 = 8\left(x + ay + \psi(a)\right)^3$ जहाँ ψ स्वेच्छ फलन है। ....(2)

समीकरण (2) का a के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर प्राप्त समीकरण एवं समीकरण (2) से a का विलोपन करने पद प्राप्त सबंध व्यापक हल होता है।

विचित्र हल: समीकरण (1) का a तथा c' के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$3a^2z^2 = 24(x+ay+c')^2\, y \qquad ....(3)$$

या $0 = 24(x+ay+c')^2$ ....(4)

(1) (3) (4) से a तथा c' का विलोपन करने पर, $z=0$ यदि $z=0$ तब $p=\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ q=\frac{\partial z}{\partial y}=0$

फलत: दिया गया समीकरण $z=0$ से सतुंष्ट होता है अत: $z=0$ अभीष्ट विचित्र हल है।

उदाहरण-4 समीकरण $xp=\sqrt{z(z-qy)}$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये।

हल: दिया गया समीकरण $f(z,p,q)=0$ में समानयित किया जा सकता है।

माना $U=\log x,\ \ V=\log y$

$$\therefore p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial U}\frac{1}{x}\Rightarrow xp=\frac{\partial z}{\partial U}$$

$$\therefore q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial V}\frac{1}{y}\Rightarrow yp=\frac{\partial z}{\partial V}$$

p,q के इन रूपों को दिये गये समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर समीकरण (1) बनता है:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial U}\right)=\sqrt{z\left(z-\frac{\partial z}{\partial V}\right)} \qquad ....(2)$$

समीकरण (2) $f(z,P,Q)=0$ रूप का है जहाँ $P=\frac{\partial z}{\partial U},Q=\frac{\partial z}{\partial V}$

अतएव (2) को हल करने हेतु $\frac{\partial z}{\partial U}$ एवं $\frac{\partial z}{\partial V}$ के स्थान पर क्रमश: $\frac{dZ}{dX}$, $a\frac{dZ}{dY}$ प्रतिस्थपित करते हैं।

फलत: $\frac{dz}{dX}=\sqrt{z\left(z-a\frac{dz}{dX}\right)}$ जहाँ $X=U+aV$

या $\left(\frac{dz}{dX}\right)^2+az\frac{dz}{dX}-z^2=0$ ....(3)

$$\Rightarrow \frac{dz}{dX}=\frac{-az\pm\sqrt{a^2z^2+4z^2}}{2}$$

या $\int\frac{dz}{z}=\int\frac{1}{2}\left\{-a\pm\sqrt{a^2+4}\right\}dX$

या $\log zc = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}(U+aV)$

$\Rightarrow \log zc = \dfrac{\left(-a+\sqrt{a^2+4}\right)}{2}[\log x + a\log y]$

$\Rightarrow \log zc = \dfrac{\left(-a+\sqrt{a^2+4}\right)}{2}\log\left(xy^a\right)$

$\Rightarrow zc = \left\{\left(xy^a\right)\right\}^a$

जहाँ $\alpha = \left\{-a+\sqrt{a^2+4}\right\}\Big/2$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-3

1. पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये

$(i)\, pz = 1+q^2$

$(ii)\, p^2 = qz$

$(iii)\, p\left(1+q^2\right) = q\left(z-\alpha\right)$

$(iv)\, p\left(1+q\right) = qz$

2. निम्नलिखित समीकरण के पूर्ण समाकल तथा विचित्र समाकल ज्ञात कीजिये।

$(i) z^2\left(p^2+q^2+1\right) = 1$

$(ii)\, p^2 z^2\left(1-p^2\right) = q^2$

14.3.3 मानक रूप $(III)\, z = px+qy+f(p,q)=0$ रूप के समीकरण :

दिये गये समीकरण $z-px-qy-f(p,q)=0$ के लिये शार्पी सहायक समीकरण हैं:

$$\frac{dp}{-p+p} = \frac{dq}{-q+q} \text{ या } \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}$$

$\therefore dp = 0 = dq,$ समाकलन पर, $p=a, q=b$ ......(1)

यहाँ a तथा b नियतांक है।

अत: $p=a, q=b$ दिये गये समीकरण में रखने पर

$z = ax+by+f(a,b)$ ......(2)

पुन: $\because dz = pdx + qdy \quad \therefore dz = adx + bdy$

समाकलन पर, $z = ax + by + c$ ....(3)

समीकरण (2) एवं (3) की तुलना से

$z = ax + by + f(a,b)$ दिये गये समीकरण का पूर्ण समाकल है।

व्यापक समाकल : व्यापक समाकल प्राप्त करने के लिये $b = \psi(a)$ लिखते हैं।

अत: $z = ax + y\psi(a) + f(a, \psi(a))$ .....(4)

अब व्यापक समाकल, समीकरण (3) एवं (3) के a के सापेक्ष आंशिक अवकलज से प्राप्त समीकरण अर्थात्

$0 = x + y\psi'(a) + f'$ ....(5)

में a का विलोपन से मिलता है।

विचित्र समाकल: विचित्र समाकल समीकरण (2) एवं समीकरणों

$$0 = x + \frac{\partial f}{\partial a} \quad \text{........(6)}$$

$$0 = y + \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{........(7)}$$

में a तथा b के विलोपन से प्राप्त होता है।

उदाहरण-1 आंशिक अवकल समीकरण $z = xp + qy + \alpha\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ को हल कीजिये जहाँ α अचर है।

हल : समीकरण $z = xp + qy + \alpha\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ ....(1)

$z = xp + qy + f(p,q)$ रूप का है इसलिये इस का पूर्ण समाकल

$z = ax + by + \alpha\sqrt{1 + a^2 + b^2}$ होगा ....(2)

व्यापक हल: समीकरण (2) का व्यापक हल ज्ञात करने के लिये हम (2) में $b = \psi(a)$ प्रतिस्थापित करते हैं। अतएव

$$z = ax + y\psi(a) + \alpha\sqrt{1 + a^2 + \{\psi(a)\}^2} \quad \text{.....(3)}$$

यहाँ ψ स्वेच्छ फलन है।

अब समीकरण (3) का a के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$0 = x + y\psi'(a) + \frac{\alpha(2a + 2\psi(a)\psi'(a))}{2\sqrt{1 + a^2 + \{\psi(a)\}^2}} \quad \text{.......(4)}$$

(3) एवं (4) से a का विलोपन करने पर दिये गये समीकरण का व्यापक हल प्राप्त होता है।

विचित्र हल: समीकरण (1) का विचित्र हल ज्ञात करने हेतु समीकरण (1) को a तथा b के सापेक्ष आंशिक अवकलित करने पर

$$x+\frac{\alpha a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=0 \qquad \text{.........(5)}$$

$$y+\frac{\alpha b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=0 \qquad \text{.........(6)}$$

(5) एवं (6) से हम पाते हैं कि

$$x^2+y^2=\frac{\alpha^2\left(a^2+b^2\right)}{1+a^2+b^2}$$

फलत: $\alpha^2-\left(x^2+y^2\right)=\alpha^2-\frac{\alpha^2\left(a^2+b^2\right)}{1+a^2+b^2}=\frac{\alpha^2}{1+a^2+b^2}$ (ध्यान दीजिये)

या $$\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{\alpha^2\left(x^2+y^2\right)}}{\alpha} \qquad \text{........(7)}$$

(7) को (5) एवं (6) में प्रयुक्त करने पर

$$x=\frac{\alpha a}{1+a^2+b^2}=\frac{-\alpha a\sqrt{\alpha^2-\left(x^2+y^2\right)}}{\alpha}$$

फलत: $$a=-\frac{x}{\alpha^2-\left(x^2+y^2\right)} \qquad \text{.......(8)}$$

$$b=-\frac{y}{\alpha^2-\left(x^2+y^2\right)} \qquad \text{........(9)}$$

a,b के उपरोक्त मानों को समीकरण (2) में रखने पर

$$z=\sqrt{\alpha^2-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=\alpha^2 \qquad \text{.......(10)}$$

समीकरण (10) अभीष्ट विचित्र हल है।

उदाहरण-2 हल कीजिये $z=px+qy-2\sqrt{pq}$

हल : -दिया गया समीकरण $z=px+qy+f\left(p,q\right)$ रूप का है अत: इसका पूर्ण हल होगा:

$$z=ax+by-2\sqrt{ab} \qquad \text{.........(1)}$$

व्यापक हल: समीकरण (1) का व्यापक हल प्राप्त करने हेतु $b=\psi\left(a\right)$ प्रतिस्थापित करते हैं अतएव

$$z=ax+y\psi\left(a\right)-2\sqrt{a\psi\left(a\right)} \qquad \text{.......(2)}$$

समीकरण (2) का a के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$0=x+y\psi'\left(a\right)-\frac{1}{\sqrt{y\psi\left(a\right)}}\left\{a\psi'\left(a\right)+\psi\left(a\right)\right\} \qquad \text{.........(3)}$$

समीकरण (2),(3) से a का विलोपन करने पर वांछित व्यापक हल प्राप्त होता है।

विचित्र हल : समीकरण (1) को a तथा b के सापेक्ष आंशिक अवकलित करने पर

$$0 = x - \frac{b}{\sqrt{ab}}$$

या $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ ....(4)

$$0 = y - \frac{a}{\sqrt{ab}} \quad \text{या} \quad y = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad ....(5)$$

(4) एवं (5) से $xy = 1$ ....(6)

समीकरण (6) अभीष्ट विचित्र हल हैं।

उदाहरण -3 समीकरण $z = px + qy + p^2 + q^2 + pq$ के पूर्ण एवं विचित्र समाकल ज्ञात कीजिये।

हल : पूर्ण समाकल : चूँकि दिया गया समीकरण $z = xp + yq + f(p, q) = 0$ रूप का है अत: इसका पूर्ण समाकल

$z = ax + by + a^2 + ab + b^2$ होगा ....(1)

विचित्र समाकल : (1) को a तथा b के सापेक्ष आंशिक अवकलित करने पर

$$0 = x + 2a + b \qquad ....(2)$$

$$0 = y + a + 2b \qquad ....(3)$$

(2), (3) को हल करने पर

$$a = \frac{y - 2x}{3}, b = \frac{x - 2y}{3},$$

a तथा b के मान (1) में रखने पर,

$$z = x\left(\frac{y-2x}{3}\right) + y\left(\frac{x-2y}{3}\right) + \left(\frac{y-2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-2x}{3}\right)\left(\frac{x-2y}{3}\right) + \left(\frac{x-2y}{3}\right)^2$$

$$9z = 3xy - 6x^2 + 3xy - 6y^2 + y^2 + 4x^2 - 4xy + xy$$

$$-2x^2 - 2y^2 + 4xy + x^2 + 4y^2 - 4xy$$

$$\Rightarrow 9z = 3xy - 3x^2 - 3y^2$$

या $3z = xy - x^2 - y^2$

समीकरण (4) अभीष्ट विचित्र समाकल है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न-4

1. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को पूर्णत: हल कीजिये।

$(i) z = px + qy + \log(pq)$

$(ii) z = px + qy + \frac{p}{q}$

$(iii) 4xyz = pq + 2px^2y + 2qxy^2$ (संकेत $x^2 = U, y^2V$)

$(iv)\, z = px + qy + \sqrt{\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma}$

14.3.4 मानक रूप $(IV): f_1(x, p) = f_2(y, q)$ रूप के समीकरण

समीकरण $f_1(x, p) = f_2(y, q) \ldots$ (1) के लिये शार्पी के सहायक समीकरण होंगे

$$\frac{dp}{-\frac{\partial f_1}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial f_2}{\partial q}} = \frac{dp}{\frac{\partial f_1}{\partial x}} = \frac{dq}{-\frac{\partial f_2}{\partial y}}$$

$\therefore \frac{\partial f_1}{\partial p}dp + \frac{\partial f_1}{\partial x}dx = 0$ या $df_1 = 0 \Rightarrow f_1 = a,$ (नियतांक)

अत: समीकरण (1) से $f_2(y, q) = f_1(x, p) = a$ ....(2)

(2) को हल करने पर पायेगे कि

$p = F_1(x, a)$; $q = F_2(y, a)$

फलत: $dz = pdx + qdy$

या $z = \int F_1(x, a)dx + \int F_2(y, a)dy + b$ ....(4)

b नियतांक है।

समीकरण (3), (1) का पूर्ण समाकल है। व्यापक तथा विचित्र समाकल की गणना सामान्य विधि से ही की जायेगी।

टिप्पणी: यदि दिया गया समीकरण $x - q = \psi(y - p)$ अथवा $y - p = \phi(x - q)$ रूप का हो तो ऐसे समीकरणों को $x - q = a$, $y - p = b$ प्रतिस्थापन से उपरोक्त विधि से हल कर सकते हैं।

$\because x - q = a, y - p = b$ अतः $p = y - b, q = x - a$

अब $dz = pdx + qdy = (y - b)dx + (x - a)dy$

या $dz = (ydx + xdy) - bdx - ady = d(xy) - bdx - ady$

समाकलन पर $z = xy - bx - ay + c$

$\because y - p = \phi(x - q)$

$\therefore b = \phi(a)$

अतएव $z = xy - x\phi(a) - ay + c$

उपरोक्त समीकरण में दो स्वतंत्र चर x, y तथा दो ही स्वेच्छ नियतांक a एवं b हैं। अत: यह समीकरण पूर्ण समाकल को निर्दिष्ट करता है।

उदाहरण-1 निम्नलिखित समीकरणों का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये।

$(i)\, py = 2xy + \log q \quad (ii)\, py + qx + pq = 0$

$(iii)\, z(xp - yq) = y^2 - x^2 \quad (iv)\, zpy^2 = x(y^2 + q^2z^2)$

$(v)\, x - q = (y - p)^{1/3} \quad (vi)\, z^2(p^2 + q^2) = x^2 + y^2$

हल : (i) दिया गया समीकरण है: $py = 2xy + \log q$

या $p - 2x = \frac{1}{y}\log q$ ....(1)

माना $p - 2x = a = \frac{1}{y}\log q$ जहाँ a नियतांक है।

तब $p = a + 2x,\ q = e^{ay}$ ....(2)

अब $dz = pdx + qdy = (a+2x)dx + e^{ay}dy$

समाकलन करने पर, $z = ax + x^2 + \frac{e^{ay}}{a} + b$ ....(3)

जहाँ b नियतांक है। समीकरण (3) अभीष्ट पूर्ण समाकल है।

(ii) दिया है: $py + qx + pq = 0$

या $\frac{p}{p+x} = -\frac{q}{y}$ ....(1)

माना $\frac{p}{p+x} = a = -\frac{q}{y}$, जहाँ a नियंताक है।

फलत: $p = \frac{ax}{1-a}, q = -ay$ ....(2)

अत: $dz = pdx + qdy$

$= \frac{ax}{1-a}dx - aydy$

समाकलन करने पर,

$z = \frac{ax^2}{2(1-a)} - \frac{ay^2}{2} + b,$ जो कि अभीष्ट पूर्ण समाकल है।(b नियतांक हैं)

