אלגברה לינארית (1) 80134

מועד ב' תשפ"ד – 26/05/24

מרצים: אלכס גורביץ, סשה יום דין, כרמית בנבנישתי | משך הבחינה: 2.5 שעות

הנחיות לבחינה:

- אין להשתמש בחומר עזר כלשהו גם לא במחשבון.
- בשאלון זה ישנן תשע שאלות, ענו על **שבע** מתוכן.
- יש לסמן ב־ ✓ את שבע השאלות שבחרתם **בטבלה** אשר בתחתית העמוד הזה.
- תיבדקנה אך ורק השאלות שסומנו בטבלה. אם לא תסמנו שאלות כראוי תיבדקנה שאלות 7,6,5,4,3,2,1.
- המשקל של כל שאלה הוא 15 נקודות, אבל סעיפים של אותה שאלה יכולים לשאת ניקוד שונה. הציון המירבי במבחן הוא 100.
- יש לכתוב את הפתרונות **בגוף השאלון**. לכל שאלה כתבו את הפתרון שלה בעמוד בה היא מופיעה או בעמוד הבא.
- אם לא הספיק לכם מקום לכתיבת הפתרון ניתן להשתמש בעמודים הרזרביים בסוף השאלון.
- המחברת המצורפת מיועדת לטיוטה בלבד. היא **לא תיבדק ולא תיסרק**. בכל זאת יש להגיש אותה.
- יש לנמק היטב את התשובות לשאלות ולצטט במדויק את הטענות והמשפטים שאתם משתמשים בהם.
- כתבו את מספר תעודת הזהות במשבצות מתחת למקום למדבקת ברקוד.
- בתשובה לשאלות שבחרתם לענות עליהן אתם רשאים לכתוב **בתחילת האזור** לפתרון השאלה '**אינני יודע/ת**' אשר יזכה אתכם ב־2 נקודות בדיוק על השאלה. באופן דומה, תשובה שכזו לסעיף אחד של שאלה תזכה בנקודה אחת.

מקום למדבקת ברקוד

מספר ת"ז:

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9
בחירה									

בהצלחה!

שאלה 1

יהי V מרחב וקטורי כך ש־ $\dim V = 11$.
יהיו U, W, Z תת־מרחבים של V כך ש־ $\dim Z = 9$, $\dim W = 7$, $\dim U = 6$ וגם $U \cap W \cap Z = \{0_V\}$. הוכיחו כי $U + W = V$.

שאלה 2

תת־מרחבים U, V של $\mathbb{R}^4$ מוגדרים באופן הבא:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{array}{l} x + y + 2w = 0 \\ z - w = 0 \end{array} \right\} \quad , V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{array}{l} x + 3z = 0 \\ y + z - 2w = 0 \end{array} \right\}$$

מצאו בסיס עבור $U + V$.

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. יהיו $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:
הסדרה $(v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, v_1+v_2+v_3+v_4)$ היא תלויה לינארית, ואילו הסדרה (v_1, v_2, v_4) היא בת"ל.
האם בהכרח $v_3 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_4)$?

שאלה 4

העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ מוגדרת ע"י

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2+x_3 \\ x_1+x_2+x_3 \end{pmatrix}$$

1. האם קיימת העתקה לינארית $T':\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש־ $(T'\circ T)(e_1)=e_2$ וגם $(T'\circ T)(e_2)=e_1$?
2. האם קיימת העתקה לינארית $T':\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש־ $(T'\circ T)(e_3)=e_2$ וגם $(T'\circ T)(e_2)=e_3$?

הבהרה: כאן $\mathcal{E}=(e_1,e_2,e_3)$ הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

שאלה 5

יהי V מרחב וקטורי. תהי S תת־קבוצה לא ריקה של V בעלת n איברים כך שלכל $v \in S$ מתקיים $v \in \mathrm{Span}(S \setminus \{v\})$.
האם בהכרח $\dim \mathrm{Span}(S) = n - 1$?

שאלה 6

העתקה ליניארית $T\colon \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^2$ מוגדרת באופן הבא: $T(p) = \begin{pmatrix} p'(0) \\ p'(1) \end{pmatrix}$ לכל $p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$. מצאו בסיסים של $\mathrm{Ker}\,(T)$ ו־$\mathrm{Im}\,(T)$.

הבהרה: כאן $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ מסמן את מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל־ 3,
$p'(a)$ מסמן את הנגזרת של הפולינום p בנקודה $x = a$.

שאלה 7

תהיינה $T_1, T_2 : V \to V$ העתקות ליניאריות כך ש־ $(T_2 \circ T_1)(v) = 0_V$ לכל $v \in V$.
עבור כל אחת מהאי־שוויונים הבאים, קבעו האם הוא בהכרח מתקיים והוכיחו/הפריכו אותו בהתאם.

1. $\dim V \leq \dim \operatorname{Ker}(T_1) + \dim \operatorname{Im}(T_2)$.
2. $\dim \operatorname{Im}(T_2) \leq \dim \operatorname{Ker}(T_1)$.

שאלה 8

נתונה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כך שמתקיים $A^2 + A = I_n$. בנוסף נתונה $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ אשר דומה ל־ $A + I_n$. הוכיחו כי $B^2 - B = I_n$.

שאלה 9

יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית. תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית על, ויהי $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ בסיס של W.
הוכיחו כי קיים בסיס $\mathcal{B}$ של V כך ש־ $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (I_m 0)$,
כלומר עבור $j \leq m$ העמודה ה־ j של $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ היא e_j, ועבור $m < j$ העמודה ה־ j של $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ היא עמודת האפסים.