80.181
תשס"ב / א'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה במתמטיקה דיסקרטית (80181)

מועד א' תשס"ב
שאלון מס' 3
המורה : פרופ' מ. א. פרלס
ד"ר א. פרידגוט

הזמן: 3 שעות

אין להיעזר בחומר עזר כלשהו.
במבחן 10 שאלות, ובהן בסה"כ 29 סעיפים. לכל הסעיפים משקל שווה.
בסעיפים שבהם יש לבחור מבין כמה אפשרויות תשובה שגויה מורידה ניקוד.
יש לענות על כל השאלות בגוף השאלון. המחברת משמשת לחישובים בלבד
אך יש להגיש גם אותה.

1. א. כמה מספרים באורך n ניתן להרכיב מהספרות $1,2,\ldots,9$ כאשר מותר להשתמש בכל ספרה מספר כלשהו של פעמים?

ב. בכמה מהמספרים הנ"ל יש בדיוק 4 ספרות שונות?

2. א. אם בגרף $K_{n,m}$ יש מעגל אוילר אזי n ו- m מקיימים:

ב. אם בגרף $K_{n,m}$ יש מסילת המילטון אזי n ו- m מקיימים:

המשך מעבר לדף ←

80.181
מקס' ב/א/

3. נתונה קבוצה של אנשים ורשימה של ועדות. בכל ועדה יש בדיוק 10 אנשים מהקבוצה וכל אדם מהקבוצה מכהן ב- 6 ועדות בדיוק.
ליד כל אחד מהסעיפים א-ד רשמו אחת משלוש האפשרויות
בהכרח נכון\ בהכרח לא נכון\ לעיתים נכון ולעיתים לא נכון.

(תשובה שגויה = $-\frac{1}{2}$ נקודה)

א. מספר הועדות מתחלק ב- 3

ב. מספר הועדות קטן ממספר האנשים

ג. ניתן לבחור לכל ועדה יו"ר מבלי שאדם יכהן כיו"ר ב- 2 ועדות שונות

ד. ניתן למנות כל אדם כיו"ר של אחת הועדות מבלי שלועדה יהיו 2 יושבי ראש שונים

4. א. הגרף השלם על n קדקדים מסומנים מכיל

עצים שונים על $n-1$ קדקדים.

ב. הוא מכיל

עצים כנ"ל שלהם בדיוק 2 עלים. (העלה = קדקד בדרגה 1).

ג. מספר העצים על קבוצת הקדקדים $a,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,c_4$ שבהם הדרגה של a היא 4, דרגת כל b_i היא 3 ודרגת כל c_j היא 1 הוא:

המשך בדף הבא ←

80. 181
תס' ב/ג

5. G גרף על 20 קדקדים.

א. אם G מכיל משולש אזי מספר צלעותיו הוא לפחות

ב. אם G אינו מכיל משולש אזי מספר צלעותיו הוא לכל היותר

ג. אם G אינו מכיל מסילה פשוטה באורך 2 אזי מספר צלעותיו לכל היותר

6. F יער ובו m רכיבי קשירות. G מתקבל מ- F ע"י הוספת $m-1$ צלעות מבלי להוסיף קדקדים. ליד כל אחד מהסעיפים א-ד רשמו אחת משלוש האפשרויות:
תמיד\ לעולם לא\ לפעמים.

(תשובה שגויה = $-\frac{1}{2}$ נקודה)

א. G קשיר

ב. G מכיל מעגל

ג. G מכיל מעגל וגם קשיר

ד. G אינו מכיל מעגל ואינו קשיר

7. $a_0 = 2 \quad a_1 = 5 \quad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ עבור $n \geq 2$. מצאו נוסחה ל- a_n.

8. בבחירות לראשות ועד הבית קיבל שמעון 8 קולות וסוניה 9. הבחירות הן חשאיות ואין אפשרות להבדיל בין פתקים שונים של אותו מועמד.

א. מספר הסידורים של פתקי ההצבעה שבהם סוניה מובילה לכל אורך הספירה הוא

המשך מעבר לדף ←

80, 181
תש"ס מ/ א/1

ב. מספר הסידורים של פתקי ההצבעה שבהם שמעון מוביל לכל אורך הספירה הוא

ג. מספר הסידורים של פתקי ההצבעה שבהם הפתק הראשון הולך לסוניה ובכל זאת שמעון זוכה בהובלה בשלב כלשהו הוא

9. מסדרים בשורה משמאל לימין n סופגניות (זהות) ו- n אוזני המן (זהים). $n > 100$.

א. מהו מספר הסידורים שבהם יש <u>בדיוק</u> 100 סופגניות מימין לאוזן המן ה- 17 מימין?

ב. מהו מספר הסידורים שבהם יש <u>לפחות</u> 100 סופגניות מימין לאוזן המן <u>הימנית ביותר</u>?

ג. מהו מספר הסידורים שבהם יש <u>לפחות</u> 100 סופגניות מימין לאוזן המן <u>השמאלית ביותר</u>?

10. $R(k,l)$ הוא מספר רמזי כפי שהוגדר בכתה.

א. $R = (2, R(3,4)) =$

ב. תארו לכם שיש בידיכם קטלוג ובו כל הצביעות של צלעות k_{10} בשני צבעים, אדום וכחול.

תארו <u>ב- 10 מילים לכל היותר</u> מה עליכם לעשות (עקרונית) בכדי להראות באמצעות הקטלוג כי $10 < R(3,5)$

המשך בדף הבא ←

80, 181
תש"ס מ/ג

ג. כעת נתון בידיכם קטלוג גדול יותר ובו כל הצביעות של צלעות k_{15} בשני צבעים, אדום וכחול. תארו <u>בפחות מ- 11 מילים</u> מה עליכם לעשות בכדי להראות באמצעות הקטלוג ש- $R(3,5) \le 15$.

ד. $R(k,l,m)$ הוא המספר הקטן ביותר n כך שבכל צביעה של צלעות K_n בשלושה צבעים אדום, כחול וירוק מופיע תמיד K_k שכולו אדום או K_l שכולו כחול או K_m שכולו ירוק.

<u>הערה</u>: ניתן להראות שאם $2 \le k,l,m$ אזי

$$R(k,l,m) \le A+B+C-1$$

כאשר

$$A = R(k-1,l,m) \quad B = R(k,l-1,m) \quad C = R(k,l,m-1).$$

<u>שאלה</u>: מתי בהכרח $R(k,l,m) \le A+B+C-2$?

בחרו את האפשרות הנכונה מבין הארבע וסמנו אותה.

(תשובה שגויה = $-\frac{1}{2}$ נקודה)

(i) כאשר A,B,C כולם זוגיים.

(ii) כאשר A,B,C כולם אי זוגיים.

(iii) כאשר אחד מהם זוגי ושניים אי זוגיים.

(iv) כאשר אחד מהם אי זוגי ושניים זוגיים.

בהצלחה!