(iii) दिया है : $z(xp - yq) = y^2 - x^2$ ....(1)

$\because p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$ अत: समीकरण (1) को लिख सकते हैं-

$x\left(z\frac{\partial z}{\partial x}\right) - y\left(z\frac{\partial z}{\partial y}\right) = y^2 - x^2$ ......(2)

अब माना $\overline{Z} = \frac{z^2}{2} \Rightarrow d\overline{Z} = zdz$ ......(3)

(3) को समीकरण (2) में उपयोग करने पर

$x\frac{\partial \overline{Z}}{\partial x} - y\frac{\partial \overline{Z}}{\partial y} = y^2 - x^2$ ....(4)

अब माना $P = \frac{\partial \overline{Z}}{\partial x}, Q = \frac{\partial \overline{Z}}{\partial y}$ तब समीकरण (4) बनता है-

$xP - yQ = y^2 - x^2$

या $xP + x^2 = y^2 + yQ = a$ माना a नियतांक है।

फलत: $p = \dfrac{a}{x} - x; \quad Q = \dfrac{a}{y} - y$

अब $d\overline{Z} = Pdx + Qdy = \left(\dfrac{a}{x} - x\right)dx + \left(\dfrac{a}{y} - y\right)dy$

समाकलन पर, $\overline{Z} = a\log x - \dfrac{x^2}{2} + a\log y - \dfrac{y^2}{2} + b$

या $\dfrac{z^2}{2} = \log(xy)^a - \left(\dfrac{x^2 + y^2}{2}\right) + b$

$(iv)\, zpy^2 = x\left(y^2 + q^2 z^2\right)$

या $y^2\left(z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = x\left\{y^2 + \left(\dfrac{z\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}$ $\qquad \because p = \dfrac{\partial z}{\partial x}, q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

माना $\overline{Z} = \dfrac{z^2}{2} \Rightarrow d\overline{Z} = zdz$ ....(2)

(2) को समीकरण (1) में उपयोग करने पर

$y^2\left(\dfrac{\partial Z}{\partial x}\right) = x\left\{y^2 + Z\left(\dfrac{\partial Z}{\partial y}\right)^2\right\}$ या $y^2 P = x\left\{y^2 + Q^2\right\}$ ....(3)

जहाँ $P = \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial x}, Q = \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial y}$

समीकरण (3) से, $\dfrac{P}{x} = \dfrac{Q^2 + y^2}{y} = a$ (माना a नियतांक है।)

$\Rightarrow P = ax, Q = \pm\sqrt{a-1y}$

अब $d\overline{Z} = Pdx + Qdy$

$= axdx \pm \sqrt{a-1}ydy$

समाकलन करने पर, $\overline{Z} = \dfrac{ax^2}{2} \pm \dfrac{\sqrt{a-1}}{2}y^2 + b$

या $\dfrac{z^2}{2} = \dfrac{ax^2}{2} \pm \dfrac{\sqrt{a-1}}{2}y^2 + b$

या $z^2 = ax^2 + \sqrt{a-1}y^2 + 2b$

$(v)\quad x - q = (y-p)^{1/3},$

माना $x - q = a. = (y-p)^{1/3}$, जहाँ a नियतांक है।

फलतः $q = x - a, p = y - a^3$

$\therefore dz = pdx + qdy = \left(y - a^3\right)dx + \left(x - a\right)dy$

$\Rightarrow dz = ydx + xdy - a^3dx - ady$

$= d\left(xy\right) - a^3dx - ady$

समाकलन करने पर, $z = xy - a^3x - ay + b$

$(vi)\quad z^2\left(p^2 + q^2\right) = x^2 + y^2$

या $\left(z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2$ ....(1)

अब माना $\overline{Z} = \dfrac{z^2}{2} \Rightarrow d\overline{Z} = zdz$ ....(2)

(2) का समीकरण (1) में उपयोग करने पर

$$\left(\frac{\partial \overline{Z}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{Z}}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2$$

या $P^2 + Q^2 = x^2 + y^2\,; P = \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial x}, Q = \dfrac{\partial \overline{Z}}{\partial y}$ (माना), a नियतांक है।

$P = \sqrt{a^2 + x^2}, Q = \sqrt{y^2 - a^2}$

अब $d\overline{Z} = Pdx + Qdy$

$d\overline{Z} = \sqrt{a^2 + x^2}\,dx + \sqrt{y^2 - a^2}\,dy$

समाकलन करने पर

$$\overline{Z} = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\log\left\{x + \sqrt{a^2 + x^2}\right\}$$

$$+\frac{y}{2}\sqrt{y^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left\{y + \sqrt{y^2 - a^2}\right\} + b$$

या $z^2 = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2\log\left\{x + \sqrt{a^2 + x^2}\right\}$

$$+y\sqrt{y^2 - a^2} - a^2\log\left\{y + \sqrt{y^2 - a^2}\right\} + 2b$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न 5

2. पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये:

$(i)\sqrt{p} + \sqrt{q} = 2x$

$(ii)\left(p - \cos x\right)q = \cos y$

$(iii)\, p^2 q\left(x^2+y^2\right)=p^2+q$

$(iv)\, x^2p^2=q^2y$

$(v)\, p^2y\left(1+x^2\right)=qx^2$

14.4 सारांश

इस इकाई में आपने शार्पी विधि का अध्ययन किया है। यह विधि प्रथम कोटि के आंशिक अवकल समीकरण को हल करने की व्यापक विधि है। इस विधि में हम शार्पी के सहायक समीकरणों से p तथा q के व्यजंक प्राप्त करके $dz = pdx + qdy$ में रखकर समाकलन करने पर पूर्ण समाकल प्राप्त करते हैं। शार्पी विधि क्रियान्वन की दृष्टि से जटिल है, इसलिये शार्पी विधि का प्रयोग तभी श्रेयस्कर है जबकि दिये गये समीकरण मानक रूपों में समानयित नहीं किये जा सकते हों ।इसके अतिरिक्त आपने मानक रूपों में व्यक्त आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने की क्रियाविधि को समझा है। यहाँ यह पुन: स्मरणीय है कि आंशिक अवकल समीकरण तभी पूर्णत: हल (Completely solved) मानी जाती है जबकि इसके

पूर्ण समाकल, व्यापक समाकल, विचित्र समाकल ज्ञात किये जायें।

14.5 शब्दावली

शार्पी विधि	Charpit's method
सहायक समीकरण	Auxiliary equation
पूर्ण समाकल	Complete integral
व्यापक समाकल	General integral
विचित्र हल	Singular integral

14.6 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन-1

1. (iv)

2. $(i)\, az=\dfrac{(y+ax)^2}{2}+c \quad (ii)\, z=\dfrac{2}{\sqrt{1+a}}\sqrt{ax+y}+c$

$(iii)\, z^2 = 2\left(a^2+1\right)x^2+2ay+c$

$(iv)\, z^2 = a^2x^2+\left(ay+c\right)^2$

$(v)\, \log zc = +\dfrac{1}{2}\log\left\{\dfrac{ax+y}{z\sqrt{a}}+\sqrt{\dfrac{(ax+y)^2}{z^2a}-1}\right\}-\dfrac{(ax+y)^2}{2z^2a}$

$$-\frac{ax+y}{z\sqrt{a}}\sqrt{\frac{(ax+y)^2}{z^2a}-1}$$

स्वमूल्यांकन -2

1. (i) $z=ax+by+c,$ जहाँ $a^2-b^2=4$

(ii) $z=a\sqrt{x+y}+b\sqrt{x-y}+c;$ जहाँ $a^2+b^2=1$

$(iii)\, z=ax+\dfrac{n\pm\sqrt{n^2-4}}{2}ay+c$

$(iv)\, z=ax+\dfrac{3}{2+\sqrt{10}}ay+c$

$(v)\, z=ax+\dfrac{k}{a}y+c$

$(i)\dfrac{z^{1-l/2}}{1-l/2}=a\dfrac{x^{m+1}}{m+1}+\dfrac{y^{n+1}}{a(n+1)}+c$

$(ii)\, 2\sqrt{z}=ax+\left(1-a^2\right)^{1/2}y+c$

$(iii)\, z=ax+\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}y+c$

$(iv)\left(3z-ax^3-b\right)^2=4(2-a)y^2$

स्वमूल्यांकन -3

1. $(i)\, z^2\mp\left[z\sqrt{z^2-4a^2}-4a^2\log\left\{z+\sqrt{z^2-4a^2}\right\}\right]=4\left(x^2+ay\right)+b$

$(ii)\, z=be^{a(x+ay)}$

$(iii)\left(x+ay+b\right)^2=4\left\{a(z-\alpha)-1\right\}^2$

$(iv)\, az-1=be^{x+ay}$

2. (i) पूर्ण समाकल $\left(1-z^2\right)\left(1+a^2\right)=\left(x+ay+b\right)^2$

विचित्र समाकल $z^2=1$

(ii) पूर्ण समाकल $z=c$ या $z^2-a^2=\left(x+ay+c\right)^2$

विचित्र समाकल $z=0$

स्वमूल्यांकन -4

1. (i) पूर्ण समाकल : $z=ax+by+\log ab$

विचित्र समाकल : $z+\log xy+2=0$

(ii) पूर्ण समाकल : $z = ax + by + \frac{a}{b}$

विचित्र समाकल : $y + zx = 0$

(iii) पूर्ण समाकल : $z = ax^2 + by^2 + ab$

विचित्र समाकल : $x^2y^2 + z = 0$

(iv) पूर्ण समाकल : $z = ax + by + \sqrt{\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma}$

विचित्र समाकल : $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$

स्वमूल्यांकन -5

1. $(i)\, z = \frac{(a+2x)^3}{6} + a^2 y + b$

$(ii)\, z = ax + \sin x + \frac{1}{a}\sin y + b$

$(iii)\, z = \log\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right] + \frac{1}{2\sqrt{a}}\log\frac{y-\sqrt{a}}{y+\sqrt{a}} + b$

$(iv)\, z = a\log x + 2a\sqrt{y} + b$

$(v)\, z = a\sqrt{1+x^2} + \frac{a^2y^2}{2} + b$

14.7 अभ्यास प्रश्न

1. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को शार्पी विधि से हल कीजिये।

$(i)\, p = (qy + z)^2$

उत्तर $yz = ax + 2\sqrt{ay} + c$

$(ii)\, pxy + pq + qy = yz$

उत्तर $(z - ax)(y + a)^a = ce^y$

$(iii)\, (p^2 + q^2)x = pz$

उत्तर $z^2 = a^2x^2 + (ay + c)^2$

$(iv)\, p(1 + q^2) = q(z - a)$

उत्तर $2\sqrt{\{b(z-a)-1\}} = x + by + c$

$(v)\, p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 2xy = 0$

उत्तर $2z + c = x^2 + ax + y^2 + ay + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\alpha}{2}\sqrt{\alpha^2 - a^2}\right]$

$-\frac{a^2}{2}\log\left\{\alpha+\sqrt{\alpha^2-a^2}\right\}$, जहाँ $\alpha=\sqrt{2(x-y)}$

$(vi)\,2(z+px+qy)=yp^2$

उत्तर $z=\frac{ax}{y^2}-\frac{a^2}{4y^3}+\frac{c}{y}$

$(vii)\left(p^2+q^2\right)yz$

उत्तर $z^2=a^2y^2+(ax+c)^2$

$(viii)\,z=pq$

उत्तर $4az=(x+ay+c)^2$

2. निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरणों के पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये।

$(i)\,x^2p^2+y^2q^2=z$

उत्तर $x^a y^{\sqrt{1-a^2}}=be^{2\sqrt{z}}$

$(ii)\,(x+y)(p+q)^2+(x-y)(p-q)^2=1$ (संकेत $x+y=u^2, x-y=v^2$)

उत्तर $z=a\sqrt{x+y}+\sqrt{1-a^2}\sqrt{x-y}+c$

$(iii)\,p^2+q^2=z$

उत्तर $2\sqrt{z}=ax+\sqrt{\left(1+a^2\right)}y+c$

$(iv)\,x^4+p^2+y^2qz=z^2$

उत्तर $xy\log z=ay+\left(a^2-1\right)x+bxy$

$(v)\,p^2q^3=1$

उत्तर $z=ax+\left(\frac{1}{a^2}\right)^{1/3}y+c$

3. हल कीजिये

$(i)\,4xyz=pq+2pyx^2+2qxy^2$

संकेत $x^2=U, y^2=V$

उत्तर पूर्ण समाकल : $z=ax^2+by^2+ab$

विचित्र समाकल : $z+x^2y^2=0$

$(ii)\,z=px+qy+3(pq)^{1/3}$

उत्तर पूर्ण समाकल : $z=ax+by+3(ab)^{1/3}$

विचित्र समाकल: $xyz=1$

$(iii)\,z=px+qy+\log pq$

उत्तर पूर्ण समाकल $z=ax+by+\log ab$

विचित्र समाकल $z=-\log xy-2$

$(iv)\, z^2\left(p^2z^2+q^2\right)=1$

उत्तर पूर्ण समाकल: $9\left(x+ay+b\right)^2=\left(z^2+a^2\right)^3$

विचित्र समाकल: अस्तित्व नहीं है।

4. पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये।

$(i)\, p^2=q+x$

उत्तर $z=\dfrac{2}{3}\left(a+x\right)^{3/2}+ay+b$

$(ii)\, p^2q^2+x^2y^2=x^2q^2\left(x^2+y^2\right)$

उत्तर $z=\dfrac{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}{3}+\sqrt{y^2-a^2}+b$

$(iii)\, z^2\left(p^2+q^2\right)=x^2+e^{2y}$

उत्तर $z^2=x\sqrt{x^2+a^2}+a\sinh^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{a}}$

$(iv)\, pe^y=qe^x$

उत्तर $z=ae^x+e^y+b$

$(v)\, q=xyp^2$

उत्तर $2z=4\left(ax\right)^{1/2}+ay^2+b$

$(vi)\, p\left(1+q^2\right)=q\left(z-\alpha\right)$

उत्तर $\left(x+ay+b\right)^2=4\left\{a\left(z-\alpha\right)-1\right\}^2$

$(vii)\, q=\left(pz-1\right)^{1/2}$

उत्तर $z^2\mp\left[z\sqrt{z^2-4a^2}-4a^2\log\left\{z+\sqrt{z-4a^2}\right\}\right]=4\left(x+ay\right)+b$

इकाई-15 आंशिक अवकल समीकरण-3
(Partial Differential Equation-3)

इकाई की रूपरेखा

15.0 उद्देश्य

इस इकाई की विषय-वस्तु अचर गुणाको से युक्त रैखिक आंशिक अवकल समीकरण है।इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप

1. संदर्भित अवकल समीकरण की परिभाषा एवं उनके प्रकार यथा समघात एव असमघात से परिचित होंगे।
2. ऐसे समीकरणों के हल-पूरक फलन, विशिष्ट समाकल, व्यापक समाकल की चर्चा कर सकेंगे तथा इनको ज्ञात करने की विधियों को समझेंगे
3. उपरोक्त प्रकार की समीकरण में समानयन योग्य आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने की विधि जानेंगे।

