80131
אפס ה/ס

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (1) (80131)

מועד ב' תשס"ה

המורים: פרופ' א. דה-שליט, מר א. צביק, פרופ' מ. ציפין

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליכם לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אין לענות על מספר שאלות גדול מן המבוקש. יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב'. אם משתמשים במשפט שאין לו שם ידוע – יש לנסח את המשפט.

מצורף טופס נלווה לבחינה. יש למלא את הפרטים ולסמן עליו את מספרי השאלות עליהן בחרתם לענות בפרקים א' ו- ב', וכמו כן את תשובותיכם לפרק ג'.

בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה הכולל את הטופס הנלווה וכן את מחברת הבחינה.

נא לכתוב בעט, בצדה השמאלי של המחברת ולא בשוליים.
אנא **זכרו** את מס' המחברת.

ב ה צ ל ח ה !

80. 131
תשס"ה / מ

טופס נלווה לבחינה בחשבון אינפיניטסימלי 1 (80131)

מועד ב, שנה"ל תשס"ה

יש למלא טופס זה בעט בלבד !

תאריך: 4/8/05 מספר הסטודנט/ית: _____

מספר מחברת: _____

I. סמנו V במשבצות המתאימות לשאלות שבחרתם לענות עליהן, בפרקים א ו- ב בבחינה:

		סימון התלמיד/ה	ציון (לשימוש הבודק/ת)	שם הבודק/ת
פרק א	שאלה 1			
	שאלה 2			
פרק ב	שאלה 3			
	שאלה 4			
	שאלה 5			

II. סמנו בטבלה הבאה את תשובותיכם לפרק ג בבחינה. סמנו X בריבוע המתאים בכל שורה:

		א	ב	ג	ד	לשימוש הבודק/ת
פרק ג	שאלה 1	☐	☐	☐	☐	
	שאלה 2	☐	☐	☐	☐	
	שאלה 3	☐	☐	☐	☐	
	שאלה 4	☐	☐	☐	☐	
	שאלה 5	☐	☐	☐	☐	
	שאלה 6	☐	☐	☐	☐	
	שאלה 7	☐	☐	☐	☐	
		שם הבודק/ת:				ציון

80.131
תקס"ו/מ'

פרק א' (25%)

יש לענות על שאלה אחת.

1. הוכיחו שסדרת מספרים $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול אם, ורק אם, לכל $\varepsilon > 0$ יש N טבעי כך ש $\varepsilon > |a_n - a_k|$ לכל $N < k,n$.

   (יש להוכיח את הלמות עליהן נסמכת הוכחת המשפט).

2. הוכיחו כי פונקציה מונוטונית עולה על קטע $[a,b]$ אינטגרבילית בו.

פרק ב' (40%)

ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

3. תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, $0 \le f(x)$ לכל x בקטע, ונניח קיימת נקודה c בקטע בה f רציפה ו $0 < f(c)$. הוכיחו: $0 < \int_a^b f(x)dx$.

4. תהי $f(x)$ פונקציה בעלת נגזרת שניה $f''(x)$ בקטע (a,b) ונניח $0 < f''(x)$ לכל x. הוכיחו שלמשוואה $f(x) = mx + n$ יש לכל היותר שני פתרונות בקטע.

   (m,n מספרים נתונים. <u>רמז</u>: הניחו תחילה $m = n = 0$).

5. הוכיחו שהטור $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \ldots$ מתבדר.

80. 131
תקיים / ה

פרק ג' (35%)

ענו על כל השאלות. יש לסמן תשובה נכונה אחת לכל שאלה בטופס הנלווה.

1. איזו טענה נכונה תמיד עבור פונקציה רציפה בקטע הפתוח $(0,1)$?

א. אם f מונוטונית עולה אזי היא חסומה.

ב. אם f רציפה במידה שווה אזי f חסומה.

ג. אם f רציפה במידה שווה וחסומה, אזי f מקבלת את המקסימום שלה בקטע.

ד. אם f חסומה, אזי f רציפה במידה שווה.

2. תהי f פונקציה רציפה על כל הישר ונגדיר $F(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$.

אזי $F'(x)$ שווה

א. $f(x)-f(-x)$

ב. 0

ג. $f(x)$

ד. $f(x)+f(-x)$

3. תהי f פונקציה גזירה בסביבת 1 ונניח $f(1)=\pi$.

אזי הנגזרת של $\cos(f(x))$ ב- 1 הנה:

א. הפונקציה לא בהכרח רציפה ב- 1.

ב. 0

ג. התשובה תלויה ב- $f'(1)$.

ד. π

4. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[0,2]$, $f(0)=0$ $f(2)=1$. איזו טענה בהכרח נכונה?

א. הטוח של f הוא הקטע $[0,1]$.

ב. f מונוטונית עולה בקטע.

ג. אם f גזירה בקטע, יש נקודה c בה $f'(c)=\frac{1}{2}$.

ד. יש נקודה $0<c<2$ שם ל- f יש מקסימום מקומי.

80. 131
מס"ד / מ

5. יהיו $A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $\quad B=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ $\quad C=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

שלושה טורים ונניח $|c_n|\le Max(|a_n|,|b_n|)$. איזו טענה נכונה?

א. אף אחת מהטענות האחרות אינה נכונה.

ב. אם A ו B מתכנסים בהחלט, גם C מתכנס.

ג. אם שלושת הטורים מתכנסים $C\le Max(A,B)$.

ד. אם A או B מתבדר, גם C מתבדר.

6. תהיה (a_n) סדרה חסומה. איזו טענה נכונה תמיד?

א. אם $\underline{\lim}\, a_n=\overline{\lim}\, a_n$ הסדרה מתכנסת.

ב. $\underline{\lim}\, a_n<\overline{\lim}\, a_n$.

ג. לכל $\underline{\lim}\, a_n\le L\le\overline{\lim}\, a_n$ יש תת-סדרה המתכנסת ל L.

ד. לכל $\varepsilon>0$ כל אברי הסדרה פרט למספר סופי קטנים מ $\underline{\lim}\, a_n+\varepsilon$.

7. $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\right)}{\sqrt{n}}$ הנו

א. לא קיים.

ב. e

ג. 0

ד. 1

80.131
מס' א'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (1) (80131)

מועד א' תשס"ה

המורים: פרופ' א. דה-שליט, מר א. צביק, פרופ' מ. ציפין

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליכם לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אין לענות על מספר שאלות גדול מן המבוקש. יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב'. אם משתמשים במשפט שאין לו שם ידוע – יש לנסח את המשפט.

מצורף טופס נלווה לבחינה. יש למלא את הפרטים ולסמן עליו את מספרי השאלות עליהן בחרתם לענות בפרקים א' ו- ב', וכמו כן את תשובותיכם לפרק ג'.

בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה הכולל את הטופס הנלווה וכן את מחברת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה !

80131
מקסימום/א

טופס נלווה לבחינה בחשבון אינפיניטסימלי 1 (80131)

מועד א, שנה"ל תשס"ה

יש למלא טופס זה בעט בלבד !

תאריך: 3/2/05 מספר הסטודנט/ית: _____

מספר מחברת: _____

I. סמנו V במשבצות המתאימות לשאלות שבחרתם לענות עליהן, בפרקים א ו- ב בבחינה:

		סימון התלמיד/ה	ציון (לשימוש הבודק/ת)	שם הבודק/ת
פרק א	שאלה 1			
	שאלה 2			
פרק ב	שאלה 3			
	שאלה 4			
	שאלה 5			

II. סמנו בטבלה הבאה את תשובותיכם לפרק ג בבחינה. סמנו X בריבוע המתאים בכל שורה:

		א	ב	ג	ד	לשימוש הבודק/ת
פרק ג	שאלה 1	☐	☐	☐	☐	
	שאלה 2	☐	☐	☐	☐	
	שאלה 3	☐	☐	☐	☐	
	שאלה 4	☐	☐	☐	☐	
	שאלה 5	☐	☐	☐	☐	
	שאלה 6	☐	☐	☐	☐	
	שאלה 7	☐	☐	☐	☐	
		שם הבודק/ת:				ציון

80. 131
16/מס'

פרק א' (25%)

ענו על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. א. הגדירו את המושגים אי רציפות סליקה, אי רציפות ממין ראשון ואי רציפות ממין שני.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה בקטע הסגור $[a,b]$.

הוכיחו שלפונקציה $f(x)$ יכולות להיות נקודות אי רציפות ממין ראשון בלבד.

2. א. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$.

הוכיחו ש $f(x)$ אינטגרבילית בקטע. (23%)

ב. הוכיחו כי

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)$$ (2%)

פרק ב' (40%)

ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

3. יהיו a_n , b_n ו- c_n מספרים כך שלכל $1\le n$ $a_n \le b_n \le c_n$ ונניח כי

$\lim_{n\to\infty} b_n = L$ ו- $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$.

4. תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת ברווח (a,b) המכיל את x_0 ונניח כי f גזירה ב- x_0.

חשבו את $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0+3h)}{h}$.

5. תהי $f(x)=\int_0^x (1+t^3)^{-\frac{1}{2}}\,dt$ לכל $0\le x$. (אל תנסו לחשב את $f(x)$)

א. הוכיחו כי $f(x)$ מונוטונית עולה ממש ב $(0,\infty)$.

ב. תהי g הפונקציה ההפוכה ל- f. הוכיחו כי $(g'(y))^2 = 1+g(y)^3$ לכל $0<y$.

80, 131
מקס"ו / א'

פרק ג' (35%)

ענו על כל השאלות. בכל שאלה יש לסמן תשובה נכונה אחת בלבד בטופס הנלווה.

1. איזה מהמשפטים הבאים אינו נכון?
   א. בין כל שני מספרים ממשיים ישנו מספר רציונלי.
   ב. כל מספר ממשי הוא חסם עליון של קבוצה לא ריקה.
   ג. אם $\alpha = \sup A$ לא שייך ל A, אז α אי-רציונלי.
   ד. אם A חסומה מלעיל, אז $-A$ חסומה מלרע.

2. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחסומה. איזו מהטענות הבאות תמיד נכונה?
   א. f מקבלת מקסימום.
   ב. f רציפה במידה שווה.
   ג. f אינה מונוטונית עולה על כל הישר.
   ד. הטווח של f הנו קטע סגור, פתוח או חצי פתוח.

3. $\lim_{n\to\infty}(n+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ שווה:
   א. 1
   ב. ∞
   ג. 0
   ד. הגבול לא קיים (אפילו במובן הרחב).

4. מבין שלושת הטורים

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{2^n} \qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

מתכנסים:
   א. (1) ו (2) בלבד.
   ב. (1) בלבד.
   ג. (2) ו (3) בלבד.
   ד. כולם.

80, 131
מס' 1/א

5. עבור פונקציה גזירה על כל הישר המקיימת $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$:

א. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ קיים.

ב. $f(x)$ חסומה כאשר $x\to\infty$, אך לא בהכרח שואפת לגבול.

ג. $f(x)<x$ עבור x גדול, אך f לא בהכרח חסומה.

ד. $x\le f(x)$ יתכן עבור x גדול כרצוננו.

6. תהי $f(x)=x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ עבור $0<x\le 1$, $f(0)=0$. איזה מהטענות הבאות נכונה?

א. f רציפה בקטע $[0,1]$ אך אינה גזירה ב- 0.

ב. f גזירה בקטע $[0,1]$ אך נגזרתה אינה רציפה ב- 0.

ג. ל- f יש נגזרת רציפה, אך אין נגזרת מסדר שני ב- 0.

ד. הנגזרות של f מכל סדר קיימות בקטע $[0,1]$.

7. תהי f פונקציה בקטע $[a,b]$. איזה מהתנאים הבאים איננו מבטיח ש f אינטגרבילית?

א. f גזירה בקטע הפתוח (a,b).

ב. f חסומה ויש לה מספר סופי של נקודות אי-רציפות.

ג. f פונקצית מדרגות.

ד. $[a,b]$ הנו אחוד של שני קטעים סגורים שבכל אחד מהם f מונוטונית.

80. 131
1k / 3'ORA

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (1) (80131)

מועד א' תשס"ד

המורים: ד"ר צ. אלטשולר, מר א. צביק, פרופ' ר. קופרמן

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליכם לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אין לענות על מספר שאלות גדול מן המבוקש. יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב'. אם משתמשים במשפט שאין לו שם ידוע – יש לנסח את המשפט.

השימוש במחשבון אסור.

מצורף טופס נלווה לבחינה. יש למלא את הפרטים ולסמן עליו את מספרי השאלות עליהן בחרתם לענות בפרקים א' ו- ב', וכמו כן את תשובותיכם לפרק ג'.

בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה הכולל את הטופס הנלווה וכן את מחברת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה !

80. 131
תמ"ס 3 / 1ק

פרק א' (25%)

ענו על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. נסחו והוכיחו את הלמה של קנטור (Cantor).
2. הוכיחו שפונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית באותו קטע.

פרק ב' (40%)

ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

3. א. תהי f פונקציה גזירה פעמיים (כלומר, הפונקציה f' גזירה ונגזרתה מסומנת ע"י f'') בקטע $[0,1]$.

