החוג למתמטיקה

האוניברסיטה העברית בירושלים

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 1 (80131)

מועד א' תשע"ו 18.02.16

המורים : פרופ' מ. הוכמן , פרופ' צ. סלע , פרופ' ר. קופרמן

משך הבחינה : 3 שעות

הוראות :

בבחינה שלושה פרקים. בפרק א' שאלה 1 היא **חובה** , ועליכם לענות בנוסף על **אחת** מבין שתי השאלות 2 או 3 . ענו על **שלוש** מבין ארבע השאלות בפרק ב' ועל **כל ארבע** השאלות בפרק ג'. אין לענות על מספר שאלות גדול מן המבוקש. אם תענו על יותר שאלות, ייבדקו רק הראשונות.

המשקל הכולל של פרק א' הינו 25 נקודות. תשובה מלאה לשאלה בפרק ב' מקנה 18 נקודות .

יש לנמק את הטענות בפרקים א' ו- ב' ולצטט במדויק את התנאים של כל המשפטים שמשתמשים בהם.

פרק ג' מורכב מ- 4 טענות. עליכם להכריע לגבי כל אחת מהן אם היא אמיתית או שקרית ולנמק את קביעתכם בארבע השורות (לכל היותר) שהוקצו לכך בטופס. תשובה מלאה מקנה 6 נקודות ותשובה לא מנומקת לא מזכה בנקודות.

למרות שסך הנקודות של כל שאלות הבחינה הוא 103 , הציון המרבי שניתן לקבל בבחינה הוא 100 .

יש לסמן בטבלאות בתחתית העמוד הנוכחי את מספרי השאלות עליהן עניתם בפרקים א' ו- ב', וכמו כן את תשובותיכם (אמת / שקר) לפרק ג'.

מלבד הסימונים הללו ומילוי מספר הזהות ומספר המחברת בתחתית העמוד הנוכחי ובראש הדף הבא, אסור לכתוב דבר על השאלון. בפרט אין להשתמש בשאלון כטיוטה.

בסוף הבחינה יש להגיש את כל שאלון הבחינה ואת כל מחברות הבחינה.

אסור להפריד דפים מהשאלון או מהמחברת ! השימוש במחשבון ובכל חומר עזר אחר אסור.

סמנו V במשבצות המתאימות לשאלות שבחרתם לענות עליהן, בפרקים א ו-ב בבחינה :

		סימון התלמיד/ה	ציון (לשימוש הבודק/ת)	שם הבודק/ת
פרק א	שאלה 1			
	שאלה 2			
	שאלה 3			
פרק ב	שאלה 4			
	שאלה 5			
	שאלה 6			
	שאלה 7			

כתבו בטבלה הבאה את תשובותיכם לפרק ג בבחינה. כתבו אמת / שקר בכל שורה של עמודת התשובות:

		תשובת התלמיד/ה	ציון (לשימוש הבודק/ת)	שם הבודק/ת
פרק ג	שאלה 8			
	שאלה 9			
	שאלה 10			
	שאלה 11			

מספר מחברת : _____ מספר זהות : _____ **בהצלחה!**

פרק ג' (24 נק')

ענו על כל ארבע השאלות הבאות. עליכם להכריע לגבי כל אחת מהטענות אם היא אמיתית או שקרית ולנמק את קביעתכם בארבע השורות (לכל היותר) שהוקצו לכך בטופס. תשובה מלאה מקנה 6 נקודות ותשובה לא מנומקת לא מזכה בנקודות. סמנו את תשובותיכם (אמת / שקר) בטבלה בתחתית העמוד הקודם .

שאלה 8 (6 נק')

יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ המקיימים : $x+y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ו- $0\neq xy\in\mathbb{Q}$. אזי $x\notin\mathbb{Q}$ וגם $y\notin\mathbb{Q}$.

שאלה 9 (6 נק')

הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $a_n=\frac{2n+1}{3n^2+1}+\frac{2n+1}{3n^2+2}+\ldots+\frac{2n+1}{3n^2+n}$ מתכנסת במובן הצר.

שאלה 10 (6 נק')

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x)\cdot f(x+1)\geqslant 0$.

שאלה 11 (6 נק')

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה כך ש- $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$. אזי $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x+h)-f(x-h)\right)=0$ עבור כל $0<h$.

מספר זהות: _____ מספר מחברת: _____

פרק א' (25 נק')

ענו על שאלה 1 ועל **אחת** מבין השאלות 2 או 3 .

שאלה 1 (10 נק') . אל תפזרו את התשובות לסעיפי השאלה במקומות שונים במחברת !

א. יהי $(\mathbb{F},<)$ שדה סדור. הגדירו מהו הערך המוחלט של $a\in\mathbb{F}$.

ב. יהי $(\mathbb{F},<)$ שדה סדור. הגדירו מתי קבוצה לא ריקה $A\subseteq\mathbb{F}$ היא חסומה מלעיל.

ג. הגדירו את המושג : גבול חלקי של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

ד. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $a<b$ ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה נתונה. הגדירו : f רציפה ב- $[a,b]$.
(אתם לא מתבקשים להגדיר בנפרד את המושגים עליהם מושתתת ההגדרה)

ה. יהיו $a,b,x_0\in\mathbb{R}$ כך ש- $a<x_0<b$ ותהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה 3 פעמים ב- x_0 .
כתבו במפורש את פולינום טיילור מסדר 3 של f ב- x_0 .

שאלה 2 (15 נק')

א. הוכיחו שאם הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה .

ב. הוכיחו שאם הסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסות , אזי סדרת המכפלה $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ גם היא מתכנסת .

שאלה 3 (15 נק')

הוכיחו את "כלל השרשרת" האומר שאם הפונקציה f גזירה ב- $x_0\in\mathbb{R}$ והפונקציה g גזירה ב- $y_0=f(x_0)$,
אזי הפונקציה המורכבת $g\circ f$ גזירה ב- x_0 ומתקיים : $(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$.
(אם אתם מסתמכים על טענות עזר, יש לצטט אותן במדויק)

(המשך בגב הדף)

פרק ב' (54 נק')

ענו על **שלוש** מבין ארבע השאלות הבאות.

שאלה 4 (18 נק')

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה כך של- $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ אין מקסימום.

א. הוכיחו ש- $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ הוא גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

ב. תנו דוגמא לסדרה חסומה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך של- $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ אין מקסימום וכך ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

שאלה 5 (18 נק')

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת ע"י : $a_1=1$ ו- $\forall n\in\mathbb{N}\quad a_{n+1}=a_n-3+e^{a_n}$.

הוכיחו ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

שאלה 6 (18 נק')

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f\left(\frac{x+1}{2}\right)=f(x)\quad (*)$.

א. הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f\left(\frac{x+2^n-1}{2^n}\right)=f(x)$.

ב. תארו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות את $(*)$ ורציפות ב- $x_0=1$.

שאלה 7 (18 נק')

יהי $n\in\mathbb{N}$. נסמן : $P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$.

א. עבור $n=1$ ו- $n=2$, מהו מספר הפתרונות של המשוואות : $P_n(x)=0$?

ב. חשבו את $P_3'(x)$. מהו מספר הפתרונות של המשוואה : $P_3(x)=0$?

ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה : $P_n(x)=0$? הוכיחו את תשובתכם !

בהצלחה!