# אינפי 1 - סמסטר א' (80131-1)

## מועד א' תשע`ט — 31/01/2019

**מרצים : ד"ר מוריה סיגרון, פרופ' יונתן ברויאר, ד"ר איב גודין** **משך הבחינה: 3 שעות**

**הנחיות לבחינה:**

- אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
- ענו על **ארבע** מתוך חמש השאלות שבבחינה. כל השאלות שוות בערכן (25 נקודות), אבל תת־סעיפים של אותה שאלה יכולים לשאת ניקוד שונה.
- התחילו את הפתרון של כל שאלה חדשה בראש עמוד משלה במחברת.
- אין בהכרח קשר לוגי בין תת־הסעיפים (א) ו־ (ב) של אותה שאלה.
- אל תענו על יותר מארבע שאלות. אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
- יש לנמק את כל הטענות ולצטט במדויק את כל התנאים של המשפטים שאתם משתמשים.
- כתבו את מספר תעודת הזהות ואת מספר המחברת במשבצות מתחת להנחיות הללו.
- יש לציין את השאלות שבחרתם לענות עליהן בטבלה אשר בתחתית העמוד הזה.
- עמודי מחברת הבחינה ממוספרים. כתבו במשבצת המתאימה של הטבלה את מספרי העמודים בהם פתרתם את השאלה הרלוונטית.
- בסוף הבחינה יש להגיש את <u>כל</u> השאלון ואת כל מחברות הבחינה.

**מספר ת`ז :** | | | | | | | | | |  **מספר מחברת :** | | |

**סמנו ✓ במשבצת המתאימה לשאלה שבחרתם ואת מספרי העמודים במחברת בהם פתרתם אותה .**

| שאלה | בחירה | מחברת | עמודים | ציון |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ☐ | I , II , III | | |
| 2 | ☐ | I , II , III | | |
| 3 | ☐ | I , II , III | | |
| 4 | ☐ | I , II , III | | |
| 5 | ☐ | I , II , III | | |
| | | | | |

**בהצלחה!**

## שאלה 1 ( 25 נקודות )

(א) יהיו $x_0, L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ ויהיו $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו־ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימות $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ ו־ $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$ .

$(i)$ הוכיחו או הפריכו : אם בכל סביבה מנוקבת $U$ של $x_0$ קיימת נקודה $x_U$ כך ש־ $f(x_U) \leqslant g(x_U)$ , אזי $L_1 \leqslant L_2$ .

$(ii)$ הוכיחו או הפריכו : אם עבור כל סביבה מנוקבת $U$ של $x_0$ מתקיים $\forall x \in U \;\; f(x) < g(x)$ , אזי $L_1 < L_2$ .

(ב) האם הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n}{n^2+2n+3}\right)^{2n\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ קיים במובן הרחב ? ( $\lfloor x\rfloor$ = הערך השלם של $x$)

הוכיחו את תשובתכם !

## שאלה 2 ( 25 נקודות )

(א) יהי $0 < L \in \mathbb{R}$ ותהי $f$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0 \in \mathbb{R}$ ומקיימת $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ .

$(i)$ הוכיחו שקיימת סביבה מנוקבת של $x_0$ בה הפונקציה $\frac{1}{f}$ מוגדרת.

$(ii)$ הוכיחו ש־ $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$ .

(ב) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

$(i)$ תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים **חיוביים** שאין לה אף תת־סדרה חסומה. אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ .

$(ii)$ תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים (**לאו דווקא חיוביים**) שאין לה אף תת־סדרה חסומה.
אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ או $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ .

## שאלה 3 ( 25 נקודות )

(א) עבור $x \in \mathbb{R}$ נגדיר את הפונקציה $\exp(x)$ על ידי $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ .

( נתון שהגבול קיים במובן הצר עבור כל $x \in \mathbb{R}$ , אין צורך להוכיח זאת! ).

$(i)$ הוכיחו כי exp גזירה ב־ $0$ . (אין צורך להוכיח את אי־השוויונים עליהם מתבססת ההוכחה, אך יש לצטט אותם במדויק)

$(ii)$ הוכיחו כי exp גזירה בכל $x_0 \in \mathbb{R}$ .

(ב) נסמן $A = \left\{\frac{1}{k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$ . תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש־ $a_n \in A$ עבור כל $n$ טבעי.

$(i)$ יהי $L \in \mathbb{R}$ כך ש־ $L < 0$ . הוכיחו ש־ $L$ איננו גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

$(ii)$ יהי $0 < L \in \mathbb{R}$ כך ש־ $L \notin A$ . הוכיחו ש־ $L$ איננו גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

## שאלה 4 ( 25 נקודות )

(א) יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־ $a < b$ .

המשפט הראשון של ויירשטראס אומר שאם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב־ $[a,b]$ , אזי $f$ חסומה ב־ $[a,b]$ .

$(i)$ תנו דוגמה לפונקציה רציפה $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ שאיננה חסומה ב־ $(a,b)$ .

$(ii)$ הסבירו במדויק איפה נכשלת ההוכחה של המשפט הראשון של ויירשטראס שניתנה בהרצאה כשמחליפים את $[a,b]$ ב־ $(a,b)$ .

(ב) נתון $0 \leqslant t \in \mathbb{R}$ . נגדיר סדרה באופן רקורסיבי על ידי $a_1 = t$ ו־ $a_{n+1} = a_n^3 + 1$ לכל $n$ טבעי.

$(i)$ הוכיחו ש־ $x \leqslant \max\{x^3, 1\}$ עבור כל $0 \leqslant x$ והסיקו ש־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה ממש.

$(ii)$ הוכיחו בשלילה ש־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ איננה חסומה מלעיל והסיקו ש־ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ .

## שאלה 5 ( 25 נקודות )

(א) יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־ $a < b$ . תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה ב־ $(a,b]$ .

נתון ש־ $f(a) = 0$ וש־ $f(b)\cdot f'_-(b) < 0$ . קבלו השראה מהוכחת משפט דרבו והוכיחו שקיימת $a < c < b$ כך ש־ $f'(c) = 0$ .

(ב) יהיו $\varnothing \neq U, V \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־ $U \cup V = \mathbb{R}$ ותהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־ $\varnothing \neq U \cap A$ ו־ $\varnothing \neq V \cap A$ .

נתון גם ש־ $A$ חסומה מלעיל. הוכיחו כי $\sup(A) = \max\{\sup(U\cap A), \sup(V\cap A)\}$ .