האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

מתמטיקה דיסקרטית 80181

מועד ב' תשע"ג – 10/03/13

מרצים: א. גורביץ, ב. ביגון

חומר עזר מותר לשימוש: מחשבון בלבד. משך הבחינה: 3 שעות

המבחן מכיל 18 שאלות. שווי כל שאלה הוא 6 נקודות.

את התשובות נא לכתוב בגוף השאלון בתוך המסגרות.
המחברת המצורפת מיועדת לטיוטה בלבד - היא לא תיבדק ולא תיסרק.
בכל זאת, חובה להחזיר אותה יחד עם השאלון.

תשובות מספריות צריכות להופיע בצורה מפורשת (מספר).

ניתן להסתמך על המשפטים והטענות שהוכחו בהרצאות ותרגולים.

בהצלחה!

מקום למדבקת ברקוד

נא למלא עם קבלת השאלון:

מספר ת"ז_____

מספר מחברת_____

1. האם ההכלה $((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap C \subset A \cap (B \cup C)$ מתקיימת לכל קבוצות C, B, A?
אם כן, הראו את ההכלה בעזרת דיאגרמות ון. אם לא, הביאו דוגמא מפורשת של הקבוצות C, B, A אשר אינן מקיימות את ההכלה, אבל מקיימות את הדרישה הבאה: $|A \cup B \cup C| \leq 1$.

2. תהי S קבוצת הפונקציות $f\colon \mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$ שעבורן $f^{-1}(\{2\})$ היא קבוצה סופית. האם S היא בת מניה? הוכיחו את תשובתכם באופן מדויק ומסודר. (בפתרון מותר להסתמך ללא הוכחה על העובדה כי כל תת־קבוצה אינסופית של קבוצה בת מניה הינה גם כן בת מניה.)

3. האם היחס $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y \leq 2x+1\}$ מעל $\mathbb{Z}$ הוא רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי?
הוכיחו את כל התכונות שמתקיימות והביאו דוגמאות נגדיות לכל התכונות שאינן מתקיימות.

4. נתונה קבוצה $A = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2 \ , -2 \leq y \leq 2\}$. נגדיר יחס שקילות R מעל A באופן הבא:
$R = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in A \times A \mid x_1 y_1 = x_2 y_2\}$. מצאו קבוצת נציגים של היחס R, ועבור כל אחד מהנציגים רשמו את מספר האיברים במחלקה שלו.

5. בכמה אופנים ניתן להכניס גבינה, תפוח, מלפפון, עגבניה ולימון למקרר בעל שלושה מדפים כך שבמדף התחתון יהיה לפחות מאכל אחד, וגם הגבינה והלימון לא יהיו באותו מדף?

6. נתון משולש במישור. על כל אחת מצלעותיו מסומנות 5 נקודות שאינן בקודקודי המשולש. כמה מרובעים עם הקודקודים בנקודות המסומנות קיימים? (שימו לב כי על מנת שארבע נקודות יגדירו מרובע, אף שלוש מתוכן לא יכולות להיות על אותו ישר.)

7. בכמה אופנים ניתן לסדר על מדף 3 ספרים באנגלית, 2 ספרים בצרפתית, 2 ספרים ביפנית וספר אחד בסינית כך שהספרים בכל שפה יהיו סמוכים זה לזה וגם הספר שבקצה השמאלי של המדף יהיה ביפנית או בסינית? (כל הספרים שונים זה מזה.)

8. כמה מספרים אי־זוגיים בעלי 8 ספרות מכילים את הספרה 1 פעם אחת, את הספרה 2 פעמיים, את הספרה 3 פעמיים ואת הספרה 4 שלוש פעמים?

9. בחנות גלידה יש 4 טעמים שונים של גלידה שאחד מהם הוא טעם שוקולד. בכמה אופנים ניתן לקנות 10 כדורי גלידה כך שבינהם יהיו לפחות 2 אך לא יותר מ־6 כדורים בטעם שוקולד? (אין חשיבות לסדר הכדורים.)

10. חשבו את $|\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 400, \quad gcd(x, 70) = 1\}|$. ($gcd(a, b)$ מסמן את המחלק המשותף הגדול ביותר של a ו־ b.)

11. תהי $A \subset \{1,2,3,\ldots,1001\}$, $|A| = 183$. הוכיחו כי קיימים $x \in A, y \in A, z \in A$ כך ש־ $x < y < z$ וגם $z - x \leq 10$.

12. נתונות 82 זוגות סדורים של מספרים ממשיים $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_{82},y_{82})$ כך שלכל $1 \leq i < j \leq 82$ מתקיים $x_i \neq x_j$ וגם $y_i \neq y_j$. הוכיחו כי קיימים מספרים שלמים $1 \leq s < t < u < v \leq 82$ כך שכל אחת מהסדרות x_s, x_t, x_u, x_v ו־ y_s, y_t, y_u, y_v הינה מונוטונית. (סדרה a,b,c,d נקראת מונוטונית אם $a < b < c < d$ או $a > b > c > d$.)

13. נסמן ב־ x_n את מספר המילים באורך n שניתן להרכיב מהאותיות d, c, b, a כך שבהן לא מופיע אף אחד מהצירופים הבאים: ab , ac , ad , ba , bb , bc. תנו נוסחת נסיגה ותנאיי התחלה עבור x_n.

14. נתונה נוסחת נסיגה $x_n = 5x_{n-1} + 7$ עם תנאי התחלה $x_1 = 2$. תנו ביטוי מפורש לאיבר כללי x_n.

15. נתון גרף $G=(V,E)$ בו $|V|=7$ ו־ $|E|=16$. הוכיחו כי G קשיר.

16. נתון עץ שהדרגות של קודקודיו לא עולות על 3. בנוסף נתון כי לעץ 13 עלים בדיוק. כמה קודקודים מדרגה 3 יכולים להיות לעץ הזה? רשמו את כל התשובות האפשריות, לכל תשובה אפשרית הביאו דוגמא של גרף מתאים (שרטוט), והוכיחו כי אין אפשרויות אחרות.

17. נתון פאון כך שכל אחת מפאותיו היא מרובע או משושה. בנוסף נתון כי בכל אחד מקודקודיו נפגשות שלוש פאות. מצאו את מספר הפאות המרובעות של הפאון.

18. נזכיר כי גרף הקובייה הארבע־מימדית $Q_4 = (V, E)$ מוגדר באופן הבא: $V = \{0000, 0001, 0010, \ldots, 1111\}$ היא קבוצה של כל הסדרות באורך 4 המורכבות מאפסים ואחדים, וזוג סדרות מ־ V שייך ל־ E אם ורק אם הסדרות שונות זו מזו במקום אחד בדיוק. נגדיר גרף $G = (V', E')$ באופן הבא: $V' = V \cup \{v\}$, כאשר v קודקוד נוסף, $v \notin V$, $E' = E \cup \{\{0000, v\}, \{1111, v\}\}$. האם יש <u>מעגל</u> המילטון ב־ G ? הוכיחו את תשובתכם באופן מדויק ומסודר.