15.1 प्रस्तावना

इस इकाई की विषय वस्तु ऐसे आंशिक अवकल समीकरण हैं,जो चर तथा इसके सभी अवकलजों के सापेक्ष रैखिक हैं एवं जिसमें विभिन्न पद केवल अचरों से है।माना x तथा y स्वतंत्र चर एवं z आश्रित चर हैं।तब समीकरण

$$(A_O D^n + A_1 D^{n-1} D' + A_2 D^{n-2} D'^2 + ... + A_n D'^n) +$$
$$(B_O D^{n-1} + B_1 D^{n-2} D' + B_2 D^{n-2} D'^2 + ... + B_{n-1} D'^{n-1})$$
$$+ .... + \left(R_0 D + R_1 D'\right) + S_0]z = f(x,y) \qquad ....(1)$$

n कोटि के रैखिक आंशिक अवकल समीकरण को व्यक्त करता है।

यहाँ $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}, D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}, DD' \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, D^2 D' \equiv \frac{\partial^3}{\partial x \partial y}$, इत्यादि है।

यदि गुणांक $A_0, A_1, ...A_n, B_0, B_1 ......R_0 R_1 S_0$ अचर हों तो समीकरण(1)को अचर गुणांक युक्त n कोटि का रैखिक आंशिक अवकल समीकरण कहते हैं।इस इकाई में आप इस प्रकार के समीकरणों को हल करने के सिद्धान्त एवं इनको हल करने की क्रियाविधि से परिचित होंगे।

अचर गुणांको से युक्त समघात/असमघात रैखिक आंशिक अवकल समीकरण

यदि रैखिक आंशिक अवकल समीकरण(1)में सभी अवकलज कोटि के हों तथा गुणांक अचर हों तो ऐसे समीकरण को अचर गुणांक युक्त समघात रैखिक आंशिक समीकरण कहते है। ऐसे समीकरण का व्यापक रूप होगा-

$$(A_0 D^n + A_1 D^{n-1} D' + A_2 D^{n-2} D'^2 + ... + A_n D'^n) z = f(x,y) \quad ....(2)$$

या $F(D, D')z = f(x,y)$ ......(3)

इसके विपरीत समीकरण असमघात होगा यदि सभी अवकलज कोटि के नहीं हो।

उदाहरणार्थ, $(D^3 - 3D^2 D' + 2DD'^2)z = 0$ अचर गुणांको से समघात रैखिक समीकरण है क्योंकि इसमें प्रत्येक अवकलज समान (तीन) कोटि का है एवं गुणांक अचर है।इसके विपरीत समीकरण, $(D^2 + DD' + D' - 1)z = 0$ असमघात है क्योंकि अवकलजों की कोटी असमान है।यहाँ यह ध्यातव्य है कि इन दोनों प्रकार के समीकरणों को हल करने के सिद्धान्त एव क्रियाविधि अलग है इसलिये दोनों का अध्ययन पृथक रूप से क्रमवार किया जायेगा।यहाँ यह रेखांकित करना महत्वपूर्ण है कि दोनों प्रकार के समीकरणों का व्यापक हल,पूरक फलन तथा विशिष्ट का समावेश होता है।किसी भी समीकरण का पूर्ण समाकल(complete integral) x, y, z में इस प्रकार का व्यापकीकृत सम्बंध होता है कि जब इस संबध से z तथा तत्सम्बधिंत अवकलजों मानों को अवकल समीकरण में रखा जाता है तो अवकल समीकरण एक सर्वसमिका में रूपांतरित हो जाती है।

पूर्ण समाकल के व्यंजक में स्वेच्छ नियतांक या स्वेच्छ फलन या दोनों की उपस्थिति होती है।

समीकरण $F(D,D')=0$ का हल पूरक फलन कहलाता है,जहा $F(D,D')$ D तथा D' में बहुपद (polynomial)है।

समीकरण(3)को संतुष्ट करने वाला कोई भी विशिष्ट हल,विशिष्ट समाकल (Particular integral)कहलाता है।

15.2 अचर गुणांक युक्त समघात रैखिक आंशिक अवकल समीकरण: Homogeneous Linear Partial Differential Equations With Constant Coefficients:

माना $F(D,D'), D, D'$ में बहुपद है व समीकरण(3)के अनुरूप $F(D,D')z = f(x,y)$ के अनुरूप हो तो यह समीकरण समघात अचर गुणांको युक्त रैखिक अवकल समीकरण कहलाता हैं।

15.2.1 पूरक फलन ज्ञात करना

समीकरण $F(D,D')z = (A_0D^n + A_1D^{n-1}D' + ...A_nD'^n)z = 0$ ....(4) का हल, समीकरण (3) का पूरक फलन होता है।

चूँकि समीकरण (4) D तथा D' में n घात का बहुपद है तथा $A_0, A_1 ....A_n$ अचर हैं,अतएव समीकरण (4) को n गुणनखण्डों में निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते है।

$(D-m_1D')(D-m_2D')...........(D-m_nD')z = 0$ ......(5)

जहाँ $m_1, m_2, ...m_n$ अचर हैं।

ध्यान दीजिये कि प्रत्येक समीकरण $(D-m_iD')z = 0, i = 1, 2, ...n$ का हल समीकरण (5) को भी सन्तुष्ट करेगा।

यहाँ हम दिखायेंगे कि समीकरण $(D-mD')z = 0$ ....(6)

का हल $\phi(y+mx)$ रूप का होगा।

अब समीकरण $(D-mD')z = 0$ पर विचार करते हैं जो लैग्रेंज समीकरण $Pp+Qq = R$ रूप का है जिसके सहायक समीकरण हैं-

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dz}{0}$$ ....(7)

समीकरण (7) के प्रथम दो पदों से (समाकलन करने पर)

$y + mx = a,$ ....(8)

अंतिम पद से, $z = b$ ....(9)

जहाँ a, b नियंताक हैं।

स्पष्ट है कि समीकरण (6) का व्यापक हल $z = \phi(y+mx)$ रूप का जहाँ ϕ स्वेच्छ फलन हैं।

अब $$Dz = \frac{\partial z}{\partial x} = m\phi'(y+mx); D'z = \frac{\partial z}{\partial y} = \phi'(y+mx)$$
$$D^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = m^2\phi''(y+mx); D'^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \phi^{(n)}(y+mx)$$
$$D^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = m^3\phi^{(n)}(y+mx); D'^n z = \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \phi^{(n)}(y+mx)$$

व्यापकत: $D^r D'^s z = \dfrac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s} = m^r \phi^{(r+s)}(y+mx)$

उपरोक्त आंशिक अवकलजों को समीकरण (4) में रखने एवं सरलीकृत करने पर हम पाते हैं कि

$(A_0 m^n + A_1 m^{n-1} + A_2 m^{n-2} + ... + A_n)\phi^{(n)}(y+mx) = 0$ .....(10)

इस समीकरण के सत्य होने के लिये आवश्यक है कि m ,

$(A_0 m^n + A_1 m^{n-1} + A_2 m^{n-2} + ... + A_n) = 0$ का मूल है। ....(11)

समीकरण (11) को समीकरण (3) का सहायक समीकरण कहते हैं (4) में $D = m, D' = 1$ रखकर प्राप्त करते हैं। समीकरण (11) के n मूल माना $m_1, m_2 ....m_n$ हैं। तब प्रत्येक मूल के संगत समीकरण (4) का हल प्राप्त होता है। मूलों $m_1, m_2 ....m_n$ के लिये निम्नलिखित स्थितियाँ बनती हैं। स्थिति -1 सभी मूल $m_1, m_2 ....m_n$ समान हैं।

इस स्थिति में प्रत्येक मूल $m_i = i = 1, 2, ...n$ के संगत हल $z = \phi_i(y + m_i x)$ होगा एवं चूँकि दिया गया समीकरण रैखिक है फलत: इन हलों का योग भी (1) का हल होगा। फलत: समीकरण (2) का पूरक फलन

$z = \phi_1(y + m_1 x) + \phi_2(y + m_2 x) + ...\phi_n(y + m_n x)$ होगा, जहाँ

$\phi_i = i = 1, 2..........n$ स्वेच्छ फलन हैं।

स्थिति-2 : जब मूलों की पुनरावृति होती है:

माना दो मूल m_1, m_2 समान हैं अर्थात $m_1 = m_2 = m$ (माना)

तब समीकरण

$$(D - mD')(D - mD')z = 0 \quad ....(12)$$

पर विचार करते हैं।

माना $((D - mD')z = U$

तब समीकरण (12) होगा-

$$(D - mD')U = 0 \quad ....(13)$$

समीकरण(13) का हल $U = \phi(y + mx)$ ....(14)

रूप का होगा।अतएव

$$(D - mD')z = \phi(y + mx) \quad ....(15)$$

समीकरण (15) के सहायक समीकरण हैं-

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dz}{\phi(y+mx)} \qquad \text{.............(16)}$$

अत: प्रथम दो पदों से, $y + mx = c_1$

प्रथम एवं अंतिम पदों, $z - x\phi(c_1) = c_2$ ....(17)

या $z = \psi(y+mx) + x\phi(y+mx)$ ....(18)

जहाँ $c_2 = \psi(y+mx)$ $[\because y + mx = c_1]$

समीकरण (18) पुनरावृत मूल m के संगत पूरक फलन है। व्यापकत. यदि मूल m r बार

पुनरावृति $m_1 = m_2 = ...m_r = m$ करता है तो

इन मूलों के संगत पूरक फलन होगा-

$$\phi_1(y+mx) + x\phi_2(y+mx) + ... + x^{r-1}\phi_r(y+mx)$$

उपरोक्त विवेचन के आधार पर समीकरण (2) के पूरक फलन की क्रियाविधि निम्न प्रकार है-

1. अचर गुणांक युक्त रैखिक समघात समीकरण को निम्न रूप में लिखें।

   $$(A_0 D^n + A_1 D^{n-1} D' + A_2 D^{n-2} D'^2 + ... + A_n D'^n)z = f(x,y)$$

2. $D = m, D' = 1$ रखकर सहायक समीकरण का निम्न रूप प्राप्त करें।

   $$(A_0 m^n + A_1 m^{n-1} + A_2 m^{n-2} + ... + A_n) = 0$$

3. सहायक समीकरण के मूल प्राप्त करें।यदि सभी मूल $m_1, m_2 ....m_n$ असमान है तो

   पूरक फलन $= \phi_1(y+m_1x) + \phi_2(y+m_2x) + ...\phi_n(y+m_nx)$

यदि n मूलों में r मूलों की पुनरावृति होती है तथा शेष मूल असमान है तो पूरक फलन- $\phi_1(y+mx) + x\phi_2(y+mx) + ...x^{r-1}\phi_r(y+mx)$

$+\phi_{r+1}(y+m_{r+1}x) + \phi_{r+2}(y+m_{r+2}x) + ... + x\phi_n(y+m_nx)$

टिप्पणी : 1. सहायक समीकरण $F(D,D') = 0$ में $D = m, D' = 1$ रखकर प्राप्त करते हैं परन्तु यदि $A_0 = 0, A_n \neq 0$ है तो इस स्थिति में $D = 1, D' = m$ प्रतिस्थापन से सहायक समीकरण प्राप्त करना श्रेयस्कर होता हैं।

पूरक फलन का स्वरूप निम्न प्रकार होता है-

$\phi_1(y+m_1x) + \phi_2(y+m_2x) + ...\phi_n(y+m_nx)$

पुनरावृत मूलों की स्थिति में पूरक फलन $(C.F.)$ उपरोक्त वर्णित विधि ए' ही लिखा जायेगा।

2. यदि $A_0 = A_n = 0$, तब सहायक समीकरण $(n-1)$ घात का होगा। इस स्थिति में $D = m, D' = 1$ प्रतिस्थापन लेने पर पूरक फलन का n वाँ पद $\phi(x)$ रूप का होगा और यदि $D = 1, D' = m$ लें तो n वाँ पद $\phi(y)$ रूप का होगा।

उदाहरण : 1 हल कीजिये-

(i) $(D^2D' - 4DD'^2)z = 0$

(ii) $r - 4s + 4t = 0$

(iii) $(D^4 - 2D^3D' + 2DD'^3 - D'^4)z = 0$

(i) $D = m, D' = 1$ रखने पर सहायक सककरण

$m^2 - 4m = \Rightarrow m = 0, 4$

अत: $C.F. = \phi_1(y + 2x) + \phi_2(y)$

(ii) सहायक समीकरण: $m^2 - 4m + 4 = 0$

$\Rightarrow m = 2, 2$

अत: $C.F. = \phi_1(y + 2x) + x\phi_2(y + 2x)$

(iii) **सहायक समीकरण**

$m^4 - 2m^3 + 2m - 1 = 0$

$\Rightarrow m = -1, 1, 1, 1$

अत: $C.F. = \phi_1(y - x) + \phi_2(y + x) + x\phi_3(y + x) + x^2\phi_4(y + x)$

उदाहरण:2 हल कीजिये-

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0$$

हल : दिया गया समीकरण है: $(D^4 + D'^4)z = 0$ ....(1)

समीकरण (1) का सहायक समीकरण है-

$m^4 + 1 = 0$ या $(m^2 + 1)^2 - 2m^2 = 0$

या $(m^2 + 1 - \sqrt{2m})(m^2 + 1 + \sqrt{2m}) = 0$

या $m = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, ; \dfrac{1 \pm i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

माना $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, ; z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

तब $\overline{z_1}, \overline{z_2}$, समीकरण के अन्य 'मूल है जहाँ $\overline{z_1}, \overline{z_2}$, क्रमश: z_1, z_2 के समिश्र संयुग्मी है।

अत: समीकरण (1) का व्यापक हल-

$Z = \phi_1(y + z_1x) + \phi_2(y + z_2x) + \phi_3(y + \overline{z}_1x) + \phi_4(y + \overline{z}_2x)$

जहाँ ϕ_i, $i =$ 1,2,3,4 स्वेच्छ फलन हैं

जबकि $z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i\sqrt{2}), z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\sqrt{2})$

$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i\sqrt{2}), z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - i\sqrt{2})$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

निम्नलिखित अवकल समीकरणों के पूरक फलन लिखिये-

(i) $(D^2 + D'^2)Z = 0$

(ii) $(D^2 - 4D'^2)z = \cos(x + 2y)$

(iii) $(D^4 - D'^4)z = \log(x + y)$

(iv) $(D - D')^3 z = \sin(x + 2y)$

15.2.2 विशिष्ट समाकल :

माना प्रदत्त समीकरण है-

$$F(D, D')z = f(x, y)$$

अब $$\frac{1}{F(D, D')}\{F(D, D')z\} = \frac{1}{F(D, D')} f(x, y)$$

अत: $Z = \dfrac{1}{F(D, D')} f(x, y)$, जो कि दिये गये समीकरण का विशिष्ट समाकल कहलाता हैं। विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की सामान्य विधि एवं लघु विधियाँ है। कतिपय फलनों का ही लघु विधियों से विशिष्ट समाकल ज्ञात करना संभव होता है।अन्य फलनों का विशिष्ट समाकल सामान्य विधि से ही ज्ञात करना होता है।

