אינפי 1 - סמסטר א' (80131-1)

מועד א' תש`פ — 9/02/2020

מרצה : ד"ר נעה ניצן, ד"ר תומר שלנק ,ד"ר איב גודין **משך הבחינה: 3 שעות**

הנחיות לבחינה:

- אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
- ענו על **ארבע** מתוך חמש השאלות שבבחינה. לכל שאלה שני סעיפים שווים בערכם (12.5 נקודות), אבל תת-סעיפים של אותו סעיף יכולים לשאת ניקוד שונה.
- התחילו את הפתרון של כל שאלה חדשה בראש עמוד משלה במחברת.
- אין בהכרח קשר לוגי בין תת-הסעיפים (א) ו- (ב) של אותה שאלה.
- אל תענו על יותר מארבע שאלות. אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
- יש לנמק את כל הטענות ולצטט במדויק את כל התנאים של המשפטים שאתם משתמשים.
- כתבו את מספר תעודת הזהות ואת מספר המחברת במשבצות מתחת להנחיות הללו.
- יש לציין את השאלות שבחרתם לענות עליהן בטבלה אשר בתחתית העמוד הזה.
- עמודי מחברת הבחינה ממוספרים. כתבו במשבצת המתאימה של הטבלה את מספרי העמודים בהם פתרתם את השאלה הרלוונטית (למשל: 12-8). אם לקחתם מחברת נוספת ובה פתרתם את השאלה, הקיפו בשורה המתאימה של הטבלה גם את הסיפרה הרומית II .
- בסוף הבחינה יש להגיש את <u>כל</u> השאלון ואת כל מחברות הבחינה.

מספר ת`ז : | | | | | | | | | |

מספר מחברת : | | | |

סמנו ✓ במשבצת המתאימה לשאלה שבחרתם ואת מספרי העמודים במחברת בהם פתרתם אותה .

שאלה	בחירה	מחברת	עמודים	ציון
1	☐	I , II		
2	☐	I , II		
3	☐	I , II		
4	☐	I , II		
5	☐	I , II		

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

(א) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש־ $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ ותהי $A = \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

(i) הסבירו מדוע קיים $\beta = \sup(A)$.

(ii) הוכיחו כי $L \leqslant \beta$.

(iii) הוכיחו שאם $L < \beta$, אזי קיים $\max(A)$.

(ב) תהי f הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = \dfrac{x^2+1}{5x-4}$. הוכיחו **לפי ההגדרה** ש־ $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

שאלה 2 (25 נקודות)

(א) יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־ $a < b$, ותהי $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה ממש. נתון כי f חסומה ב־ $[a,b)$.

(i) הוכיחו כי $\lim_{x\to b^-} f(x)$ קיים (במובן הצר).

(ii) הוכיחו כי לקבוצה $\{\, f(x) \mid x \in [a,b) \,\}$ אין מקסימום.

(ב) הוכיחו את הטענות הבאות (מותר להשתמש במשפטים שנלמדו, אך צריך לצטט אותם. אין קשר לוגי בין הסעיפים):

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} = \infty$.

(ii) אם $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת , אזי קבוצת הגבולות חלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מכילה לפחות איבר אחד ולכל היותר שני איברים .

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) יהיו $a, L \in \mathbb{R}$ ותהי $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה כך ש־ $(a,\infty) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$.

(i) הגדירו בלשון של קושי את המושג $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

(ii) נתון שלכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x_n \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ו־ $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.
הוכיחו ש־ $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

(ב) תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$. נתון ש־ $A^2 = \{\, a^2 \mid a \in A \,\}$ חסומה.

(i) הוכיחו כי A חסומה.

(ii) נסמן $\sup(A) = \beta$ ו־ $\inf(A) = \alpha$. הוכיחו כי $\sup\left(A^2\right) = \max\left(\alpha^2, \beta^2\right)$.

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה בעלת גבול במובן הצר בכל נקודה. הוכיחו כי f חסומה ב־ $[a,b]$ עבור כל $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש־ $a < b$.

(ב) נגדיר סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ באופן רקורסיבי על ידי $a_1 = 0$ ו־ $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ לכל n טבעי.
הוכיחו ש־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, ומצאו את ערכו של $\lim_{n\to\infty} a_n$.

שאלה 5 (25 נקודות)

(א) (i) הוכיחו את אי־שוויון ברנולי האומר שלכל $-1 \leqslant x \in \mathbb{R}$ ולכל n טבעי מתקיים $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

(ii) נתון $0 < a \in \mathbb{R}$. הוכיחו **לפי ההגדרה** ש־ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(ב) תהי $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ולא קבועה כך ש־ $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0)$.
הוכיחו ש־ $\mathrm{Im}(f)$ (= התמונה של f) היא קטע סגור וחסום.