אינפי 1 - סמסטר ב' (80131-2)

מועד ב' תשע`ט — 6/08/2019

מרצה : ד"ר איב גודין **משך הבחינה: 3 שעות**

הנחיות לבחינה:

- אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
- ענו על **ארבע** מתוך חמש השאלות שבבחינה. לכל שאלה שני סעיפים שווים בערכם (12.5 נקודות), אבל תת-סעיפים של אותו סעיף יכולים לשאת ניקוד שונה.
- התחילו את הפתרון של כל שאלה חדשה בראש עמוד משלה במחברת.
- אין בהכרח קשר לוגי בין תת-הסעיפים (א) ו- (ב) של אותה שאלה.
- אל תענו על יותר מארבע שאלות. אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
- יש לנמק את כל הטענות ולצטט במדויק את כל התנאים של המשפטים שאתם משתמשים.
- כתבו את מספר תעודת הזהות ואת מספר המחברת במשבצות מתחת להנחיות הללו.
- יש לציין את השאלות שבחרתם לענות עליהן בטבלה אשר בתחתית העמוד הזה.
- עמודי מחברת הבחינה ממוספרים. כתבו במשבצת המתאימה של הטבלה את מספרי העמודים בהם פתרתם את השאלה הרלוונטית (למשל: 13 - 9). אם לקחתם מחברת נוספת ובה פתרתם את השאלה, הקיפו בשורה המתאימה של הטבלה גם את הסיפרה הרומית II .
- בסוף הבחינה יש להגיש את <u>כל</u> השאלון ואת כל מחברות הבחינה.

מספר ת`ז : | | | | | | | | | | **מספר מחברת :** | | |

סמנו ✓ במשבצת המתאימה לשאלה שבחרתם ואת מספרי העמודים במחברת בהם פתרתם אותה .

שאלה	בחירה	מחברת	עמודים	ציון
1	☐	I , II		
2	☐	I , II		
3	☐	I , II		
4	☐	I , II		
5	☐	I , II		

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

(א) הוכיחו כי הסדרה $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ היא סדרה חסומה.

(ב) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x+1)=f(x)+1$.

(i) הוכיחו כי לכל x ממשי ולכל n טבעי מתקיים $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x+n)=f(x)+n$.

(ii) הוכיחו כי אם רציפה אזי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

שאלה 2 (25 נקודות)

(א) יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש־ $0\leqslant x<y$. הוכיחו שקיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש־ $x<q<y$.

(ב) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה של מספרים אי־שליליים. נסמן $M=\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ולכל n טבעי נגדיר $b_n=\sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^n}$.

(i) הוכיחו כי לכל n טבעי ולכל k טבעי כך ש־ $k\leqslant n$ מתקיים $a_k\leqslant b_n\leqslant \sqrt[n]{n}M$.

(ii) הוכיחו ש־ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$.

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) יהיו A ו־ B שני קטעים ב־ $\mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

(i) אם $A\cap B\neq\varnothing$, אז $A\cap B$ גם קטע.

(ii) אם $A\cap B\neq\varnothing$, אז $A\cup B$ גם קטע.

(ב) נגדיר סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ באופן רקורסיבי על ידי $a_1=1$ ו־ $a_{n+1}=1+\frac{2}{a_n}$ לכל n טבעי.

(i) חשבו את ששת האיברים הראשונים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. הוכיחו כי $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1\leqslant a_n\leqslant 3$.

(ii) היעזרו בסדרות $(a_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ ו־ $(a_{2k})_{k=1}^{\infty}$ כדי להוכיח ש־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ולמצוא את ערכו של $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש־ $a<b$. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה שאין לה נקודות אי־רציפות מסוג שני.
קבלו השראה מההוכחה של המשפט הראשון של ויירשטראס והוכיחו ש־ f חסומה ב־ $[a,b]$.

(ב) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה כך ש־ $f'(x)\in\mathbb{Q}$ עבור כל x ממשי .

(i) הוכיחו שקיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש־ $f'(x)=q$ עבור כל x ממשי .

(ii) הסיקו שקיימים $q\in\mathbb{Q}$ ו־ $C\in\mathbb{R}$ כך ש־ $f(x)=qx+C$ עבור כל x ממשי .

שאלה 5 (25 נקודות)

(א) יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש־ $a<b$. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה ב־ (a,b) .
נתון גם ש־ $f(a)=f(b)$. הוכיחו שקיימת $c\in(a,b)$ כך ש־ $f'(c)=0$. (משפט Rolle)

(ב) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב־ $[0,1]$ וגזירה ב־ $[0,1)$. בנוסף נתון ש־ $f(0)=0$ וש־ $f'(0)=f(1)$.
נגדיר $g:(0,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

הראו שקיימת ל־ g המשכה רציפה ל־ $[0,1]$ והיעזרו בה כדי להוכיח שקיימת $c\in(0,1)$ כך ש־ $f'(c)=\frac{f(c)}{c}$.