15.2.3 विशिष्ट समाकल (Particular Integral, $P.I.$)ज्ञात करने की विधि:

विशिष्ट समाकल $= \dfrac{1}{F(D, D')} f(x, y)$

स्थिति-1 माना $F(D, D') = D - mD'$

तब $P.I.$ $z = \dfrac{1}{D - mD'} f(x, y)$

या $(D - mD')z = f(x, y)$

यह लैग्रेंज का प्रथम कोटि समीकरण है जिसके सहायक समीकरण है

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dz}{f(x, y)}$$

प्रथम दो पदों से $y + mx = a, a$ नियंताक है

पुन:, प्रथम एवं अंतिम पदों से, $= \int f(x, y)dx$

$$= \int f(x, a-mx)dx \quad [\because y+mx=a]$$

अतएव $\frac{1}{D-mD'} f(x,y) = \int f(x,a-mx)dx$

स्थिति -2 माना $f(D,D') \equiv (D-m_1D')(D-m_2D')..........(D-m_nD')$

तब $P.I.$

$$Z = \frac{1}{(D-m_1D')(D-m_2D')..........(D-m_nD').} f(x,y)$$

$$(D-m_2D')(D-m_3D')............(D-m_nD')z = \frac{1}{(D-m_1D')} f(x,y)$$

$$= f(x, a_1 - m_1)dx$$

$$= \phi_1(x,y)$$

जहाँ $a_1 = y + m_1 x$

पुन: $(D-m_3D')..............(D-m_nD')z = \frac{1}{(D-m_2D')} \phi_1(x,y)$

$$= \int \phi_1(x, a_2 - m_2 x)dx,$$

$$= \phi_2(x,y) \text{ यहाँ } a_2 = y + m_2 x$$

उपरोक्त प्रकिया की परिमित संख्या में पुनरावृति से हमें अभीष्ट विशिष्ट समाकल (सै.) प्राप्त होता है ।

टिप्पणी : (i) $\frac{1}{D}, \frac{1}{D'}$ समाकलन सकारक हैं। $\frac{1}{D}$ तथा $\frac{1}{D'}$ - का तात्पर्य: क्रमश: x तथा y के सापेक्ष समाकलन है।

(ii) यदि $f(x,y)$ x तथा y में बहुपद है तो विशिष्ट समाकल ज्ञात करने के लिये $\frac{1}{F(D,D')}$ को D या D' की आरोही (ascending) घातों में प्रसार करते हैं।.

उदाहरण-1 व्यापक विधि के प्रयोग से निम्नलिखित अवकल समीकरणों के विशिष्ट समाकल ज्ञात कीजिये।

(i) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (y+1)e^x$

(ii) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x$

(iii) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y\cos x$

(iv) $(D^2 - DD' - 2D'^2)z = (2x^2 + xy - y^2)\sin xy - \cos xy$

हल: (i) सहायक समीकरण है-

$$m^2 + m - 2 = 0 \text{ या } (m-1)(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow m = 1, -2$$

अत: $C.F. = \phi_1(y+x) + \phi_2(y-2x)$

विशिष्ट समाकल $(P.I.)$:

$$(P.I.) \equiv \frac{1}{\left(D - D^{'}\right)\left(D + 2D^{'}\right)}(y+1)e^x$$

$$= \frac{1}{D - D^{'}} \int (a + 2x + 1)e^x dx, y = a + 2x \text{ लेने पर}$$

$$= \frac{1}{D - D^{'}} \{(a + 2x + 1)e^x - 2e^x\} \text{ (खण्डश: समकाल करने पर}$$

$$= \frac{1}{D - D^{'}} (y-1)e^x \qquad [\because y = a + 2x]$$

$$\int (a - x - 1)e^x dx \text{ यहाँ } a = y + x$$

$$= (a - x - 1)e^x + e^x$$

$$= ye^{x}{'}$$

अत: $z = \phi_1(y+x) + \phi_2(y-x) + ye^x$

(ii) $(D + D^{'})z = \cos x$

सहायक समीकरण है: $m + 1 = 0$ या $m = -1$

अत: $C.F. = \phi_1(y-x)$

$$P.I. = \frac{1}{D + D^{'}} \cos x = \int \cos x dx$$

$$= -\sin x$$

अत: पूर्ण समाकल $z = \phi_1(y-x) - \sin x$

(iii) $(D^2 + DD^{'} - 6D^{'2})z = y\cos x$

सहायक समीकरण है: $m^2 + m - 6 = 0$

$\Rightarrow (m-2)(m+3) = 0$

$\Rightarrow m = 2, -3$

अत: $C.F. = \phi_1(y+2x) + \phi_2(y-3x)$

अब $P.I. = \dfrac{1}{(D - 2D')(D - 3D')} y\cos x$

$$= \frac{1}{D - 2D^{'}} \int (a + 3x)\cos dx, \underset{\text{जहाँ}}{} \; a = y - 3x$$

$$= \frac{1}{D - 2D^{'}} \left[(a + 3x)\sin x - \int 3\sin x dx \right]$$

$$= \frac{1}{D-2D'}\left[y\sin x + 3\cos x \ \right] \ \because a+3x = y$$

$$= (b-2x)(-\cos x) - \int (-2)(-\cos x)dx + 3\sin x$$

$$= -y\cos x - 2\sin x + 3\sin x \ \left[\because b = 2x + y \ \right]$$

$$= \sin x - y\cos x$$

अत: व्यापक हल

$$z = \phi_1(y+2x) + \phi_2(y-3x) + \sin x - y\cos x$$

(iv) $\quad (D^2 - DD' - 2D'^2)z = (2x^2 + xy - y^2)\sin xy - \cos xy$

सहायक समीकरण है:-

$m^2 - m - 2 = 0$ या $(m-2)(m+1) = 0$

$$\Rightarrow m = 2, -1$$

अत: $C.F. = \phi_1(y+2x) + \phi_2(y-x)$

$$P.I. = \frac{1}{(D-2D')(D+D')}\left\{ \ (2x^2 + xy - y^2)\sin xy - \cos xy \ \right\}$$

$$= \frac{1}{(D-2D')}\left\{\frac{1}{(D+D')}(2x^2 + xy - y^2)\sin xy - \cos xy\right\}$$

$$= \frac{1}{(D-2D')}\int \ \left\{2x^2 + x(a+x) - (a+x)^2 \sin x(a+x) - \cos x(a+x) \ \right\} dx$$

जहाँ $a = y - x$

$$= \frac{1}{(D-2D')}\int \ \left\{(x-a)(2x+a)\sin(ax+x^2) - \cos(ax+x^2) \ \right\} dx$$

$$= \frac{1}{(D-2D')}\left[-(x-a)\cos(ax+x^2) + \int \ \cos(ax+x^2)dx - \int \ \cos(ax+x^2)dx\right]$$

$$= \frac{1}{(D-2D')}(y-2x)\cos xy \ \ \because a = y - x$$

$$= \int (b-4x)\cos(bx-2x^2)dx, \text{ जहाँ } b = y+2x$$

$$= \int \cos\theta d\theta, \left(bx - 2x^2 = \theta \text{ तब } (b-4x) = \frac{d\theta}{dx} \ \right)$$

$$= \sin\theta = \sin\left(bx - 2x^2\right) = \sin xy$$

अत: व्यापक हल:

$$z = \phi_1(y_1 + 2x) + \phi_2(y-x) + \sin xy$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-2

व्यापक विधि के प्रयोग से निम्नलिखित समीकरणों का विशिष्ट समाकल ज्ञात कीजिये।

(i) $\quad (D+D')^2 z = 2\cos y - x\sin y$

(ii) $(D^2 - 3DD'^2 - 2D'^3)z = \cos(2y + x) - (3 + 2x)e^y$

(iii) $(D^2 - 2DD' - 15D^2)z = 12xy$

(iv) $(D^2 + DD' - 2D'^2)z = (y + 1)e^x$

15.2.4 विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की लघु विधियाँ-

अवकल समीकरण $F(D, D')z = f(x, y)$ का विशिष्ट समाकल अपेक्षाकृत सुगम विधि से ज्ञात किया जा सकता है यदि $f(x, y)$ कतिपय विशिष्ट रूपों का हों।

इस अनुच्छेद में हम कतिपय फलनो के संगत विशिष्ट समाकल ज्ञात करने की लघु विधियों का प्रतिपादन करेगें तथा उनके क्रियान्वन की क्रियाविधि को समझेंगे।

1. $f(x, y) = \phi(ax + by)$: जब $f(x, y), \phi(ax + by)$ रूप है तो इसके संगत विशिष्ट समाकल निम्नलिखित प्रमेय से दिया जाता है-

प्रमेय-1 यदि $F(D, D'), D$ तथा D' में n घात का समघात फलन है तब

$$\frac{1}{F(D, D')}\phi^{(n)}(ax + by) = \frac{1}{F(a, b)}\phi(ax + by)$$

जहाँ $F(a, b) \neq 0$ है तथा $\phi^{(n)}, \phi$ का $(ax + by)$ के सापेक्ष n अवकलज है।

$F(a, b) = 0$ होने की स्थिति मे विशिष्ट समाकलन निम्नलिखित प्रमेय के आधार पर परिकलित किया जाता है।

प्रमेय-2

$$\frac{1}{(bD - aD)}\phi\left(ax + by\right) = \frac{x^n}{b^n \underline{|n}}\phi\left(ax + by\right)$$

टिप्पणी : $F(a, b) = 0$ होने का अर्थ है कि $(bD - aD'), F(D, D')$ का कम से कम एक बार गुणनखण्ड है।

सूत्र-1 $F(D, D'), n$ घात का D तथा D' में समघात फलन है तथा $F(a, b) \neq 0$ तब समीकरण का विशिष्ट समाकल

$$= \frac{1}{F(D, D')}\phi(ax + by) = \frac{1}{F(a, b)}\int\int\int \ldots\int \phi(U)dUdU\ldots..dU$$ (n बार समाकलन)

जहाँ $F(a, b) \neq 0$

सूत्र-2 जब $F(a, b) = 0$ इस स्थिति में

$$F(D, D') = (bD - aD')^r G(D, D'), \qquad \text{जहाँ } G(D, D') \neq 0$$

इस स्थिति में हम सर्वप्रथम सूत्र-1 की सहायता से $\frac{1}{G(D, D')}\phi(ax + by)$ ज्ञात करते हैं। इसके बाद सूत्र-2 का प्रयोग कते हैं अर्थात्

$$\frac{1}{G(D, D')}\phi(ax + by) = \frac{1}{(bD - aD')^r}\phi(ax + by)$$

$$=\frac{1}{(bD-aD^{'})^{r}}\left\{\frac{1}{G\left(D,D'\right)}\phi(ax+by)\right\}$$

$$\frac{1}{\left(bD-aD\right)}\psi\left(ax+by\right)=\frac{x^{r}}{b^{r}\lfloor r}\psi\left(ax+by\right)$$

जहाँ $\psi\left(ax+by\right)=\dfrac{1}{G\left(D,D'\right)}\phi\left(ax+by\right)$

निम्नलिखित उदाहरणों से विधि स्पष्ट होगी।

माना हमें $(4D^{2}-4DD^{'}+D^{'2})Z=x+2y$ का विशिष्ट समाकल ज्ञात करना है। यहाँ

$a=1,b=2$ अब $F(D,D^{'})=(2D-D^{'})^{2}\Rightarrow F(1,2)=0$

अत: प्रमेय-2 का प्रयोग करेगे

अत: विशिष्ट समाकल $=\dfrac{1}{(2D,D^{'})^{2}}(x+2y)$

$$\frac{x^{2}}{2^{2}\lfloor 2}\left(x+2y\right)$$

पुन: यदि हमे समीकरण

$$(D^{3}-4D^{2}D^{'}+4DD^{'2})z=\sin(2x+y)$$

का विशिष्ट समाकल ज्ञात करना है तो

विशिष्ट समाकल $=\dfrac{1}{(D^{3}-4D^{2}D^{'}+4DD^{'2})}\sin(2x+y)$

$$=\frac{1}{(D-2D^{'})^{2}}\left\{\frac{1}{D}(\sin(2x+y))\right\}$$

$$=\frac{1}{(D-2D^{'})^{2}}\left\{-\frac{1}{2}\cos(2x+y)\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(D-2D^{'})^{2}}\cos(2x+y)$$

अब $F(D,D^{'})=(D-2D^{'})^{2}$ के लिए $F(2,1)=0$

अत: विशिष्ट समाकल $=-\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{x^{2}}{\lfloor 2.2}\cos(2x+y)\right\}$

$$=-\frac{x^{2}}{4}\cos(2x+y)$$

उदाहरण : 1 हल कीजिये

$$(D^{2}-2DD^{'}+D^{'2})z=\sin(2x+y)$$

हल : सहायक समीकरण

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \text{ या } (m-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow m = 1,1$$

अत: पूरक फलन $= \phi_1(y+x) + x\phi_2(y+x)$

जहाँ 'ϕ_1, ϕ_2 स्वेच्छ फलन हैं।

विशिष्ट समाकल $= \dfrac{1}{(D^2 - 2DD^{'} + D^{'2})}\sin(2x+y)$

$$= \frac{1}{(D-D^{'})^2}\sin(2x+y)$$

$$= -\sin(2x+y)$$

अत: दिये गये समीकरण का पूर्ण हल

$z =$ पूरक फलन + विशिष्ट समाकल

$$= \phi_1(y+x) + x\phi_2(y+x) - \sin(2x+y)$$

उदाहरण-2 हल कीजिये

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y$$

हल : सहायक समीकरण: $m^2 - 1 = 0 \;\; \Rightarrow M = \pm 1$

अत: पूरक फलन $= \phi_1(y+x) + \phi(y-x)$

जहाँ ϕ_1, ϕ_2 स्वेच्छ फलन हैं।

विशिष्ट समाकल $= \dfrac{1}{(D^2 - D^{'2})}(x-y)$

$$= \frac{1}{(D+D^{'})(D-D^{'})}(x-y)$$

$$= \frac{1}{(D+D^{'})}\left\{\frac{1}{(D-D^{'})}(x-y)\right\}$$

$$= \frac{1}{D+D^{'}}\left\{\frac{1}{1-(-1)}\int U du,\right\} \text{ जहाँ } U = x-y$$

$$= \frac{1}{(D+D^{'})}\left\{\frac{U^2}{4}\right\} = \frac{1}{4(D+D^{'})}(x-y)^2$$

$$\frac{1}{4}.\frac{x(x-y)^2}{1}$$

$$\left[\because F(a,b) = 0 \frac{1}{(bD-aD^{'})^r}\phi(ax+by) = \frac{x^r}{b^r r}\phi(ax+by)\right]$$