נתון ש

$$f(0)=f'(0)=f(1)=0.$$

הוכיחו שקיימת נקודה $\xi\in(0,1)$ כך ש $f''(\xi)=0$.

ב. תהי g נתונה על ידי

$$g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & 0<x\le 1\\ 15 & x=0\end{cases}$$

הוכיחו ש g אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

4. תהיינה (a_n), (b_n) סדרות של מספרים ממשיים, ויהי α מספר ממשי.

א. הוכיחו שאם

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\alpha$$
$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$$

אז הסדרה (a_n) מתכנסת ל- α.

ב. הוכיחו: $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)+\overline{\lim_{n\to\infty}}(b_n)$

ומצאו דוגמא לסדרות (a_n) , (b_n) עבורן מתקיים אי-שוויון חזק.

5. תהי f פונקציה מונוטונית בקטע $[a,b]$ כך ש $0\le f(x)$ לכל $a\le x\le b$.

נתון ש

$$\int_a^b f(x)dx=0.$$

הוכיחו ש $f(x)=0$ לכל x בקטע הפתוח (a,b).

הוכיחו או תנו דוגמא נגדית: האם נובע בהכרח ש- f שווה זהותית לאפס בקטע הסגור $[a,b]$?

80 131
16/3 סמ

פרק ג' (35%)

ענו על כל השאלות. אין צורך לנמק!

1. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים

$$A=\left\{x\in\mathbb{Q}\,\middle|\,x>0,\ x^2<\frac{1}{2}\ \text{ או }\ \frac{1}{x}>2\right\}.$$

א. A חסומה מלעיל ומלרע, $\inf A=0$, ו- $\sup A\in\mathbb{Q}$.

ב. A חסומה מלעיל ומלרע, $\inf A=0$, ו- $\sup A\notin\mathbb{Q}$.

ג. A חסומה מלרע על ידי אפס אך לא חסומה מלעיל.

ד. A חסומה מלרע על ידי אפס ומלעיל על ידי $\frac{1}{2}$.

2. יהי a ממשי, ו- (a_n) סדרה של מספרים ממשיים.

א. אם $a_n\to a$ אז $[a_n]\to[a]$, כאשר $[x]$ מסמן את החלק השלם של x.

ב. $a_n\to a$ אם ורק אם $|a_n|\to|a|$.

ג. אם $a_n\to-\infty$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\frac{1}{e}$.

ד. לכל n טבעי נגדיר $b_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

אם הסדרה (b_n) אינה מתכנסת אז גם הסדרה (a_n) אינה מתכנסת.

3. תהי (a_n) סדרה לא חסומה של מספרים ממשיים שונים מאפס. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. הסדרה $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ אינה מתכנסת.

ב. המספר אפס הוא גבול חלקי של הסדרה $\left(\frac{1}{a_n}\right)$.

ג. הסדרה $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ חסומה.

ד. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=0$.

80. 131
1א/ 3"סמ

4. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

א. אם f מקבלת מקסימום באינסוף נקודות אז f פונקציה קבועה.

ב. אם f אינה פונקציה קבועה אז קיים קטע $I\subseteq[a,b]$ כך ש

$\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}<\min\limits_{x\in I}\{f(x)\}<\max\limits_{x\in I}\{f(x)\}<\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$.

ג. אם המקסימום של f מתקבל בנקודה b והמינימום של f מתקבל בנקודה a אז f מונוטונית עולה.

ד. אם (α_n) , (β_n) סדרות מתכנסות של נקודות בקטע $[a,b]$ ומתקיים

$\lim\limits_{n\to\infty}f(\alpha_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\beta_n)$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$.

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $f(0)=0$ ו- $f'(0)>0$. איזו מן הטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. קיים קטע פתוח המכיל את הנקודה אפס בה f מונוטונית עולה.

ב. קיימת סביבה ימנית של הנקודה אפס בה $f(x)>0$.

ג. אם $f(0.1)>0$ אז גם $f(0.0001)>0$.

ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

6. איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ רציפה בנקודה $x=0$.

ב. הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ גזירה בנקודה $x=0$.

ג. הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ בעלת נגזרת רציפה בנקודה $x=0$.

ד. הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ רציפה אך אינה גזירה בנקודה $x=0$.

7. מה ניתן לאמר על הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$?

א. שווה ל $\frac{1}{4}$.

ב. שווה ל $\log 2$ $(=\ln 2)$.

ג. שווה ל- ∞.

ד. הגבול אינו קיים.

80.131
מ"ס 3 / ב

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (1) (80131)

מועד ב' תשס"ד

המורים: ד"ר צ. אלטשולר, מר א. צביק, פרופ' ר. קופרמן

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליכם לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אין לענות על מספר שאלות גדול מן המבוקש. יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב'. יש לצטט במדויק את התנאים של כל המשפטים שמשתמשים בהם.

השימוש במחשבון אסור.

מצורף טופס נלווה לבחינה. יש למלא את הפרטים ולסמן עליו את מספרי השאלות עליהן בחרתם לענות בפרקים א' ו- ב', וכמו כן את תשובותיכם לפרק ג'.

בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה הכולל את הטופס הנלווה וכן את מחברת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה !

80, 131
תקס"ג/ב

פרק א' (25%)

ענו על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. הוכיחו את משפט בולצנו-ויירשטרס (Bolzano-Weierstrass) (לכל סדרה חסומה של מספרים ממשיים יש תת-סדרה מתכנסת).
2. הוכיחו שלכל מספר ממשי חיובי קיים שורש ריבועי חיובי (בהסתמך רק על אכסיומת החסם העליון של המספרים הממשיים) והוכיחו שהוא יחיד.

פרק ב' (40%)

ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

3. תהי (a_n) סדרה של מספרים ממשיים.

תהי (b_n) סדרה של גבולות חלקיים של הסדרה (a_n).

הוכיחו שאם הסדרה (b_n) אינה חסומה מלמעלה (מלעיל), אז גם הסדרה (a_n) אינה חסומה מלמעלה.

4. א. הוכיחו שאם f פונקציה רציפה במידה שווה בקטע (a,b) אז היא חסומה ב-(a,b).

ב. תהי S קבוצה לא ריקה וחסומה של מספרים ממשיים.

נגדיר את הקוטר של S על ידי

$$diam(S) = \sup\{|x-y| : x,y \in S\}$$

בהסתמך על הגדרת ה- sup וה- inf, הוכיחו ש

$diam(S) = \sup S - \inf S$.

5. ללא שימוש במשפט ההצבה, הוכיחו את השיוויון

$$\int_{-a}^{a} f(x^2)dx = 2\int_{0}^{a} f(x^2)dx$$

בהנחה שהאינטגרל באגף שמאל קיים.

