האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

מתמטיקה דיסקרטית 80181

מועד א' תשע"ד – 29/01/14

מרצים: א. גורביץ, א. לובוצקי

משך הבחינה: 2.5 שעות

חומר עזר מותר לשימוש: מחשבון בלבד

הבחינה מכילה 13 שאלות. שווי כל שאלה הוא 8 נקודות.

יש לענות על השאלות בגוף השאלון בתוך המסגרות.
המחברת המצורפת מיועדת לטיוטה בלבד - היא לא תיבדק ולא תיסרק.
בכל זאת, חובה להחזיר אותה יחד עם השאלון.

אם גיליתם שהפתרון שרשמתם באחת המסגרות שגוי, ניתן להשתמש במסגרת רזרבית בסוף השאלון.

יש לרשום תשובות מספריות במפורש.
יש לנמק את כל התשובות באופן מפורט ומסודר.
ניתן להסתמך על המשפטים והטענות שהוכחו במהלך הקורס.

בהצלחה!

מקום למדבקת ברקוד

נא למלא עם קבלת השאלון:

מספר ת"ז_____

מספר מחברת_____

1. נתונה פונקציה $f: A \to B$, $C \subset A$, $D \subset B$. האם בהכרח מתקיימת הזהות $C \cap f^{-1}(D) = f^{-1}(f(C) \cap D)$? אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

2. האם קיימות קבוצות A, B, C ופונקציות $g: B \to C$, $f: A \to B$ כך ש־ g היא על, אך לא חד־חד־ערכית, ואילו $g \circ f$ היא חד־חד־ערכית, אך לא על. אם כן, הביאו דוגמא של פונקציות כאלה. אם לא, הוכיחו.

3. קבוצה $A = P(\{1,2,3\})$ היא הקבוצה של כל התת־קבוצות של $\{1,2,3\}$. יחס סדר חלקי R מעל A מוגדר באופן הבא:
$R = \{(S,T) \in A \times A \mid S \cup \{1\} \subset T$ או $S = T\}$. שרטטו את דיאגרמת הסה עבור R ומצאו את כל האיברים המינימליים והמקסימליים.

4. בכמה אופנים ניתן להושיב 8 אנשים (וביניהם אבי, בני, גדי ודודו) מסביב לשולחן עגול כך שאבי ישב ממול בני, וגם גדי לא ישב ליד דודו? שני סידורי האנשים ששונים בסיבוב ציקלי נספרים כאופן אחד.

5. בכמה אופנים ניתן להלביש 8 ילדים הניצבים בשורה בחולצות אדומות, צהובות וכחולות (חולצות באותו צבע נחשבות זהות) כך שיהיו בדיוק 3 ילדים בחולצה אדומה, לפחות ילד אחד בחולצה צהובה ולפחות ילד אחד בחולצה כחולה?

6. כמה מספרים אי־זוגיים בעלי 14 ספרות ניתן להרכיב מעשר ספרות 1 וארבע ספרות 2 כך שבין כל זוג ספרות 2 תהיינה לפחות שתי ספרות 1?

7. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$, $5 \leq n$ מתקיימת הזהות

$$n^4 - \binom{n}{1}(n-1)^4 + \binom{n}{2}(n-2)^4 - \binom{n}{3}(n-3)^4 + \ldots + (-1)^{n-2}\binom{n}{n-2}\cdot 2^4 + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\cdot 1^4 = 0.$$

רמז: שימו לב כי כאשר $n = 4$ הביטוי בצד שמאל של הזהות שווה ל־ 24.

8. נתונים $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש־ $gcd(n,m) = 5^{2014}$. חשבו את $\frac{\Phi(nm)}{\Phi(n)\Phi(m)}$. ($\Phi$ מסמן את פונקצית אוילר.)

9. נתונות קבוצות $A = \{1,2,\ldots,12\}$, $B = \{1,2,\ldots,15\}$. תהי $S \subset A \times B$ כך ש־ $|S| = 21$. הוכיחו כי קיימים שני זוגות שונים (x_1,y_1) , (x_2,y_2) בקבוצה S כך שמתקיים $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq 4$.

10. נסמן ב־ a_n את מספר המילים באורך n שניתן להרכיב מהאותיות F,E,D,C,B,A כך שבהן לא מופיע אף אחד מהצירופים הבאים: AB , BC , CD , DE , EF , FA. מצאו נוסחת נסיגה ותנאיי התחלה עבור a_n.

11. מהו מספר המסלולים באורך 12 מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(6,6)$ אשר אינם עולים מעל הישר $y = x + 2$,
(כלומר לא עוברים דרך אף נקודה (x,y) כאשר $x + 2 < y$)?
כל צעד במסלול הוא ימינה, כלומר מ־ (a,b) ל־ $(a+1,b)$, או כלפי מעלה, כלומר מ־ (a,b) ל־ $(a,b+1)$.

12. נתון פאון שבין פאותיו יש 6 מתומנים, ושאר פאותיו הינם משולשים. בנוסף נתון כי בכל אחד מקודקודיו נפגשים 3 פאות. מצאו את מספר המקצועות (צלעות) של הפאון.

13. נתון גרף $G = (V, E)$ חסר מעגלים פשוטים כך ש־ $|V| = 16$ וגם $\deg(v) \neq 0$ לכל $v \in V$. בנוסף נתון כי ל־ G יש 6 רכיבי קשירות בדיוק. מהם המספר המינימלי והמספר המקסימלי של עלים שיכול להיות ל־ G? הביאו דוגמאות הגרפים (שירטוטים) המתאימות לתשובות שלכם והוכיחו כי הן מספקות אפשרות מינימלית ואפשרות מקסימלית.

מסגרת רזרבית.

לשימוש הבודקים בלבד!

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
Σ									
Π									