अत: पूर्ण हल है-

$$z=\phi_1(y+x)+\phi_2(y-x)+\frac{x}{4}(x-y)^2$$

उदाहरण : 3 हल कीजिये

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x+3^y}$$

हल : दिया गया समीकरण है-

$$(D^2-2DD^{'}+D^{'2})z=e^{2x+3y} \qquad ....(i)$$

समीकरण (1) का सहायक समीकरण -

$$m^2-2m+1=0 \text{ या } (m-1)^2=0$$

$$\Rightarrow m=1,1$$

अतः पूरक फलन $=\phi_1(y+x)+x\phi_2(y+x)$

विशिष्ट समाकल $=\frac{1}{(D-D^{'})^2}e^{2x+3y}=\frac{1}{(2-3)^2}e^{2x+3y}$

$$=e^{2x+3y}$$

अतः पूर्ण हल है-

$z=$ पूरक फलन + विशिष्ट समाकल

$$=\phi_1(y+x)+x\phi_2(y+x)+e^{2x+3y}$$

उदाहरण : 4 हल कीजिये-

$$\left(D^2+D^{'2}\right)z=\cos\alpha x+\cos\beta y$$

हल सहायक समीकरण -

$$m^2+1=0\Rightarrow m=\pm i$$

अतः पूरक फलन $=\phi_1(y+ix)+\phi_2(y+ix)$

$$=\frac{1}{\left(D^2+D^{'2}\right)}\cos\alpha x\cos\beta x$$

विशिष्ट समाकल

अब $\cos ax\cos\beta x=\left[\cos(ax+\beta y)+\cos(ax-\beta y)\right]/2$

$=\phi(ax+by)$ (ध्यान दे)

अतः विशिष्ट समाकल

$$=\frac{1}{2\left(D^2+D^{'2}\right)}\left\{\text{co}\,x(ax+\beta y)+\cos(ax-\beta y)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left[\iint\cos UdUdU+\iint\cos VdVdV\right]$$

जहाँ $U=\alpha x+\beta y,\quad V=\alpha x-\beta y$

$$= \frac{1}{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}[-\cos U - \cos V]$$

$$= -\frac{\cos\alpha x \cos\beta y}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)}$$ (सरल करने पर)

अतः पूर्ण हल है-

$$z = \varnothing_1\left(y+ix\right)+\varnothing_2\left(y-ix\right)-\frac{\cos\alpha x\cos\beta y}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)}$$

उदारहण. 5 हल कीजिये

$$\left(D^3-4D^2D^{'}+5DD^{'2}-2D^{'3}\right)z = e^{y+2x}+\sqrt{x+y}$$

हल : सहायक समीकरण-

$$m^3-4m^2+5m-2=0$$

या $\left(m-2\right)\left(m-1\right)^2=0$

$$\Rightarrow m = 2,1,1$$

अतः पूरक फलन $=\varnothing_1\left(y+2x\right)+\varnothing_2\left(y+x\right)+x\varnothing_3\left(y+x\right)$ ....(1)

विशिष्ट समाकल $= \frac{1}{\left(D-2D^{'}\right)\left(D-D^{'}\right)^2}\left\{e^{y+2x}+\sqrt{x+y}\right\}$ .... (2)

$$= \frac{1}{\left(D-2D^{'}\right)}\left\{\frac{1}{\left(D-D^{'}\right)^2}e^{y+2x}\right\}+\frac{1}{\left(D-D^{'}\right)^2}\left\{\frac{1}{\left(D-2D^{'}\right)}\sqrt{x+y}\right\}$$

$$= \frac{1}{\left(D-2D^{'}\right)}\left\{\frac{1}{\left(2-1\right)^2}\int\int e^U dUdU\right\}+\frac{1}{\left(D-D^{'}\right)^2}\left\{\frac{1}{1-2.1}\int V^{1/2}dV\right\}$$

जहाँ $U = 2x+y, V = x+y$

$$= \frac{1}{D-2D^{'}}e^U - \frac{1}{\left(D-D^{'}\right)^2}\left(\frac{2}{3}\right)V^{3/2}$$

$$= \frac{1}{\left(D-2D^{'}\right)}e^{y+2x}-\frac{2}{3}\frac{1}{\left(D-D^{'}\right)^2}\left(x+y\right)^{3/2}$$

$$= \frac{x}{1.1}e^{2x+y}-\frac{2}{3}\frac{x^2}{1^2.2}\left(x+y\right)^{3/2}$$

$$= xe^{2x+y}-\left(\frac{x^2}{3}\right)\left(x+y\right)^{3/2}$$

अत: अभीष्ट पूर्ण हल हैं-

$$z=\phi_1(y+2x)+\phi_2(y+x)+x\phi_3(y+x)-\frac{x^2}{3}(x+y)^{1/3}$$

उदाहरण. 6 हल कीजिये-

$$\left(D^3-7DD'^2-6D'^3\right)z=e^{3x+y}+\sin(2y+x)$$

हल. सहायक समीकरण

$$m^3-7m-6=0$$
$$\Rightarrow m=-1,-2,3$$

अत: पूरक फलन $=\phi_1(y-x)+\phi_2(y-2x)+\phi_3(y+3x)$

जहाँ $\phi_1,\phi_2,\phi_3,$ स्वेच्छ फलन हैं ।

विशिष्ट समाकल $=\dfrac{1}{\left(D^3-7DD'^2-6D'^3\right)}\left\{e^{3x+y}+\sin(2x+y)\right\}$

$$=\frac{1}{(D-3D')}\left\{\frac{1}{(D+D')(D+2D')}e^{3x+y}\right\}+\frac{1}{\left(D^3-7DD'^2-6D'^3\right)}\sin(2x+y)\}$$

जहाँ $U=3x+y,\quad V=2x+y$

$$=\frac{1}{20(D-2D')}e^U-\frac{1}{75}\cos V \qquad \left[\because \iint e^u\,du\,du=e^u\right]$$

$$=\frac{1}{20(D-2D')}e^{3x+y}-\frac{1}{75}\cos(2x+y)\left[\iiint \sin v\,dv\,dv\,dv=\cos v\right]$$

$$=\frac{1}{20}\frac{x}{1.1}e^{3x+y}-\frac{1}{75}\cos(2x+y)$$

$$=\frac{x}{20}e^{3x+y}-\frac{1}{75}\cos(2x+y)$$

अत: पूर्ण हल $z=$ पूरक फलन + विशिष्ट समाकल

$$=\phi_1(y-x)+\phi_2(y-2x)+\phi_3(y+3x)-e^{3x+y}\,\frac{1}{75}\cos(2x+y)$$

उदाहरण : 7 हल कीजिये

$$2r-s-3t=e^x/e^y$$

हल : दिया गया समीकरण है-

$$\left(2D^2-DD'-3D'^2\right)z=e^{x-y}$$

समीकरण (1) का सहायक समीकरण

$2m^2-m-3=0$ या $(m+1)(2m-3)=0$

$$\Rightarrow m=-1,3/2$$

अत. पूरक फलन $=\phi_1(y-x)+\phi_2\left(y+\frac{3}{2}x\right)$

विशिष्ट समाकल $=\frac{1}{(D+D^{'})(2D-3D^{'})}e^{x-y}$

$$=\frac{1}{(D+D^{'})}\left\{\frac{1}{(2D-3D^{'})}e^{x-y}\right\}$$

$$=\frac{1}{(D+D')}\left\{\frac{1}{(2.1-3(-1))}\int e^{U}dU\right\},\text{ जहाँ } U=x-y$$

$$=\frac{1}{(D+D^{'})}\left\{\frac{1}{5}e^{U}\right\}=\frac{1}{5(D+D^{'})}.e^{x-y}$$

$$=\frac{1}{5((-1)D+1.D^{'})}.e^{x-y}$$

$$=-\frac{1}{5}\frac{x}{(-1)^{1}1}.e^{x-y}=\frac{x}{5}e^{x-y}$$

अत: अभीष्ट पूर्ण हल

$$=\phi_1(y-x)+\phi_2\left(y+\frac{3}{2}x\right)+\frac{x}{5}e^{x-y}$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न- 3

1. हल कीजिये-
   (i) $(D^2+3DD^{'}+2D^{'2})z=2x+3y$
   (ii) $(D-D)^2z=x+\phi(x+y)$
   (iii) $(4r-4s+t)=16\log(x+2y)$
   (iv) $(D^2+3DD^{'}+2D^{'2})z=2x+3y$

(2) जब $f(x,y)=x^m y^n$ का रूप है अथवा x तथा y में परिमेय.

समाकल बीजीय फलन है:

ऐसी स्थिति में समघात समीकरण की विशिष्ट समाकल ज्ञात करने हेतु $\frac{1}{F(D,D^{'})}$ का D या $D^{'}$ की आरोही घातों में प्रसार करते हैं तथा अवकल / समाकल संकारकों की संक्रिया से अभीष्ट

विशिष्ट समाकल प्राप्त करते हैं । यदि $n>m$ है तो प्रसार $\frac{D}{D^{'}}$ की आरोही घातों में किया जाता है

तथा यदि $m > n$ है तो प्रसार $\frac{D'}{D}$ की आरोही घातों में करते हैं ।

टिप्पणी: $\frac{1}{F(D, D')}$ का D की आरोही घातों में प्रसार से प्राप्त विशिष्ट समाकल, D' की आरोही घातों में प्रसार से प्राप्त विशिष्ट समाकल अलग होते हैं परन्तु हल के लिए किसी भी विशिष्ट समाकल को प्रयुक्त कर सकते हैं ।

उदाहरण : 1 हल कीजिये,

$$\left(D^2 - DD' - 6D'^2\right)z = 12xy$$

हल : सहायक समीकरण

$$m^2 - m - 6 = 0 \text{ या } m^2 - m - 6 = 0$$

$$\Rightarrow m = 3, -2$$

पूरक फलन $= \phi_1(y + 3x) + \phi_2(y - 2x)$

विशिष्ट समाकल $= \frac{1}{D^2 - DD' - 6D'^2} 12xy$

$$= \frac{12}{D^2}\left[1 - \left(\frac{DD' + 6D'^2}{D^2}\right)\right]^{-1} xy$$

$$= \frac{12}{D^2}\left[1 - \frac{D'}{D} - \frac{6D'^2}{D^2}\right]^{-1} xy$$

$$= \frac{12}{D^2}\left[1 + \frac{D'}{D} + \ldots\ldots\ldots\right] xy$$

$$= \frac{12}{D^2}\left(1 + \frac{D'}{D}\right) xy \qquad \text{(उच्च घातों की उपेक्षा करने पर)}$$

$$= \frac{12}{D^2}\left[xy + \frac{x^2}{24}\right]$$

$$= 12\left[\frac{x^3 y}{6} + \frac{x^4}{24}\right]$$

$$= 2yx^3 + \frac{x^4}{2}$$

अतः पूर्ण हल :

$$= \phi_1(y + 3x) + \phi_2(y - 2x) + yx^3 \frac{x^4}{24}$$

उदाहरण : 2 हल कीजिये

$$\left(D^2 - aD'^2\right)z = x$$

हल सहायक समीकरण

$$m^2 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow m = \pm a$$

अतः पूरक फलन $= \phi_1(y+ax) + \phi_2(y-ax)$

विशिष्ट समाकल $\dfrac{1}{D^2 - a^2 D'^2} x$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 - a^2 \frac{D'^2}{D^2}\right]^{-1} x$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1 + a^2 \frac{D'^2}{D^2} + \ldots\ldots\right]^{-1} x$$

$$= \frac{1}{D^2}[x - 0] = \frac{1}{D^2} x$$

$$= \frac{x^3}{6}$$

विशिष्ट समाकल D की आरोही घातों में प्रसार से भी प्राप्त कर सकते हैं

विशिष्ट समाकल $= -\dfrac{1}{a^2 D'^2}\left[1 - \dfrac{D'^2}{a^2 D^2}\right]^{-1} x$

$$= \frac{1}{-a^2 D^2}\left[1 + \frac{D^2}{a^2 D^2} + \ldots\ldots\right]^{-1} x$$

$$= \frac{1}{-a^2 D^2}[x - 0] = -\frac{1}{a^2} - \frac{1}{D^2} x$$

अतएव पूर्ण हल है-

$$z = \phi_1(y+ax) + \phi_2(y-ax) + \frac{x^3}{6}$$

या

$$z = \phi_1(y+ax) + \phi_2(y-ax) - \frac{xy^3}{2a^2}$$

उदाहरण : 3 हल कीजिये

$\log s = 2x + y$

हल : दिया गया समीकरण है ।

$$\log\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 2x + y$$

या $DD'z = e^{2x+y}$

सहायक समीकरण $m = 0$

अतः पूरक फलन $\phi_1(x) + \phi_2(y)$

विशिष्ट समाकल $= \dfrac{1}{DD'} e^{2x+y} = \dfrac{1}{DD'} e^{2x} e^{y}$

$$=\frac{1}{D}e^{2x}\frac{1}{D'}e^{y}$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}e^{y}=\frac{1}{2}e^{3x+y}$$

अतः पूर्ण हल $z=\phi_1(x)+\phi_2(y)+\frac{1}{2}e^{3x+y}$

उदाहरण : 4 विशिष्ट समाकल ज्ञात कीजिये:

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}-3\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

हल : माना $D\equiv\frac{\partial}{\partial x},\ \ D'\equiv\frac{\partial}{\partial x},\ \ D''\equiv\frac{\partial}{\partial x}$

तब दिया गया समीकरण है-

$$\left(D^3+D'^3+D''^3-3DD'D''\right)U=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

अत विशिष्ट समाकल

$$=\frac{1}{D^3+D'^3+D''^3-3DD'D''}\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$$

x^3 के संगत विशिष्ट समाकल

$$=\frac{1}{D^3}\left[1+\left\{\frac{D'^3}{D^3}+\frac{D''^3}{D^3}-\frac{3DD'D''}{D^3}\right\}\right]^{-1}x^3$$

$$=\frac{1}{D^3}\left[1-\left(\frac{D'^3}{D^3}+\frac{D''^3}{D^3}-\frac{3DD'D''}{D^3}\right)+..........\right]x^3$$

$$=\frac{1}{D^3}x^3 \qquad [\ \therefore D'^3x^3=0 \text{ इत्यादि}]$$

$$=\frac{x^6}{120}$$

इसी प्रकार y^3, z^3 के संगत विशिष्ट समाकल क्रमशः $\frac{y^6}{120}$ तथा $\frac{z^6}{120}$ हैं ।

