80.131
מ"ס 3 / ב

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (1) (80131)

מועד ב' תשס"ד

המורים: ד"ר צ. אלטשולר, מר א. צביק, פרופ' ר. קופרמן

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליכם לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אין לענות על מספר שאלות גדול מן המבוקש. יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב'. יש לצטט במדויק את התנאים של כל המשפטים שמשתמשים בהם.

השימוש במחשבון אסור.

מצורף טופס נלווה לבחינה. יש למלא את הפרטים ולסמן עליו את מספרי השאלות עליהן בחרתם לענות בפרקים א' ו- ב', וכמו כן את תשובותיכם לפרק ג'.

בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה הכולל את הטופס הנלווה וכן את מחברת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה !

80, 131
תקס"ג/ב

פרק א' (25%)

ענו על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. הוכיחו את משפט בולצנו-ויירשטרס (Bolzano-Weierstrass) (לכל סדרה חסומה של מספרים ממשיים יש תת-סדרה מתכנסת).
2. הוכיחו שלכל מספר ממשי חיובי קיים שורש ריבועי חיובי (בהסתמך רק על אכסיומת החסם העליון של המספרים הממשיים) והוכיחו שהוא יחיד.

פרק ב' (40%)

ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

3. תהי (a_n) סדרה של מספרים ממשיים.

תהי (b_n) סדרה של גבולות חלקיים של הסדרה (a_n).

הוכיחו שאם הסדרה (b_n) אינה חסומה מלמעלה (מלעיל), אז גם הסדרה (a_n) אינה חסומה מלמעלה.

4. א. הוכיחו שאם f פונקציה רציפה במידה שווה בקטע (a,b) אז היא חסומה ב-(a,b).

ב. תהי S קבוצה לא ריקה וחסומה של מספרים ממשיים.

נגדיר את הקוטר של S על ידי

$$diam(S) = \sup\{|x-y| : x,y \in S\}$$

בהסתמך על הגדרת ה- sup וה- inf, הוכיחו ש

$diam(S) = \sup S - \inf S$.

5. ללא שימוש במשפט ההצבה, הוכיחו את השיוויון

$$\int_{-a}^{a} f(x^2)dx = 2\int_{0}^{a} f(x^2)dx$$

בהנחה שהאינטגרל באגף שמאל קיים.

פרק ג' (35%)

עבור כל אחת מהשאלות בפרק זה יש לבחור את התשובה הנכונה ולסמנה בטופס הנלווה.

1. יהיו b,a,y,x מספרים ממשיים ו- n,m מספרים שלמים.

א. אם $0<x$ ו- $m<n$ אז $x^m < x^n$.

ב. אם $0<x$ ו- $0<n$ אז $x^{1/n} \le x$.

ג. אם $a \le x$ ו- $b \le x$ אז $\sqrt{|ab|} \le |x|$.

ד. אם $1<x$ אז $x^{[y]} \le x^y$ כאשר $[y]$ הוא החלק השלם של y.

80. 131
תש"ס/ב'

2. תהי (a_n) סדרה של מספרים ממשיים חיוביים כך ש $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. הסדרה (a_n) מתכנסת במובן הרחב.

ב. הסדרה (a_n) חסומה מלעיל.

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{2n}}=1$.

ד. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

3. תהי (a_n) סדרה של מספרים ממשיים חיוביים המתכנסת למספר ממשי c. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. $\lim_{n\to\infty}a_n^n=\lim_{n\to\infty}c^n$.

ב. אם $c\le 1$ אז הגבול $\lim_{n\to\infty}a_n^n$ קיים.

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ רק אם $0<c$.

ד. אם $0<c$ אז $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

4. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ו- $x_0\in(a,b)$. איזו מהתנאים הבאים מבטיחים את רציפותה של f בנקודה x_0?

א. לכל סדרה מונוטונית ממש של נקודות (x_n) בקטע (a,b).
אם $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ אז הגבול $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ קיים.

ב. לכל סדרה של נקודות (x_n) בקטע (a,b) אם $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ אז לסדרה $(f(x_n))$ יש תת סדרה מתכנסת.

ג. קיימת פונקציה רציפה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שהפונקציה המורכבת $g\circ f$ רציפה בנקודה x_0.

ד. אף אחד מהתנאים האחרים אינו מבטיח רציפות.

80, 131
נ/3"סרן

5. תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $0<f(x)$ לכל $x\in[0,1]$. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. קיים מספר ממשי $0<m$ כך ש $m\le f(x)$ לכל $x\in(0,1)$.

ב. הפונקציה ההפוכה f^{-1} קיימת והיא רציפה.

ג. לכל $x\in[0,1]$ קיימים $y,z\in[0,1]$ כך ש $f(x)<\frac{1}{2}[f(y)+f(z)]$.

ד. הפונקציה המורכבת $f\circ g$ רציפה לכל $g:[0,1]\to[0,1]$ אינטגרבילית.

6. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נניח של- f יש בדיוק m שורשים (נקודות בהן היא מתאפסת) ו- $m\ge 1$. איזו מהטענות הבאות על מספר השורשים של f' נכונה בהכרח?

א. ל- f' יש בדיוק $m-1$ שורשים.

ב. ל- f' יש לפחות $m-1$ שורשים.

ג. ל- f' יש לכל היותר $m-1$ שורשים.

ד. מספר השורשים של f' הוא אינסופי.

7. מה ניתן לאמר על הגבול $\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2+i^2}$?

א. שווה ל- $1/8$.

ב. שווה ל- $\pi/4$.

ג. שווה ל- ∞.

ד. הגבול לא בהכרח קיים.