האוניברסיטה העברית בירושלים | החוג למתמטיקה

אלגברה ליניארית (1) 80134

מועד א' תשע`ט — 17/07/19

מרצים: אלכס גורביץ | משך הבחינה: 3 שעות

הנחיות לבחינה:

- אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
- ענו על **ארבע** מתוך חמש השאלות שבבחינה. כל השאלות שוות בערכן (25 נקודות), אבל תת־סעיפים של אותה שאלה יכולים לשאת ניקוד שונה.
- אל תענו על יותר מארבע שאלות. אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
- יש לנמק את כל הטענות ולצטט במדויק את כל התנאים של המשפטים שאתם משתמשים.
- כתבו את מספר תעודת הזהות ואת מספר המחברת במשבצות מתחת להנחיות הללו.
- יש לציין את השאלות שבחרתם לענות עליהן בטבלה אשר בתחתית העמוד הזה.
- עמודי מחברת הבחינה ממוספרים. כתבו במשבצת המתאימה של הטבלה את מספרי העמודים בהם פתרתם את השאלה הרלוונטית.
- בסוף הבחינה יש להגיש את כל השאלון ואת כל מחברות הבחינה.

מספר ת`ז : | | | | | | | | | | **מספר מחברת** : | | |

סמנו ✓ במשבצת המתאימה לשאלה שבחרתם ואת מספרי העמודים במחברת בהם פתרתם אותה .

שאלה	בחירה	מחברת	עמודים	ציון
1	☐	I , II , III		
2	☐	I , II , III		
3	☐	I , II , III		
4	☐	I , II , III		
5	☐	I , II , III		

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

(א) יהי V מרחב וקטורי, $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in V$ וקטורים כך ש־ $v_1 \neq 0$, $v_3 \notin \mathrm{Span}(\{v_1, v_2\})$,
וגם הסדרה $(v_1, v_2 - v_3, v_4 - v_5)$ תלויה לינארית.
הוכיחו כי $v_5 \in \mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$.

(ב) נתבונן ב־ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. תת־מרחב U של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מוגדר ע`י $U = \mathrm{Span}(\{1-x, x, x^2\})$.
עבור $c \in \mathbb{R}$ נגדיר פונקציונל לינארי $\varphi_c : U \to \mathbb{R}$ באופן הבא: $\varphi_c(f) = f(c)$ לכל $f \in U$.
1) מצאו $h \in U$, $h \neq 0$, כך שמתקיים $\varphi_0(h) = \varphi_1(h) = 0$ והוכיחו כי $\mathcal{B} = (1-x, x, h(x))$ מהווה בסיס של U.
2) האם קיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\mathcal{B}^* = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_a)$, כלומר $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_a)$ הוא הבסיס של U^* הדואלי ל־ $\mathcal{B}$?

שאלה 2 (25 נקודות)

(א) יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, U, W, Z תת־מרחבים של V כך שקיים $u \in W \cap Z$, $u \neq 0$,
וגם מתקיים $\dim V = \dim U + \dim W + \dim Z$.
הוכיחו כי קיים $v \in V$ כך ש־ $v \notin U + W + Z$.

(ב) נתונים שדה $\mathbb{F}$ ובסיסים סדורים $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ של $\mathbb{F}^2$.
תהי $T : \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}^2$ העתקה לינארית כך ש- $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ וגם $T \circ T = 0$.
הוכיחו כי קיים $b \in \mathbb{F}$, $b \neq 0$, כך ש- $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית, $S : V \to W$, $R : U \to W$ שתי העתקות לינאריות **על**.
1) הוכיחו כי אם קיימת העתקה לינארית **על** $T : U \to V$ כך ש־ $R = S \circ T$, אז $\dim \ker R \geq \dim \ker S$.
2) הוכיחו כי אם $\dim \ker R \geq \dim \ker S$, אז קיימת העתקה לינארית **על** $T : U \to V$ כך ש־ $R = S \circ T$.

(ב) חשבו את המטריצה ההופכית למטריצה $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) יהיו V מרחב וקטורי, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ בסיסים סדורים של V, $T : V \to V$, $S : V \to V$ שתי העתקות לינאריות כך ש־ $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.
הוכיחו כי קיימת העתקה לינארית הפיכה $R : V \to V$ כך ש־ $T = R^{-1} \circ S \circ R$.

(ב) נתבונן ב־ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. תת־מרחבים U, W של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מוגדרים ע`י

$$U = \mathrm{Span}(\{x, x^2, x^3\}), \quad W = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid 2f(2) + f(1) - f(-1) - 2f(-2) = 0\}$$

מצאו בסיס עבור $U \cap W$.

שאלה 5 (25 נקודות)

(א) נתון שדה $\mathbb{F}$. תהי $D : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ פונקציה n־לינארית מתחלפת.
הוכיחו כי לכל מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ שאינה הפיכה מתקיים $D(A) = 0$.

(ב) העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מוגדרת ע`י $T(v) = AvB$ לכל $v \in \mathbb{R}^3$, כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$$

מצאו בסיס לגרעין ולתמונה של T.