החוג למתמטיקה

האוניברסיטה העברית בירושלים

אלגברה ליניארית 1 (80134-1)

מועד ב' תש"פ — 12/3/2020

משך הבחינה: 3 שעות

מרצים: פבל גיטרמן, ד"ר אורי פרזנצ'בסקי, איתמר צביק.

הנחיות לבחינה:

- אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
- ענו על **ארבע** מתוך חמש השאלות שבבחינה. כל השאלות שוות בערכן (25 נקודות), אבל תת־סעיפים של אותה שאלה יכולים לשאת ניקוד שונה.
- התחילו את הפתרון של כל שאלה חדשה בראש עמוד משלה במחברת.
- אין קשר לוגי בין הסעיפים (א) ו־ (ב) של אותה שאלה.
- אל תענו על יותר מארבע שאלות. אם תענו על מספר שאלות גדול מהמבוקש תבדקנה 4 שאלות באופן שרירותי.
- יש לנמק את כל הטענות ולצטט במדויק את כל התנאים של המשפטים שאתם משתמשים בהם.
- כתבו את מספר תעודת הזהות ואת מספר המחברת במשבצות מתחת להנחיות הללו.
- יש לציין את השאלות שבחרתם לענות עליהן בטבלה אשר בתחתית העמוד הזה.
- עמודי מחברת הבחינה ממוספרים. כתבו במשבצת המתאימה של הטבלה שלמטה את מספרי העמודים שבהם פתרתם את השאלה הרלוונטית (למשל: 12-8). אם לקחתם מחברת נוספת ובה פתרתם את השאלה, הקיפו בשורה המתאימה של הטבלה גם את הסיפרה הרומית II .
- בסוף הבחינה יש להגיש את כל השאלון ואת כל מחברות הבחינה.

מספר ת"ז :

מספר מחברת :

סמנו ✓ במשבצת המתאימה לשאלה שבחרתם ואת מספרי העמודים במחברת בהם פתרתם אותה .

שאלה	בחירה	מחברת	עמודים	ציון
1	☐	I , II		
2	☐	I , II		
3	☐	I , II		
4	☐	I , II		
5	☐	I , II		

בהצלחה!

שאלה 1 (25 נקודות)

(א) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $G \subseteq V$ תת־קבוצה.

(i) הגדירו מתי G היא קבוצה פורשת מינימלית.

(ii) הוכיחו כי אם G קבוצה פורשת מינימלית אז G בסיס של V.

(ב) יהי $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ מרחב הפולינומים הממשיים שמעלתם היא לכל היותר 2. תהי $T: V \to \mathbb{R}^3_{\text{col}}$ ההעתקה הלינארית הנתונה על־ידי

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ p(1) \end{bmatrix}.$$

כאשר אנחנו מסמנים ב־p' את הנגזרת של הפולינום p. יהי $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ בסיס סדור ל־V ויהי $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ הבסיס הסדור הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3_{\text{col}}$. חשבו את $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$. קבעו האם T חד־חד ערכית, והאם T על.

שאלה 2 (25 נקודות)

(א) יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס ל־V ויהי $\mathcal{B}^\vee = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$ הבסיס הדואלי ל־$\mathcal{B}$. יהי $1 \leq k < n$ ונתבונן ב־

$$W = \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_k).$$

הוכיחו כי

$$W^0 = \operatorname{Span}\left(\varphi^{k+1}, \ldots, \varphi^n\right).$$

(ב) תהי $A \in M_3(\mathbb{R})$ המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) הוכיחו כי A הפיכה ומצאו את A^{-1}.

(ii) הציגו את A כמכפלה של מטריצות אלמנטריות. כלומר, מצאו מטריצות אלמנטריות $E_1, \ldots, E_k \in M_3(\mathbb{R})$ כך ש־

$$A = E_1 \cdots E_k.$$

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים סוף־מימדיים מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהיינה $T: V \to W$ ו־$S: U \to V$ העתקות לינאריות. הוכיחו כי מתקיים

$$\dim \operatorname{im}(T \circ S) \leq \min\{\dim \operatorname{im}(T), \dim \operatorname{im}(S)\}.$$

(ב) תהי $A \in M_4(\mathbb{R})$ המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

חשבו את $\det(A)$. האם A הפיכה?

שאלה 4 (25 נקודות)

(א) תהי $f: M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ פונקציה מולטי־לינארית ומתחלפת בשורות. הוכיחו כי f היא אנטי־סימטרית בשורות. כלומר, הוכיחו כי אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ ואם $A' \in M_n(\mathbb{F})$ היא מטריצה שמתקבלת מ־A על־ידי החלפת שתי שורות אז $f(A') = -f(A)$.

(ב) יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $U_1, U_2, U_3 \leq V$ תתי־מרחבים של V. הוכיחו או הפריכו:

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)\,.$$

שאלה 5 (25 נקודות)

(א) יהי V מרחב וקטורי סוף־מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. נניח כי קיים $v \in V$ כך ש־$T(v) \neq 0$ ו־$T(T(v)) = 0$. הוכיחו כי

$$\mathrm{im}(T) + \ker(T) \neq V.$$

(ב) יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי $A \in M_4(\mathbb{R})$ המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

קבעו עבור אילו ערכים של a קיים $b \in \mathbb{R}^4_{\mathrm{col}}$ כך שלמערכת המשוואות $Ax = b$ **אין** פתרון. בחרו אחד מערכי a שמצאתם, ומצאו מפורשות b כך ש־$Ax = b$ אין פתרון.