अब $\left(-3xyz\right)$ के संगत विशिष्ट समाकल

$$=-3\frac{1}{D^3+D'^3+D''^3-3DD'D''}\left(xyz\right)$$

$$=\frac{1}{DD'D''}\left[1+\frac{D^3+D'^3+D''^3}{3DD'D''}\right]xyz$$

$$=\frac{1}{DD'D''}\left[xyz\right]=\frac{x^2y^2z^2}{8}$$

अत: विशिष्ट समाकल है-

$$\frac{x^6}{120}+\frac{y^6}{120}+\frac{z^6}{120}+\frac{x^2y^2z^2}{8}$$

उदाहरण : 5 हल कीजिये

$$\left(D^2+3DD^{'}+2D^{'2}\right)z=x+y$$

हल : सहायक समीकरण है-

$$m^2+3m+2=0 \text{ या } (m+1)(m+2)=0$$

$$\Rightarrow m=-1,-2$$

अत: $C.F.=\varnothing_1(y-x)+\varnothing_2(y-2x)$

$$P.I.=\frac{1}{D^2+3DD^{'}+2D^{'2}}(x+y)$$

$$=\frac{1}{2D^{'2}}\left[1+\left(\frac{D^2+3DD^{'}}{2D^{'2}}\right)\right]^{-1}(x+y)$$

$$=\frac{1}{2D^{'2}}\left[1+\left(\frac{D^2}{2D^{'2}}+\frac{3D^{'}}{2D^{'2}}\right)\right]^{-1}(x+y)$$

$$=\frac{1}{2D^{'2}}\left[1-\frac{3}{2}\frac{D}{D^{'}}+.......\right]^{-1}(x+y)$$

$$=\frac{1}{2D^{'2}}\left(1-\frac{3}{2}\frac{D}{D^{'}}\right)(x+y)$$

(चूँकि $x+y$ प्रथम घात का है अत : प्रसार में उच्च घातें उपेक्षणीय है)

$$=\frac{1}{2D^{'2}}\left[(x+y)-\frac{3}{2}y\right]$$

$$=\frac{1}{2D^{'2}}\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)\right]=x.\frac{y^4}{4}\frac{y^3}{24}$$

उपरोक्त समीकरण $P.I.D^{'}$ का की वर्धमान घातों में प्रसार से भी प्राप्त कर सकते हैं । समीकरण के हल में किसी भी $P.I.$ का उपयोग किया जा सकता है ।

अब पुनः $P.I.=\frac{1}{D^2+3DD^{'}+2D^{'2}}(x+y)$

$$=\frac{1}{D^2}\left[1+\frac{\left(3D^{'}+2D^{'2}\right)}{D^2}\right]^{-1}(x+y)$$

$$=\frac{1}{D^2}\left[1+\frac{3D^{'}}{D}+\frac{2D^{'2}}{D^2}\right]^{-1}(x+y)$$

$$=\frac{1}{D^2}\left[1-\frac{3D^{'}}{D}\right](x+y)$$

$$=\frac{1}{D^2}\left[(x+y)-3x\right]$$

$$=\frac{1}{D^2}(y-2x)$$

$$=\frac{yx^2}{2}-\frac{x^3}{3}$$

अतः व्यापक हलः

$$z=\varnothing_1(y-2x)+\varnothing_2(y-x)+\frac{xy^2}{4}-\frac{y^3}{24}$$

या

$$z=\varnothing_1(y-2x)+\varnothing_2(y-x)+\frac{yx^2}{2}-\frac{x^3}{3}$$

उदाहरण : 6 हल कीजिये-

$$\left(D^2-6DD'+9D'^2\right)z=12x^2+36xy$$

हल $\left(D^2-6DD'+9D'^2\right)z=12x^2+36xy$

सहायक समीकरण है-

$$m^2-6m+9=0 \text{ या } (m-3)^2=0$$

$$\Rightarrow m=3,3$$

अतः $C.F.=\varnothing_1(y+3x)+\varnothing_2(y+3x)$

$$P.I.=\frac{1}{\left(D-D'\right)^2}\left(12x^2+36xy\right)$$

$$=\frac{12}{D^2}\left[1-\frac{3D'}{D}\right]^{-2}\left(x^2+3xy\right)$$

$$=\frac{12}{D^2}\left[1+\frac{6D'}{D}+.......\right]\left(x^2+3xy\right)$$

$$=\frac{12}{D^2}\left[1+\frac{6D'}{D}\right]\left(x^2+3xy\right)$$

$$=\frac{12}{D^2}\left[\left(x^2+3xy\right)+\frac{6D'\left(x^2+3xy\right)}{D}\right]$$

$$=\frac{12}{D^2}\left[\left(x^2+3xy\right)+\frac{6(3x)}{D}\right]$$

$$=12\left[\frac{x^4}{12}+3y\frac{x^3}{6}+18\frac{x^4}{24}\right]$$

$= 10x^4 + 6yx^3$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-4

हल कीजिये

(i) $\left(2D^2 - 5DD' + 2D'^2\right)z = 24(y - x)$

(ii) $\left(D^2 + 3DD' + 2D'^2\right)z = 6(x + y)$

(iii) $\left(D^2 + D'^2\right)z = -4\pi\left(x^2 + y^2\right)$

15.3 अचर गुणांक युक्त असमघात रैखिक आंशिक अवकल समीकरण का हल

आप पूर्व में इस प्रकार के समीकरणों के स्वरूप से परिचित हो चुके हैं। असमघात समीकरण $F\left(D, D'\right)z = f(x, y)$ को हल करने में दो स्थितियाँ बनती हैं- प्रथम स्थिति वह जब $F\left(D, D'\right)$ का रैखिक गुणनखण्डों मे वियोजन संभव हो, तथा दूसरी स्थिति - जिसमें ऐसा संभव न हों । उपरोक्त दोनों स्थितियों में असमघात समीकरण को हल करने की क्रिया विधि पृथक होती है ।

15.3.1 को रैखिक गुणनखण्डों में वियोजित किये जाने योग्य समीकरणों के हल:

माना $F(D, D')z = f(x, y)$ ....(1)

असमघात अचर गुणांक युक्त रैखिक समीकरण हैं जहाँ

$F(D, D')z = (D - m_1D' - \alpha_1)(D - m_2D' - \alpha_2).......(D - m_nD' - \alpha_n)$ ......(2)

तो (2) के प्रत्येक गुणखण्ड के संगत एक हल की प्राप्ति होती है ।

15.3.2 पूरक फलन: समीकरण (1) का पूरक फलन ज्ञात करने के लिए $F(D, D') = 0$

माना $(D - mD' - \alpha_1)z$

या $p - mq = \alpha z$ ....(3)

(3) के सहायक समीकरण हैं-

$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dz}{\alpha z}$ ....(4)

(4) के प्रथम दो पदों से, $dy = -mdx$

समाकलन करने पर $y + mx = c_1$ ....(5)

(4) के प्रथम एवं अंतिम पदों को लेकर समाकलन करने पर,

$z = c_2e^{\alpha x}$ ......(6)

समीकरण (5) एवं (6) से स्पष्ट है कि समीकरण (3) का व्यापक हल

$z = e^{\alpha x}\phi(y + mx)$ .....(7)

है जहाँ ϕ एक स्वेच्छ फलन है।

उपरोक्त विवेचन असमघात समीकरण के पूरक फलन को ज्ञात करने का सूत्र प्रदान करता है। अब हम $F(D,D')$ के गुणनखण्डों की स्थितियों पर विचार करेंगे।

स्थिति- 1

$F(D,D')$ के n गुणनखण्ड असमान है तथा समीकरण (2) के अनुसार हैं । तब प्रत्येक गुणनखण्ड के संगत n स्वंतत्र हल होंगे।

$z = e^{\alpha_1 x}\phi_1(y+m_1x),\ z = e^{\alpha_2 x}\phi_2(y+m_2x),\ z = e^{\alpha_n x}\phi_n(y+m_nx)$ ....(8)

इस स्थिति में (1) का पूरक फलन होगा

$$z = e^{\alpha_1 x}\phi_1(y+m_1x) + z = e^{\alpha_2 x}\phi_2(y+m_2x) + ... + z = e^{\alpha_n x}\phi_n(y+m_nx)$$

स्थिति-2

$F(D,D')$ के गुणनखण्डों की पुनरावृति हो

हम सरलतम स्थिति से आंरम करते हैं । माना गुणनखण्ड $(D-mD'-\alpha)$ की पुनरावृति दो बार होती है। अब निम्न समीकरण पर विचारते हैं।

$(D-mD'-a)^2 z = 0$ ....(9)

माना $(D-mD'-\alpha)z = U$ ....(10)

तब समीकरण (9), (10) से

$(D-mD'-\alpha)U = 0$ ......(11)

$\Rightarrow U = e^{ax}\phi_1(y+mx)$ ....(12)

अत: $(D-mD'-\alpha)z = e^{\alpha x}\phi_1(y+mx)$

या $(D-mD')z = \alpha z + e^{\alpha x}\phi_1(y+mx)$ ....(13)

समीकरण (13) लैग्रेंज का रैखिक समीकरण है अत: इसके सहायक समीकरण है-

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dz}{\alpha z + e^{\alpha x}\phi_1(y+mx)} \quad ....(14)$$

प्रथम एवं द्वितीय पदों को लेकर समाकलन से

$$y + mx = c_3 \quad ....(15)$$

पुन:,समीकरण के प्रथम एवं अंतिम पद से

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{\alpha z + e^{\alpha x}\phi_1(c_3)} \qquad [\therefore y + mx = c_3]$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} - \alpha z = e^{\alpha x}\phi_1(c_3) \quad ....(16)$$

समीकरण (16) साधारण प्रथम कोटि प्रथम घात रैखिक अवकल समीकरण है। अत: इसका हल होगा-

$ze^{-ax} = \int \phi_1(c_3)dx + \phi_2(c_3)$ यहाँ $\phi_2(c_3)$ नियंताक है

$$= x\phi_1(c_3) + \phi_2(c_3)$$

$$\Rightarrow U \quad z = e^{-ax}\left[x\phi_1(c_3) + \phi_2(c_3)\right]$$

$$= e^{\alpha x}\left[x\phi_1(y+mx) + \phi_2(y+mx)\right] \qquad \text{......... (17)}$$

अतएव यदि किसी गुणनखण्ड $(D - mD' - \alpha)$ की पुनरावृति, बार r तो उसके संगत पूरक फलन होगा-

$$= e^{\alpha x}\left[\phi_1(y+mx) + x\phi_2(y+mx) + ... + x^{r-1}\phi_r(y+mx)\right] \qquad \text{..........(18)}$$

15.3.3 विशिष्ट समाकल:

असमघात रैखिक समीकरणों के विशिष्ट समाकलन कतिपय फलनों के संगत सुगमता से प्राप्त किये जा सकतें हैं। इन्हें प्राप्त करने की विधियाँ साधारण अचर गुणांक युक्त रैखिक अवकल समीकरणों के विशिष्ट समाकल प्राप्त करने जैसी हैं।

1. माना $f(x,y) = e^{ax+by}$

तब विशिष्ट समाकल $= \dfrac{1}{F(D,D')}e^{ax+by} = \dfrac{1}{F(a,b)}e^{ax+by}$

जबकि ; $F(a,b) \neq 0$

e^{ax+by} के उत्तरोत्तर अवकलन से व्यापक रूप में

$$D^l D'^m e^{ax+by} = a^l b^m e^{ax+by}$$

$$\therefore F(D,D')e^{ax+by} = F(a,b)e^{ax+by} \qquad \text{................(19)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F(D,D')}e^{ax+by} = \frac{1}{F(a,b)}e^{ax+by}, F(a,b) \neq 0$$

2. जब $f(x,y) = e^{ax+by}V$, जहाँ V, x तथा y का फलन है।

उत्तरोत्तर अवकलन से

$$^1\left(e^{axa+by}V\right) = e^{(ax+by)}(D'+b)^1 V$$

$$D^1 D'^m\left(e^{ax+by}V\right) = e^{(ax+by)}(D'+b)^m V$$

एवं $$D^1 D'^m\left(e^{ax+by}V\right) = e^{(ax+by)}(D'+b)^m V$$

$$\Rightarrow F(D,D')\left(e^{ax+by}V\right) = e^{ax+by}(D+a, D'+b)V$$

फलत : विशिष्ट समाकल

$$\Rightarrow \frac{1}{F(D,D')}\left(e^{ax+by}V\right) = e^{ax+by}\frac{1}{F(D+a, D'+b)}V$$

सूत्र (20) की सहायता से सूत्र (19) को संशोधित करते हैं जबकि $F(a,b) = 0$ है। अत: जब $F(a,b) = 0$ है तो e^{ax+by} के विशिष्ट समाकल को निम्न प्रकार प्राप्त करते हैं-

$$\frac{1}{F(D,D')}e^{ax+by}=e^{ax+by}\frac{1}{F(D+a,D'+b)}(1) \qquad \text{...........(21)}$$

3. $f(x,y)=\cos(ax+by)$ या $\sin(ax+by)$

$\cos(ax+by)$ के उत्तरोत्तर अवकलन से,

$$D\cos(ax+by)=-a\sin(ax+by); D'\cos(ax+by)-b\sin(ax+by)$$

$$D^2\cos(ax+by)=-a^2\cos(ax+by); D'^2\cos(ax+by)=-b^2\cos(ax+by)$$

$$DD'\cos(ax+by)=-ab\cos(ax+by)$$

$$\Rightarrow F(D^2,DD',D'^2)\cos(ax+by)=F(-a^2,a,b-b^2)\cos(ax+by)$$

या $\dfrac{1}{F(D^2,DD',D'^2)}\cos(ax+by)=\dfrac{1}{F(-a^2,a,b-b^2)}\cos(ax+by)$

जहाँ $F(-a^2,a,b-b^2)\neq 0$

यदि $F(-a^2,a,b-b^2)=0$ है तो विशिष्ट समाकल:

$\dfrac{1}{F(D,D')}\cos(ax+by)=\dfrac{1}{F(D,D')}e^{i(ax+by)}$ का वास्तविक भाग.......(23)

इसी प्रकार $\sin(ax+by)$ के संगत विशिष्ट समाकल प्राप्त किया है-

$$\frac{1}{F(D^2,DD',D'^2)}\sin(ax+by)=\frac{1}{F(-a^2,a,b-b^2)}\sin(ax+by)$$

जहाँ $F(-a^2,a,b-b^2)\neq 0$ ....(24)

यदि $F(-a^2,a,b-b^2)=0$ है तो विशिष्ट समाकल:

$\dfrac{1}{F(D,D')}\sin(ax+by)=\dfrac{1}{F(D,D')}e^{i(ax+by)}$ का काल्पनिक भाग .....(25)

4. जब $f(x,y)=x^m y^m$ है

विशिष्ट समाकल $\dfrac{1}{F(D,D')}x^m y^m$ ज्ञात करने हेतु

$\dfrac{1}{F(D,D')}x^m y^m$ का D या D' की आरोही घातों में प्रसार करते । यदि $n>m$ है तो प्रसार

$\dfrac{D'}{D}$ की आरोही घातों में तथा $n>m$ हो तो प्रसार $\dfrac{D}{D'}$ की आरोही घातों में किया जाता है। प्रसार

