האוניברסיטה העברית בירושלים | החוג למתמטיקה

אלגברה ליניארית (1) 80134

מועד א' תשע"ח — 15/02/18

מרצים: פרופ' אהוד דה שליט, פרופ' צליל סלע, מר איתמר צביק. | משך הבחינה: 3 שעות

הנחיות לבחינה:

- אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
- ענו על **ארבע** מתוך חמש השאלות שבבחינה. כל השאלות שוות בערכן (25 נקודות), אבל תת־סעיפים של אותה שאלה יכולים לשאת ניקוד שונה.
- אל תענו על יותר מארבע שאלות. אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
- יש לנמק את כל הטענות ולצטט במדויק את כל התנאים של המשפטים שאתם משתמשים.
- כתבו את מספר תעודת הזהות ואת מספר המחברת במשבצות מתחת להנחיות הללו.
- יש לציין את השאלות שבחרתם לענות עליהן בטבלה אשר בתחתית העמוד הזה.
- עמודי מחברת הבחינה ממוספרים. כתבו במשבצת המתאימה של הטבלה את מספרי העמודים בהם פתרתם את השאלה הרלוונטית.
- בסוף הבחינה יש להגיש את כל השאלון ואת כל מחברות הבחינה.

מספר ת"ז : | | | | | | | | | | **מספר מחברת** : | | |

סמנו ✓ במשבצת המתאימה לשאלה שבחרתם ואת מספרי העמודים במחברת בהם פתרתם אותה .

שאלה	בחירה	מחברת	עמודים	ציון
1	☐	I , II , III		
2	☐	I , II , III		
3	☐	I , II , III		
4	☐	I , II , III		
5	☐	I , II , III		

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

(א) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, יהיו $v_1,\dots,v_k,v_{k+1}\in V$ כך ש־ $\{v_1,\dots,v_k\}$ בת"ל (בלתי תלויים ליניארית) וגם $v_{k+1}\notin \mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_k\}$. הוכיחו כי $\{v_1,\dots,v_{k+1}\}$ בת"ל.

(ב) העתקה לינארית $l:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $l\left(\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}\right)=x_1-2x_3$. מצאו n טבעי והעתקה לינארית חד־חד־ערכית $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^3$ כך ש־ $\ker l=\mathrm{Im}T$.

שאלה 2 (25 נקודות)

(א) יהי V מרחב וקטורי, U,W תת־מרחבים של V כך ש־ U אינו מוכל ב־ W וגם W אינו מוכל ב־ U.

1. הוכיחו כי $U\cup W$ אינו תת־מרחב של V.
2. הוכיחו כי $\mathrm{Span}(U\cup W)=U+W$.

(ב) יהי $V=\mathbb{R}_{\le 2}[x]$ (כלומר, מרחב הפולינומים הממשיים מדרגה קטנה או שווה 2). נגדיר העתקה ליניארית $T:V\to V$ באופן הבא: לכל $f\in V$

$$T(f)(x)=f(1)+x\cdot f'(x)$$

לכל $x\in\mathbb{R}$ (אין צורך לבדוק ש T העתקה ליניארית). חשבו את $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ כאשר $\mathcal{B}$ הבסיס הסדור $(1,x,x^2)$.

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) נתבונן ב־ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, המרחב הוקטורי של הפונקציות הממשיות על $\mathbb{R}$. יהיו $g,h\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך ש־ $\{g,h\}$ בת"ל. נסמן $V=\mathrm{Span}\{g,h\}$. עבור $a\in\mathbb{R}$ נגדיר פונקציונל ליניארי $l_a:V\to\mathbb{R}$ באופן הבא: $l_a(f)=f(a)$ לכל $f\in V$. הוכיחו כי אם $b,c\in\mathbb{R}$ הם כך ש־ $\{l_b,l_c\}$ בת"ל, אז $\det\begin{bmatrix} g(b) & h(b)\\ g(c) & h(c)\end{bmatrix}\neq 0$.

(ב) נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ובסיס סדור $\mathcal{B}$ של $\mathbb{R}^2$ כך ש־ $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}$. קבעו האם קיים בסיס סדור $\mathcal{C}$ של $\mathbb{R}^2$ כך ש־ $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) יהיו U,V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי, $S:U\to V$, $T:V\to W$ העתקות ליניאריות. תזכורת: $\mathrm{rk}\,T=\dim\mathrm{Im}\,T$. הוכיחו כי

$$\mathrm{rk}\,(T\circ S)\le\min(\mathrm{rk}\,T,\mathrm{rk}\,S).$$

(ב) חשבו את המטריצה ההופכית למטריצה $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

שאלה 5 (25 נקודות)

(א) העקבה של מטריצה $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ מוגדרת כסכום אברי האלכסון של A:

$$\mathrm{Tr}\,A=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}.$$

1. אם $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, הוכיחו ש $\mathrm{Tr}\,(AB)=\mathrm{Tr}\,(BA)$.
2. אם $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית ו־ $\mathcal{B},\mathcal{C}$ בסיסים סדורים של $\mathbb{R}^n$, הוכיחו ש $\mathrm{Tr}\,[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}=\mathrm{Tr}\,[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.

(ב) מצאו מטריצה $A\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ כך שהוקטורים $\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ הנם פתרונות של מערכת המשוואות $Ax=0$, וכן למערכת המשוואות $Ax=\begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$ קיים פתרון.