80.181
תשס"ב/ב

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה במתמטיקה דיסקרטית (80181)

מועד ב' תשס"ב

המורים : פרופ' מ. א. פרלס
ד"ר א. פרידגוט

הזמן: 3 שעות

אין להיעזר בחומר עזר כלשהו.
במבחן 9 שאלות, חלקן מחולקות לסעיפים. הניקוד לכל שאלה ולכל סעיף בתוכה רשום בסוף השאלה. הניקוד המקסימלי האפשרי: 28 נקודות.
ציון הבחינה ייקבע על פי הניקוד הכולל.

יש לענות על כל השאלות **בגוף השאלון**.
המחברת משמשת לחישובים בלבד, אך יש להגיש גם אותה.

ב ה צ ל ח ה !

80. 181
תמס מ/ב

I. עבור n שלם אי-שלילי חשב את הסכום:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \boxed{}$$

(2 נק'.)

II. א. בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה את עשר הספרות $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ללא חזרות?

ב. כמה מן הסידורים הנ"ל אינם מכילים את הרצף "123"?

ג. כמה מן הסידורים בסעיף א. אינם מכילים את הרצף "12", וגם אינם מכילים את הרצף "23"?

ד. כמה מן הסידורים בסעיף א. אינם מכילים את הרצף "12" וגם אינם מכילים את הרצף "34"?

ה. חשב (כפונקציה של n) את מספר הסדרות באורך n שניתן לבנות מעשר הספרות $0,1,\ldots,9$ (מבלי להגביל את מספר המופעים של כל ספרה), ואינן מכילות את הרצף "12".

(5 נק', אחת לכל סעיף.)

80, 181
תש"ס מ/ב

III. נתונה קבוצה סופית B של בחורים וקבוצה סופית G של בחורות, ויחס היכרות ביניהם. כמו כן נתון: כל k בחורים $(1 \le k \le |B|)$ מכירים ביחד לפחות $2k$ בחורות.

א. האם ניתן (בתנאים הנ"ל) להתאים לכל בחור שתי בנות זוג שונות (מתוך הבחורות שהוא מכיר), כך שלכל בחורה יהיה בן זוג אחד לכל היותר?

תמיד / לפעמים / לעולם לא (מחק את המיותר)

(,,לפעמים" פירושו שהתשובה תלויה ביחס ההיכרות הנתון.)

ב. האם ניתן להרחיק $|B|$ מן הבחורות, כך שעדיין יהיה זיווג מותר מן הבחורים אל הבחורות הנותרות? (זיווג מותר=העתקה חח"ע, שמתאימה לכל בחור בת זוג שהוא מכיר.)

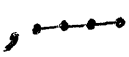
תמיד / לפעמים / לעולם לא (מחק את המיותר)

ג. האם עבור כל הרחקה של $|B|$ מן הבחורות, עדיין יהיה זיווג מותר מן הבחורים אל הבחורות הנותרות?

תמיד / לפעמים / לעולם לא (מחק את המיותר)

(3 נק', אחת לכל סעיף. כל תשובה שגויה תיקנס בהורדה של חצי נקודה.)

IV. מהו מספר טיפוסי האיסומורפיסם של עצים על 6 קדקודים? צייר עץ אחד מכל טיפוס.

(לדוגמא: מספר טיפוסי האיסומורפיסם של עצים על 4 קדקודים הוא 2, והטיפוסים הם:  ,).

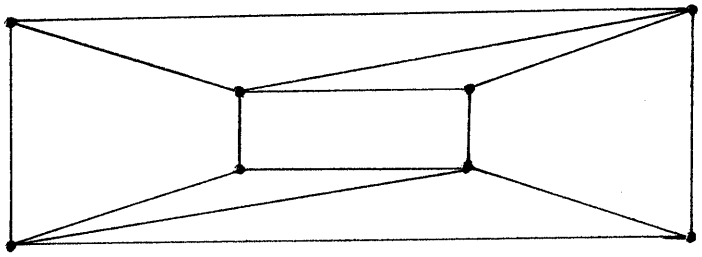
מספר הטיפוסים:

ציורים:

(4 נק'.)

80, 181
תקס מ/ב

V. האם אפשר לצייר את הגרף הבא במשיכת קולמוס אחת? (כלומר, מבלי להרים את העפרון מן הנייר, ומבלי לעבור על צלע כלשהי יותר מפעם אחת.) נמק את תשובתך בקצרה.



אפשר / אי-אפשר (מחק את המיותר)

הנמקה:

(2 נק'.)

VI. האם יש גרף G על 8 קדקודים $x_1, x_2, \ldots, x_8$, שבו ערכויותיהם הן המספרים $7,7,6,5,4,3,2,2$ בהתאמה?

אם יש – צייר גרף כזה.

אם אין – נמק מדוע אין.

יש /אין (מחק את המיותר)

ציור או תרוץ:

(3 נק'.)

VII. תהא D קבוצה סופית בת d איברים,
ותהא R קבוצה סופית בת r איברים.
מספר הפונקציות $f:D\to R$ המעתיקות את D <u>על</u> R הוא:
(די לטפל במקרה $d\ge r$. אם $d\ge r$, אזי המספר הוא אפס.)

(3 נק'.)

VIII. עבור $n\ge 0$ נסמן ב- q_n את מספר המילים באורך n על האותיות a,b,c, שבהן <u>אין</u> שני מופעים רצופים של האות a $(\cdots aa\cdots=)$. ברור ש- $q_0=1$, $q_1=3$.

א. רשום נוסחת נסיגה עבור q_n:

ב. הצג את q_n במפורש כפונקציה של n:

$q_n =$

(2 נק', אחת לכל סעיף.)

IX. האם הטענה הבאה נכונה?

יהא n מספר טבעי, $n \geq 2$. אם נצבע כל צלע של הגרף השלם K_{n^2} (על n^2 קדקודים!) בצבע אדום או בצבע כחול, כרצוננו, אזי מובטח לנו שיהיו

3 קדקודים שכל הצלעות ביניהם אדומות

או

n קדקודים שכל הצלעות ביניהם כחולות.

נמק את תשובתך בקצרה.

נכון / לא נכון (מחק את המיותר)

הנמקה:

(4 נק'.)