אלגברה לינארית 1א - 80134 - תשפ"ב - סמסטר ב - מועד א - 25/07/2022

שם המרצה: ערן נבו.

שם המתרגל: איתמר ישראלי.

משך הבחינה: **שלוש שעות.**

מספר מחברת _____

מספר תעודת זהות _____

<u>הנחיות:</u>

ענו על ארבע מתוך חמש השאלות. כל שאלה שווה 25 נקודות. נמקו את כל תשובותיכן.
הקיפו את מספרי השאלות שבחרתן:

1 2 3 4 5

בהצלחה!

שאלה 1

הביטו במערכת המשוואות הבאה עם מקדמים ב־$\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrcr} (2b+2)\,x & +y & +(ab-2a-3b)\,z & = & -2b-4 \\ 2bx & +y & +abz & = & b+1 \\ (2+2b)\,x & +y & +(ab-a-2b)\,z & = & -b-2 \end{array}$$

1. הציגו בצורה פרמטרית את אוסף הפתרונות למערכת כאשר $a=2, b=-2$.
2. מצאו עבור אילו ערכי $a,b\in\mathbb{R}$ ישנם אינסוף פתרונות, פתרון יחיד, ואין פתרון.
3. מצאו את דרגת המטריצה $\begin{pmatrix} 2+2b & 1 & -2a+ab-3b \\ 2b & 1 & ab \\ 2+2b & 1 & -a-2b+ab \end{pmatrix}$ כתלות ב־a ו־b.

שאלה 2

יהי $V=M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. נגדיר את $W,U\subset V$ על ידי

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\},\quad W=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\in V : \begin{array}{c} a_{11}+a_{12}+a_{13}=0, \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=0 \end{array}\right\}$$

1. הראו כי U ו־W תת־מרחבים וקטוריים של V.
2. מצאו את $\dim(U\cap W)$.
3. מצאו העתקה לינארית $T:V\to V$ כך שמתקיים $\ker(T)=U$.

שאלה 3

נגדיר את $W=\{p\in\mathbb{R}_{\le 3}[x] : p(0)=0\}$, ונגדיר $T:W\to W$ על ידי $T(p)(x)=x\cdot p'(x)$.
(p' היא הנגזרת של p.)

1. הראו כי T מוגדרת היטב, כלומר שלכל $p\in W$ מתקיים $T(p)\in W$.

2. יהי $B = \left(x, x^2 - x, x^3 - x^2\right)$ בסיס של W. מצאו את $[T]_B^B$.

3. הראו האם קיים בסיס C של W כך שמתקיים

$$[T]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

בהינתן $B \in M_{8\times 8}(\mathbb{R})$ נגדיר העתקה $T_B : M_{8\times 8}(\mathbb{R}) \to M_{8\times 8}(\mathbb{R})$ על ידי $T_B(A) = BAB$.

1. הוכיחו כי T_B העתקה לינארית.

2. הוכיחו כי אם B הפיכה אז T_B חח"ע ועל.

3. הוכיחו כי אם T_B חח"ע ועל אז B הפיכה.

שאלה 5

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

1. נסמן ב־(e_1, e_2, e_3) את איברי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$, ותהי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית כך שמתקיים

$$T(e_1) = 0, \quad T(e_3) \neq 0, \quad \dim(\ker(T)) = 2$$

אזי $T(e_2) = 0$.

2. לכל $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ מתקיים $\det(AB) \leq \det(A) + \det(B)$.

3. יהיו U, W, V מרחבים וקטוריים כך שמתקיים $U \leq W \leq V$, כלומר U תת־מרחב של W, ו־W תת־מרחב של V. אם V נוצר סופית אזי מרחב המנה W/U נוצר סופית.