80. 131
1k / 3'ORA

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (1) (80131)

מועד א' תשס"ד

המורים: ד"ר צ. אלטשולר, מר א. צביק, פרופ' ר. קופרמן

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליכם לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל השאלות בפרק ג'. אין לענות על מספר שאלות גדול מן המבוקש. יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב'. אם משתמשים במשפט שאין לו שם ידוע – יש לנסח את המשפט.

השימוש במחשבון אסור.

מצורף טופס נלווה לבחינה. יש למלא את הפרטים ולסמן עליו את מספרי השאלות עליהן בחרתם לענות בפרקים א' ו- ב', וכמו כן את תשובותיכם לפרק ג'.

בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה הכולל את הטופס הנלווה וכן את מחברת הבחינה.

ב ה צ ל ח ה !

80. 131
תמ"ס 3 / 1ק

פרק א' (25%)

ענו על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. נסחו והוכיחו את הלמה של קנטור (Cantor).
2. הוכיחו שפונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית באותו קטע.

פרק ב' (40%)

ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

3. א. תהי f פונקציה גזירה פעמיים (כלומר, הפונקציה f' גזירה ונגזרתה מסומנת ע"י f'') בקטע $[0,1]$.

נתון ש

$$f(0)=f'(0)=f(1)=0.$$

הוכיחו שקיימת נקודה $\xi\in(0,1)$ כך ש $f''(\xi)=0$.

ב. תהי g נתונה על ידי

$$g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & 0<x\le 1\\ 15 & x=0\end{cases}$$

הוכיחו ש g אינטגרבילית בקטע $[0,1]$.

4. תהיינה (a_n), (b_n) סדרות של מספרים ממשיים, ויהי α מספר ממשי.

א. הוכיחו שאם

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\alpha$$
$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$$

אז הסדרה (a_n) מתכנסת ל- α.

ב. הוכיחו: $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)+\overline{\lim_{n\to\infty}}(b_n)$

ומצאו דוגמא לסדרות (a_n) , (b_n) עבורן מתקיים אי-שוויון חזק.

5. תהי f פונקציה מונוטונית בקטע $[a,b]$ כך ש $0\le f(x)$ לכל $a\le x\le b$.

נתון ש

$$\int_a^b f(x)dx=0.$$

הוכיחו ש $f(x)=0$ לכל x בקטע הפתוח (a,b).

הוכיחו או תנו דוגמא נגדית: האם נובע בהכרח ש- f שווה זהותית לאפס בקטע הסגור $[a,b]$?

80 131
16/3 סמ

פרק ג' (35%)

ענו על כל השאלות. אין צורך לנמק!

1. נתונה קבוצה של מספרים ממשיים

$$A=\left\{x\in\mathbb{Q}\,\middle|\,x>0,\ x^2<\frac{1}{2}\ \text{ או }\ \frac{1}{x}>2\right\}.$$

א. A חסומה מלעיל ומלרע, $\inf A=0$, ו- $\sup A\in\mathbb{Q}$.

ב. A חסומה מלעיל ומלרע, $\inf A=0$, ו- $\sup A\notin\mathbb{Q}$.

ג. A חסומה מלרע על ידי אפס אך לא חסומה מלעיל.

ד. A חסומה מלרע על ידי אפס ומלעיל על ידי $\frac{1}{2}$.

2. יהי a ממשי, ו- (a_n) סדרה של מספרים ממשיים.

א. אם $a_n\to a$ אז $[a_n]\to[a]$, כאשר $[x]$ מסמן את החלק השלם של x.

ב. $a_n\to a$ אם ורק אם $|a_n|\to|a|$.

ג. אם $a_n\to-\infty$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\frac{1}{e}$.

ד. לכל n טבעי נגדיר $b_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

אם הסדרה (b_n) אינה מתכנסת אז גם הסדרה (a_n) אינה מתכנסת.

3. תהי (a_n) סדרה לא חסומה של מספרים ממשיים שונים מאפס. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. הסדרה $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ אינה מתכנסת.

ב. המספר אפס הוא גבול חלקי של הסדרה $\left(\frac{1}{a_n}\right)$.

ג. הסדרה $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ חסומה.

ד. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=0$.

80. 131
1א/ 3"סמ

4. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

א. אם f מקבלת מקסימום באינסוף נקודות אז f פונקציה קבועה.

ב. אם f אינה פונקציה קבועה אז קיים קטע $I\subseteq[a,b]$ כך ש

$\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}<\min\limits_{x\in I}\{f(x)\}<\max\limits_{x\in I}\{f(x)\}<\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$.

ג. אם המקסימום של f מתקבל בנקודה b והמינימום של f מתקבל בנקודה a אז f מונוטונית עולה.

ד. אם (α_n) , (β_n) סדרות מתכנסות של נקודות בקטע $[a,b]$ ומתקיים

$\lim\limits_{n\to\infty}f(\alpha_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\beta_n)$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$.

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $f(0)=0$ ו- $f'(0)>0$. איזו מן הטענות הבאות נכונה בהכרח?

א. קיים קטע פתוח המכיל את הנקודה אפס בה f מונוטונית עולה.

ב. קיימת סביבה ימנית של הנקודה אפס בה $f(x)>0$.

ג. אם $f(0.1)>0$ אז גם $f(0.0001)>0$.

ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה.

6. איזו מהטענות הבאות נכונה?

א. הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ רציפה בנקודה $x=0$.

ב. הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ גזירה בנקודה $x=0$.

ג. הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ בעלת נגזרת רציפה בנקודה $x=0$.

ד. הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ רציפה אך אינה גזירה בנקודה $x=0$.

7. מה ניתן לאמר על הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$?

א. שווה ל $\frac{1}{4}$.

ב. שווה ל $\log 2$ $(=\ln 2)$.

ג. שווה ל- ∞.

ד. הגבול אינו קיים.