בחינה בקורס "חשבון אינפיניטסימלי 1" (80131)

מועד ב' - סמסטר ב' תשפ"ד 12/9/2024

מרצה: פרופ' מיכאל הזכמן **משך הבחינה: 3 שעות**

הנחיות לבחינה:

- כתבו את מספר תעודת הזהות ואת מספר המחברת במשבצות מתחת להנחיות הללו.
- ענו על **חמש** מתוך שש השאלות שבבחינה.
  אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
- לכל שאלה ניקוד זהה (20 נקודות), אבל תת-סעיפים של אותה שאלה יכולים לשאת ניקוד שונה.
- עמודי מחברת הבחינה ממוספרים. כתבו במשבצת המתאימה של הטבלה אשר בתחתית העמוד הזה את מספרי העמודים בהם פתרתם את השאלה הרלוונטית (למשל: 12-8). אם לקחתם מחברת נוספת ובה פתרתם את השאלה, הקיפו בשורה המתאימה של הטבלה גם את הסיפרה הרומית II .
- התחילו את הפתרון של כל שאלה חדשה בראש עמוד משלה במחברת.
- יש לתת הוכחות מלאות ומנומקות ולצטט במדויק כל טענה או משפט שנעשה בהם שימוש.
- מותר להסתמך על כל משפט או טענה שהוכחו בבהרצאה או בתרגול, כל עוד זה איננו גוף השאלה.
- כל חומר עזר אסור לשימוש.
- אסור לקרוע ו/או לתלוש ו/או להוסיף דפים למחברת הבחינה.
- בסוף הבחינה יש **להגיש את השאלון** ואת כל מחברות הבחינה.

מספר ת"ז : | | | | | | | | | | **מספר מחברת** : | | |

כתבו בשורה המתאימה את מספרי העמודים במחברת בהם פתרתם כל שאלה.

שאלה	מחברת	עמודים
1	I , II	
2	I , II	
3	I , II	
4	I , II	
5	I , II	
6	I , II	

בהצלחה بالنجاح

שאלה 1 (20 נקודות)

עבור $n \in \mathbb{N}$ יהי $a_n = n^3 - 2n$.

א. (10 נק') הוכיחו **מההגדרה** ש $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

ב. (10 נק') קבעו לאילו $k \in \mathbb{N}$ הסדרה $b_n = a_n/n^k$ מתכנסת (במובן הצר), וכשיש התכנסות מצאו את הגבול.

בסעיף (ב) זה מותר להשתמש בכל משפט מהקורס.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $A \subseteq [1,2]$ קבוצה לא ריקה, ונגדיר $B = \{\frac{1}{x} \mid x \in A\}$. נסמן $s = \inf A$. נמקו בקצרה מדוע s מוגד היטב ומדוע $s \neq 0$, והוכיחו ש $\sup B = 1/s$. מותר להשתמש בכל משפט מהקורס.

שאלה 3 (20 נקודות) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ממשית ותהי

$$b_n = \frac{[a_n]}{\{a_n\}+1}$$

כאשר $[x]$ מסמן את החלק השלם (התחתון) של x ואילו $\{x\} = x - [x]$ הוא החלק השבור.

א. (10 נק') תנו דוגמא שבה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אבל $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת (הוכיחו את תשובתכם).

ב. (10 נק') נניח ש $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ ויהי $L \in \mathbb{R}$ גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. הוכיחו ש $L \in \{1,3\}$. הצעה: תחילה הוכיחו $L \in \mathbb{Z}$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה עולה, ונניח ש $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f(-x)} = -1$. הוכיחו שאם f אינה חסומה מלעיל, אז היא אינה חסומה מלרע.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה אשר רציפה בכל נקודה ב-$\mathbb{R}$. נניח שלכל $a < b$ ממשיים f אינה מקבלת מקסימום או מינימום בקטע (a,b), ושמתקיים $f(0) < f(1)$.

הוכיחו, שלכל $x > 0$ מתקיים $f(x) > f(0)$ ולכל $x < 0$ מתקיים $f(x) < f(0)$.

שאלה 6 (20 נקודות)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה נגדיר $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על ידי

$$g(x) = \begin{cases} e^x & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הראו שאם g רציפה ב $x_0 \in \mathbb{R}$ אז קיים $r > 0$ כך שמתקיימת אחת מההכלות $B_r(x_0) \subseteq A$ או $B_r(x_0) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$.