האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

אלגברה ליניארית (1) 80134

מועד א' תשע"ו – 11/02/16

מרצים: פרופ' טיומקין, פרופ' ריפס, מר ברגר, מר צביק
משך הבחינה: 3 שעות

הנחיות לבחינה:

- אין להשתמש בחומר עזר כשלהו.
- לבחינה שלושה חלקים. עליכם לענות על שתי שאלות מבין שלוש בחלק א' (40 נקודות), על שתי שאלות מבין שלוש בחלק ב' (30 נקודות) ועל שלוש שאלות מבין ארבע בחלק ג' (30 נקודות). אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
- יש לפרט את החישובים, לנמק את כל הטענות ולצטט במדויק את כל התנאים של המשפטים עליהם אתם מסתמכים.
- יש לציין את השאלות שבחרתם לענות עליהן בטבלה אשר בעמוד האחרון של השאלון יחד עם מספר תעודת זהות ומספר מחברת.
- בסוף הבחינה יש להגיש את כל השאלון וכן את כל מחברות הבחינה.

בהצלחה!

מספר ת"ז: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐ מספר מחברת: ☐☐☐

חלק א' - 40 נקודות ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות $1-3$.

שאלה 1:

תהי $f: V \to W$ העתקה לינארית בין מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. הוכיחו כי אם V ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$ אזי

$$\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Ker} f + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Im}\ f .$$

שאלה 2:

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב.
הוכיחו כי אם $\dim_{\mathbb{F}} U = \dim_{\mathbb{F}} V$ אז $U = V$.

שאלה 3:

יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. הוכיחו כי $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

חלק ב' - 30 נקודות ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות $4-6$.

שאלה 4:

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. יהיו $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:
$(v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$ סדרה תלויה לינארית, וכן
(v_1, v_2, v_4) סדרה בלתי תלויה לינארית.

האם בהכרח $v_3 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_4)$?

שאלה 5:

תהי $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ההעתקה הלינארית הנתונה על ידי

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

האם קיים בסיס B של $\mathbb{R}^2$ כך ש:

$$?\ [T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

שאלה 6:

יהי $\mathbb{F}$ שדה. יהיו m, n שלמים חיוביים. נתונות מטריצות $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ כך ש $A \cdot B = I_m$. האם בהכרח מרחב העמודות של A , קרי Span של העמודות של A, הוא $\mathbb{F}^m$?

חלק ג' - 30 נקודות ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות 10 – 7 .

שאלה 7:

האם קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת בו זמנית את שלושת התנאים הבאים:

$$\begin{array}{rcccccccc} & T & (& 1, & 0, & 4 &) & = & (& 0, & 2, & 5 &) \\ ? & T & (& 0, & 2, & 3 &) & = & (& 1, & -1, & 1 &) \\ & T & (& 3, & 10, & 27 &) & = & (& 5, & 1, & 20 &) \end{array}$$

שאלה 8:

יהי $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ מרחב הפולינומים במשתנה x עם מקדמים ממשיים ממעלה קטנה או שווה ל-2. נתונים שני תתי המרחב של V הבאים:

$$\begin{aligned} U &= \{a + bx + (a-b)x^2 | a, b \in \mathbb{R}\} \\ W &= \mathrm{Span}(1 + x - x^2, 1 + 2x + 3x^2) \end{aligned}$$

מצאו בסיסים עבור $U \cap W$ ו- $U + W$.

שאלה 9:

יהיו $B = (v_1, v_2),\ C = (w_1, w_2)$ בסיסים של $\mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$,
ותהי $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית כך ש:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

בנוסף נתון כי

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(T(u)) = w_1 + 2w_2.$$

מצאו את $T(u)$.

שאלה 10:

נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R}).$$

מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה מדורגת מצומצמת קנונית D כך ש- $PA = D$.

מצאו בסיס למרחב הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית $Ax = 0_{\mathbb{R}^3}$.

מספר ת"ז: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐ מספר מחברת: ☐☐☐

סמנו ✓ במשבצות המתאימות לשאלות שפתרתם.

חלק	שאלה	בחירה	ציון	בודק
א	1	☐		
	2	☐		
	3	☐		
ב	4	☐		
	5	☐		
	6	☐		
ג	7	☐		
	8	☐		
	9	☐		
	10	☐		