האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

מתמטיקה דיסקרטית 80181

מועד א' תש"ף — 24/02/20

מרצים: א. רז, א. גורביץ, ב. ביגון

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר מותר לשימוש: מחשבון בלבד

הבחינה מכילה 15 שאלות מתוכן 12 שאלות פתוחות ו־ 3 שאלות רבות ברירה ("אמריקאיות").
שווי כל שאלה פתוחה הוא 8 נקודות, שווי כל שאלה רבת ברירה הוא 4 נקודות.

על השאלות הפתוחות יש לענות בגוף השאלון בתוך המסגרת שמופיעה אחרי השאלה.
אם גיליתם שהפתרון שרשמתם באחת המסגרות שגוי, ניתן להשתמש במסגרת רזרבית בסוף השאלון.
בשאלות רבות הברירה יש להקיף בעיגול אחת מתוך התשובות המוצעות. אין צורך בנימוק בשאלות אלה.
המחברת המצורפת מיועדת לטיוטה בלבד - היא לא תיבדק ולא תיסרק.
בכל זאת, חובה להחזיר אותה יחד עם השאלון.

יש לנמק את התשובות לשאלות הפתוחות באופן מפורט ומסודר.
ניתן להסתמך על המשפטים והטענות שהוכחו במהלך הקורס.

בהצלחה!

מקום למדבקת ברקוד

נא למלא עם קבלת השאלון:

מספר ת"ז_____

מספר מחברת_____

לשימוש הבודקים בלבד!

שאלות פתוחות:

1	2	3	5	6	8	9	11	12	13	14	15

שאלות אמריקאיות:

4	7	10

1. יהיו $A = \{4, 8\}$ ו־ $B = \{3, 5, 6\}$. קבעו האם הטענה נכונה.

א) $\forall x \in A\, \exists y \in B \;\; y < x < 2y$

ב) $\exists x \in A\, \forall y \in B \;\; y < x < 2y$

ג) $\forall y \in B\, \exists x \in A \;\; y < x < 2y$

ד) $\exists y \in B\, \forall x \in A \;\; y < x < 2y$

2. תהיינה $f: A \to B$, $h, g: B \to A$ פונקציות כך ש־ f חד־חד־ערכית וגם מתקיים $g \circ f = h \circ f$. האם בהכרח $g = h$?

3. נתונות תמורות: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ ו־ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

א) האם קיים k טבעי כך ש־ $f = g^k$?

ב) האם קיים k טבעי כך ש־ $g = f^k$?

4. נתון לוח משבצות בעל 4 עמודות ו־ 6 שורות. בכמה אופנים אפשר לסמן משבצות על הלוח כך שבכל עמודה תהיה בדיוק משבצת מסומנת אחת, וגם בשורה התחתונה תהיה <u>לפחות</u> משבצת מסומנת אחת?

25	50	100	196	392	480	495	625	671
680	715	784	786	792	1024	1296	3072	4096

5. יהיו S, R יחסים טרנזיטיביים מעל קבוצה A. האם $R \setminus S$ בהכרח טרנזיטיבי?

6. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיימת הזהות:

$$n \cdot 3^0 \binom{n}{0} + (n-1) \cdot 3^1 \binom{n}{1} + (n-2) \cdot 3^2 \binom{n}{2} + \ldots + (n-(n-1)) \cdot 3^{n-1} \binom{n}{n-1} = n \cdot 2^{2n-2}$$

7. מהו מספר הפתרונות השלמים האי־שליליים של המשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$$

בתנאי ש־ $1 \leq x_1$ וגם $x_5 \leq 5$?

25	50	100	196	392	480	495	625	671
680	715	784	786	792	1024	1296	3072	4096

8. נתון: $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 23, 25\}$ (קבוצת כל המספרים האי־זוגיים בין 1 לבין 25) ו־ $S \subset A$ כך ש־ $|S| = 7$.
הוכיחו שקיימות שתי תתי־קבוצות שונות ולא ריקות $X, Y \subset S$ כך שכל אחת מהן בעלת מספר <u>זוגי</u> של איברים וסכום איברי הקבוצה X שווה לסכום איברי הקבוצה Y.

9. א) תהיינה A_1, A_2, A_3 קבוצות סופיות. הוכיחו:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \geq |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$$

ב) תהיינה $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות סופיות. הוכיחו:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$$

10. מצאו את מספר הסדרות $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{15}, a_{16}$ אשר מקיימות את התנאים הבאים:

$a_k^2 = 1$ לכל $1 \le k \le 16$; $\sum_{i=1}^{16} a_i = \sum_{i=1}^{8} a_i = 0$; $\sum_{i=1}^{k} a_i \ne 0$ לכל $1 \le k \le 7$ וגם לכל $9 \le k \le 15$.

25	50	100	196	392	480	495	625	671
680	715	784	786	792	1024	1296	3072	4096

11. הסדרה a_n מוגדרת באופן הבא: $a_1 = 7$, $a_2 = 21$, $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} - 4$ לכל $3 \le n$.
הוכיחו כי $a_n = 2 \cdot 3^n + 2n - 1$ לכל n טבעי.

12. הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ מוגדרת ע"י $f(n)=1^2\cdot 2^1+2^2\cdot 2^2+3^2\cdot 2^3+\ldots+n^2\cdot 2^n$ לכל n טבעי.
מצאו k,l ממשיים כך ש־ $f=\Theta(g)$ כאשר $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ מוגדרת ע"י $g(n)=n^k\cdot 2^{ln}$ לכל n טבעי.

13. נתון גרף $G = (V, E)$ עם $|E| = 8$, ללא מעגלים פשוטים וללא קודקודים מדרגה 0. בנוסף נתון כי ב־ G יש 11 עלים בדיוק.
כמה רכיבי קשירות יכולים להיות ב־ G? רשמו את כל התשובות האפשריות **והוכיחו כי אין תשובות אחרות.**
בנוסף לכל תשובה **אפשרית** הביאו דוגמה של גרף מתאים.

14. בגרף קשיר $G = (V, E)$ מתקיים $|V| = 7, |E| = 8$.
א) האם יתכן כי ב־ G קיים מעגל המילטון?
ב) האם יתכן כי ב־ G קיים מעגל אוילר?

15. צלעות הגרף K_6 צבועים בשני צבעים – אדום וכחול. נתון שהצלע $e = \{u, v\}$ צבועה באדום, וגם כל צלע בעלת קודקוד משותף עם e צבועה באדום. האם בהכרח קיים תת־גרף K_4 שכל צלעותיו צבועים באותו צבע?

מסגרת רזרבית.