组合数学

wy

大概要讲这些

- 基本的组合计数
- 容斥原理
- 莫比乌斯反演
- Pólya计数

基本的计数

- 加法原理
- 乘法原理
- 排列数
- 组合数

加法原理

- 描述_1: 设集合S被划分成两两不相交的部分 S1,S2,...,Sn 则 S的对象数目可以通过确定它的每一个部分对象的数目相加得到

$$|S|=|S1|+|S2|+......+|Sn|$$

- 描述_2: 如果有p种方法能够从一堆中选出一个物体，又有q种方法从另一堆中选择出一个物体，那么从两堆中选出一个物体有p+q种方法；

hihocoder 1143

- 有一个2xN的长条形棋盘，然后用1x2的骨牌去覆盖**整个**棋盘。对于这个棋盘，一共有多少种不同的覆盖方法呢？答案对19999997取模

- 1≤N≤100,000,000

- 一、直接枚举前几项找规律

- 二、假设：2*n的棋盘的完美覆盖数为f（n）。排到第n位时，分两种情况考虑。第n位要用竖立的骨牌完成完美覆盖（方案数为f(n-1)）；第n位要用横放的骨牌完成完美覆盖（方案数为f(n-2))

故　　$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$

xdoj 1063 Chemistry Problem

- 用2种颜色对排成一排的n个方块染色，将所有方块的顺序和颜色都反转，得到的染色方案与原染色方式视为等价的，那么有多少种不同的染色方案？

- $1 \leqslant n \leqslant 1000,000,000$

- n是奇数时，显然对每种染色方式都恰有一种对应的等价染色方式，故$ans = 2^{n-1}$

- n是偶数时，分两种情况：有与自己等价的与自己不等价的情况

  1.等价 $ans1 = 2^{\frac{n}{2}}$

  2.不等价 $ans2 = (2^n - 2^{\frac{n}{2}})/2$

乘法原理

- 描述_1: 令S是对象有序对(a, b) 的集合，其中第一个对象a来自大小为 p的一个集合，而对于对象 a的每个选择，对象 b有q种选择。于是 S的大小是p*q

  $$|S|=p*q$$

- 描述_2: 如果第一项任务是p个结果，而不论第一项的结果如何，第二项任务都有q个结果，那么这两项任务连续执行就有p*q个结果

hdu 6016 Count the Sheep

- 总共有n只男羊和m只母羊， n只男羊编号分别为1~n，m只女羊编号分别为1~m 。给出k对关系(x,y)，表示第x只男羊和第y只母羊是朋友。求能够满足“A-B-C-D”这样序列的方案数，满足A-B、B-C、C-D是朋友关系且A、B、C、D各不相同。T组数据。

数据保证——
不会给出重复的朋友关系
1 <= T <= 1000
对于30%的数据，1 <= n, m, k <= 100
对于99%的数据，1 <= n, m, k <= 1000
对于100%的数据，1 <= n, m, k <= 100000

把全集按照 -B-C- 的种类分类。

每一类中包含的边数为 (du[B]-1)*(du[C]-1)