פרק ג' (35%)

עבור כל אחת מהשאלות בפרק זה יש לבחור את התשובה הנכונה ולסמנה בטופס הנלווה.

1. יהיו b,a,y,x מספרים ממשיים ו- n,m מספרים שלמים.

א. אם $0<x$ ו- $m<n$ אז $x^m < x^n$.

ב. אם $0<x$ ו- $0<n$ אז $x^{1/n} \le x$.

ג. אם $a \le x$ ו- $b \le x$ אז $\sqrt{|ab|} \le |x|$.

ד. אם $1<x$ אז $x^{[y]} \le x^y$ כאשר $[y]$ הוא החלק השלם של y.

80. 131
תש"ס/ב'

2. תהי (a_n) סדרה של מספרים ממשיים חיוביים כך ש $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. הסדרה (a_n) מתכנסת במובן הרחב.

ב. הסדרה (a_n) חסומה מלעיל.

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{2n}}=1$.

ד. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

3. תהי (a_n) סדרה של מספרים ממשיים חיוביים המתכנסת למספר ממשי c. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. $\lim_{n\to\infty}a_n^n=\lim_{n\to\infty}c^n$.

ב. אם $c\le 1$ אז הגבול $\lim_{n\to\infty}a_n^n$ קיים.

ג. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ רק אם $0<c$.

ד. אם $0<c$ אז $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

4. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ו- $x_0\in(a,b)$. איזו מהתנאים הבאים מבטיחים את רציפותה של f בנקודה x_0?

א. לכל סדרה מונוטונית ממש של נקודות (x_n) בקטע (a,b).
אם $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ אז הגבול $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ קיים.

ב. לכל סדרה של נקודות (x_n) בקטע (a,b) אם $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$ אז לסדרה $(f(x_n))$ יש תת סדרה מתכנסת.

ג. קיימת פונקציה רציפה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שהפונקציה המורכבת $g\circ f$ רציפה בנקודה x_0.

ד. אף אחד מהתנאים האחרים אינו מבטיח רציפות.

80, 131
נ/3"סרן

5. תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $0<f(x)$ לכל $x\in[0,1]$. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. קיים מספר ממשי $0<m$ כך ש $m\le f(x)$ לכל $x\in(0,1)$.

ב. הפונקציה ההפוכה f^{-1} קיימת והיא רציפה.

ג. לכל $x\in[0,1]$ קיימים $y,z\in[0,1]$ כך ש $f(x)<\frac{1}{2}[f(y)+f(z)]$.

ד. הפונקציה המורכבת $f\circ g$ רציפה לכל $g:[0,1]\to[0,1]$ אינטגרבילית.

6. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה. נניח של- f יש בדיוק m שורשים (נקודות בהן היא מתאפסת) ו- $m\ge 1$. איזו מהטענות הבאות על מספר השורשים של f' נכונה בהכרח?

א. ל- f' יש בדיוק $m-1$ שורשים.

ב. ל- f' יש לפחות $m-1$ שורשים.

ג. ל- f' יש לכל היותר $m-1$ שורשים.

ד. מספר השורשים של f' הוא אינסופי.

7. מה ניתן לאמר על הגבול $\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2+i^2}$?

א. שווה ל- $1/8$.

ב. שווה ל- $\pi/4$.

ג. שווה ל- ∞.

ד. הגבול לא בהכרח קיים.

80. 131
תשס"ג / א'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (1) (80131)

שאלון מס' 1

מועד א' תשס"ג

המורים: ד"ר צ. אלטשולר, מר א. צביק, פרופ' מ. ציפין

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליך לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אין לענות על מספר שאלות גדול מן המבוקש. יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב'. אם משתמשים במשפט שאין לו שם ידוע – יש לנסח את המשפט.

מצורף טופס נלווה לבחינה. יש להדקו למחברת הבחינה ולסמן עליו את מספר השאלון (1, 2, 3 או 4), את מספרי השאלות עליהן בחרתם לענות בפרקים א' ו- ב', וכמו כן את תשובותיכם לפרק ג'.

ב ה צ ל ח ה !

80.131
תמס"ג / ה'

פרק א' (25%)

ענו על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. נסחו והוכיחו את משפט קושי על התכנסות סדרות. (יש להוכיח את טענות העזר הקשורות ישירות למשפט, אין צורך להוכיח משפטים מרכזיים הקודמים למשפט).

2. הוכיחו כי פונקציה מונוטונית עולה בקטע סגור $[a,b]$ רציפה בקטע אם ורק אם התמונה (קבוצת הערכים) שלה הוא קטע סגור.

פרק ב' (40%)

ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

3. תהינה A ו- B קבוצות חסומות לא ריקות של מספרים ממשיים ונגדיר

$$A-B=\{a-b:\ a\in A \text{ ו- } b\in B\}$$

א. הוכיחו כי $\inf(A-B)=\inf A-\sup B$.

ב. בנו נוסחה דומה עבור $\sup(A-B)$ (<u>אין צורך להוכיח אותה</u>) וחשבו בעזרתה את $\sup(A-B)$ כאשר

$A=Q\cap(0,1)$ ו- $B=\{b\in R: b^2<4\}$

(Q מסמל את קבוצת המספרים הרציונלים).

4. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ ונניח כי לכל $0<x<1$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^3}-x\right)\sin\frac{1}{x}}{x-1}$$

חשבו את $f(0)$ ואת $f(1)$.

אסור להשתמש במשפט לופיטל.

5. בדקו את התכנסות הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$

ב. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots$

80 131
מס' 16

פרק ג' (35%)

ענו על כל השאלות. אין צורך לנמק!

1. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ממשיים שאינה שואפת ל- ∞. איזו טענה, מבין הבאות, נכונה בהכרח?

א. הסדרה $\{a_n\}$ סדרה חסומה מלעיל (מלמעלה).

ב. לסדרה $\{a_n\}$ יש תת סדרה מתכנסת (לגבול סופי).

ג. לסדרה $\{a_n\}$ יש תת סדרה חסומה מלעיל (מלמעלה).

ד. הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת לגבול סופי.

2. תהי $f:R\to R$ פונקציה רציפה. איזו פונקציה, מבין הבאות, אינה בהכרח רציפה בכל תחום הגדרתה?

א. $(f(x))^2$.

ב. $|f(x)|+x$.

ג. $\left[\frac{|f(x)|}{\sqrt{f(x)^2+1}}\right]$ הערה: $[a]$ הוא הערך השלם של a.

ד. $\left[\frac{1}{\sqrt{f(x)^2+1}}\right]$ הערה: $[a]$ הוא הערך השלם של a.

3. תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות. איזו טענה נכונה?

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים בהחלט אז $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים אך אינם מתכנסים בהחלט אז $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס אך אינו מתכנס בהחלט.

ג. אם $\lim(a_n\cdot b_n)=0$ אז לפחות אחד הגבולות $\lim_{n\to\infty}(a_n)$, $\lim_{n\to\infty}(b_n)$ קיים ושווה לאפס.

ד. אם $\{a_n+b_n\}$ מתכנסת (לגבול סופי), אז $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$ מתכנסות (לגבול סופי).

80. 131
תשס"ג / ג'

4. נתונה הקבוצה: $A=\{0.a_1a_2...a_n \mid n\in N, a_i=1$ או 2 לכל $1\le i\le n\}$.

איזו טענה נכונה?

א. $\max(A)$ קיים ושווה ל 0.2.

ב. $\sup(A)$ קיים ושווה ל $2/9$.

ג. $\inf(A)$ קיים ושווה ל $1/9$.

ד. $\min(A)$ לא קיים.

5. מה נכון לומר על הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$?

א. הטור מתבדר, כי האיבר הכללי שלו לא שואף לאפס.

ב. הטור מתבדר, כי החל ממקום מסוים מתקיים $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}>\frac{1}{2n}$.

ג. הטור מתכנס, כי טור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס אם $\alpha>1$.

ד. הטור מתכנס, לפי מבחן השורש של קושי.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$, $f(0)=1$ המוגדרת לכל x ממשי.

איזו טענה נכונה?

א. ל- f יש אי רציפות סליקה ב $x=0$.

ב. ל- f יש אי רציפות לא סליקה ממין ראשון ב $x=0$.

ג. ל- f יש אי רציפות ממין שני ב $x=0$.

ד. f רציפה ב $x=0$.

7. תהי $f:(a,b)\to R$ פונקציה חיובית ורציפה בקטע הפתוח (a,b) שאינה ניתנת להרחבה לפונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

איזו טענה נכונה?

א. $f(x)$ חסומה בקטע (a,b).

ב. $f(x)$ אינה רציפה במידה שווה ב- (a,b).

ג. הגבולות $\lim_{\substack{x\to a\\ a<x}} f(x)$ ו- $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$ קיימים (והם סופיים).

ד. $\lim_{\substack{x\to a\\ a<x}} f(x)=-\infty$ ו- $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)=\infty$.

בהצלחה!

80.131
תקס"ב/ב

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (1) (80131)

שאלון מס' 1

מועד ב' תשס"ב

המורים: פרופ' א.פזי, פרופ' מ. ציפין , פרופ' ל. צפרירי

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליך לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אל תענה על מספר שאלות גדול מן המבוקש. יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב' אך לא בפרק ג'. אם משתמשים במשפט שאין לו שם ידוע – יש לנסח את המשפט.

בחלק הימני העליון של כריכת מחברת הבחינה יש לציין את מספר השאלון (1,2,3 או 4).
בעמוד הראשון של מחברת הבחינה יש לשרטט את שתי הטבלאות הבאות ולמלא אותן לפני תום הבחינה:

א. טבלת התוצאות של פרק ג':

שאלה	תשובה
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

ב. טבלת השאלות עליהן בחרת לענות בפרקים א', ב':

פרק	שאלה
פרק א'	
פרק ב'	

80, 131
תש"ס/ב

פרק א' (25%)

עליך לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. נסחו והוכיחו את הלמה של קנטור.

2. א. נסחו את התנאי ההכרחי והמספיק של קושי להתכנסות טורים כלליים.

ב. הוכיחו שאם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס אז לכל סדרת טבעיים $\{k(n)\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{k(n)} a_{n+j}\right)=0.$$

פרק ב' (40%)

עליך לענות על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

1. יהי x מספר חיובי ונניח כי $x = a_0.a_1a_2a_3\ldots$ היא הצגה עשרונית של x. הוכיחו כי

$$x=\inf\left\{a_0+5,\quad a_0.a_1+\frac{5}{10},\quad a_0.a_1a_2+\frac{5}{10^2},\ldots\right\}.$$

2. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי מתבדר.

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתבדר.

רמז: כדאי לדון בנפרד במקרים בהם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ א. חסומה ; ב. אינה חסומה.

3. נתונה פונקציה רציפה $f(x)$ המוגדרת בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ידוע כי לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ קיים

השוויון $$f(x)=\frac{x(\pi-2x)}{(4x^2-\pi^2)\sin x}$$

חשבו את $f(0)$ ואת $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

המשך מעבר לדף

80. 131
תקס"ב/ב1

פרק ג' (35%)

עליך לענות על כל שבע השאלות בפרק זה. רק אחת מבין ארבע התשובות המוצעות היא נכונה. יש לבחור את התשובה הנכונה ולסמן אותה בטבלה בעמוד הראשון של המחברת.
תזכורת: סמנו בפינה הימנית העליונה של כריכת המחברת את מספר השאלון!

1. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ממשיים ונניח כי תת סדרה מסויימת $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L. איזו מן הטענות הבאות נכונה?
   א. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית אז $\lim_{x\to\infty} a_n = L$.
   ב. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n \le L$.
   ג. יהי M מספר ממשי ונניח כי בכל סביבת ε של M נמצא איבר a_n מן הסדרה, אזי בהכרח $L = M$.
   ד. בכל סביבת ε של L נמצא איבר a_n מן הסדרה השונה מ- L.
2. תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מונוטוניות. איזו מן הטענות הבאות נכונה?
   א. הסדרה $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב.
   ב. אם קיים מספר M כך שלכל $1 \le n$, $a_n < M$ ו- $b_n < M$ אז הסדרה $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול סופי.
   ג. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה, $b_n \ne 0$ לכל n ואם הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה אז הסדרה $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.
   ד. קיימות תת סדרות $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ו- $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ כך שהסדרה $\{a_{n_k} b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול סופי.
3. תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$ ונניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ מתכנס. איזו מן הטענות הבאות נכונה?
   א. $f(0) = 0$.
   ב. $\lim_{x\to 0+0} f(x) = 0$.
   ג. אם נסמן $a_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
   ד. אם נסמן $a_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

המשך בדף הבא

80 131
תש"ס/ב

4. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס. איזו מן הטענות הבאות נכונה?

א. אם $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה שואפת ל- 0 אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} a_n$ מתכנס.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ד. אם $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

5. יהי $0 < x < 1$ ותהי $0.a_1a_2a_3\ldots$ הצגה עשרונית אינסופית של x. איזו מן הטענות הבאות נכונה?