के पश्चात अवकल / समाकल संकारक की क्रिया से अभीष्ट विशिष्ट समाकल मिलता है।

उदाहरण : 1 हल कीजिये

$$\left(D^2, DD', D'-1\right)z = xy+1$$

हल : पूरक फलन $e^x\phi_1(y)+e^{-x}\phi_2(y+x)$

विशिष्ट समाकल $=\dfrac{1}{(D-1)(D-D'+1)}xy+1$

$$=-\{1-D\}^{-1}\{1+(D-D')\}^{-1}\{xy+1\}$$

$$=-\{1+D+D^2+....\}\left\{1-(D+D')+(D+D')^2+....\right\}(xy+1)$$

$$=-\{1+D+.....\}\{(xy+1)-y+x-2\}$$

$$=-\{xy+1-y+x-2+y+1\}$$

$$=-\{xy+x\}$$

अत: पूर्ण हल

$$z=e^x\phi_1(y)+e^{-x}\phi_2(y-x)-xy-x$$

उदाहरण : 2 हल कीजिये

$$(DD'+D-D'-1)z = xy$$

हल : अवकल समीकरण $(DD'+D-D'-1)z = xy$ ....(1)

या $(D-1)(D'+1)z = xy$ असमघात है

अतएव पूरक फलन $=e^{1.x}\phi_1(y+0.x)+e^{(-1)x}\phi_2(x)$

$$=e^x\phi_1(y)+e^{-x}\phi_2(x)$$

विशिष्ट समाकल $=\dfrac{1}{(D-1)(D'+1)}(xy)$

$$=-\left[(1-D)^{-1}(1+D)^{-1}\right](xy)$$

$$=-\left[\left(1+D-D^2+.....\right)\left(1+D-D'^2-......\right)\right](xy)=$$

$$-[1+D-D'-DD'-.....](xy)$$

$$=[xy+y-x-1]$$

अतएव पूर्ण हल:

$$z=e^x\phi_1(y)+e^{-x}\phi_2(x)-xy-y+x+1$$

उदाहरण. 3 हल कीजिये

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}-\frac{\delta^2 z}{\delta x\partial y}+\frac{\delta z}{\delta y}=\cos(x+2y)+e^y+z$$

हल : दिया गया समीकरण हैं-

$$\left(D^2-DD'+D'-1\right)z=\cos(x+2y)+e^y$$

या $\quad (D-1)(D-D'+1)z=\cos(x+2y)+e^{y}$ ....(1)

अत: पूरक फलन $e^{1.x}\phi_1(y)+e^{(-1)}\phi_2(y+x)$

$$=e^{x}\phi_1(y)+e^{-x}\phi_2(y+x) \qquad \text{...............(2)}$$

विशिष्ट समाकल $\dfrac{1}{(D-1)(D-D'+1)}\left\{\cos(x+2y)+e^{y}\right\}$

$\cos(x+2y)$ के संगत विशिष्ट समाकल

$$=\frac{1}{D^2-DD'+D'-1}\cos(x+2y)$$

$$=\frac{1}{-1^2-(-1.2)+D'-1}\cos(x+2y)=\frac{1}{D'}\cos(x+2y)$$

$$=\frac{D'}{D'^2}\cos(x+2y)=\frac{D'}{-2^2}\cos(x+2y)$$

$$-\frac{1}{4}\left[-2\sin(x+2y)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sin(x+2y)$$

e^{y} के संगत विशिष्ट समाकल

$$\frac{1}{(D-D'+1)(D-1)}e^{y}=\frac{1}{(D-D'+1)(0-1)}e^{y}$$

$$=-e^{-y}\frac{1}{\left[D-(D'+1)+1\right]}$$

$$=-e^{y}\frac{1}{D-D'}(1)$$

$$=-e^{y}\frac{1}{D}\left[1-\frac{D'}{D}\right]^{-1}(1)$$

$$=-e^{y}.\frac{1}{D}\left[1+\frac{D'}{D}+\frac{D'^2}{D^2}+.....\right]$$

$$=-e^{y}\frac{1}{D}(1)=-e^{y}.x$$

अत: पूर्ण हल : $z=e^{x}\phi_1(y)+e^{-x}\phi_2(y-x)+\dfrac{1}{2}\sin(x+2y)-xe^{y}$

उदाहरण : 4 हल कीजिये

$$=(D+D'+1)(D+2D'+3)z=6x+9y$$

हल : पूरक फलन $=e^{x}\phi_1(y-x)+e^{3x}\phi_2(y-2x)$

$$=\frac{1}{(D+D'+1)(D+2D'+3)}(6x+9y)$$

विशिष्ट समाकल

$$=\frac{2}{3}\left[\left\{1-(D+D')\right\}^{-1}\left\{1-\frac{(D+2D')}{3}\right\}^{-1}\right](2x+3y)$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left\{1-(D+D')+\ldots\ldots\right\}\left\{1-\frac{(D+2D')}{3}+\ldots\ldots\right\}\right](2x+3y)$$

$$=\frac{2}{3}\left[1+(D+D')+\frac{(D+2D')}{3}+\ldots\ldots\right](2x+3y)$$

$$=\frac{2}{3}\left[1+\frac{4}{3}D+\frac{5}{3}D'+\ldots\ldots\right](2x+3y)$$

$$=\frac{2}{3}\left[(2x+3y)+\frac{4}{3}(2)-\frac{5}{3}(3)\right]=\frac{4}{3}x+2y+\frac{46}{9}$$

अत: पूर्ण हल $z=e^{x}\phi_1(y-x)+e^{3x}\phi_2(y-2x)+\frac{4}{3}x+2y+\frac{46}{9}$

उदाहरण : 5 हल कीजिये

$$(D-3D'-2)^2 Z=2e^{2x}\tan(y+3x)$$

हल : $(D-3D'-2)$ की पुनरावृत्ति दो बार हुई है अतः

पूरक फलन $=e^{2x}\left[\phi_1(y+3x)+x\phi_2(y+3x)\right]$

विशिष्ट समाकल $=\frac{1}{(D-3D'-2)^2}\left[2e^{2x}\tan(y+3x)\right]$

$$=2e^{2x}\frac{1}{\left\{(D+2)-3(D'+0)-2\right\}^2}\tan(y+3x)$$

$$=2e^{2x}\frac{1}{(D-3D')^2}\tan(y+3x)$$

$=2e^{2x}.\frac{x^2}{1^2.2}\tan(y+3x)$ (समघात समीकरणों के विशिष्ट समाकल के सूत्र से)

$=x^2e^{x}\tan(y+3x)$

उदाहरण : 6 हल कीजिये

$$\left(D^2-D'^2-3D+3D'\right)z=xy+e^{x+2y}$$

हल : दिया गया समीकरण असमघात अचर गुणांक युक्त आशिक अवकल समीकरण है जिसे निम्न प्रकार लिखा जा सकता है-

$$(D-D')(D-D'-3)z=xy+e^{x+2y} \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

(1)का पूरक फलन $=e^{0.x}\phi_1(y+x)+e^{3x}\phi_2(y-x)$

विशिष्ट समाकल $= \dfrac{1}{(D-D')(D-D'-3)}\{xy+e^{x+2y}\}$

अब xy के संगत विशिष्ट समाकल

$$= \frac{1}{(D-D')(D+D'-3)}xy$$

$$= -\frac{1}{3D}\left(1-\frac{D'}{D}\right)^{-1}\left(1-\frac{D'+D}{3}\right)^{-1}xy$$

$$= -\frac{1}{3D}\left[1+\frac{D'}{D}+\frac{D'^2}{D^2}+.......\right]\left(1+\frac{D'+D}{3}+\left(\frac{D'+D}{3}\right)^2+.....\right)xy$$

$$= -\frac{1}{3D}\left[1+\frac{D'}{D}+.......\right]\left(1+\frac{D+D'}{3}+\frac{2D'D}{9}+.....\right)xy$$

$$= -\frac{1}{3D}\left[1+\frac{D}{3}+\frac{2}{3}D'+\frac{D'}{D}+\frac{2D'D}{9}.......\right](xy)$$

$$= -\frac{1}{3D}\left[xy+\frac{y}{3}+\frac{2}{3}x+\frac{1}{D}x+\frac{2}{9}\right]$$

$$= -\frac{1}{3D}\left[y+\frac{x^2}{2}+\frac{y}{3}x+\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{2}{9}x\right]$$

अब e^{x+2y} के संगत विशिष्ट समाकल

$$= \frac{1}{(D-D'-3)(D-D')}e^{x+2y}$$

$$= \frac{1}{(D-D'-3)}.\frac{1}{(1-2)}e^{x+2y} = -\frac{1}{(D-D'-3)}e^{x+2y}$$

$$= -e^{x+2y}\frac{1}{[(D+1)(D'+2)-3]}(1) \quad [\therefore F(1,2)=0]$$

$$= -e^{x+2y}\frac{1}{(D+D^1)}(1) = -e^{x+2y}.\frac{1}{D}\left(1+\frac{D'}{D}\right)^{-1}(1)$$

$$= -e^{x+2y}.\frac{1}{D}\left[1-\frac{D'}{D}+\left(\frac{D'}{D}\right)^2+.......\right]$$

$$= -e^{x+2y}.\frac{1}{D}[1] = -xe^{x+2y}$$

अतः पूर्ण हल $z=\phi_1(y+x)+e^{3x}.\phi_2(y-x)-\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{yx^2}{2}+\dfrac{xy}{3}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{2}{9}x\right]-xe^{x+2y}$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-5

हल कीजिये

(i) $\left(D^2-3DD'\right)z=x^2y$

(ii) $\left(D^3-DD'^2-D^2+DD\right)z=\frac{(x+2)}{x^2}$

(iii) $\left(D^2+DD'-6D\right)z=x^2\cos(x+y)$

15.3.4 $F(D,D')$ को रैखिक गुणनखण्डो में वियोजित न किये जा सकने योग्य असमघात समीकरणों का हल:।

पूरक फलन:

असमघात समीकरणों में जब $F(D,D')$ का D तथा D' के रैखिक गुणनखण्डों में वियोजन असंभव है तो पूर्व अनुच्छेद में वर्णित विधि से पूरक फलन को ज्ञात नहीं कर सकते हैं। इस स्थिति में हम प्रयोगी हल (Trial solution) $z=Ae^{hx+ky}$ को समीकरण $F(D,D')z=0$ में प्रतिस्थापित करके

नियतांको h तथा k में संबध प्राप्त करते हैं। h,k के इस संबध के लिये $z=Ae^{hx+ky}$ या व्यापकत:

$z=\sum Ae^{hx+ky}$ समीकरण के पूरक फलन को व्यक्त करता है।

विशिष्ट समाकल: पूर्व वर्णित विधियों से प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण -1 हल कीजिये

(i) $\left(D^2-4DD'+D-1\right)z=0$

(ii) $\left(D^2-2D'\right)z=0$

(iii) $\left(D^2-DD'-2D\right)z=\sin(2x+4y)$

हल : (i) $\left(D^2-4DD'+D-1\right)$ को गुणनखण्ड रूप में अंसभव है अतएव इसका पूरक फलन माना $z=Ae^{hx+ky}$ है।

अत: $Dz=Ahe^{hx+ky}=hz$

$$D^2z=Ah^2e^{hx+ky}=h^2z$$

$$DD'z=Ahe^{hx+ky}=hkz$$

इन अवकलजों को दिये गये समीकरण में रखने पर

$$\left(h^2-4hk+h-1\right)z=0$$

$$\Rightarrow h^2-4hk+h-1=0$$

$$\Rightarrow k\frac{h^2+h-1}{4h}$$

अतएव दिये गये समीकरण का पूरक फलन होगा

$$z=Ae^{hx\left\{\frac{h^2-4h-1}{4h}\right\}y}$$

चूँकि उपरोक्त हल h के प्रत्येक मान के लिये दिये गये समीकरण को संतुष्ट करता है अत: हल का व्यापक रूप होगा

$$z = \sum Ae^{hx\left\{\frac{h^2-4h-1}{4h}\right\}y}$$

(ii) $\left(D^2 - 2D'\right)z = 0$

स्पष्टत: $D^2 - 2D'$ को रैखिक गुणनखण्ड रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है अतएव इसका पूरक फलन माना $z = Ae^{hx+ky}$ रूप का है।

अब $\quad Dz = Ahe^{hx+ky} = hz$

$$D^2z = Ah^2e^{hx+ky} = h^2z$$

$$DD'z = Ahe^{hx+ky} = hkz$$

उपरोक्त अवकलजों को दिये गये समीकरण में रखने पर

$$\left(h^2 - 2k\right)z = 0 \Rightarrow k = \frac{h^2}{2}$$

अत: पूरक फलन $z = Ae^{hx+\frac{h^2}{2}y}$

जहाँ A तथा h स्वेच्छ अचर हैं ।

पूरक फलन का व्यापक रूप होगा-

$$z = \sum Ae^{hx+\frac{h^2}{2}y}$$

(iii) दिया गया समीकरण असमघात है जिसे रैखिक गुणनखण्ड के रूप में व्यक्त करना अंसभव है अतएव माना कि इस समीकरण का पूरक फलन

$$z = Ae^{hx+ky}$$

अत: $\quad Dz = Ahe^{hx+ky} = hz$

$$D^2z = h^2z$$

$$DD'z = Ahe^{hx+ky} = hkz$$

इन अवकलजों को दिये गये समीकरण में रखने पर

$$\left(h^2 - hk - 2k\right)z = \sin\left(3x + 4y\right)$$

अत: पूरक फलन के लिये

$$\left(h^2 - hk - 2k\right) = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{h^2 - 2h}{h} = h - 2$$

अत: पूरक फलन $= \sum Ae^{hx+(h-2)y}$

विशिष्ट समाकल $= \dfrac{1}{D^2 - DD' - 2D}\sin\left(3x + 2y\right)$

$$= \frac{1}{-3^2 - \left(-3.4\right) - 2D}\sin\left(3x + 2y\right)$$

$$= \frac{1}{3-2D}\sin(3x+2y) = \frac{3+2D}{9-4D^2}\sin(3x+2y)$$

$$= \frac{3+2D}{9-4(-3)^2}\sin(3x+2y) = \frac{1}{45}\left[3\sin(3x+2y)+6\cos(3x+2y)\right]$$

अत: पूर्ण हल

$$= \sum Ae^{hx+(h-2)y} = \frac{1}{15}\left[\sin(3x+4y)+2\cos(3x+4y)\right]$$

15.4 अचर गुणाक युक्त रैखिक समीकरण मे समानयन योग्य समीकरण

इस अनुच्छेद में हम चर गुणांको (variable coefficients) से युक्त समीकरण पर चर्चा करेंगे जिन्हें उचित प्रतिस्थापन से अचर गुणांक युक्त रैखिक समीकरण में समानयित करके हल किया जाता है।

समीकरण

$$A_0x^n\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1x^{n-1}y\frac{\partial' z}{\partial^{xn-1}} + ...+ A_ny^n\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = f(x,y) \quad ......(1)$$

पर विचार करते हैं।

माना $U = \log x$ या $x = e^U$; $v = \log y$ या $y = e^v$

तब $\dfrac{\delta z}{\delta x} = \dfrac{\delta z}{\delta U}.\dfrac{\delta U}{\delta x} = \dfrac{\delta z}{\delta U}.\dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow x\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta U} = Dz, \text{ जहाँ } D \equiv \frac{\delta}{\delta U}$$

