האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

# 80181 מתמטיקה דיסקרטית

## מועד א' תשע"ב – 22.2.12

מרצים: פרופ' אהוד פרידגוט ופרופ' מנחם מגידור

משך הבחינה: 2.5 שעות

חומר עזר מותר בשימוש: אין.

שווי כל שאלה הוא 6 נקודות, אלא אם מצויין אחרת.

יש לענות על כל השאלות בגוף השאלון. המחברת משמשת לחישובים בלבד, אך היא לא תיבדק ולא תיסרק.
בכל זאת חובה להגיש אותה יחד עם השאלון. (ניתן להשתמש במחברת החישובים משני צידי הדף).

עם קבלת בשאלון יש למלא מייד את הפרטים הבאים:

מספר ת"ז: _____

מספר מחברת: _____

בהצלחה!!

1) בנשף ריקודים יש 20 זוגות, בכל זוג גבר ואשה. בכמה דרכים ניתן לארגן ריקוד זוגות, בו כל אשה רוקדת עם גבר, אבל אף אחת איננה רוקדת עם בן זוגה? רשמו את התשובה כביטוי מתמטי, לאו דווקא כמספר.

2) עבור $A_i = \{i, i+1, ..., 10\}$ נגדיר $i = 1, 2, ..., 10$ . רשמו את כל איברי $A_1 \Delta A_2 \Delta ... \Delta A_{10}$

3) סדרו את ארבעה הביטויים הבאים מהגדול אל הקטן (בצורת $D < C < B < A$ )

$$1000!\ ,\ 2^{1000}\ ,\ \binom{1001}{499}\ ,\ \binom{1001}{500}$$

4) כמה סדרות $a_1, a_2, ..., a_{100}$ יש כך שכל התנאים הבאים מתקיימים?

א. $0 = \sum_{i=1}^{100} a_i$

ב. לכל $1 \le i \le 100$ , $a_i = 1$ או $a_i = -1$

ג. קיימים $1 \le n < m \le 100$ כך ש $\sum_{i=1}^{n} a_i > 0$ וגם $\sum_{i=m}^{100} a_i > 0$ .

רשמו את התשובה באמצעות מקדם או מקדמים בינומיים.

5) יש לאייש ועדה בת 11 חברים ע"י נציגים של 5 מפלגות נתונות, כך שכל מפלגה תיוצג על ידי נציג אחד לפחות, אך לאף מפלגה לא יהיו יותר משלושה נציגים. בכמה דרכים ניתן לחלק את מכסת החברות בועדה בין המפלגות? רשמו ביטוי מתמטי ולא מספר.

6) הגדירו את מספר רמזי $R(a,b)$

7) כמה מילים באורך 17 ניתן ליצור מהאותיות $A,B,C,D,E$ כך שלפחות אחת מהאותיות $A,B,C$ תופיע?

8) $$\sum_k \sum_m \binom{5}{k}\binom{6}{m}\binom{10}{13-m-k} =$$

9) $F$ הוא יער ובו עשרה רכיבי קשירות. $G$ מתקבל מ $F$ ע"י הוספת 9 צלעות חדשות ללא הוספת קדקודים. ליד כל אחת מהאפשרויות מטה הקיפו בעיגול את אחד מהביטויים: תמיד / לעולם לא / לפעמים. תשובה נכונה = 2 נקודות, תשובה שגוייה = מינוס נקודה, אין תשובה = 0 נקודות.

א. ב $G$ אין מעגלים תמיד / לעולם לא / לפעמים

ב. $G$ הוא קשר תמיד / לעולם לא / לפעמים

ג. $G$ איננו קשיר ואין בו מעגלים תמיד / לעולם לא / לפעמים

ד. $G$ קשיר ויש בו מעגלים תמיד / לעולם לא / לפעמים.

10) יהי $n$ המספר המינימלי כך שבכל צביעה של צלעות $K_n$ בשני צבעים, אדום וכחול, מובטח מעגל אדום באורך אי-זוגי, או עותק כחול של $K_{50}$. מהו $n$?

11) $\sum_{k=0}^{15}(-1)^k\binom{17}{k}=$ (שימו לב לגבולות הסכימה!!)

כאן, בניגוד לשאלות אחרות, רצוי לכתוב מספר ולא ביטוי מתמטי אחר!

12) תהיינה $A,B,C$ קבוצות סופיות. $f:A\to B$ , $g:B\to C$ , $h:C\to A$

פונקציות חד-חד-ערכיות. אזי $h\circ g\circ f$ היא על תמיד / לעולם לא / לפעמים.

(הקיפו את התשובה הנכונה בעיגול. תשובה נכונה = 6 נקודות, תשובה שגוייה = מינוס שלוש נקודות, חוסר תשובה = 0 נקודות).

13) רשמו אפיון קצר (עד 40 מילים) של כל הקבוצות $B$ כך ש $\{1,2,3\}\times B=B\times\{1,2,3\}$

14) לכמה תת קבוצות של $\{1,2,...,18\}$ יש מספר אי זוגי של איברים? רשמו ביטוי מתמטי ולאו דווקא מספר.

15) הוכיחו או הפריכו ב **40 מילים או פחות**: אם $A$ היא קבוצה של 7 מספרים שלמים בין 1 ל 18 אזי בהכרח יש ל $A$ שתי תת-קבוצות $B$ ו $C$ כך שסכום באיברים ב $B$ שווה לסכום האיברים ב $C$.

16) יהי $D_n$ מספר הדרכים לחלק מצולע קמור בעל $n+2$ קדקודים למשולשים באמצעות אלכסונים פנימיים שאינם נחתכים (מלבד בקדקודי המצולע). נגדיר $D_0 = D_1 = 1$, ולשם הבהרה, שימו לב ש $D_2 = 2$ ו $D_3 = 5$.

בטאו את $D_{10}$ באמצעות $D_0, D_1, ..., D_9$

17) הוכיחו או הפריכו ב **40 מילים או פחות** את קיומה של סדרה של 16 מספרים שונים ללא תת סדרה מונוטונית באורך 5.

הדרכה לאילו הרוצים להוכיח קיום: לא די להציג סדרה כזאת – יש לנמק.

הדרכה לאלו הרוצים להפריך קיום: ניתן להסתמך על משפטים שנלמדו בכיתה, אך יש לצטט אותם במדוייק.

**<u>בהצלחה!!</u>**