א. נניח כי לכל $1 \le n$ $1 < a_n < 9$

ונניח כי $b_n = a_n + (-1)^n$ אזי $x = 0.b_1b_2b_3\ldots$.

ב. בתנאי סעיף א', הסדרה $\{0.b_1b_2\ldots b_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

ג. $x = \inf\{0.a_1a_2\ldots a_n : n \ge 1\}$.

ד. לכל $1 \le n$ $0.a_1a_2\ldots a_n \le x \le 0.a_1a_2\ldots a_na_{n+1}$.

6. תהיינה f ו- g שתי פונקציות המוגדרות על הישר ותהי $h(x) = g\left(f\left(x\right)\right)$ ההרכבה של הפונקציות. איזו מן הטענות הבאות נכונה?

א. אם f ו- g אינן רציפות ב- x_0

אז גם h אינה רציפה ב- x_0.

ב. אם f רציפה ו- g מונוטונית עולה אז h מונוטונית עולה.

ג. אם f מונוטונית עולה ממש ורציפה אז קיימת פונקציה רציפה g על הישר כך ש- $h(x) = x$.

ד. אם f ו- g מונוטוניות על R אז h מונוטונית על R.

המשך מעבר לדף

80, 131
תשס"ח/ס'ב

7. עבור איזו מן הפונקציות הבאות, המוגדרות לכל $x \neq 0$ אפשר למצוא ערך $f(0)=L$ באופן ש- $f(x)$ תהיה רציפה ב- 0?

א. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

ב. $f(x)=\frac{x}{|x|}$.

ג. $f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}$.

ד. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

בהצלחה!

80.131
תשס"ב/א

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (1) (80131)

שאלון מס' 1

מועד א' תשס"ב

המורים: פרופ' א.פזי, פרופ' מ. ציפין , פרופ' ל. צפרירי

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליך לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אל תענה על מספר שאלות גדול מן המבוקש. יש לנמק את הטענות. אם משתמשים במשפט שאין לו שם ידוע – יש לנסח את המשפט.

בחלק הימני העליון של כריכת מחברת הבחינה יש לציין את מספר השאלון (1,2,3 או 4).
בעמוד הראשון של מחברת הבחינה יש לשרטט את שתי הטבלאות הבאות ולמלא אותן לפני תום הבחינה:

א. טבלת התוצאות של פרק ג':

שאלה	תשובה
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

ב. טבלת השאלות עליהן בחרת לענות בפרקים א', ב':

פרק	שאלה
פרק א'	
פרק ב'	

80, 131
תקס"ב/א

פרק א' (25%)

עליך לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. א. הגדירו את המושג "גבול תחתון" $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ של סדרה חסומה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

ב. הוכיחו שאם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים חיוביים המקיימת $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ אז הטור

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

2. נניח כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את תנאי קושי להתכנסות סדרות

א. הוכיחו ש $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה.

ב. הוכיחו שאם קיימת תת סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול L אז $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

שימו לב: אסור להשתמש במשפט קושי להתכנסות סדרות.

פרק ב' (40%)

עליך לענות על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

1. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים השואפת ל- 0. הוכח בפירוט, לפי הגדרת הגבול

ש $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=0$.

2. הוכח כי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$$

א. מתבדר עבור $a\le 1$.

ב. מתכנס עבור $a=2$.

3. חשב את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(2x)}{3x}$

ב. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)}{\cos(2x)}$

ג. $\lim_{0<x\to 0}\frac{x}{10}\left[\frac{3}{x}\right]$

כאשר $[y]$ = הערך השלם של y . יש לנמק כל צעד.

80. 131
תקס"ב / א'

פרק ג' (35%)

עליך לענות על כל שבע השאלות בפרק זה. רק אחת מבין ארבע התשובות המוצעות היא נכונה. יש לבחור את התשובה הנכונה ולסמן אותה בטבלה בעמוד הראשון של המחברת.

תזכורת: סמנו בפינה הימנית העליונה של כריכת המחברת את מספר השאלון!

1. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה של מספרים ממשיים ויהי L מספר ממשי. איזו מן התכונות הבאות אינה שקולה לתכונה $\lim_{n\to\infty} a_n = L$?

   א. לכל $\varepsilon > 0$ רציונלי קיים N טבעי כך שלכל $N < n$ $|a_n - L| < \varepsilon$.

   ב. קיימת תת-סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת ל L וגם מתקיים $\lim_{n\to\infty} La_n = L^2$.

   ג. קיימת תת-סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת ל L ומתקיים התנאי: לכל $\varepsilon > 0$ יש N טבעי כך שלכל $N < n$ ולכל p טבעי $\varepsilon > |a_n - a_{n+p}|$.

   ד. $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = L$.

2. יהי $0.a_1a_2a_3...$ פיתוח עשרוני של מספר ממשי x בקטע $[0,1]$. איזו טענה אינה נכונה?

   א. אם x רציונלי, אז הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

   ב. $\lim_{n\to\infty}(0.a_1a_2...a_n) = x$ (כלומר: הגבול קיים ושווה ל- x).

   ג. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ מתכנס למספר x .

   ד. לכל n טבעי, מתקיים $0.a_1a_2...a_n \le x$.

3. בהינתן טור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ של מספרים ממשיים אי-שליליים, איזה תנאי, מבין הבאים, הוא תנאי מספיק לכך שהטור יתכנס?

   א. $b_n < \frac{1}{n}$ (לכל n טבעי).

   ב. $\sqrt[n]{b_n} < 1$ (לכל n טבעי).

   ג. לכל $n > 320$ (n טבעי), מתקיים $b_{n+1} \le \frac{1}{2} b_n$.

   ד. b_n מונוטונית יורדת לאפס.

80, 131
תש"ס/ א'

4. עבור איזו סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, מבין הסדרות הבאות, מתקיים $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup\{x_n : n \in N\}$?

א. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

ב. $x_n = (-1)^{\left[\frac{n}{7}\right]}$ ($[a]$ הוא הערך השלם של a).

ג. $x_n = \sqrt[n]{2}$.

ד. $x_n = -\frac{n^3}{n^2+1}$.

5. אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ טור מתכנס כלשהו, אזי בהכרח...

א. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ מתכנס.

ב. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתכנס.

ג. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \frac{k^2}{1+k^2} \right)$ מתכנס.

ד. a_k מונוטונית.

6. תהי $f : R \to R$ פונקציה רציפה על הישר המקיימת $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

אזי ניתן להסיק ש...

א. f מקבלת מקסימום ומינימום ב R .

ב. קיים $x_0 \in R$ כך ש f מונוטונית בקרן $[x_0, \infty)$.