पुन: इसी प्रकार,

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}.\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{1}{x}.\frac{\delta z}{\delta U}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta z}{\delta U}\right)\frac{1}{x^2}\frac{\delta z}{\delta U}$$

$$= \frac{1}{x}\frac{\delta}{\delta U}\left(\frac{\delta z}{\delta U}\right).\frac{\delta U}{\delta x} - \frac{1}{x^2}\frac{\delta z}{\delta U}$$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{\delta^2 z}{\delta U^2} - \frac{1}{x^2}\frac{\delta z}{\delta U}$$

$$\Rightarrow x^2\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 z}{\delta U^2} - \frac{\delta z}{\delta U} = D(D-1)z$$

इसी प्रकार हम पाते हैं कि

$$x^n\frac{\delta^n z}{\delta x^n} = D(D-1)(D-2).........(D-n+1)z$$

$$y\frac{\delta z}{\delta y} = D'z, \quad y^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = D'(D'-1)z$$

$$y^n\frac{\delta^n z}{\delta y^n} = D'(D'-1)(D'-2).........(D'-n+1)z$$

एवं $$xy\frac{\delta^2 z}{\partial x \delta y} = DD'z$$

$$x^l y^k \frac{\delta^{l+k} z}{\partial x \delta y} = D(D-1).....(D-l+l).D'(D'-1)........(D'-k+1)z$$

उपरोक्त अवकलजों को समीकरण (1) में रखने पर हमें अचर गुणांक युक्त रैखिक आशिक अवकल समीकरण प्राप्त होता है जिसे पूर्व अनुच्छेदों में वर्णित विधियों से हल किया जाता है।

उदाहरण- 1 हल कीजिये

$$2x^2\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} - 5xy\frac{\delta^2 z}{\delta x \partial y} + 2y^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} + 2x\frac{\delta z}{\delta x} + 2y\frac{\delta z}{\delta y} = 0$$

हल : माना $x = e^U$ या $U = \log x$

तथा $y = e^V$ या $V = \log y$

उपरोक्त प्रतिस्थापन से दिया गया समीकरण बनता है

$$\left[2D(D-1) - 5DD' + 2D'(D'-1) + 2(D+D')\right]z = 0$$

जहाँ $$D \equiv \frac{\delta}{\delta U}, \quad D' \equiv \frac{\delta}{\delta V}$$

या $$\left(2D^2 - 5DD'2D'^2\right)z = 0$$

या $$(2D-D')(D-2D')z = 0$$

अत: समीकरण का व्यापक हल है।

$$z = e^{0.U}\phi_1(2V+U) + e^{0.V}\phi_2(V+2U)$$

$$\phi_1(2\log y + \log x) + \phi_2(\log y + 2\log x)$$

$$\phi_1\left(\log xy^2\right) + \phi_2\left(\log yx^2\right)$$

जहाँ ϕ_1, ϕ_2 स्वेच्छ फलन हैं।

उदाहरण : 2 हल कीजिये

$$x^2\frac{\delta^2 z}{\delta x^2} - 3xy\frac{\delta^2 z}{\delta x \partial y} + 2y^2\frac{\delta^2 z}{\delta y^2} + x\frac{\delta z}{\delta x} + 2y\frac{\delta z}{\delta y} = x + 2y$$

हल : माना म् -र छय 7 द छ'

तब उपरोक्त प्रतिस्थापन से दिया गया समीकरण बनता

$$\left[D(D-1) - 3DD' + 2D'(D'-1) + 2D + D'\right]z = e^U + 2e^V$$

जहाँ $D \equiv \frac{\delta}{\delta U}$, $D' \equiv \frac{\delta}{\delta V}$

या $(2D - D')(D - 2D')z = e^U + 2e^V$

समीकरण (1) D, D' में समघात समीकरण है।

अत: पूरक फलन $= \phi_1(V+U) + e^{0.V}\phi_2(V+2U)$

$$\phi_1(\log y + \log x) + \phi_2(\log y + 2\log x)$$

$$\phi_1(\log xy) + \phi_2(\log yx^2)$$

$$\psi_1(xy) + \psi_2(x^2 y)$$

जहाँ $\phi_1, \phi_1 \quad \psi_1, \psi_2$ स्वेच्छ फलन हैं।

विशिष्ट समाकल $= \frac{1}{(D-1)(D-2D')}\left(e^U + 2e^V\right)$

$$= \frac{1}{(1-0)(1-0)}e^U + 2.\frac{1}{(0-1)(0-2)}e^V$$

$$= e^U + e^V = x + y$$

अत: पूर्ण हल $z = \psi_1(xy) + \psi_2(xy^2) + x + y$

उदाहरण : 3 हल कीजिये

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y^3$$

हल : $x = e^U, y = e^V$ लेने पर दिया गया समीकरण बनता है-

$$\left[D(D-1) + D'(D'-1) + 2DD'\right]z = e^{2U} + e^{3V}$$

जहाँ $\quad D \equiv \frac{\partial}{\partial U}, D'\frac{\partial}{\partial V}$

या $\quad \left[D^2 + 2DD' + D'^2 - D - D'\right]z = e^{2U+3V}$

या $\quad (D + D')(D + D' - 1)z = e^{2U+3V}$ ....(1)

अत: समीकरण (1) का पूरक फलन

$$= \phi_1(V-U) + e^U\phi_2(V-U)$$

$$= \phi_1(\log y - \log x) + x\phi_2(\log y - \log x)$$

$$= \phi_1\left(\log\frac{y}{x}\right) + x\phi_2\left(\log\frac{y}{x}\right)$$

$$= \psi_1\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi_2\left(\frac{y}{x}\right)$$

विशिष्ट समाकल $= \frac{1}{(D+D')(D+D'-1)}e^{2U+3V}$

$$=\frac{1}{(2+3)(2+3-1)}e^{2U+3V}$$
$$=\frac{1}{20}e^{2U+3V}$$
$$=\frac{1}{20}x^2y^3$$

अत: पूर्ण हल

$$z=\psi_1\left(\frac{x}{y}\right)+x\psi_2\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{20}x^2y^3$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-6

हल कीजिये

$(i)\left(D^2-D'\right)(D-2D')z=e^{2x+y}+xy$

$(ii)\left(D^2-4DD'+D-1\right)=e^{3x-2y}$

$(iii)\left(D^2-D'-1\right)z=x^2y$

$(iv)\left(D^3-D'\right)z=xe^{ax+a^2y}$

$(v)\left(D^3-3DD'+D+1\right)z=e^{2x+3y}$

15.5 सारांश

इस इकाई के अध्ययन में आपने जाना कि किस प्रकार अचर गुणांक युक्त समघात/असमघात रैखिक आंशिक अवकल समीकरण के पूरक फलन, विशिष्ट समाकल ज्ञात जाते हैं। आपने देखा कि रैखिक आंशिक अवकल समीकरण का पूर्ण हल, पूरक फलन एवं विशिष्ट समाकल का योग होता है। कतिपय विशिष्ट रूप के फलनों के संगत विशिष्ट समाकल लघु विधियों से प्राप्त किये जा सकते है अन्यथा इन्हें व्यापक विधि से प्राप्त करते हैं।

इसके अतिरिक्त आपने चर गुणांक युक्त रैखिक अवकल समीकरण को अचर गुणांक युक्त रैखिक अवकल समीकरण में परिवर्तित करके हल करने की विधि को समझा।

15.6 शब्दावली

अचर गुणांक	Constant coefficients
स्वतंत्र हल	Independent solution
व्यापक हल	General solution
सहायक समीकरण	Auxiliary equation
पुनरावत्त मूल	Repeated roots
स्वेच्छ फलन	Arbitrary function
समानयन योग्य समीकरण	Reducible equation

15.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन -1

$(i)\phi_1(y+ix)+\phi_2(y-ix)$

$(ii)\phi_1(y+2x)+\phi_2(y-2x)$

$(iii)\phi_1(y+x)+\phi_2(y-x)+\phi_3(y+ix)+\phi_4(y-ix)$

$(iv)\phi_1(y+x)+x\phi_2(y-x)+x^2\phi_3(y+x)$

स्वमूल्यांकन-2

$(i)x\sin y$ $\quad$ $(ii)\frac{1}{27}\sin(x+2y)+xe^y$

$(iii)2x^3y+x^4$ $\quad$ $(iv)ye^x$

स्वमूल्यांकन-3

$(i)\phi_1(y-x)\phi_2(y-2x)+\frac{1}{240}(2x+3y)^3$

$(ii)\phi_1(y+x)x\phi_2(y+x)+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\phi(x+y)$

$(iii)\phi_1(x+2y)+x\phi_2(x+2y)+2x^2\log(x+2y)$

$(iv)\phi_1(y-x)+\phi_2(y-2x)-\frac{7}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2y$

स्वमूल्यांकन-4

$(i)\phi_1(y+2x)+\phi_2\left(\frac{2y+x}{2}\right)+6x^2y+3x^3$

$(ii)\phi_1(y-x)+\phi_2(y-2x)+3x^2y-2x^3$

$(iii)\phi_1(y+ix)+\phi_2(y-ix)-2\pi^2x^2y^2$

स्वमूल्यांकन-5

$(i)\phi_1(y)+\phi_2(y+3x)+\frac{x^4y}{12}+\frac{x^5}{20}$

$(ii)\phi_1(y)+\phi_2(y+x)+e^x\phi_3(y-x)+\log x$

$(iii)\phi_1(y+2x)+\phi_2(y-3x)+\frac{1}{4}\left\{\left(x^2-\frac{13}{8}\right)\cos(x+y)+\frac{3x}{2}\sin(x+y)\right\}$

स्वमूल्यांकन-6

$(i)\phi_1(y+2x)+\sum Ae^{hx+h^2y}+\frac{x}{3}e^{2x+y}+\frac{xy^3}{12}+\frac{y^4}{96}$

$(ii)\sum Ae^{\left(hx+\frac{h^2+h-1}{h}.y\right)}+\frac{1}{35}e^{3x-2y}$

$(iii) \sum Ae^{\left(hx+\left(h^2-1\right)y\right)} + x^2 - x^2y - 2y + 4$

$(iv) \sum Ae^{hx+h^2y} - e^{ax+a^2y} \cdot \left(\frac{x^2}{4a} - \frac{x^2}{4a^2}\right)$

$(v) \sum Ae^{(hx+\frac{h^2+h+1}{3h}.y)} - \frac{1}{7}e^{2x+3y}$

15.8 अभ्यास प्रश्न

हल कीजिये

1. $r + t + 2s = 0$

उत्तर $z = \phi_1(y-x) + x\phi_2(y-x)$

2. $\left(D^3D'^2 + D^2D'^3\right)z = 0$

उत्तर $z = \phi_1(y) + x\phi_2(y) + \phi_3(x) + y\phi_4(x) + \phi_5(y-x)$

3. निम्नलिखित अवकल समीकरणों का पूर्ण हल ज्ञात कीजिये

$(i)\left(2D^2 - 5DD' + 2D'^2\right)z = (y-z)$

उत्तर $z = \phi_1\left(y + \frac{x}{2}\right) + \phi_2(y+2x) + \frac{1}{120}(y-x)^3$

$(ii)\left(D^2 + D'^2\right)z = (x+y)$

उत्तर $z = \phi_1(y+ix) + \phi_2(y-ix) + \left(\frac{x+y}{12}\right)^3$

$(iii)\left(D^3 - 6D^2D' + 11DD' - 6D'^3\right)z = e^{x+4y}$

उत्तर $z = \phi_1(y+x) + \phi_2(y+2x) + \phi_3(y+3x) - \frac{1}{231}e^{x+4y}$

$(iv)\left(D^3 - D'^3\right)z = x^3y^3$

उत्तर $z = \phi_1(y+x) + \phi_2(y+wx) + \phi_3\left(y+w^2x\right) + \frac{1}{120}x^6y^3 + \frac{1}{10080}x^9$

जहाँ w, w^2 इकाई के घन मूल है।

4. व्यापक विधि के प्रयोग से निम्नलिखित अवकल समीकरणों का पूर्ण हल ज्ञात करें।

$(i)\left(D^2 - DD' + 2D'^2\right)z = (y-1)e^x$

उत्तर $z = \phi_1(y-x) + \phi_2(y+2x) + ye^x$

$(ii)\ p + q = \sin x$

उत्तर $z = \phi_1(y-x) - \cos x$

$(iii)\left(D^2 - 4D'^2\right)z = \frac{4x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$

उत्तर $z = \phi_1(y+2x) + \phi_2(y-2x) + x\log x + y\log x + 3x$

$(iv)\left(D^2+DD'-6D'^2\right)z = y\sin x$

$z=\phi_1(y+2x)+\phi_2(y-3x)-y\sin x-\cos x$

5. हल कीजिये

$(i)\left(D^3-3DD'^2-2D'^3\right)z=\cos(x+2y)-(3+2x)e^x$

उत्तर $z=\phi_1(y-x)+x\phi_2(y-x)+\phi_3(y+2x)+\frac{1}{27}\sin(x+2y)+xe^x$

$(ii)\left(D^2-2DD'+D'^2\right)z=e^{2x+3y}+x^3$

उत्तर $z=\phi_1(y+x)+x\phi_2(y+x)+e^{2x+3y}+\frac{1}{20}x^5$

$(iii)\left(D^2+3DD'+2D'2\right)z=24(x+y)$

$z=\phi_1(y-x)+\phi_2(y-2x)-8x^3+12x^2y$

$(iv)\left(D^2-D'^2\right)z=2(x-y)$

उत्तर $z=\phi_1(y+x)+\phi_2(y-x)+\frac{x^3}{3}-x^2y$

6. हल कीजिये-

$(i)\left(D^2+D-D'^2-D'\right)z=e^{4x+3y}$

उत्तर $z=\phi_1(y+x)+e^{-x}\phi_2(y-x)+\frac{1}{8}e^{4x+3y}$

$(ii)\left(D^2-D'\right)z=\cos(3x-y)$

उत्तर $z=\sum Aehx+h^2y-\frac{1}{82}\left[9\cos(3x-y)-\sin(3x-y)\right]$

जहाँ A,h स्वेच्छ नियतांक हैं।

$(iii)\left(D^2-D'-1\right)z=x^2y$

उत्तर $z=\sum Ae^{hx+\left(h^2-1\right)y}+x^2-x^2y-2y+4$

$(iv)\, x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x^3y^{-2}$

उत्तर $z=f_1(y)+x^2f_2\left(\frac{y}{x^2}\right)-\frac{x^3}{9y^2}$

$(v)\left(x^2D^2-2xyDD'-3y^2D'^2+xD-3yD'\right)z=x^2y\cos\left(\log x^2\right)$

उत्तर $z=f_1\left(x^3y\right)+f_2\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{65}\left[7\cos\left(\log x^2\right)-4\sin\left(\log x^2\right)\right]$

ISBN-13/978-81-8496-014-3