80. 181
תקס"ה / מ'

בחינה במתמטיקה דיסקרטית (80181)
מועד ב' תשס"ה

שם המורה: ד"ר אהוד פרידגוט **משך הבחינה: 3 ש'**

השימוש בכל חומר עזר אסור.

רשמו כעת את מספר הסטודנט שלכם כאן

בבחינה 2 חלקים.

בחלק הראשון עליכם לבחור תשובה נכונה מבין 4 אפשרויות.

בחירה נכונה מזכה אתכם בנקודה, בחירה שגויה תוריד $\frac{1}{2}$ נקודה ממאזנכם, חוסר תשובה אינו מעלה ואינו מוריד.

בחלק השני בכל סעיף עליכם לכתוב בטוי מתמטי פשוט העונה על השאלה. כאן אין הפסד נקודות על תשובה שגויה.

את התשובות יש לכתוב בעמוד האחרון של השאלון במקום המיועד לכך.

המחברת המצורפת מיועדת לחישובים בלבד והיא לא תבדק, אך יש להגיש גם אותה.

נא לכתוב בעט, בצדה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים.

אנא זכרו את מספר המחברת.

80, 181
תקס"ו / ב'

חלק I

סמנו בעמוד התשובות √ בעמודה של התשובה הנכונה.

תשובה שגויה מורידה $\frac{1}{2}$ נקודה. חוסר תשובה אינו מעלה ואינו מוריד.

1. תהיינה $f:A\to B$ $g:B\to C$ פונקציות.

אילו מהבאים גוררים את המסקנה ש- g היא חח"ע?

1. f חח"ע , $g\circ f$ חח"ע.
2. f חח"ע , $f\circ g$ חח"ע.
3. f על , $g\circ f$ חח"ע.
4. אף אחת מהנ"ל.

2. תהיינה A,B קבוצות. הנה 2 משפטים:

א. $A\subseteq A\times B$

ב. $A\in A\times B$

אזי:

1. שניהם נכונים תמיד.
2. שניהם תמיד לא נכונים.
3. א נכון אם $A=\emptyset$.
4. ב נכון אם ל- B יש איבר יחיד.

3. $A_1=\{1\}$ $A_2=\{1,2\}$ ..... $A_{10}=\{1,2,...,10\}$. אזי מספר האיברים ב $A_1\Delta A_2\Delta...\Delta A_{10}$ הוא

1. 0
2. 5
3. 10
4. לא מוגדר היטב, תלוי בסדר לקיחת הפעולות.

4. יהי M_1 מספר הדרכים להושיב n גברים סביב שולחן עגול

ו M_2 מספר הדרכים להושיב n גברים ו- n נשים סביב שולחן עגול ללא 2 גברים סמוכים. אזי

1. $M_1=(n-1)!$ $M_2=n!(n-1)!$
2. $M_1=(n-1)!$ $M_2=(n-1)!(n-1)!$
3. $M_1=n!$ $M_2=n!(n-1)!$
4. $M_1=n!$ $M_2=n!n!$

80.181 תשפ"ו/מ1

5. יהי M_1 מספר הדרכים לחלק 15 אנשים ל- 3 קבוצות שוות, M_2 מספר הדרכים לחלק 15 אנשים ל- 3 חדרים שונים, 5 אנשים בכל חדר. אזי

1. $M_1 = M_2 = \binom{15}{5,5,5}$
2. $M_2 = M_1 \cdot 3! \quad M_1 = \binom{15}{5,5,5}$
3. $M_1 = M_2 \cdot 3! = \frac{15!3!}{5!5!5!}$
4. $M_2 = \frac{15!}{3!5!5!5!} \quad M_1 = \frac{15!}{5!5!5!}$

6. יהי M_1 מספר המעגלים ההמילטוניים ב $K_{11,11}$.

