בחינה בקורס "חשבון אינפיניטסימלי 1" (80131)

מועד א' - סמסטר ב' - תשפ"ג 16/07/2023

מורה: ד"ר יאיר חיות **משך הבחינה: 3 שעות**

הנחיות לבחינה:

- כתבו את מספר תעודת הזהות ואת מספר המחברת במשבצות מתחת להנחיות הללו.
- ענו על **חמש** מתוך שש השאלות שבבחינה.

  אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
- לכל שאלה ניקוד זהה (20 נקודות), אבל תת-סעיפים של אותה שאלה יכולים לשאת ניקוד שונה.
- עמודי מחברת הבחינה ממוספרים. כתבו במשבצת המתאימה של הטבלה אשר בתחתית העמוד הזה את מספרי העמודים בהם פתרתם את השאלה הרלוונטית (למשל: 8-12). אם לקחתם מחברת נוספת ובה פתרתם את השאלה, הקיפו בשורה המתאימה של הטבלה גם את הסיפרה הרומית II .
- התחילו את הפתרון של כל שאלה חדשה בראש עמוד משלה במחברת.
- יש לתת הוכחות מלאות ומנומקות ולצטט במדויק כל טענה או משפט שנעשה בהם שימוש.
- מותר להסתמך על כל משפט או טענה שהוכחו בכיתה, בשיעור או בתרגיל כל עוד זה איננו גוף השאלה.
- כל חומר עזר אסור לשימוש.
- בסוף הבחינה יש **להגיש את השאלון** ואת כל מחברות הבחינה.

מספר ת"ז :

מספר מחברת :

כתבו בשורה המתאימה את מספרי העמודים במחברת בהם פתרתם כל שאלה.

שאלה	מחברת	עמודים
1	I , II	
2	I , II	
3	I , II	
4	I , II	
5	I , II	
6	I , II	

בהצלחה! بالنجاح

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ויהי L מספר ממשי, $L > 0$.

א. (10 נק') הוכיחו שאם $0 \leqslant a_n$ עבור כל n טבעי ו- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L, אזי הסדרה $(\sqrt[n]{a_n})_{n=1}^{\infty}$) מתכנסת ל- 1 .

ב. (10 נק') מצאו סדרה מתכנסת $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל n, $a_n > 0$ אבל הסדרה $(\sqrt[n]{a_n})_{n=1}^{\infty}$) לא מתכנסת ל-1.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $B \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקה.

א. (12 נק') נניח כי קיים $c > 0$ כך שמתקיים $B \subseteq [c, \infty)$. נגדיר

$$\frac{1}{B} = \{\frac{1}{b} \mid b \in B\}$$

הוכיחו כי $\sup\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{1}{\inf(B)}$ (נמקו במפורש מדוע כל הביטויים מוגדרים היטב).

ב. (8 נק') הוכיחו כי קיימת $B \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ לא ריקה כך ש-$\sup\left(\frac{1}{B}\right)$ קיים, $\inf(B)$ קיים אך מתקיים $\sup(\frac{1}{B}) \neq \frac{1}{\inf(B)}$.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. (10 נק') תהי $r\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ המוגדרת על ידי $r(x) = \sqrt{x}$. הוכיחו כי r רציפה בכל תחום הגדרתה (כלומר, r רציפה בכל x_0 חיובי ורציפה מימין ב-0).

ב. (10 נק') תהי $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0 ונניח כי הפונקציה $f(x) = (h(x))^2$ רציפה ב-x_0. נניח בנוסף כי לכל x מתקיים כי $h(x) > 0$. הוכיחו כי h רציפה ב-x_0.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו את המשפט השני של ווייירשטראס : הוכיחו כי קיימים $c, d \in [a, b]$ כך שמתקיים

$$\forall x \in [a, b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$

ניתן להשתמש במשפט הראשון של ווייירשטראס בהוכחה.

שאלה 5 (20 נקודות)

יהי $x \geq 0$ ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה, $a_1 = x + 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$.

הוכיחו כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וחשבו את גבולה כתלות בפרמטר x.

שאלה 6 (20 נקודות)

א. (15 נק') תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, ונניח כי לקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ לא קיים איבר מקסימלי.

הוכיחו כי $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ הוא גבול חלקי של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

ב. (5 נק') מצאו סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שהיא חסומה ומתבדרת, כך שלקבוצה $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ אין מקסימום.