ג. קיים $\varepsilon > 0$ כך שהפונקציה $|f(x)|$ מקבלת כל ערך בקטע הפתוח $(0, \varepsilon)$.

ד. אם יש $a \in R$ כך ש $f(a) > 0$ אז יש ל f מקסימום ב R.

80. 131
תקס"ה/א/

7. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה בעלת k גבולות חלקיים ותהי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה בעלת m גבולות חלקיים. נסמן ב- s את מספר הגבולות החלקיים של הסדרה $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$. איזו מן הטענות הבאות נכונה:

א. $s = k + m$.

ב. $s \le k + m$.

ג. $s = km$.

ד. $s \le km$.

בהצלחה!

80. 160
תס"ג / א

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (80131) ו- (80160)

שאלון מס' 3

מועד א' תשס"א

המורים: ד"ר י. ורשבסקי, פרופ' ש. מוזס

פרופ' מ. ציפין , פרופ' ל. צפרירי הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליך לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אל תענה על מספר שאלות גדול מן המבוקש. יש לנמק את הטענות. אם משתמשים במשפט שאין לו שם ידוע – יש לנסח את המשפט.

בחלק הימני העליון של כריכת מחברת הבחינה יש לציין את מספר השאלון (1,2,3 או 4).
בעמוד הראשון של מחברת הבחינה יש לשרטט את שתי הטבלאות הבאות ולמלא אותן לפני תום הבחינה:

א. טבלת התוצאות של פרק ג':

שאלה	תשובה
1	
2	
3	
4	
5	

ב. טבלת השאלות עליהן בחרת לענות בפרקים א', ב':

פרק	שאלה
פרק א'	
פרק ב'	

ב ה צ ל ח ה !!

80, 160
תקס"ו/16

<u>פרק א'</u> (30%) . יש לענות על שאלה אחת.

1. נסח והוכח את המשפט על התכנסות מכפלת שני טורים המתכנסים בהחלט.
2. נסח והוכח את משפט ערך הביניים עבור פונקציות רציפות.

<u>פרק ב'</u> (40%). יש לענות על שתי שאלות.

1. תהי $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים המוגדרת ע"י: $u_1 = 0$ ולכל $1 < n$ $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

א. הוכיחו: לכל $1 \le n$ $\quad -1 < u_n \le 0$.

ב. אם , לכל $1 \le n$, $w_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$, הוכיחו ש- $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חשבונית (כלומר, ההפרש בין שני איברים עוקבים קבוע), מצאו ביטוי מפורש עבור w_n וחשבו בעזרתו את $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

2. יהי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס לסכום S .

הוכיחו את התכנסות הטור

$$a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_{12} + a_{11} + a_{10} + a_9 + \ldots$$

וחשבו את סכומו.

3. תהי $f(x) = e^x$. הוכיחו במפורט, באמצעות הגדרת הגבול בעזרת סדרות (הגדרת היינה) ש- $f(x)$ רציפה בנקודה 0.

80, 160
תקס"ג/ג

<u>פרק ג'</u> (30%). בכל אחת מן השאלות הבאות מוצעות ארבע טענות. אחת ורק אחת מהן היא נכונה. עליך לבחור את הטענה הנכונה.

יש לענות על כל השאלות.

1. א. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים. אם כל תת סדרה מונוטונית עולה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- ∞ אז $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- ∞.

ב. קיים טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כך שהסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $b_n = \sum_{k=n}^{2n} a_k$ אינה מתכנסת.

ג. קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שאוסף הגבולות החלקיים שלה הוא בדיוק אוסף המספרים הרציונליים בקטע [0,1].

ד. קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אשר אוסף הגבולות החלקיים שלה הוא בדיוק האוסף $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$.

2. תהיינה A ו- B קבוצות חסומות של מספרים ממשיים שאינן מכילות את המספר 0.

נסמן $C = \left\{\frac{a}{b} : \ b \in B, \quad a \in A\right\}$. אזי

א. $SupC = \frac{SupA}{\inf B}$

ב. $SupC = \frac{SupA}{SupB}$.

ג. C אינה חייבת להיות חסומה .

ד. אף לא אחת מן הטענות הנ"ל נכונה.

80, 160
תקס"ג/ב

3. א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ מתכנס

ב. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס

ג. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס ו- $-1 \neq a_n$.

ד. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ מתכנס אם $\sum_{n=1} a_n$ טור מתכנס.

4. א. המספר הניתן ע"י ההצגה העשרונית

$0.12345678901234567890123456789 0...$ הוא אי רציונלי.

ב. לכל מספר ממשי x, $0<x<1$, יש הצגה עשרונית יחידה

$x = 0, a_1a_2a_3... = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{10^i}$ כאשר כל a_i שייך לקבוצה $\{0,1,2,...,9\}$.

ג. המספר $x=\sum_{k=1}^{\infty}10^{-k^2}$ הוא אי רציונלי.

ד. המספר $x=\sum_{k=1}^{\infty}10^{-2k}$ הוא אי רציונלי.

5. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע החצי פתוח $[0,1)$. איזו מן הקבוצות הבאות אינה יכולה להיות קבוצת הערכים של f בקטע (טווח f)?

א. $\{y\in R:\ y\geq -1\}$ ב. $\{y\in R:\ 0<y^2<1\}$

ג. $\{y\in R:\ 0<y\leq 1\}$ ד. $\{y\in R:\ y^2\geq -1\}$

בהצלחה!!

-19-

80.160-80.131
תש"ס/ב

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (80131) ו- (80160)
סמ' א'

שאלון מס' 1

מועד ב' תשס"א

המורים: ד"ר י. ורשבסקי, פרופ' ש. מוזס

פרופ' מ. ציפין, פרופ' ל. צפרירי

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליך לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אל תענה על מספר שאלות גדול מן המבוקש. יש לנמק את הטענות בתשובותיכם בפרקים א' ו-ב'. אם משתמשים במשפט שאין לו שם ידוע – יש לנסח את המשפט.

בחלק הימני העליון של כריכת מחברת הבחינה יש לציין את מספר השאלון (1,2,3 או 4).
בעמוד הראשון של מחברת הבחינה יש לשרטט את שתי הטבלאות הבאות ולמלא אותן לפני תום הבחינה:

א. טבלת התוצאות של פרק ג':

שאלה	תשובה
1	
2	
3	
4	
5	

ב. טבלת השאלות עליהן בחרת לענות בפרקים א', ב':

פרק	שאלה
פרק א'	
פרק ב'	

בהצלחה!

80, 160
תקס"ג / ב'

<u>פרק א' (30%)</u> יש לענות על שאלה אחת.

1. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ונניח כי $a_{n+1} \le a_n$ לכל $1 \le n$. הוכיחו שהטור מתכנס אם ורק אם מתכנס הטור $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

2. א. הוכיחו במפורט שהסדרה $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ היא מונוטונית עולה וחסומה מלעיל.

ב. (3%) הראה שגבולה של הסדרה, המספר e, מקיים את אי השויון $2.3 < e < 2.99$

<u>פרק ב' (40%)</u> יש לענות על שתי שאלות.

1. א. הוכיחו שאם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת לגבול סופי אז היא חסומה.

הוכיחו שהסדרה $\left\{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

2. א. בידקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{n-1}}{(n+1)^n}$.

ב. האם הטור מתכנס בהחלט?

3. א. הוכיחו את הטענה הבאה:

אם $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אזי הפונקציה $g(x)=|f(x)|$ רציפה בקטע.

ב. האם הטענה ההפוכה נכונה?

יש לנמק!

<u>פרק ג' (30%)</u> בכל אחת מן השאלות הבאות מוצעות ארבע טענות או ארבע תשובות. אחת ורק אחת מהן היא נכונה.

עליך לבחור את הטענה הנכונה. יש לענות על כל השאלות. אין צורך לנמק.

1. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי. איזה תנאי מן התנאים הבאים <u>אינו</u> מבטיח שהטור מתבדר?

א. $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > 1$

ב. $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > 1$

ג. $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

ד. $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

80. 160
תקס"ג / מ'

2. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה הבאה: $a_1 = x$, $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$
אזי

א. קיים x וקיים n טבעי כך ש $a_{n+1} < a_n$.

ב. קיים x כך ש $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה מתכנסת לגבול סופי או ∞.

ג. קיים $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ כך ש- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

ד. לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש מקסימום אך ורק עבור $x = \pm\frac{1}{2}$.

3. הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$

א. מתכנס אך אינו מתכנס בהחלט עבור $x = -1$.

ב. מתכנס בהחלט עבור $|x| \geq 1$.

ג. מתבדר עבור $|x| < 1$.

ד. אף לא אחת מן הטענות האלה נכונה.

4. תהי
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

א. f רציפה ב- 0.

ב. 0 היא נקודת אי רציפות סליקה.

ג. 0 היא נקודת אי רציפות ממין ראשון.

ד. 0 היא נקודת אי רציפות ממין שני.

5. תהיינה f ו- g פונקציות המוגדרות על כל הישר הממשי.

א. אם x_0 נקודת אי רציפות ממין שני של $f(x)$ ואם $y_0 = f(x_0)$ והיא נקודת אי רציפות של $g(x)$ אז הפונקציה המורכבת $h(x) = g(f(x))$ אינה רציפה ב- x_0.

ב. אם x_0 נקודת אי רציפות של $f(x)$ ו- $g(y)$ פונקציה מונוטונית על הישר אז הפונקציה $h(x) = g(f(x))$ אינה רציפה ב- x_0.

ג. אם לכל סדרה מונוטונית עולה וחסומה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ של מספרים ממשיים קיים השויון $\lim_{n\to\infty} f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ אז f פונקציה רציפה על הישר.

ד. אם $f(x)$ פונקציה רציפה ב- R אז יש רווח פתוח (a,b) בו f מונוטונית.

האוניברסיטה העברית בירושלים
המכון למתמטיקה

80131 & 80160 99/00 (15)

מבחן סיום קורס "חשבון אינפיניטסימלי" (1) (מס' 80131 ומס' 80160)

מועד א' תש"ס
המורים: הפרופסורים דה-שליט, פזי, ציפין וצפרירי

הזמן: 3 שעות

הוראות: עליך לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתיים מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אל תענה על מספר שאלות גדול מן המבוקש. בפרקים א' ו-ב' עליך לנמק את טענותיך. אם משתמשים במשפט קודם כנימוק אז יש לציין את שם המשפט או לנסח אותו. כל חומר עזר אסור בשימוש וכן אסור השימוש במחשבון מכל סוג שהוא.

בהצלחה!

פרק א' (30 נקודות)

עליך לענות על אחת מן השאלות הבאות:

1. נסח והוכח את משפט בולצנו – ויירשטראס.
2. נסח והוכח את משפט לייבניץ על התכנסות טורים עם סימנים מתחלפים.

פרק ב' (40 נקודות)

עליך לענות על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות:

1. הוכיחו שלכל שתי סדרות $\{a_n\}$ ו- $\{b_n\}$ של מספרים ממשיים מתקיים:

$$\limsup(a_n + b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n$$

2. בדוק את התכנסות שני הטורים הבאים:

א.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

ב.

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\ldots$$

3. תהי:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{עבור } x \text{ רציונלי} \\ -x & \text{עבור } x \text{ אירציונלי} \end{cases}.$$

הוכח ש $f(x)$ רציפה ב-0 ואיננה רציפה עבור כל $x \neq 0$.

80131 & 80160 .99/00

16

פרק ג' (30 נקודות)

הוראות: לכל אחת מן השאלות הבאות ניתנות 4 תשובות . בחר מתוכן את התשובות הנכונות.

1. איזה מן המספרים הבאים הוא החסם העליון של הקבוצה: $\{ x : 4^x + 3 \cdot 2^x < 28 \}$
א. 3. **ב.** 28. **ג.** 2. **ד.** אף לא אחת מן התשובות הקודמות.

2. הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

הוא המספר: **א.** e **ב.** 1. **ג.** 1/e **ד.** אף לא אחד מן המספרים הקודמים.

3. אם Σa_n ו- Σb_n טורים חיוביים מתכנסים אזי הטור $\Sigma a_n b_n$
א. יכול להתבדר. **ב.** מתכנס לסכום 0. **ג.** מתכנס. **ד.** מתכנס רק אם לכל n טבעי $|a_n|<1$ ו- $|b_n|<1$.

4. תהי f(x) פונקציה על כל הישר ונניח שלכל סדרה $\{x_n\}$ השואפת לאינסוף יש לסדרה $\{f(x_n)\}$ תת סדרה שהיא סדרת קושי. אזי הגבול

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

א. קיים ושווה ל – 0. **ב.** קיים אך איננו בהכרח 0. **ג.** אינו קיים בהכרח. **ד.** קיים, אך אינו יחיד, וערכו תלוי בדרך בה x שואף לאינסוף.

5. תהי

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$$

עבור $\{x : 0<x<2 \quad x\neq 1\}$, אזי הגבול:

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

א. קיים. **ב.** הגבולות החד-צדדיים של f ב- x=1 לא קיימים. **ג.** קיים הגבול של f מימין ב- x=1. **ד.** הגבולות החד-צדדיים קיימים אך שונים זה מזה.