אלגברה לינארית (1) 80134

מועד א' תשפ"ה — 23/02/2025

מרצים: אלכס גורביץ, אורי פרזנצ'בסקי, יבגני סטרחוב
משך הבחינה: 3 שעות.

הנחיות לבחינה

- אין להשתמש בחומר עזר כלשהו גם לא במחשבון.
- הבחינה מורכבת משלושה חלקים.
- ענו על שתי שאלות מתוך שלוש בחלק א', על שתי שאלות מתוך שלוש בחלק ב' ועל שלוש שאלות מתוך ארבע בחלק ג'.
- המשקל של כל שאלה בחלק א' הנו 20 נקודות, של כל שאלה בחלק ב' הנו 15 נקודות, של כל שאלה בחלק ג' הנו 10 נקודות.
- יש לסמן ב- ✓ את השאלות שבחרתם לענות עליהן **בטבלה** שבתחתית העמוד הזה.
- תיבדקנה אך ורק השאלות שסומנו בטבלה. אם לא תסמנו שאלות כראוי תיבדקנה רק השאלות הראשונות.
- יש לכתוב את הפתרונות **בגוף השאלון**. לכל שאלה כתבו את הפתרון שלה בעמוד בה היא מופיעה או בעמוד הבא.
- אם לא הספיק לכם מקום לכתיבת הפתרון ניתן להשתמש בעמודים הרזרביים בסוף השאלון.
- המחברת המצורפת מיועדת לטיוטה בלבד. היא **לא תיבדק ולא תיסרק**. בכל זאת יש להגיש אותה.
- כאשר אתם מתבקשים להוכיח טענה מהקורס, מותר להשתמש בטענות אחרות כל עוד הן לא קרובות מדי לטענה המבוקשת.
- יש לנמק היטב את התשובות לכל השאלות **ולצטט במדויק** את הטענות והמשפטים שעליהם אתם מסתמכים.
- כתבו את מספר תעודת הזהות במשבצות מתחת למקום למדבקת ברקוד.

מקום למדבקת ברקוד

מספר ת"ז:

שאלה	חלק א'			חלק ב'			חלק ג'			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
בחירה										

בהצלחה!

חלק א' שאלה 1

א. יהיו V מרחב וקטורי, U, W תת-מרחבים של V. הגדירו: $V = U \oplus W$. (3 נקודות)

ב. יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, ויהי U תת-מרחב של V. הוכיחו כי קיים תת-מרחב W של V כך שמתקיים $V = U \oplus W$. (17 נקודות)

חלק א' שאלה 2

א. יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $(w_1,\dots,w_n)$ סדרה (רשימה) של וקטורים מ-V. הגדירו: $(w_1,\dots,w_n)$ תלויה לינארית. (3 נקודות)

ב. יהי V מרחב וקטורי. תהיינה $(v_1,\dots,v_m)$, $(w_1,\dots,w_n)$ סדרות של וקטורים מ-V כך ש-$(v_1,\dots,v_m)$ פורשת את V.
הוכיחו כי אם $n > m$, אז $(w_1,\dots,w_n)$ תלויה לינארית. (17 נקודות)
<u>שימו לב:</u> בפתרון אין להשתמש במושגים "בסיס" ו-"מימד".

חלק א' שאלה 3

א. תהי A מטריצה בגודל $m \times n$ עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. הגדירו: הדרגה של A. (3 נקודות)

ב. תהי A מטריצה בגודל $n \times n$ עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. הוכיחו כי $\det(A^t) = \det(A)$. (17 נקודות)
כאן A^t מסמן את המטריצה המשוחלפת של A.

חלק ב' שאלה 4

יהי $a \in \mathbb{R}$. קבעו עבור אלו ערכים של a למערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 - x_2 - ax_3 = -a^2 \\ ax_1 + a^2x_2 = a^2 - 1 \end{cases}$$

יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אין פתרונות. במקרים בהם יש פתרון יחיד, מצאו אותו.

חלק ב' שאלה 5

העתקה לינארית $T:\mathbb{R}[x]_{\leq 2}\to\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ מוגדרת על ידי $T(p(x))=p(x+1)-p(0)x^2-p(1)(x+1)$.
מצאו בסיס לגרעין ובסיס לתמונה של T.

חלק ב' שאלה 6

יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$, $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ בסיסים של V כך שמתקיים $v_1 = 2w_1 - w_2$, $v_2 = w_1 - w_2$.

תהי $T : V \to V$ העתקה ליניארית כך ש- $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. חשבו את $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ואת $[T \circ T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. (הבהרה: $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = M(T, \mathcal{C}, \mathcal{B})$)

חלק ג' שאלה 7

יהי n מספר טבעי, $2 \leq n$. יהיו V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, $(v_1, \ldots, v_n)$ סדרה של וקטורים מ-V בלתי תלויה לינארית.
האם בהכרח קיים $v \in V$ כך שהסדרה $(v_1 - v, \ldots, v_n - v)$ תלויה לינארית וגם $v \neq v_i$ לכל $1 \leq i \leq n$?

חלק ג' שאלה 8

יהיו V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $(v_1,\ldots,v_n)$ סדרה של וקטורים מ- V כך שלכל $1 \le i \le n$ מתקיים שאם נוריד את v_i מהסדרה נקבל בסיס של V. הוכיחו כי קיימים $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}$ **<u>כולם שונים מ-0</u>** כך שמתקיים $c_1v_1 + \ldots + c_nv_n = 0_V$.

חלק ג' שאלה 9

תהי A מטריצה בגודל $m \times n$ עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$ כך ש-$\text{rk } A = m$. (הבהרה: $\text{rk } A = \text{Rank } A$)
הוכיחו כי לכל מטריצה B בגודל $l \times m$ עם מקדמים ב-$\mathbb{F}$ מתקיים $\text{rk } (BA) = \text{rk } B$.

חלק ג' שאלה 10

יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית. תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית כך ש-$\text{rk}\, T \geq \dim U$. (הבהרה: $\text{rk}\, T = \text{Rank}\, T$)
הוכיחו כי קיימת העתקה לינארית $S: U \to V$ כך ש- $T \circ S$ חד-חד-ערכית.