האוניברסיטה העברית בירושלים | החוג למתמטיקה

אלגברה ליניארית (1) 80134

מועד ב' תשע`ט — 20/08/19

מרצים: אלכס גורביץ | משך הבחינה: 3 שעות

הנחיות לבחינה:

- אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
- ענו על **ארבע** מתוך חמש השאלות שבבחינה. כל השאלות שוות בערכן (25 נקודות), אבל תת־סעיפים של אותה שאלה יכולים לשאת ניקוד שונה.
- אל תענו על יותר מארבע שאלות. אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה רק השאלות הראשונות.
- יש לנמק את כל הטענות ולצטט במדויק את כל התנאים של המשפטים שאתם משתמשים.
- כתבו את מספר תעודת הזהות ואת מספר המחברת במשבצות מתחת להנחיות הללו.
- יש לציין את השאלות שבחרתם לענות עליהן בטבלה אשר בתחתית העמוד הזה.
- עמודי מחברת הבחינה ממוספרים. כתבו במשבצת המתאימה של הטבלה את מספרי העמודים בהם פתרתם את השאלה הרלוונטית.
- בסוף הבחינה יש להגיש את כל השאלון ואת כל מחברות הבחינה.

מספר ת`ז : | | | | | | | | | |

מספר מחברת : | | | |

סמנו ✓ במשבצת המתאימה לשאלה שבחרתם ואת מספרי העמודים במחברת בהם פתרתם אותה .

שאלה	בחירה	מחברת	עמודים	ציון
1	☐	I , II , III		
2	☐	I , II , III		
3	☐	I , II , III		
4	☐	I , II , III		
5	☐	I , II , III		

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

(א) יהיו V, W מרחבים וקטוריים, $T: V \to W$ העתקה לינארית, $v_1, \dots, v_k \in V$ כך שהסדרה $(v_1, \dots, v_k)$ בת"ל וגם $\mathrm{Span}(\{v_1, \dots, v_k\}) \cap \ker T = \{0\}$.
הוכיחו כי הסדרה $(T(v_1), \dots, T(v_k))$ בת"ל (בלתי תלויה לינארית).

(ב) תת־קבוצה S של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י $S = \left\{ X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \right\}$.
הוכיחו כי קיימת מטריצה $K \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ותת־מרחב U של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $S = \{K\} + U$ ומצאו בסיס עבור U.

שאלה 2 (25 נקודות)

(א) יהי V מרחב וקטורי כך ש־ $\dim V = 9$, U, W, Z תת־מרחבים של V כך ש־ $\dim U = \dim W = \dim Z = 6$.
נתון כי קיים $u \in V$ כך ש־ $u \notin W + Z$.
הוכיחו כי קיים $v \in V$, $v \neq 0$, כך ש־ $v \in U \cap W \cap Z$.

(ב) נתבונן ב־ $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. תת־מרחב U של $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מוגדר ע"י $U = \mathrm{Span}(\{2,\ x,\ 2^x\})$.
1) הראו כי אם $f \in U$ אז הפונקציה $T(f)$ המוגדרת על ידי $T(f)(x) = f(x+2)$ לכל $x \in \mathbb{R}$, גם כן שייכת ל־U.
2) חשבו את $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ כאשר $T: U \to U$ היא ההעתקה הלינארית שהוגדרה ב־ 1, ו־ $\mathcal{B}$ הוא הבסיס הסדור $(2,\ x,\ 2^x)$.

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) יהיו V מרחב וקטורי, U, W תת־מרחבים של V. הוכיחו כי $U^\circ + W^\circ$ מוכל ב־ $(U \cap W)^\circ$.
תזכורת: U° הוא המאפס של U במרחב הדואלי.

(ב) יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ בסיס סדור של V.
הוכיחו כי $\mathcal{C} = (v_2 - v_3, v_1 + v_3, 2v_1 + v_2)$ גם מהווה בסיס סדור של V וחשבו את $[v_1]_{\mathcal{C}}, [v_2]_{\mathcal{C}}, [v_3]_{\mathcal{C}}$.

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ בסיס סדור של V. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית.
בסיסים סדורים $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ של V מוגדרים ע"י $\mathcal{D} = (v_2, v_3, v_1)$, $\mathcal{C} = (v_2, v_1, v_3)$.
אלו מהטענות הבאות נכונות? אם הטענה נכונה - הוכיחו אותה. אם לא - הביאו דוגמא נגדית.
1) המטריצות $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}, [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ בהכרח דומות.
2) המטריצות $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}, [T]_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}$ בהכרח דומות.

(ב) תת־מרחבים U, W של $\mathbb{R}^4$ מוגדרים באופן הבא:

$$W = \mathrm{Span}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}\right), \quad U = \mathrm{Span}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\right).$$

מצאו בסיס עבור $U \cap W$.

שאלה 5 (25 נקודות)

(א) נתון שדה $\mathbb{F}$. תהי $det: M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ פונקצית דטרמיננטה.
הוכיחו כי לכל מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ מתקיים $det(A) = det(A^t)$.

(ב) העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ מוגדרת ע"י $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ לכל $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
האם קיימת העתקה לינארית $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ כך ש־ $(T \circ S)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ וגם $(T \circ S)\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?