האוניברסיטה העברית בירושלים.

2014

<u>החוג למתמטיקה.</u>

<u>בחינה באלגברה ליניארית (1)– (80134)</u>

סמסטר א׳ - תשע״ד מועד א׳ <u>משך המבחן:</u> 3 שעות

<u>שם המרצים</u>: פרופ׳ צליל סלע ופרופ׳ אליהו ריפס

הבחינה תמשך שלוש שעות.

במבחן שלושה חלקים. סך הנקודות בחלק הראשון 20, בחלק השני 40, ובחלק השלישי 40.

<u>חלק I</u>

ענו על 4 מתוך 5 ההשאלות 1-5. לכל אחת מהטענות קבעו אם היא נכונה או שקרית, ונמקו בקצרה.

1. אם V מ״ו, $\dim(V)=n$, $W\subseteq V$ תת-מרחב, ו: $\dim(W)=n-3$, אזי קיים תת-מרחב $U\subseteq V$ כך ש: $W\subseteq U\subseteq V$, $\dim(U)=n-1$.

2. תהיינה A, B מטריצות ריבועיות. אם AB=0, אזי BA=0.

3. תהי:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 6 \end{bmatrix}$$

אם x מספר רציונלי ו $x\neq 2$, אזי ל-A קיימת מטריצה הופכית.

4. אם $V=\mathrm{span}(v_1,\dots,v_n)$ אזי קיים ל- V בסיס המורכב מתת-קבוצה של הוקטורים $v_1,\dots,v_n$ (תת-הקבוצה יכולה להכיל את כל הוקטורים $v_1,\dots,v_n$).

5. נתון ש-F שדה, וידוע כי איבר $a\in F$ מקיים:

$0 = a + a + a + a + a + a$.

אזי $a+a=0$ או $a+a+a=0$.

חלק II

ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות 6-8. אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה.

6. תהי A מטריצה ריבועית, ו- A^t המטריצה המוחלפת. הוכיחו כי $\det(A) = \det(A^t)$.

7. יהיו V, W מ"ו נוצרים סופית מעל שדה F, ותהי $T: V \to W$ העתקה ליניארית. אזי:

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(V)$$

8. תהיינה A, B, C מטריצות שעבורן הכפל (AB) C מוגדר. הוכיחו כי כפל מטריצות מקיים את החוק האסוציאטיבי (חוק הקיבוץ):

A(BC)=(AB)C.

חלק III

ענו על שתיים מהשאלות 9-11.

9. תהי $T: R^3 \to R^3$ העתקה ליניארית, שלפי הבסיס הסטנדרטי נתונה ע"י המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

יהי $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x+y+z=0 \right\}$ תת-מרחב של R^3.

א. הראו כי לכל $v \in V$ $Tv \in V$.

ב. תהי $S: V \to V$ העתקה שהיא צמצום של T לתת-המרחב V, כלומר $Tv = Sv$ לכל $v \in V$.

מצאו את המטריצה המייצגת של S ביחס לבסיס:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10. יהיו U_1, U_2, U_3 תתי-מרחבים של מ"ו נוצר סופית V. נגדיר:

$$a = \dim(U_1 + U_2 + U_3)$$

$$c = \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$$

$$b = c - (\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 \cap U_3) + \dim(U_2 \cap U_3))$$

תנו דוגמה בה $a=b$ ודוגמה בה $a \neq b$.

11. תהי A המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ \vdots & & & \vdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \end{bmatrix}$$

הוכיחו כי אם $2 < n$ אזי $\det(A) = 0$.

בהצלחה!