האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

מתמטיקה דיסקרטית (1) 80181

מועד ב' תשפ"ב — 03/03/22

מרצים: אלכס גורביץ', אורית רז, נעה ניצן משך הבחינה: 2.5 שעות

חומר עזר מותר לשימוש: מחשבון בלבד.

הבחינה מכילה 14 שאלות, מתוכן 5 שאלות פתוחות ו־9 שאלות
רבות ברירה (אמריקאיות) - ענו על 4 מתוך השאלות הפתוחות
ועל כל השאלות רבות הברירה. **אל תענו על יותר מארבע שאלות פתוחות!**
אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
שווי כל שאלה פתוחה הוא 13 נקודות, שווי כל שאלה רבת ברירה הוא 6 נקודות.

על השאלות הפתוחות יש לענות בגוף השאלון באותו עמוד בו מופיע ניסוח השאלה.
אם גיליתם שאחד מהפתרונות שרשמתם שגוי, ניתן להשתמש בעמודים הרזרביים בסוף השאלון.
בשאלות רבות הברירה יש להקיף אחת מתוך התשובות המוצעות. אין צורך בנימוק בשאלות אלה.
המחברת המצורפת מיועדת לטיוטה בלבד – היא לא תיבדק ולא תיסרק.
בכל זאת, חובה להחזיר את המחברת יחד עם השאלון.

יש לנמק את התשובות לשאלות הפתוחות באופן מפורט ומסודר.
ניתן להסתמך ללא הוכחה על המשפטים והטענות שהוכחו בהרצאות במהלך הקורס.

בהצלחה!

מקום למדבקת ברקוד

נא למלא עם קבלת השאלון:

מספר ת"ז: _____

סמנו ב־ ✓ את השאלות הפתוחות שבחרתם:

מספר שאלה	2	4	6	8	10
בחירה					

1. מהו סדר קצב הגידול הפולינומיאלי של הסדרה (a_n) כאשר a_n הוא מספר הדרכים לסדר בשורה 3 כדורים כחולים, 3 כדורים צהובים ו־n כדורים אדומים?
כדורים באותו צבע נחשבים זהים.

$$9 \qquad 8 \qquad 7 \qquad 6 \qquad 5$$

---

2. הוכיחו כי לכל $k, n \in \mathbb{N}$ כך ש־$3 \leq k \leq n-3$ מתקיים

$$\binom{n-3}{k-3} + 3\binom{n-3}{k-2} + 3\binom{n-3}{k-1} + \binom{n-3}{k} = \binom{n}{k}$$

3. נתונה הקבוצה $A = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 3 \leq x+y \leq 5\}$, ויחס סדר חלקי

$$R = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in A \times A \mid x_1 \leq x_2 \text{ וגם } y_1 \leq y_2\}$$

על A. כמה איברים מינימליים יש ב־A?
<u>תזכורת:</u> $0 \notin \mathbb{N}$.

2 3 4 5 6

---

4. נתונות הקבוצות $A = \{1,2,\ldots,7\}$ ו־$B = \{1,2,\ldots,8\}$. תהי $S \subseteq A \times B$ כך ש־ $|S| = 29$.
הוכיחו כי קיימים $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in S$ כך שמתקיים $x_2 = x_1$ וגם $y_2 = y_1 + 1$.

5. נתון גרף קשיר $G=(V,E)$ כך שבין קודקודיו יש בדיוק שישה עם דרגה 3 ולשאר קודקודיו הדרגה קטנה מ־3.
מהו המספר המקסימלי של קודקודים עם דרגה 1 ב־G?

9 8 7 6 5

---

6. נתונה סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־$a_1=1$ וגם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n \le a_{n+1} \le 2a_n$.
הוכיחו כי ניתן להציג כל מספר טבעי כסכום של (אחד או יותר) איברים <u>שונים</u> של הסדרה.

7. מהו מספר הפתרונות השלמים האי־שליליים של $x_1 + \ldots + x_9 = 7$ שמקיימים $x_1 + x_2 + x_3 = 3$?

630 700 1260 1400 2520

---

8. צלעות הגרף K_9 צבועות בשני צבעים - אדום וכחול. נתון כי בגרף יש שלושה קודקודים שונים: u, v, w כך שכל צלע שמכילה לפחות אחד מהם צבועה באדום. הוכיחו כי בתוך הגרף יש תת־גרף K_6 שכל צלעותיו אדומות או תת־גרף K_3 שכל צלעותיו כחולות.

9. בכמה דרכים ניתן לחלק כיתה שבה $2n$ ילדים ל־n זוגות? (אין חשיבות לסדר בין הזוגות)

$\binom{n+1}{2} \cdot n!$ $\quad$ $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ $\quad$ $\binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{(2n)!}{2^n}$ $\quad$ $\binom{n+1}{2} \cdot (n-1)!$

---

10. בנו במפורש פונקציה חח"ע ועל מ־$\{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ אל $\{f : \mathbb{N} \to \{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$.

11. בסקר שנערך בקבוצה של 32 סטודנטים לגבי העדפותיהם לתוספות על פיצה התברר כי כל סטודנט מהקבוצה אוהב לפחות שתיים מתוך התוספות הבאות: זיתים, פטריות ואננס. בנוסף, מספר אוהבי הזיתים הוא 21, מספר אוהבי הפטריות הוא 22 ומספר אוהבי האננס הוא 24. כמה סטודנטים אוהבים את כל שלוש התוספות?

1 2 3 4 5

(מקום רזרבי)

12. נתונה פונקציה $f : A \to B$ וקבוצה $S \subseteq B$. איזו מהטענות הבאות לא נכונה?

- אם f חח"ע אז $f\left(f^{-1}(S)\right) \subseteq S$
- אם f חח"ע אז $f\left(f^{-1}(S)\right) \supseteq S$
- אם f על אז $f\left(f^{-1}(S)\right) \subseteq S$
- אם f על אז $f\left(f^{-1}(S)\right) \supseteq S$

(מקום רזרבי)

13. נתון גרף $G=(V,E)$ עם $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_7\}$. נתון כי G עץ. איזו מהסדרות הבאות יכולה להיות סדרת הדרגות $(\deg(v_1),\deg(v_2),\ldots,\deg(v_7))$?

- $(1,1,3,2,3,1,1)$
- $(1,1,3,3,3,3,3)$
- $(3,3,3,3,3,3,4)$
- $(4,4,0,2,2,2,2)$
- $(1,1,3,3,2,2,0)$

(מקום רזרבי)

14. נתונה קבוצה A המקיימת $|A| \geq 2$ וכן נתון יחס R על A.
נתון כי $R = R_f$ כאשר $R_f = \{(a,b) \in A \times A \mid f(a) = b\}$, עבור פונקציה $f : A \to A$.
להלן שתי טענות על R:

א. אם R סימטרי אז $f = \mathrm{Id}_A$.

ב. אם R טרנזיטיבי אז $f = \mathrm{Id}_A$.

בחרו באחת מהאפשרויות הבאות:

- א נכונה, ב לא נכונה
- א נכונה, ב נכונה
- א לא נכונה, ב נכונה
- א לא נכונה, ב לא נכונה

(מקום רזרבי)