החוג למתמטיקה

תלפיות

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (1) (80131)

מועד א' תשע"ב

המורים: פרופ' י. לסט , מר א. צביק .

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליכם לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל אחד עשרה השאלות בפרק ג'. אין לענות על מספר שאלות גדול מן המבוקש.

תשובה מלאה לשאלה בפרק א' מקנה 25 נקודות ותשובה מלאה לשאלה בפרק ב' מקנה 23 נקודות.

יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב'. יש לצטט במדויק את התנאים של כל המשפטים שמשתמשים בהם.

פרק ג' מורכב מ- 11 טענות. עליכם להכריע לגבי כל אחת מהן אם היא אמיתית או שקרית. תשובה נכונה מזכה ב-3 נקודות, היעדר תשובה או תשובה לא נכונה מורידים נקודה. על כן הציון המרבי של פרק זה הוא 33 נקודות, אך הציון המזערי בו הוא 0 נקודות. כלומר הציון של פרק זה לא יכול להוריד מסך הנקודות שצברתם בפרקים האחרים.

למרות שסך הנקודות של כל שאלות הבחינה הוא 104 , הציון המרבי שניתן לקבל בבחינה הוא 100 .

השימוש במחשבון אסור.

לידיעתכם: כל נבחן יקבל 2 מחברות בחינה בצבע שונה. בראשונה תענו על שאלות הבחינה והשנייה תשמש לטיוטא בלבד . נא הקשיבו להנחיות הבוחן וציינו על המחברת המתאימה שהיא מחברת הטיוטא. מחברת זו לא תיבדק ולא תיסרק.

מצורף טופס נלווה לבחינה. יש למלא את הפרטים ולסמן עליו את מספרי השאלות עליהן בחרתם לענות בפרקים א' ו-ב', וכמו כן את תשובותיכם לפרק ג'.

בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה הכולל את הטופס הנלווה וכן את כל מחברות הבחינה והטיוטא.

ב ה צ ל ח ה !

טופס נלווה לבחינה בחשבון אינפיניטסימלי 1 (80131)
מועד א' תלפיות , שנה"ל תשע"ב

יש למלא טופס זה בעט בלבד !

תאריך : 24.02.12 מספר הסטודנט/ית : _____

מספר מחברת : _____

I. סמנו V במשבצות המתאימות לשאלות שבחרתם לענות עליהן, בפרקים א ו-ב בבחינה :

		סימון התלמיד/ה	ציון (לשימוש הבודק/ת)	שם הבודק/ת
פרק א	שאלה 1			
	שאלה 2			
פרק ב	שאלה 3			
	שאלה 4			
	שאלה 5			

II. סמנו בטבלה הבאה את תשובותיכם לפרק ג בבחינה. סמנו X בריבוע המתאים בכל שורה:

	כן	לא	לשימוש הבודק/ת
שאלה 6	☐	☐	
שאלה 7	☐	☐	
שאלה 8	☐	☐	
שאלה 9	☐	☐	
שאלה 10	☐	☐	
שאלה 11	☐	☐	

	כן	לא	לשימוש הבודק/ת
שאלה 12	☐	☐	
שאלה 13	☐	☐	
שאלה 14	☐	☐	
שאלה 15	☐	☐	
שאלה 16	☐	☐	

ציון פרק ג' : ☐

פרק א' (25 %)

ענו על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. א. הוכיחו שסדרה מתכנסת הינה חסומה.

ב. תהינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות מתכנסות : $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$.

הוכיחו שגם $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ו- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$.

2. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $f(a)\cdot f(b)<0$. הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(a,b)$, אחת לפחות , כך ש- $f(c)=0$.

פרק ב' (46%)

ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

3. יהיו $A,B\subseteq\mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו :

א. (15 נק') אם A ו- B צפופות ב- $\mathbb{R}$, אז הקבוצות $A+B$ ו- $A\cdot B$ גם הן צפופות ב- $\mathbb{R}$.

ב. (8 נק') אם $A+B$ ו- $A\cdot B$ צפופות ב- $\mathbb{R}$, אז הקבוצות A ו- B גם הן צפופות ב- $\mathbb{R}$.

תזכורת : קבוצה $D\subseteq\mathbb{R}$ נקראת צפופה ב- $\mathbb{R}$ אם"ם לכל $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש- $x<y$ קיים $d\in D$ כך ש- $x<d<y$.

4. תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה רציפה ומונוטונית יורדת ממש.

א. הראו כי לכל n טבעי קיים פתרון יחיד למשוואה : $f(x)=x^n$. נסמן פתרון זה ב- a_n .

ב. הוכיחו שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית .

ג. הוכיחו שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומצאו את גבולה .

5. א. יהיו $g_1:(0,\infty)\to(0,\infty)$ ו- $g_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$ פונקציות עולות .

הוכיחו שמכפלתן $g_1\cdot g_2$ גם היא פונקציה עולה .

ב. הוכיחו שהפונקציה $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ המוגדרת ע"י $g(x)=xe^x \quad \forall x>0$ היא חד-חד ערכית ועל.

ג. הוכיחו שקיימת פונקציה עולה ורציפה $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ המקיימת :

$$\forall x>0 \quad f(x)\,e^{f(x)}=x$$

פרק ג' (33%)

ענו על **כל** אחד עשרה השאלות הבאות. לגבי כל טענה עליכם לסמן בטופס הנלווה "כן" אם היא נכונה ו-"לא" אם היא איננה נכונה.
תשובה נכונה מזכה ב- 3 נקודות, תשובה שגויה או היעדר תשובה מורידים נקודה.
סך כל הנקודות בפרק זה לא יירד מתחת ל- 0 .

6. אם f פונקציה רציפה ו**לא** גזירה בנקודה x_0 ו- g פונקציה גזירה בנקודה $f(x_0)$,
אזי ההרכבה $g \circ f$ איננה גזירה בנקודה x_0 .

7. $\forall x > 0 \quad e^x < xe^x + 1$

8. לסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $a_n = \sin(n) + \left(1 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)n^2$ יש תת-סדרה מתכנסת.

9. אם הפונקציה $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ מקיימת : $\forall K > 0 \quad \exists x_1, x_2 \in (a,b) \quad |f(x_1) - f(x_2)| > K|x_1 - x_2|$
אזי f איננה רציפה במידה שווה ב- (a,b) .

10. הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- 0 אם ורק אם הסדרה $\left(\frac{a_n}{1+a_n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- 0 .

11. אם $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ מקיימת: $\forall a \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists b \in A \quad b - a > \varepsilon$, אזי A איננה חסומה .

12. $\forall x \in [-\pi, \pi] \quad \arccos(\cos x) = x$

13. קיימת פונקציה $f:(0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה ועל .

14. $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^{n^2} \sqrt{k} = 1$.

15. אם f פונקציה רציפה ב- (a,b) וחסומה ב-$[a,b]$ אזי f רציפה במידה שווה ב- (a,b) .

16. תהי $S \subseteq \mathbb{R}$ קבוצת הגבולות החלקיים של סדרה חסומה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. אם $(\alpha,\beta) \cap S = \varnothing$,
אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N < n$ מתקיים $a_n \notin (\alpha,\beta)$.