80.131
תקס"ב/ב

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (1) (80131)

שאלון מס' 1

מועד ב' תשס"ב

המורים: פרופ' א.פזי, פרופ' מ. ציפין , פרופ' ל. צפרירי

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליך לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אל תענה על מספר שאלות גדול מן המבוקש. יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב' אך לא בפרק ג'. אם משתמשים במשפט שאין לו שם ידוע – יש לנסח את המשפט.

בחלק הימני העליון של כריכת מחברת הבחינה יש לציין את מספר השאלון (1,2,3 או 4).
בעמוד הראשון של מחברת הבחינה יש לשרטט את שתי הטבלאות הבאות ולמלא אותן לפני תום הבחינה:

א. טבלת התוצאות של פרק ג':

שאלה	תשובה
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

ב. טבלת השאלות עליהן בחרת לענות בפרקים א', ב':

פרק	שאלה
פרק א'	
פרק ב'	

80, 131
תש"ס/ב

פרק א' (25%)

עליך לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. נסחו והוכיחו את הלמה של קנטור.

2. א. נסחו את התנאי ההכרחי והמספיק של קושי להתכנסות טורים כלליים.

ב. הוכיחו שאם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס אז לכל סדרת טבעיים $\{k(n)\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{k(n)} a_{n+j}\right)=0.$$

פרק ב' (40%)

עליך לענות על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

1. יהי x מספר חיובי ונניח כי $x = a_0.a_1a_2a_3\ldots$ היא הצגה עשרונית של x. הוכיחו כי

$$x=\inf\left\{a_0+5,\quad a_0.a_1+\frac{5}{10},\quad a_0.a_1a_2+\frac{5}{10^2},\ldots\right\}.$$

2. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי מתבדר.

הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתבדר.

רמז: כדאי לדון בנפרד במקרים בהם הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ א. חסומה ; ב. אינה חסומה.

3. נתונה פונקציה רציפה $f(x)$ המוגדרת בקטע $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ידוע כי לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ קיים

השוויון $$f(x)=\frac{x(\pi-2x)}{(4x^2-\pi^2)\sin x}$$

חשבו את $f(0)$ ואת $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

המשך מעבר לדף

80. 131
תקס"ב/ב1

פרק ג' (35%)

עליך לענות על כל שבע השאלות בפרק זה. רק אחת מבין ארבע התשובות המוצעות היא נכונה. יש לבחור את התשובה הנכונה ולסמן אותה בטבלה בעמוד הראשון של המחברת.
תזכורת: סמנו בפינה הימנית העליונה של כריכת המחברת את מספר השאלון!

1. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים ממשיים ונניח כי תת סדרה מסויימת $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L. איזו מן הטענות הבאות נכונה?
   א. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית אז $\lim_{x\to\infty} a_n = L$.
   ב. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ a_n \le L$.
   ג. יהי M מספר ממשי ונניח כי בכל סביבת ε של M נמצא איבר a_n מן הסדרה, אזי בהכרח $L = M$.
   ד. בכל סביבת ε של L נמצא איבר a_n מן הסדרה השונה מ- L.
2. תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מונוטוניות. איזו מן הטענות הבאות נכונה?
   א. הסדרה $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב.
   ב. אם קיים מספר M כך שלכל $1 \le n$, $a_n < M$ ו- $b_n < M$ אז הסדרה $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול סופי.
   ג. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה, $b_n \ne 0$ לכל n ואם הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינה חסומה אז הסדרה $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.
   ד. קיימות תת סדרות $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ו- $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ כך שהסדרה $\{a_{n_k} b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול סופי.
3. תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$ ונניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ מתכנס. איזו מן הטענות הבאות נכונה?
   א. $f(0) = 0$.
   ב. $\lim_{x\to 0+0} f(x) = 0$.
   ג. אם נסמן $a_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
   ד. אם נסמן $a_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

המשך בדף הבא

80 131
תש"ס/ב

4. יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס. איזו מן הטענות הבאות נכונה?

א. אם $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה שואפת ל- 0 אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} a_n$ מתכנס.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ד. אם $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

5. יהי $0 < x < 1$ ותהי $0.a_1a_2a_3\ldots$ הצגה עשרונית אינסופית של x. איזו מן הטענות הבאות נכונה?

א. נניח כי לכל $1 \le n$ $1 < a_n < 9$

ונניח כי $b_n = a_n + (-1)^n$ אזי $x = 0.b_1b_2b_3\ldots$.

ב. בתנאי סעיף א', הסדרה $\{0.b_1b_2\ldots b_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

ג. $x = \inf\{0.a_1a_2\ldots a_n : n \ge 1\}$.

ד. לכל $1 \le n$ $0.a_1a_2\ldots a_n \le x \le 0.a_1a_2\ldots a_na_{n+1}$.

6. תהיינה f ו- g שתי פונקציות המוגדרות על הישר ותהי $h(x) = g\left(f\left(x\right)\right)$ ההרכבה של הפונקציות. איזו מן הטענות הבאות נכונה?

א. אם f ו- g אינן רציפות ב- x_0

אז גם h אינה רציפה ב- x_0.

ב. אם f רציפה ו- g מונוטונית עולה אז h מונוטונית עולה.

ג. אם f מונוטונית עולה ממש ורציפה אז קיימת פונקציה רציפה g על הישר כך ש- $h(x) = x$.

ד. אם f ו- g מונוטוניות על R אז h מונוטונית על R.

המשך מעבר לדף

80, 131
תשס"ח/ס'ב

7. עבור איזו מן הפונקציות הבאות, המוגדרות לכל $x \neq 0$ אפשר למצוא ערך $f(0)=L$ באופן ש- $f(x)$ תהיה רציפה ב- 0?

א. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

ב. $f(x)=\frac{x}{|x|}$.

ג. $f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}$.

ד. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$.

בהצלחה!