排列

- $P(n,r)=n*(n-1)*......*(n-r+1)$

组合

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

xdoj 1032 找规律II

1	2	3	4	5	6
	1	3	6	10	15
		1	4	10	20
			1	5	15
				1	6
					1

根据左图规律，求这个数阵的第n行第m列

xdoj 1057 卡尔的技能

有n种元素，每种无限个，要选出m个来。有多少种选法？

问题等价于求方程

$$x_1 + x_2 + \dots\dots + x_n = m$$

的解的个数。

再等价于 在一行有n+m个相同球之间，插入n-1个隔板（两个隔板不能放在相同位置，必须是在某两球之间）的方案总数。

故

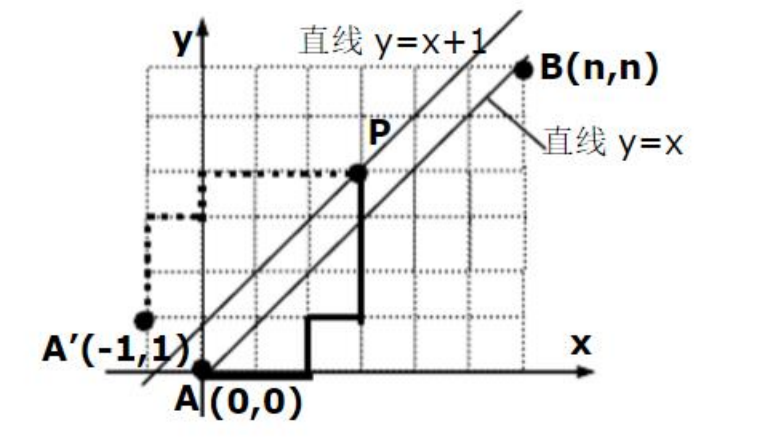
$$ans = C(n+m-1, n-1)$$

某种常用的特殊计数序列——卡特兰数

- 在平面直角坐标系中，从(0,0)点走到(n,n)点，规定只能向上或向右走，且不能穿过直线y=x到达它的上方，共有几种走法？
- 将n个1和n个-1排成一行，要求对于所有的k（k∈[1,2n]），第1个数至第k个数的累加和均非负，问有几种排列方法？
- 在一个凸多边形中，通过若干条互不相交的对角线，把这个多边形划分成了若干个三角形。任务是键盘上输入凸多边形的边数n，求不同划分的方案数f（n）。
- 给定n对括号，求括号正确配对的字符串数。
- ……

- 计算卡特兰数的方法
- A到B总方案数： C(2n,n)
- 非法方案数=A’ 到B的方案数

  C(2n,n-1)



$$ans = C(2n,n) - C(2n,n-1) = \frac{1}{n+1}C(2n,n)$$

- 另外有个小技巧，手推前几项后发现前几项依次是 1, 2, 5, 14, 42
- 那么这个数列很可能就是卡特兰数

常用的求组合数的方法

- 直接求
- 利用杨辉三角形
- **预处理阶乘及阶乘逆元**
- **Lucas定理**
- 分解质因数法

推荐两篇博客

- http://blog.csdn.net/skywalkert/article/details/52553048
- http://blog.csdn.net/acdreamers/article/details/8037918

容斥原理

容斥原理最简单的形式

一个班有45个小学生,统计借课外书的情况是:借语文课外书的有25人,借数学课外书的有32人.语文、数学两种课外书都借的有12人.求语文、数学两种课外书都没借的人数.

$$\left|\overline{A}\cap\overline{B}\right|=|U|-|A|-|B|+|A\cap B|$$

设S是一有限集合,与S相关的性质集合P={P1,P2,⋯,Pm}, Ai为S中具有第i 种性质的元素的集合.i=1,2,⋯,m, 则S中不具有P中任何性质的元素个数为

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right| = |U| - |A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$$

$$= |U| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

- S中具有P中至少一种性质的元素个数为

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \\
&\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{k>j} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&\quad - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

xdoj 1149 卡尔的技能 II

- 有n种元素，每种k个，要选出m个来。有多少种选法？

直接套用公式。将性质P1,P2,⋯,Pn分别定义为，第i种元素被选个数超限，即大于k。

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right| &= |U| - |A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| \\
&= |U| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{k>j}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\
&\quad + \cdots + (-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|
\end{aligned}
$$

莫比乌斯反演

莫比乌斯反演是数论数学中很重要的内容，可以用于解决很多组合数学的问题。

莫比乌斯函数

- 若d=1 那么μ(d)=1
- 若$d=p_1p_2\cdots p_r$ （r个不同质数，且次数都为一）$\mu(d)=(-1)^r$
- 其余 μ(d)=0
- 注意，μ 函数也为积性函数，故可以用线性筛预处理。证明略。

莫比乌斯函数的一个特殊性质

$$\sum_{d|n} \mu(n) = [n = 1]$$

[n=1]表示n=1时为1，否则为0，类似C语言中的(n==1)

莫比乌斯反演公式

$$F(n)=\sum_{d|n} f(d) \quad \Rightarrow \quad f(n)=\sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$F(n)=\sum_{n|d} f(d) \quad \Rightarrow \quad f(n)=\sum_{n|d} \mu\left(\frac{d}{n}\right) F(d)$$

