אינפי 1 - סמסטר ב' (80131-2)

מועד א' תשע`ט — 4/07/2019

מרצה : ד"ר איב גודין **משך הבחינה: 3 שעות**

הנחיות לבחינה:

- אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
- ענו על **ארבע** מתוך חמש השאלות שבבחינה. לכל שאלה שני סעיפים שווים בערכם (12.5 נקודות), אבל תת-סעיפים של אותו סעיף יכולים לשאת ניקוד שונה.
- התחילו את הפתרון של כל שאלה חדשה בראש עמוד משלה במחברת.
- אין בהכרח קשר לוגי בין תת-הסעיפים (א) ו- (ב) של אותה שאלה.
- אל תענו על יותר מארבע שאלות. אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
- יש לנמק את כל הטענות ולצטט במדויק את כל התנאים של המשפטים שאתם משתמשים.
- כתבו את מספר תעודת הזהות ואת מספר המחברת במשבצות מתחת להנחיות הללו.
- יש לציין את השאלות שבחרתם לענות עליהן בטבלה אשר בתחתית העמוד הזה.
- עמודי מחברת הבחינה ממוספרים. כתבו במשבצת המתאימה של הטבלה את מספרי העמודים בהם פתרתם את השאלה הרלוונטית (למשל: 12-8). אם לקחתם מחברת נוספת ובה פתרתם את השאלה, הקיפו בשורה המתאימה של הטבלה גם את הסיפרה הרומית II .
- בסוף הבחינה יש להגיש את כל השאלון ואת כל מחברות הבחינה.

מספר ת`ז : | | | | | | | | | **מספר מחברת :** | | |

סמנו ✓ במשבצת המתאימה לשאלה שבחרתם ואת מספרי העמודים במחברת בהם פתרתם אותה .

שאלה	בחירה	מחברת	עמודים	ציון
1	☐	I , II		
2	☐	I , II		
3	☐	I , II		
4	☐	I , II		
5	☐	I , II		

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

(א) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $s_n = \sup\left\{ |a_{n+p} - a_n| \;\middle|\; p \in \mathbb{N} \right\}$.

(i) הסבירו מדוע s_n מוגדר היטב.

(ii) הוכיחו ש־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם"ם $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$. (מותר להסתמך על כל משפט מההרצאה, אך צריך לצטט אותו)

(ב) מצאו את כל הערכים של $b \in \mathbb{R}$ עבורם הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(bn + \sqrt{9n^2 + 4n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. הוכיחו את תשובתכם !

שאלה 2 (25 נקודות)

(א) תהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0 \in \mathbb{R}$. נתון שלכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת את שלושת התנאים (i) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D$ (ii) $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq x_0$ ו־ (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. הוכיחו באמצעות הגדרת הגבול בלשון של קושי ש־ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

(ב) תהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי של מספרים <u>טבעיים</u>. הוכיחו כי הסדרה $\left(\left(\frac{nb_n + 1}{nb_n}\right)^{nb_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וחשבו את גבולה.

(מותר להסתמך על התכונות של הסדרה $(e_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ שהוכחו בהרצאה, אך צריך לצטט אותן)

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) תהי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים המתכנסת ל־ $0 \neq L \in \mathbb{R}$.

(i) הוכיחו כי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\frac{|L|}{2} < |b_n|$ עבור כל $N < n \in \mathbb{N}$.

(ii) נתון גם ש־ $0 \neq b_n$ עבור כל $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו את הסעיף הבא מהמשפט על אריתמטיקה של גבולות: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{L}$.

(ב) יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־ $a < b$, ותהי $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ב־ (a,b) .
נתון ש־ f' מונוטונית ב־ (a,b) . הוכיחו ש־ f' רציפה ב־ (a,b) .

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) (i) יהי $a \in \mathbb{R}$. הגדירו את הערך המוחלט של a (המסומן $|a|$) ואת הסימן של a (המסומן $\operatorname{sgn}(a)$) .

(ii) נתון $0 \leqslant c \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $|a| \leqslant c \;\Leftrightarrow\; -c \leqslant a \leqslant c$.

(iii) הוכיחו כי לכל $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים : $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ (אי־שוויון המשולש).

(ב) נתונים $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ כך ש־ $0 < x_1 < y_1$.

נגדיר באופן רקורסיבי שתי סדרות על ידי $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + y_n}$ ו־ $y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n}$ לכל n טבעי.

(i) הוכיחו ש־ $0 < x_n < y_n$ עבור כל $n \in \mathbb{N}$ והסיקו ש־ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת ממש.

(ii) הוכיחו ש־ $(y_n - x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה קבועה ומצאו את ערכם של $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ו־ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

שאלה 5 (25 נקודות)

(א) תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0 \in \mathbb{R}$. נתון ש־ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$.

תהי g פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $y_0 \in \mathbb{R}$.

(i) תנו דוגמה לפונקציה f שאיננה קבועה באף סביבה מנוקבת של x_0 ולפונקציה g המקיימת $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = L \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\lim\limits_{x\to x_0} (g \circ f)(x)$ לא קיים.

(ii) נתון שקיימת סביבה מנוקבת U של x_0 כך ש־ $\forall x \in U \quad f(x) \neq y_0$.
הוכיחו שקיימת סביבה מנוקבת של x_0 בה הפונקציה המורכבת $g \circ f$ מוגדרת.

(ב) נתונות שתי קבוצות חסומות $\varnothing \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־ $\forall b \in B \quad b < 0$, $\forall a \in A \; a > 0$.
תהי $A \cdot B = \{ ab \mid a \in A \,,\; b \in B \}$. הוכיחו כי $\inf(A \cdot B) = \sup(A)\,\inf(B)$.