80. 181
תשס"ה / מ

בחינה במתמטיקה דיסקרטית (80181)

מועד ב' סמסטר ב תשס"ה

שם המורה: פרופ' ב. ווייס **משך הבחינה: שעתיים**

מס' סטודנט: _____

מס' מחברת: _____

אסור לכתוב חישובים על טופס הבחינה. את כל החישובים יש לבצע במחברת הבחינה.

חלק א:

ענו על כל השאלות. יש לסמן בטופס הבחינה את התשובה הנכונה. (10 X 3 = 30 נקודות)

1. נתונות פונקציות $f:A\to B$, $g:B\to C$ בין קבוצות סופיות A,B,C ומניחים כי f,g חח"ע וגם $g\circ f$ על. אזי גם f על.

☐ נכון ☐ לא נכון

2. גרף (V,E) הוא דו-צביע אם ורק אם האורך של כל מסילה סגורה הוא מספר זוגי.

☐ נכון ☐ לא נכון

3. מספר העצים המסומנים על 5 קדקדים הוא 125.

☐ נכון ☐ לא נכון

4. אם המקדמים a_n של הטור $\sum_{1}^{\infty} a_n x^n$ מקיימים $|a_n|\le \frac{n^n}{100}$ לכל n אזי הטור מתכנס בקטע $\left[0,\frac{1}{100}\right]$.

☐ נכון ☐ לא נכון

5. אם $t_{ij}=T \in \{0,1\}$ מטריצה $n\times n$ כך שסכום כל שורה וסכום כל עמודה גדול או שווה משתיים אזי קיימת מטריצת תמורה P כך שלכל i,j $p_{i,j}\le t_{ij}$.

☐ נכון ☐ לא נכון

6. מספר הדרכים לחלק מצולע קמור עם $n+1$ קדקדים למשולשים מבלי להוסיף קדקדים הוא מספר שרדר $s(n)$.

☐ נכון ☐ לא נכון

7. מספר העצים הפורשים בגרף קשיר עם n קקדקדים ו $n+1$ צלעות אינו עולה על $\binom{n+1}{2}$.

☐נכון ☐לא נכון

8. בגרף K_{100} יש יותר צלעות מאשר בגרף $K_{100,100}$.

☐נכון ☐לא נכון

9. מספר החלוקות של n למספרים זוגיים שווה למספר החלוקות של n למספרים שונים.

☐נכון ☐לא נכון

10. בכל גרף מישורי סופי יש קדקד שדרגתו לכל היותר 5.

☐נכון ☐לא נכון

חלק ב:

ענו על כל השאלות. יש להקיף בטופס הבחינה את התשובה הנכונה (10 X 7 = 70 נקודות).

1. הפונקציה היוצרת של הסדרה המקיימת:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1$$

ולכל $n \geq 3$ $a_n = -a_{n-1} + 16a_{n-2} - 20a_{n-3}$

היא

א. $\dfrac{x}{1+x-16x^2+20x^3}$

ב. $\dfrac{x}{1-x+16x^2-20x^3}$

ג. $\dfrac{1-x}{1+x+16x^2-20x^3}$

ד. $\dfrac{1+x}{1-x+16x^2+20x^3}$

2. איזה מבין המספרים הבאים הוא הכי גדול:

א. $\binom{1200}{500}$

ב. $\binom{500}{250}^2$

ג. 2^{1000}

ד. $\frac{1}{2}\binom{1200}{501}$

80. 181
תש"ס/א

3. מבין התנאים הבאים איזה תנאי מבטיח שניתן לחלק את הזוגות $\{(i,j):1\le i<j\le n\}$ לשתי קבוצות זרות B,A , כך שלכל קבוצה $C\subset\{1,2,\dots,n\}$ בגודל 100 ימצאו זוגות $(x_1,x_2)\in A$, $(x_3,x_4)\in B$ ולכל i $x_i\in C$.

א. $n<2^{200}$

ב. $n>2^{50}$

ג. $n<R(100,100)$

ד. אף לא אחת מהתשובות האחרות.

4. מספר הפתרונות במספרים טבעיים $\{1,2,\dots\}$ למשוואה $10x+y+z+u+v=30$ הוא:

א. $\binom{19}{3}+\binom{9}{3}$

ב. $\binom{20}{4}+\binom{10}{4}$

ג. $\binom{24}{4}+\binom{14}{4}$

ד. $\binom{23}{3}+\binom{13}{3}$

5. g_n מוגדרת ע"י הרקורסיה הבאה $g_2=2$, $g_0=g_1=1$, $g_{n+3}=2g_{n+1}+g_n$
אילו מבין הטענות הבאות איננה נכונה?

א. עבור n מספיק גדול $g_n=g_{n-1}+g_{n-2}$.

ב. קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} g_n/g_{n+1}$.

ג. קיים קבוע $c>0$ כך שלכל $0\le n$, $g_n\le C\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

ד. קיים קבוע $c>0$ כך שלכל $0\le n$, $g_n\ge C\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

6. קבוצת כדורגל מורכבת משוער ועשרה שחקנים וקבוצת כדורסל מורכבת מחמישה שחקנים. בכמה הרכבים אפשר לארגן משחק כדורגל וכדורסל בין 32 אנשים.

א. $\binom{32}{22}\binom{22}{2}\binom{20}{10}\binom{10}{5}$

ב. $\frac{1}{2}\binom{32}{22}\binom{22}{2}\binom{20}{10}\binom{10}{5}$

80, 181
מס' ה/ה

ג. $\frac{1}{4}\binom{32}{22}\binom{22}{11}\binom{10}{5}$

ד. $\binom{32}{22}\binom{22}{11}\binom{10}{5}$

7. נגדיר : $A=\{1,3,5\}$, $B=\{1,5,8,9\}$, $C=\{3,5,6,7\}$, $D=\{1,2,...,9\}$, $E=\{4,5,7,9\}$ $|F|=10$ מספר האיברים ב- G

$G=A\Delta B\Delta C\Delta D\Delta E\Delta F$.

א. זוגי

ב. אי זוגי

ג. תלוי בהרכב של F.

ד. משתנה אם נשנה את הסדר בהגדרה של G.

8. תהי X קבוצת המספרים מתוך $\{1,2,...300\}$ שאינם מתחלקים באף אחד מהמספרים $\{2,3,5\}$. אזי $|X|$ שווה -

א. 80

ב. 50

ג. 100

ד. 75

9. S היא משפחה של קבוצות מספרים בין אחד למאה. כל מספר מופיע בארבע קבוצות מתוך S ולכל קבוצה ב S יש בדיוק 16 איברים. אזי $|S|$ שווה:

א. 24

ב. 25

ג. 32

ד. 20

10. מספר המלים באורך 100 המורכבות מהאותיות $\{a,b,c\}$ ושבהן מספר הפעמים שהאות a מופיעה שווה למספר הפעמים שהאות b מופיעה וכך שבאף רישא של המלה אין יותר מופעים של b מאשר של a הוא:

א. $\sum_{i=0}^{50}\frac{1}{i+1}\binom{100}{i}\binom{2i}{i}$

ב. $\sum_{i=0}^{50}\frac{1}{i}\binom{100}{100-2i}\binom{2i}{i+1}$

ג. $\sum_{i=0}^{100}\frac{1}{i}\binom{100}{i}\binom{i}{\left[i/2\right]}$

ד. $\sum_{i=0}^{100}\frac{1}{i}\binom{100}{100-i}\binom{i-1}{\left[i/2\right]}$

בהצלחה!