האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

80181 מתמטיקה דיסקרטית

מועד ב' תשע"ב – 15.3.12

מרצים: פרופ' אהוד פרידגוט ופרופ' מנחם מגידור

משך הבחינה: 2.5 שעות

חומר עזר מותר בשימוש: אין.

שווי כל שאלה הוא 6 נקודות, אלא אם מצויין אחרת.

יש לענות על כל השאלות בגוף השאלון. המחברת משמשת לחישובים בלבד, אך היא לא תיבדק ולא תיסרק.
בכל זאת חובה להגיש אותה יחד עם השאלון. (ניתן להשתמש במחברת החישובים משני צידי הדף).

עם קבלת השאלון יש למלא מייד את הפרטים הבאים:

מספר ת"ז: _____

מספר מחברת: _____

בהצלחה!!

1) $\sum_{i=0}^{8}\binom{17}{i} =$ (שימו לב לגבולות הסכימה!!)

בטאו את התשובה באמצעות ביטוי מתמטי פשוט ולא מספר.

2) כמה עצים מכיל הגרף K_{20} בהם יש בדיוק 18 קדקודים?

3) הוכיחו או הפריכו **בפחות מ 40 מילים**: קיים עץ על 17 קדקודים בו יש קדקוד מדרגה 5 ובדיוק 4 עלים.

4) תהי $a_1, a_2, \ldots, a_{81}$ סדרה של מספרים שלמים שונים. ליד כל משפט מטה הקיפו בעיגול את אחד מהביטויים: תמיד / לעולם לא / לפעמים. תשובה נכונה = 2+ נקודות, תשובה שגוייה = מינוס נקודה, חוסר תשובה = 0 נקודות.

א. לסדרה יש תת סדרה מונוטונית באורך 9 תמיד / לעולם לא / לפעמים

ב. לסדרה יש תת סדרה מונוטונית באורך 10 תמיד / לעולם לא / לפעמים

ג. אם אין לסדרה תת סדרה עולה באורך 9 אזי יש לה תת סדרה יורדת באורך 11 תמיד / לעולם לא / לפעמים

5) $\sum\binom{17}{a_1, a_2, a_3} =$

(הסכום הוא על כל השלשות a_1, a_2, a_3 של מספרים טיבעיים). בטאו את התשובה כביטוי מתמטי, לאו דווקא מספר.

6) תהיינה A,B,C קבוצות, $f:A\to B$, $g:B\to c$ פונקציות. להלן שלושה תנאים. לכל אחד מהם הקיפו בעיגול "נכון" אם הוא מבטיח ש f היא על ו"לא נכון" אם איננו מבטיח בהכרח ש f היא על (תשובה נכונה = 2 נקודות, תשובה שגוייה = מינוס נקודה, חוסר תשובה = 0 נקודות).

א. $g\circ f$ על ו g חח"ע נכון / לא נכון

ב. $g\circ f$ חח"ע נכון / לא נכון

ג. g על וגם $g\circ f$ על נכון / לא נכון

7) 99 אנשים לחצו ידיים זה לזה במסיבה. איש לא לחץ את היד של עצמו, ואף שני אנשים לא לחצו יד יותר מפעם אחת (אם כי יתכן שלא לחצו ידיים זה לזה כלל). להלן שלוש אפשרויות. ליד כל אחת הקיפו בעיגול נכון תמיד / תמיד לא נכון / לעתים נכון. (תשובה נכונה = 2 נקודות, תשובה שגוייה = מינוס נקודה, חוסר תשובה = 0 נקודות).

א. כל האנשים לחצו בדיוק 33 ידיים. נכון תמיד / תמיד לא נכון / לעתים נכון

ב. אם שואלים כל אחד כמה לחיצות לחץ, וסוכמים את התשובות (בהנחה שהן אמת), מקבלים מספר זוגי. נכון תמיד / תמיד לא נכון / לעתים נכון

ג. אם שואלים כל אחד כמה לחיצות לחץ, נקבל 99 תשובות שונות (בהנחה שהתשובות נכונות).

נכון תמיד / תמיד לא נכון / לעתים נכון .

8) $$\sum_{K=0}^{17}\binom{17}{K}\binom{K}{3}=$$

רשמו את התשובה כביטוי מתמטי, לאו דווקא מספר.

9) יהי G גרף המתקבל מ K_{17} ע"י הסרת 4 מעגלי המילטון שאף שנים מהם אינם חולקים צלע (לכל מעגל צלעות שונות).

א. הוכיחו ב **40 מילים או פחות**: ש G קשיר. (6 נקודות)

ב. בהסתמך על כך ש G קשיר, הוכיחו ב **30 מילים או פחות** שב G יש מעגל המכיל את כל הצלעות. אם אתם מסתמכים על הוכחה/תוצאה שנלמדה בכיתה צטטו אותה במדוייק (2 נקודות).

10) מספר הדרכים לסדר 10 זוגות סביב שולחן עגול כך שאף אחד לא יישב ליד בן/בת זוגו הוא

11) מנחם, אהוד, שקד ומוטי צריכים לבדוק 200 מבחנים במתמטיקה דיסקרטית.

א. בכמה דרכים ניתן לחלק את עומס הבדיקה (כמה מחברות יבדוק כל אחד)?

ב. בכמה דרכים ניתן לחלק ביניהם את המחברות השונות?

12) כמה עצים יש על קבוצת הקדקודים $1,2,\ldots,17$ כך ש

א. 1 הוא עלה?

ב. 2 מחובר ל 1 בצלע?

ג. 1 מחובר ל 2 בצלע, 2 מחובר ל 3 בצלע, ו 3 מחובר ל 1 בצלע?

13) נתון שמספר רמזי $R\ 4,3 = 9$. מה תוכלו לאמר על נמספר הקטן ביותר n כך שבכל צביעה של צלעות K_n בשני צבעים מובטח עותק חד-צבעי של K_4 ? הסבירו את תשובתכם ב **30 מילים או פחות.**

14) יהי F יער ובו 71 קדקודים ו 64 צלעות. הוכיחו או הפריכו **בפחות מ 40 מילים** שיש ב F עץ עם לפחות 10 צלעות.

15) א. יש להכניס 9 חתולים (שונים) ל 3 שקים (זהים), שלושה חתולים בשק. (לחתול לא משנה באיזה שק הוא – רק מיהם שכניו לשק). בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

ב. שוב 9 חתולים שונים, 3 שקים זהים, אך הפעם החלוקה בין השקים היא 4-3-2 (שני חתולים בשק אחד, שלושה באחר, וארבעה בשק האחרון). כמה דרכים יש כעת?

16) תהי A קבוצת כל התת-קבוצות של $1,2,...,17$ שסכום איבריהן זוגי, ו B קבוצת כל התת-קבוצות שסכום איבריהן אי זוגי. מצאו פונקציה חח"ע $\phi : A \to B$ ٢

17) שרשרת באורך 4 של תת-קבוצות של $1,2,...,17$ היא רבעיה מהצורה ٢

$A \subseteq B \subseteq C \subseteq D \subseteq 1,2,...,17$. כמה שרשראות כאלו יש? ٢

בהצלחה!!