האוניברסיטה העברית בירושלים **החוג למתמטיקה**

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי (1) (80131)

מועד א' תשע"ג

המורים: ד"ר איב גודין , פרופ' צ. סלע , מר א. צביק .

הזמן: 3 שעות

הוראות:

בבחינה שלושה פרקים. עליכם לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל תשע השאלות בפרק ג'. אין לענות על מספר שאלות גדול מן המבוקש.

תשובה מלאה לשאלה בפרק א' מקנה 25 נקודות ותשובה מלאה לשאלה בפרק ב' מקנה 26 נקודות.

יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב'. יש לצטט במדויק את התנאים של כל המשפטים שמשתמשים בהם.

פרק ג' מורכב מ- 9 טענות. עליכם להכריע לגבי כל אחת מהן אם היא אמיתית או שקרית. תשובה נכונה מזכה ב- 3 נקודות, היעדר תשובה או תשובה לא נכונה מורידים נקודה. על כן הציון המרבי של פרק זה הוא 27 נקודות, אך הציון המזערי בו הוא 0 נקודות. כלומר הציון של פרק זה לא יכול להוריד מסך הנקודות שצברתם בפרקים האחרים.

למרות שסך הנקודות של כל שאלות הבחינה הוא 104 , הציון המרבי שניתן לקבל בבחינה הוא 100 .

השימוש במחשבון אסור.

לידיעתכם: כל נבחן יקבל 2 מחברות בחינה בצבע שונה. בראשונה תענו על שאלות הבחינה והשנייה תשמש לטיוטא בלבד . נא הקשיבו להנחיות הבוחן וציינו על המחברת המתאימה שהיא מחברת הטיוטא. מחברת זו לא תיבדק ולא תיסרק.

מצורף טופס נלווה לבחינה. יש למלא את הפרטים ולסמן עליו את מספרי השאלות עליהן בחרתם לענות בפרקים א' ו-ב', וכמו כן את תשובותיכם לפרק ג'.

בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה הכולל את הטופס הנלווה וכן את כל מחברות הבחינה והטיוטא.

ב ה צ ל ח ה !

מספר הסטודנט/ית : _____ מספר מחברת : _____

פרק א' (25 %)

ענו על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. הוכיחו ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם ורק אם יש ל- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ גבול חלקי יחיד.

2. יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a<b$ ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$.

הוכיחו שאם $f(a)<f(b)$ ו- $\lambda\in\mathbb{R}$ מקיים $f(a)<\lambda<f(b)$, אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$, אחת לפחות , כך ש- $f(c)=\lambda$.

(אם אתם מסתמכים בהוכחתכם על מקרה פרטי של הטענה, עליכם להוכיח גם אותו.)

פרק ב' (52%)

ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

3. א. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת ע"י $a_1=\frac{1}{2}$ וכלל הנסיגה $a_{n+1}=\frac{a_n+\sqrt{a_n}}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

הוכיחו ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וחשבו את גבולה.

ב. במידה והוא קיים, חשבו את הגבול : $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)$. אם הגבול לא קיים במובן הרחב, הוכיחו זאת !

הערה : אין קשר לוגי בין שני סעיפי השאלה.

4. תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה כך ש- $\lim_{x\to\infty}f(x)=L\in\mathbb{R}$.

א. הוכיחו או הפריכו : קיים הגבול $\lim_{x\to\infty}f'(x)=K\in\mathbb{R}$.

ב. הוכיחו או הפריכו : אם קיים הגבול $\lim_{x\to\infty}f'(x)=K\in\mathbb{R}$, אזי $K=0$.

5. יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ ו- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

א. נתון ש- $a^2\le 3b$. הוכיחו שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ אחד ויחיד כך ש- $f(x_0)=0$.

ב. האם התנאי $a^2\le 3b$ הוא הכרחי על מנת שלמשוואה $f(x)=0$ יהיה פתרון יחיד ?

פרק ג' (27%)

ענו על **כל** תשע השאלות הבאות. לגבי כל טענה עליכם לסמן בטופס הנלווה "כן" אם היא נכונה ו-"לא" אם היא איננה נכונה.
תשובה נכונה מזכה ב- 3 נקודות, תשובה שגויה או היעדר תשובה מורידים נקודה.
סך כל הנקודות בפרק זה לא יירד מתחת ל- 0 .

6. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $a<b$ ותהי $S\subseteq\mathbb{R}$ קבוצת הגבולות החלקיים של סדרה חסומה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.
אם $(a,b)\cap S=\varnothing$, אז קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N<n$ מתקיים $x_n\notin(a,b)$.

7. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $a<b$. אם f פונקציה גזירה ב-(a,b) ונגזרתה f' מונוטונית ב-(a,b)
אזי f' רציפה ב-(a,b).

8. יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ ו- $P(x)=ax^2+bx+c$. אם $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\sin(x)-P(x)\right)=0$ אזי $a=0$.

9. אם $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה ו- $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[0,1]$ אזי למשוואה $e^{-f(x)}=x^2$ יש פתרון ב- $[0,1]$.

10. אם הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית ממש וחסומה אזי $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n<\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

11. הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $a_n=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$ היא סדרה מתכנסת .

12. הפונקציה $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ $\forall x>0$ היא רציפה במידה שווה ב-$(0,\infty)$.

13. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $a<b$. אם $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ רציפה ב-(a,b) ו- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי
שכל איבריה ב-(a,b) , אזי הסדרה $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת .

14. אם f פונקציה רציפה ב-0 , אזי הפונקציה g המוגדרת ע"י $g(x)=x\,f(x)$ גזירה ב-0 .

טופס נלווה לבחינה בחשבון אינפיניטסימלי 1 (80131)

מועד א' , שנה"ל תשע"ג

יש למלא טופס זה בעט בלבד !

תאריך : 21.02.13 מספר הסטודנט/ית : _____

מספר מחברת : _____

I. סמנו V במשבצות המתאימות לשאלות שבחרתם לענות עליהן, בפרקים א ו-ב בבחינה :

		סימון התלמיד/ה	ציון (לשימוש הבודק/ת)	שם הבודק/ת
פרק א	שאלה 1			
	שאלה 2			
פרק ב	שאלה 3			
	שאלה 4			
	שאלה 5			

II. סמנו בטבלה הבאה את תשובותיכם לפרק ג בבחינה. סמנו X בריבוע המתאים בכל שורה:

	כן	לא	לשימוש הבודק/ת
שאלה 6	☐	☐	
שאלה 7	☐	☐	
שאלה 8	☐	☐	
שאלה 9	☐	☐	
שאלה 10	☐	☐	

	כן	לא	לשימוש הבודק/ת
שאלה 11	☐	☐	
שאלה 12	☐	☐	
שאלה 13	☐	☐	
שאלה 14	☐	☐	

ציון פרק ג' :

Pos.	Neg.