האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

אלגברה ליניארית (1) 80134

מועד ב' תשע"ה – 29/03/15

מרצים: פרופ' יבגני סטרחוב, פרופ' איליה ריפס, מר שמואל ברגר.

משך הבחינה: 3 שעות

הנחיות לבחינה:

- אין להשתמש בחומר עזר כשלהו.
- לבחינה שלושה חלקים. עליכם לענות על שתי שאלות מבין שלוש בחלק א' (40 נקודות), על שתי שאלות מבין שלוש בחלק ב' (30 נקודות) ועל שלוש שאלות מבין ארבע בחלק ג' (30 נקודות). אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
- יש לפרט את החישובים, לנמק את כל הטענות ולצטט במדויק את כל התנאים של המשפטים עליהם אתם מסתמכים.
- יש לציין את השאלות עליהן בחרתם לענות בטבלה אשר בעמוד האחרון של השאלון יחד עם מספר תעודת זהות ומספר מחברת.
- בסוף הבחינה יש להגיש את כל השאלון וכן את כל מחברות הבחינה.

בהצלחה!

מספר ת"ז: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐ מספר מחברת: ☐☐☐

חלק א' (40 נקודות): ענו על שתיים מבין שלוש השאלות 1-3.

משקלה של כל שאלה 20 נקודות. אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה המנוסחת בשאלה.

שאלה 1

יהא V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $U, W \subseteq V$ תת־מרחבים.

א. **(5 נקודות)** הגדירו את סכום התת־מרחבים $U + W$.

ב. **(15 נקודות)** נניח כי V נוצר סופית. נמקו מדוע $U + W$ ו־$U \cap W$ נוצרים סופית (מספיק לצטט את הטענות הרלוונטיות מההרצאה) והוכיחו כי

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

שאלה 2

יהא $\mathbb{F}$ שדה.

א. **(5 נקודות)** תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. הגדירו את $\det(A)$.

ב. **(15 נקודות)** תהיינה $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. הוכיחו כי $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

שאלה 3

יהיו V ו־W מרחבים וקטוריים מעל השדה $\mathbb{F}$.

א. **(5 נקודות)** תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית. הגדירו את המונחים הבאים:

(א) ההעתקה T היא חד־חד ערכית.

(ב) ההעתקה T היא על.

(ג) ההעתקה T היא הפיכה.

ב. **(15 נקודות)** נניח כי V נוצר סופית ותהא $T: V \to V$ העתקה לינארית. הוכיחו כי התנאים (א)־(ג) שקולים.

חלק ב' (30 נקודות): ענו על שתיים מבין שלוש השאלות 6-4.

משקלה של כל שאלה 15 נקודות.

שאלה 4

בהנתן $a \in \mathbb{R}$, נתבונן במערכת המשוואות הבאה מעל השדה $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+2y-3z = & 4, \\ 3x-y+5z = & 2, \\ 4x+y+(a^2-14)z = & a+2. \end{cases}$$

מצאו עבור אילו ערכי a:

א. למערכת אין פתרונות.

ב. למערכת ישנו פתרון יחיד.

ג. ישנם אינסוף פתרונות למערכת.

במקרה (ב) מצאו את הפתרון ובמקרה (ג) מצאו את הפתרון הכללי למערכת.

שאלה 5

יהי

$$W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

תת־מרחב של $\mathbb{R}^4$.

א. **(10 נקודות)** מצאו מטריצה $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ שעבורה מתקיים $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\vec{x} = 0\} = W$. כלומר, מצאו מטריצה A כך שמרחב הפתרונות למערכת המשוואות ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$ שווה ל־W.

ב. **(5 נקודות)** חשבו את $\det(A)$.

שאלה 6

יהי $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים שמעלתם היא לכל היותר 2, ויהי $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ בסיס סדור ל־V. תהי $T\colon V \to V$ ההעתקה הלינארית הנתונה על־ידי

$$T(p) = p'' + 2p' + p$$

כאשר אנחנו מסמנים ב־p' את הנגזרת הראשונה וב־p'' את הנגזרת השניה של הפולינום p.

א. **(5 נקודות)** מצאו את המטריצה $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

ב. **(7 נקודות)** הראו כי T חח"ע ועל ומצאו את $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

ג. **(3 נקודות)** מצאו פולינום $p \in V$ כך ש־$T(p) = x^2$.

הערה: סימון נוסף ל־$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ הוא $\mathcal{M}(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

חלק ג' (30 נקודות): ענו על שלוש מבין ארבע השאלות 7-10.

משקלה של כל שאלה 10 נקודות.
בכל אחת מהשאלות יש להוכיח או להפריך את הטענה הרשומה. בכל מקרה יש לנמק את טיעוניכם. תשובה ללא נימוק לא תזכה בנקודות.

שאלה 7

תהי $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית. אזי מתקיים $\ker(T) \oplus \mathrm{im}(T) = \mathbb{R}^2$.

שאלה 8

יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל השדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:V \to V$ העתקה לינארית כך ש-$T^2 = 0$. אזי $\dim \mathrm{Im}T \leq \frac{n}{2}$.

שאלה 9

תהיינה $B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצות השונות ממטריצת האפס. אזי קיימת מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש-$AB = C$.

שאלה 10

יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל השדה $\mathbb{F}$ ותהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה.
אזי קיימים ל-V בסיסים סדורים $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ כך ש-A היא מטריצת המעבר בין הבסיס $\mathcal{B}_1$ ל-$\mathcal{B}_2$. כלומר, $A = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ כאשר $\mathrm{id}: V \to V$ היא העתקת הזהות.

הערה: סימון נוסף ל-$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ הוא $\mathcal{M}(\mathrm{id}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

80134 - אלגברה לינארית (1) תשע"ה
טופס נלווה

מספר ת"ז: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐

מספר מחברת: ☐☐☐

סמנו ✓ במשבצות המתאימות לשאלות שפתרתם.

חלק	שאלה	בחירה	ציון	בודק
א	1	☐		
	2	☐		
	3	☐		
ב	4	☐		
	5	☐		
	6	☐		
ג	7	☐		
	8	☐		
	9	☐		
	10	☐		