האוניברסיטה העברית בירושלים **החוג למתמטיקה**

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 1 (80131)

מועד ב' תשע"ה 1.04.15

המורים : פרופ' מ. הוכמן , פרופ' ר. ליבנה , פרופ' צ. סלע

משך הבחינה : 3 שעות

הוראות :

בבחינה שלושה פרקים. עליכם לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות בפרק א', על שתי שאלות מבין שלוש השאלות בפרק ב' ועל כל ארבע השאלות בפרק ג'. אין לענות על מספר שאלות גדול מן המבוקש. אם תענו על יותר שאלות, ייבדקו רק הראשונות.

תשובה מלאה לשאלה בפרק א' מקנה 25 נקודות . תשובה מלאה לשאלה בפרק ב' מקנה 25 נקודות .

יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב' ולצטט במדויק את התנאים של כל המשפטים שמשתמשים בהם.

פרק ג' מורכב מ- 4 טענות. עליכם להכריע לגבי כל אחת מהן אם היא אמיתית או שקרית ולנמק את קביעתכם בארבע השורות (לכל היותר) שהוקצו לכך בטופס. תשובה מלאה מקנה 7 נקודות ותשובה לא מנומקת לא מזכה בנקודות.

השימוש במחשבון ובכל חומר עזר אחר אסור.

יש לסמן בטבלאות בתחתית העמוד את מספרי השאלות עליהן בחרתם לענות בפרקים א' ו- ב', וכמו כן את תשובותיכם (אמת / שקר) לפרק ג'.

לידיעתכם: כל נבחן יקבל 2 מחברות בחינה בצבע שונה. בראשונה תענו על שאלות הבחינה והשנייה תשמש לטיוטא בלבד . נא הקשיבו להנחיות הבוחן וציינו על המחברת המתאימה שהיא מחברת הטיוטא. מחברת זו לא תיבדק ולא תיסרק. בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה ואת כל מחברות הבחינה והטיוטא. אסור להפריד דפים מהשאלון !

סמנו V במשבצות המתאימות לשאלות שבחרתם לענות עליהן, בפרקים א ו-ב בבחינה :

		סימון התלמיד/ה	ציון (לשימוש הבודק/ת)	שם הבודק/ת
פרק א	שאלה 1			
	שאלה 2			
פרק ב	שאלה 3			
	שאלה 4			
	שאלה 5			

כתבו בטבלה הבאה את תשובותיכם לפרק ג בבחינה. כתבו אמת / שקר בכל שורה של עמודת התשובות:

		תשובת התלמיד/ה	ציון (לשימוש הבודק/ת)	שם הבודק/ת
פרק ג	שאלה 6			
	שאלה 7			
	שאלה 8			
	שאלה 9			

בהצלחה!

מספר זהות: _____ מספר מחברת : _____

פרק ג' (28 נק')

ענו על **כל** ארבע השאלות הבאות. עליכם להכריע לגבי כל אחת מהטענות אם היא אמיתית או שקרית ולנמק את קביעתכם בארבע השורות (לכל היותר) שהוקצו לכך בטופס. תשובה מלאה מקנה 7 נקודות ותשובה לא מנומקת לא מזכה בנקודות. סמנו את תשובותיכם (אמת / שקר) בטבלה בתחתית העמוד הקודם .

6. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל המכילה מספרים רציונליים ואי- רציונליים.
אם $\sup A = \sup(A \cap \mathbb{Q})$ אזי $\sup A < \sup(A \setminus \mathbb{Q})$.

7. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת ע"י : $a_n = \dfrac{\ln(1+e^{2n})}{n}$. אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

8. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$. נתון שלכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ של רציונליים כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. אזי f רציפה בנקודה x_0 .

9. יהיו $a,b,K \in \mathbb{R}$ כך ש- $a<b$ ו- $0<K$. תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת :
$\forall x_1,x_2 \in (a,b) \quad |f(x_1)-f(x_2)| \le K|x_1^2 - x_2^2|$. אזי f רציפה במידה שווה ב- (a,b) .

מספר זהות: _____ מספר מחברת: _____

פרק א' (25 נק')

ענו על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

1. א. הגדירו את המושגים : (i) הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

(ii) הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

ב. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה ותהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ל- 0 ($\lim_{n\to\infty} b_n = 0$).

הוכיחו שגם $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ו- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

ג. תהינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות מתכנסות : $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$.

הוכיחו שגם $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ו- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$.

2. תהי f פונקציה שתחום הגדרתה D מכיל סביבה מנוקבת של הנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$ ויהי $L \in \mathbb{R}$.

א. הגדירו בלשון ε ו- δ מתי $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

ב. הוכיחו ששתי האמירות הבאות שקולות :

(A) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

(B) לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ של מספרים ממשיים המקיימת את שלושת התנאים:

(i) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D$ (ii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq x_0$ (iii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

מתקיים : $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

(המשך בגב הדף)

פרק ב' (50 נק')

ענו על שתיים מבין שלוש השאלות הבאות.

3. א. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל. נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י : $f=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$.

הוכיחו של- f איננה רציפה בנקודה $x_0=\sup A$.

ב. תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n\left|a_{n+1}-a_n\right|\right)=L>0$.

הוכיחו ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת .

אין קשר לוגי בין הסעיפים .

4. תזכורת : $D\subseteq\mathbb{R}$ תקרא צפופה ב- $\mathbb{R}$ אם"ם לכל $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $a<b$ קיים $d\in D$ כך ש- $a<d<b$.

תהי $D\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה צפופה ב- $\mathbb{R}$ ויהיו $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות המקיימות :

$\forall x\in D \quad f(x)=g(x)$.

א. הוכיחו שאם f ו- g רציפות ב- $\mathbb{R}$ אזי $f=g$ (כלומר $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=g(x)$).

ב. האם המסקנה של סעיף א' תקפה אם מחליפים את המילה "רציפות" ב- "מונוטוניות" ?

5. יהי m מספר ממשי נתון ותהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x)=e^x$.

קבעו לפי הערך של m מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=mx$ (עם נעלם x).

בהצלחה!