יהי M_2 מספר המעגלים ההמילטוניים ב $K_{10,12}$. אזי

1. $M_1 = \frac{11! \cdot 10!}{2} \quad M_2 = 0$
2. $M_1 = 0 \quad M_2 \geq 10!$
3. $M_1 = (11!)^2 \quad M_2 = 10!12!$
4. $M_1 = (11!)^2 \quad M_2 = 0$

7. יהי T אוסף כל הטורנירים על 17 קדקודים מסומנים. המספר הממוצע של מסילות המילטון מכוונות באיבר של T הוא:

1. $(n-1)! \cdot 2^{-\binom{n}{2}}$
2. $\frac{n!2^n}{2^{\binom{n}{2}}}$
3. 1
4. $n! \cdot 2^{1-n}$

8. יהי $G = (V, U, E)$ גרף דו צדדי שלם בין קבוצת הקודקודים $V = \{v_1, v_2 ... v_{27}\}$ ו $U = \{u_1, u_2 ... u_{27}\}$. מספר הזווגים השלמים ב G בהם אין צלע מהסוג $\{v_i, u_i\}$ הוא בקרוב:

1. $26!$
2. $10 \cdot 26!$
3. $27!$
4. 26^{27}

80, 181
תש"ס / ב

9. מספר הדרכים לחלק לכל היותר 17 תפוזים ל 10 ילדים הוא:

1. $\binom{28}{11}$
2. 10^{17}
3. $\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}j^{17}$
4. אף תשובה אינה נכונה.

10. מספר הדרכים לחלק בדיוק 17 תפוזים ל 10 ילדים מבלי שאף ילד יקבל יותר מ 4 תפוזים הוא:

1. $\sum_{i=0}^{\infty}\binom{10}{i}(-1)^i\binom{26-5i}{9}$.
2. $\sum_{i=0}^{\infty}\binom{10}{i}(-1)^i\binom{26}{9-i}$.
3. $\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-1)^i 10^{(17-4i)}$.
4. אף תשובה אינה נכונה.

חלק II

בשאלות שלפניכם עליכם לרשום בטופס התשובות בטוי פשוט ככל האפשר המהוה תשובה לשאלה. לא יורדו נקודות על תשובה שגויה.

11. רשמו בטוי מהצורה $\binom{a}{b}$ המהוה את מספר הסדרות הבינאריות באורך 100 בהן יש בדיוק 50 אפסים ו 50 אחדים, ובהן יש רישה עם יותר אחדים מאשר אפסים, וסיפה הזרה לרישה הנ"ל שגם בה יש יותר אחדים.

12. רשמו בטוי מהצורה $a\cdot b^n+c\cdot d^n$ המהוה את מספר הסדרות הבינאריות באורך 100 ללא 2 אפסים רצופים.

13. רשמו בטוי מהצורה $x\binom{a}{b}$ המהוה את מספר הדרכים לחלק מצולע קמור בעל 17 צלעות למשולשים בעזרת אלכסונים פנימיים שאינם נחתכים.

14. רשמו את מספר העצים על קבוצת הקודקודים $\{1,2,...,17\}$.

80.181
תקס"ו/ב

15. רשמו את מספר העצים הנ"ל בהם $\{1,2\}$ הוא צלע.

16. רשמו את מספר העצים הנ"ל בהם הדרגה המקסימלית היא 2.

17. רשמו בטוי מהצורה a^b המהווה את מספר העצים הנ"ל בהם דרגת הקודקוד "1" היא בדיוק 5.

18. יהי k שלם אי שלילי. יהי n המספר השלם הקטן ביותר בעל התכונה הבאה:

בהנתן n כדורים ברדיוס 1 ב $\mathbb{R}^n$ תמיד ניתן למצוא k מהם כך שכל 2 נחתכים או k מהם כך שכל 2 זרים.

רשמו פונקציה של k המהווה חסם מלרע ל $\binom{n}{k}$.

19. k ו- n כנ"ל. רשמו פונקציה של k המהוה חסם מלעיל ל- n.

בהצלחה!