//证明略

//第二个公式应用更广，主要是对公约数为d，最大公约数为d的计数问题

hdu 1695 GCD

- 这题求满足$a\in[1,n]$,$b\in[1,m]$,$gcd(a,b)$为k的对数。其中(a,b)与(b,a)视为同一种情况。

- 设F(n)为公约数包含n的对数， f(n)为最大公约数为n的对数
- 然后直接套前面的第二个公式
- 最后要去重

Pólya计数

Pólya原理是组合数学中，用来计算全部互异的组合状态的个数的一个十分高效、简便的工具。

群：给定一个集合$G=\{a,b,c,\cdots\}$和集合G上的二元运算，并满足:

(a) 封闭性：$\forall a,b\in G, \exists c\in G, a* b=c$。

(b) 结合律：$\forall a,b,c\in G, (a* b)* c=a*(b* c)$。

(c) 单位元：$\exists e\in G, \forall a\in G, a* e=e* a=a$。

(d) 逆元：$\forall a\in G, \exists b\in G, a* b=b* a=e$，记$b=a^{-1}$。

则称集合G在运算$*$之下是一个群，简称G是群。一般$a* b$简写为ab。

置换：n个元素$1,2,\cdots,n$之间的一个置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

表示1被1到n中的某个数a_1取代，2被1到n中的某个数a_2取代，直到n被1到n中的某个数a_n取代，且$a_1,a_2,\cdots,a_n$互不相同。

置换群：置换群的元素是置换，运算是置换的连接。例如：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

轮换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ 称为一个轮换（也叫循环）

- 不是所有置换都是轮换
- 但所有置换都可以分解为轮换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(12)(34)$$

Pólya定理

- 设G是p个对象的一置换群，用m种颜色涂染p个对象

$$ans = \frac{1}{|G|}\sum m^{c(g_i)}$$

- $c(g_i)$是g_i分解出轮换的个数

举个简单的例子

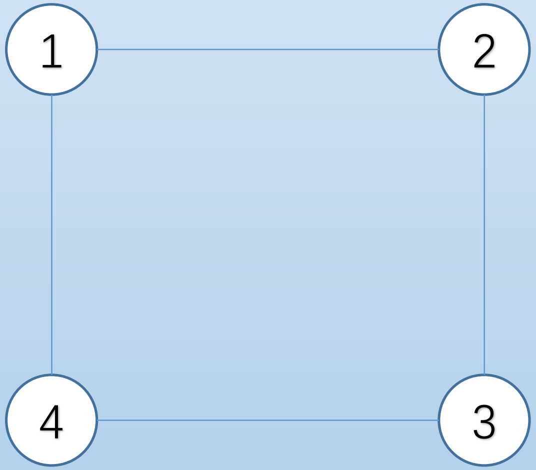
poj 2409 Let it Bead

- 题意，用m种颜色给含n个珠子的项链染色，求能有多少种不同的方案数。

（如果项链经过两种染色方式染色后，经过**旋转**或者**翻转**后完全一样，则这两种染色方式可以看作是同一种）

假设 n=4,m=2

- 先假设条件中不包含**翻转**
- 则共有n=4种置换方式



四种旋转置换

- 旋转0°，置换为(1)(2)(3)(4)，轮换数量为4
- 旋转90，置换为(1234)，轮换数量为1
- 旋转180，置换为(13)(24)，轮换数量为2
- 旋转270，置换为(1432)，轮换数量为1

$$ans = \frac{1}{4}\left(2^4 + 2^1 + 2^2 + 2^1\right) = 6$$

- 下面考虑**翻转**
- 则共有2*n=8种置换方式

四种翻转置换

- 以1 3两点为轴翻转置换为(1)(3)(24)，轮换数量为3
- 以2 4两点为轴翻转置换为(2)(4)(13)，轮换数量为3
- 以竖直对称轴为轴翻转置换为(12)(34)，轮换数量为2
- 以水平对称轴为轴翻转置换为(14)(23)，轮换数量为2

$$ans = \frac{1}{8}\left(2^4 + 2^1 + 2^2 + 2^1 + 2^3 + 2^3 + 2^2 + 2^2\right) = 6$$

Burnside引理

- 设G是置换群，g_i是G中的一个置换

$$ans = \frac{1}{|G|}\sum C(g_i)$$

- C(g_i)表示在置换g_i中，置换前后染色情况没变的染色方式数

xdoj 1063 Chemistry Problem

- 大家可以自行用这道题来练习Burnside引理的应用

谢谢大家