האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

מתמטיקה דיסקרטית 80181

מועד א' תשפ"ג — 26/07/23

מרצה: ד"ר נעה ניצן מתרגל: רועי שטוירמן **משך הבחינה:** 2.5 שעות

חומר עזר מותר לשימוש: מחשבון בלבד

הבחינה מכילה 12 שאלות מתוכן 6 שאלות פתוחות ו־6 שאלות רבות ברירה ("אמריקאיות"). שווי כל שאלה פתוחה הוא 12 נקודות, ושווי כל שאלה רבת ברירה הוא 5 נקודות.

בתשובה לשאלה פתוחה אתם רשאים לכתוב "**אינני יודע/ת**" בתחילת האזור המיועד לפתרון השאלה, מה שיזכה אתכם ב־2 נקודות בדיוק על השאלה.

על השאלות הפתוחות יש לענות בגוף השאלון בתוך המסגרת שמופיעה אחרי השאלה. אם גיליתם שהפתרון שרשמתם באחת המסגרות שגוי, ניתן להשתמש במסגרות רזרביות בסוף השאלון. בשאלות רבות הברירה יש להקיף בעיגול בדיוק אחת מתוך התשובות המוצעות. אין צורך בנימוק בשאלות אלה (נימוקים לא ייבדקו).
המחברת המצורפת מיועדת לטיוטה בלבד – היא לא תיבדק ולא תיסרק. בכל זאת, חובה להחזיר אותה יחד עם השאלון.

יש לנמק את תשובותיכם לשאלות הפתוחות באופן מפורט ומסודר. ניתן להסתמך על המשפטים והטענות שהוכחו במהלך הקורס, אלא אם הם גוף ועיקר השאלה.

בהצלחה!

מקום למדבקת ברקוד

נא למלא עם קבלת השאלון:

מספר ת"ז: _____

שימו לב: יש לכתוב מספר ת"ז גם בדפים שבהמשך!

1. תהי $C = \{(x,y) \in [5] \times [6] \mid x \cdot y \geq 7\}$. נגדיר יחס סדר חלקי $\preccurlyeq$ על הקבוצה C באופן הבא: $(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2)$ אם ורק אם $x_1 \leq x_2$ וגם $y_1 \leq y_2$.
כמה איברים מינימליים יש ב־C?

0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15

2. הוכיחו כי לכל $4 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיימת הזהות

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3 \cdot \binom{n}{4} + 3 \cdot \binom{n}{3}$$

<u>רמז (אין חובה להשתמש בו)</u>: $\binom{n}{2}$ הוא מספר הצלעות בגרף השלם K_n על n קדקודים.

מספר ת"ז: _____

3. מה מספר התמורות $\sigma : [8] \to [8]$ המקיימות $|\sigma(1) - \sigma(2)| = 1$?

360	720	1080	1440	1620	1854	2160	2980
3600	4320	5040	7680	8630	8800	9720	10080
12360	13720	14833	16480	20160	32100	40320	80640

4. נתונים 14 מספרים <u>זוגיים</u> שונים זה מזה: $c_1, c_2, \ldots, c_{14} \in [92]$. הוכיחו כי קיימים 4 אינדקסים שונים זה מזה $i, j, k, l \in [14]$ כך שמתקיים $c_i + c_j = c_k + c_l$.

5. במבחן באנגלית, שבו הציון המקסימלי הוא 150, מופיעות 10 שאלות שונות, כל אחת בשווי זהה של 15 נקודות. יש ארבע אפשרויות לניקוד של כל שאלה: 0, 5, 10 או 15 נקודות. מה מספר הדרכים השונות לקבל בדיוק 55 במבחן?

1230	8350	11,220	20,960	42,351
52,500	63,460	84,360	102,360	156,740
171,106	202,580	333,554	582,440	1,191,200

6. תהי $f : A \to B$ פונקציה, ונתון ש־f <u>על</u>. נתונות קבוצות $C_1, C_2 \subseteq B$. <u>הוכיחו או הפריכו</u>: אם $f^{-1}(C_1) = f^{-1}(C_2)$, אז $C_1 = C_2$.

מספר ת"ז: _____

7. קבעו מהו המקדם של x^5 בביטוי הבא:

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$$

0	10	15	105	120	210	455
540	1365	3003	4004	5005	6435	32175

8. נזכיר כי בהינתן גרף $G=(V,E)$, **הגרף המשלים** $\overline{G}=(V,\overline{E})$ הוא הגרף על אותה קבוצת קודקודים שצלעותיו הן בדיוק כל הצלעות שאינן מופיעות ב־G.
יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר, רגולרי ובעל מספר זוגי $|V|=n>1$ של קודקודים. נתון בנוסף כי ב־G אין מעגל אוילר.
בהינתן שהגרף המשלים $\overline{G}$ קשיר, הוכיחו כי ב־$\overline{G}$ יש מעגל אוילר.

9. מהו מספר ההילוכים השריגיים מ־$(0,0)$ ל־$(7,5)$ העוברים דרך הנקודה $(3,2)$ וגם אינם עולים מעל או אפילו חותכים את הישר $y = x$ (מלבד בנקודת ההתחלה)?

8	10	12	14	16	18	20	22
24	25	26	28	32	36	42	48
56	72	120	140	154	250	1485	3960

10. לכל n טבעי נסמן ב־c_n את מספר הדרכים לטפס לראש סולם בעל n שלבים, כאשר בכל צעד מותר לטפס שלב אחד, שני שלבים או שלושה שלבים, וכמו כן, אסור לעלות פעמיים ברציפות שלב אחד בסולם. מצאו נוסחת נסיגה עבור $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, כולל מקרי הבסיס.

מספר ת"ז: _____

11. מהו הסדר של קצב הגדילה הפולינומיאלית של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, כאשר a_n הוא מספר הדרכים לחלק 20 כדורים זהים ל־n תאים שונים, כך שמספר הכדורים בתא הראשון גדול או שווה למספר הכדורים בתא השני?

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

$$11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20$$

12. בחנות פרחים יש n לקוחות ו־n עציצים שונים. לכל לקוח יש רשימה של בדיוק 3 עציצים, שמתוכם מעוניין לרכוש עציץ אחד. כל עציץ מופיע ברשימות של לכל היותר 3 לקוחות שונים.
הוכיחו כי ניתן למכור לכל לקוח עציץ המופיע ברשימה שלו. (לא ניתן למכור את אותו העציץ ליותר מלקוח אחד.)

מסגרת רזרבית 1. עניתי בה על שאלה מספר : _____

מספר ת"ז: _____

מסגרת רזרבית 2. עניתי בה על שאלה מספר : _____

מסגרת רזרבית 3. עניתי בה על שאלה מספר : _____