האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

אלגברה ליניארית (1) 80134

מועד א' תשע"ז — 17/02/17

מרצים: פרופ' טיומקין, פרופ' ריפס, מר צביק.
משך הבחינה: 3 שעות

הנחיות לבחינה:

- אין להשתמש בחומר עזר כשלהו.
- לבחינה שלושה חלקים. עליכם לענות על שתי שאלות מבין שלוש בחלק א' (40 נקודות), על שתי שאלות מבין שלוש בחלק ב' (30 נקודות) ועל שלוש שאלות מבין ארבע בחלק ג' (30 נקודות). אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
- יש לפרט את החישובים, לנמק את כל הטענות ולצטט במדויק את כל התנאים של המשפטים עליהם אתם מסתמכים.
- יש לציין את השאלות שבחרתם לענות עליהן בטבלה אשר בעמוד האחרון של השאלון יחד עם מספר תעודת זהות ומספר מחברת.
- בסוף הבחינה יש להגיש את כל השאלון וכן את כל מחברות הבחינה.

בהצלחה!

חלק א' – 40 נקודות

ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות $1-3$.

שאלה 1

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $U, W \subseteq V$ תת־מרחבים. הוכיחו כי

$$\dim_{\mathbb{F}}(U+W) = \dim_{\mathbb{F}} U + \dim_{\mathbb{F}} W - \dim_{\mathbb{F}}(U \cap W)$$

שאלה 2

יהיו U, V מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$. נתונים $(u_1, \ldots, u_m)$ בסיס של U ו־$(w_1, \ldots, w_m)$ סדרה של איברים ב־V. הוכיחו כי קיימת העתקה לינארית יחידה $f : U \to V$ עם $f(u_i) = w_i$ לכל $1 \leq i \leq m$.

שאלה 3

תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ותהי $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ מוגדרת על ידי $T_A(x) = Ax$ לכל $x \in \mathbb{F}^n$. הוכיחו כי $\dim_{\mathbb{F}}(\operatorname{Im} T_A)$ שווה למימד של התת־מרחב שנוצר על ידי העמודות של המטריצה A.

חלק ב' – 30 נקודות

ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות $4-6$.

שאלה 4

יהיו U, W תת־מרחבים וקטוריים של $\mathbb{R}^4$ הנתונים ע"י:

$$\begin{aligned} U &= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ W &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 0\} \end{aligned}$$

א) (7 נק') מצאו בסיס של $U \cap W$.

ב) (4 נק') הרחיבו את הבסיס של $U \cap W$ שמצאתם בסעיף א' לבסיס של U.

ג) (4 נק') הרחיבו את הבסיס של $U \cap W$ שמצאתם בסעיף א' לבסיס של W.

שאלה 5

יהיו B, C בסיסים של $\mathbb{R}^2$, ותהי $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית עבורה מתקיים

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad [T \circ T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

א) (6 נק') מצאו את $[T]_C^B$.

ב) (9 נק') מצאו את $[T]_C^C$.

שאלה 6

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 & 4 \\ -3 & 6 & 3 & -9 & -6 \\ 5 & -10 & -5 & 16 & 11 \end{pmatrix}$$

נגדיר העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ ע"י $T(x) = Ax$ לכל $x \in \mathbb{R}^5$.

א) (6 נק') מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה מדורגת מצומצמת D כך ש-$PA = D$.

ב) (4 נק') מצאו בסיס עבור $\operatorname{Im} T$.

ג) (5 נק') האם T על? אם כן, הוכיחו. אם לא, מצאו $b \in \mathbb{R}^3$ עבורו $b \notin \operatorname{Im} T$.

חלק ג' – 30 נקודות

ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות 7 – 10.

שאלה 7

נתון מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$, $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$, כך שכל אחת מארבע הסדרות הבאות

$$(v_1, v_2, v_3), \quad (v_1, v_2, v_4), \quad (v_1, v_3, v_4), \quad (v_2, v_3, v_4)$$

היא בלתי תלויה לינארית. האם $(v_1 - v_4, v_2 - v_4, v_3 - v_4)$ בהכרח בלתי תלויה לינארית? אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

שאלה 8

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $U, W, Z \subseteq V$ תת־מרחבים המקיימים

$$\dim Z = \dim(U + W), \ \dim W = \dim(Z + U), \ \dim U = \dim(W + Z)$$

האם בהכרח $U = W = Z$? אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

שאלה 9

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

א) (5 נק') אם $\ker T = \ker(T \circ T \circ T)$, אז $\ker T = \ker(T \circ T)$.

ב) (5 נק') אם $\ker(T \circ T) = \ker(T \circ T \circ T)$, אז $\ker T = \ker(T \circ T)$.

שאלה 10

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ממימד n, ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. האם בהכרח קיימים בסיסים B, C של V כך שהמטריצה

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

מקיימת $a_j^i = 0$ עבור $i \neq j$ (כלומר, $[T]_C^B$ אלכסונית) וגם a_i^i שווה ל- 0 או 1 לכל $1 \leq i \leq n$? אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמא נגדית.

מספר ת"ז: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐ מספר מחברת: ☐☐☐

סמנו ✓ במשבצות המתאימות לשאלות שפתרתם.

חלק	שאלה	בחירה	ציון
א	1	☐	
	2	☐	
	3	☐	
ב	4	☐	
	5	☐	
	6	☐	
ג	7	☐	
	8	☐	
	9	☐	
	10	☐	