

# 基于运动控制和频域分析的移动机器人能耗最优轨迹规划

高志伟<sup>1</sup> 代学武<sup>1</sup> 郑志达<sup>1</sup>

**摘要** 本文针对两轮自平衡可移动机器人, 提出了一种新的能耗最优运动轨迹规划方法. 本文将轨迹规划与由轨迹跟踪控制器和机器人动力学方程组成的运动控制模型相结合, 基于期望轨迹与实际电机输入电压间的传递函数和能量在时域和频域上的对应关系, 通过频域分析的方法得到了具有明确机理表达的线性能耗模型, 并采用最小二乘线性回归法对模型参数进行辨识. 对于能耗最优轨迹, 由全局路径规划得到的路径点作为局部轨迹规划的局部目标点, 通过一定的数学转换和参数求导, 可直接得到相邻两个局部目标点间的能耗最优运行轨迹和对应的运行时间. 通过仿真实验证明了本文所提能耗模型的准确性和所得轨迹的能耗最优性.

**关键词** 轨迹规划, 能耗最低, 移动机器人, 频域分析

**引用格式** 高志伟, 代学武, 郑志达. 基于运动控制和频域分析的移动机器人能耗最优轨迹规划. 自动化学报, 201X, XX(X): X-X

**DOI** 10.16383/j.aas.c180399

## Optimal Energy Consumption Trajectory Planning for Mobile Robot Based on Motion Control and Frequency Domain Analysis

GAO Zhi-Wei<sup>1</sup> DAI Xue-Wu<sup>1</sup> ZHENG Zhi-Da<sup>1</sup>

**Abstract** In this paper, a new optimal trajectory planning algorithm to minimize energy consumption for two-wheeled self-balancing motion robot is proposed. The trajectory planning is combined with the motion control model composed of trajectory tracking controller and robot dynamics model, and based on the transfer function between the desired trajectory and actual motor input voltage and the corresponding relationship of energy in time domain and frequency domain, an linear energy consumption model with clear mechanism expression is obtained by frequency-domain analysis and the model parameters are identified by the least square linear regression method. For the optimal trajectory, select the way points obtained by global path planning as the local target points of the local trajectory planning, through a certain mathematical transformations and derivative of parameters, the optimal operational trajectory and operational time of each two target points are determined directly. Through simulation experiments, the accuracy of the proposed energy consumption model and minimum energy consumption of the obtained trajectory are proved.

**Key words** Trajectory planning, minimum energy consumption, motion robot, frequency-domain analysis

**Citation** Gao Zhi-Wei, Dai Xue-Wu, Zheng Zhi-Da. Optimal energy consumption trajectory planning for mobile robot based on motion control and frequency domain analysis. *Acta Automatica Sinica*, 201X, XX(X): X-X

近年来, 移动机器人已经成为自动化、计算机和人工智能等领域的一个研究热点. 和传统的工业机器人相比, 具有自主感知、决策和执行功能的移动机器人具有更加广阔的应用前景, 在国防、工农业生产、抢险、服务等领域中都具备着人类所无法比拟的巨大优势. 移动机器人通常以电池作为驱动能源, 有限的电池容量极大地限制了机器人的工作时间和行动范围. 移动机器人的能耗主要用于维持电机、传

感器、控制器和内部电路地正常运行<sup>[1]</sup>. 其中, 通过直流电机转换为机械能供机器人运动所消耗的电能占比最大<sup>[2]</sup>, 因此电机能量的转换效率已成为衡量机器人的一个重要指标. 如何使机器人以最小的能耗完成移动任务到达指定目的地, 是实现移动范围扩大和延长工作周期的核心技术, 也有助于减少电池容量以节约成本. 其中, 一种高效、方便的, 通过规划机器人运行轨迹来实现节能的方法得到越来越多地关注. 基于此, 本文以两轮自平衡可移动机器人为例, 提出了一种能耗最小的运动控制轨迹规划最优方案.

路径规划和轨迹跟踪控制是移动机器人导航的两个核心问题, 分别解决了去何处和如何去该处, 二者联系紧密<sup>[3]</sup>. 目前大多数移动机器人路径规划系统都由两级规划组成, 即全局路径规划和局部轨迹

收稿日期 2018-06-05 录用日期 2018-09-17  
Manuscript received June 5, 2018; accepted September 17, 2018  
国家自然科学基金项目 (61773111, 61790574) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (1773111, 61790574)  
本文责任编辑 贺威  
Recommended by Associate Editor HE Wei  
1. 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室 沈阳 110819  
1. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110819

规划<sup>[4]</sup>. 全局路径规划根据已知的全局作业环境将全局目标 (给定的起、止点) 分解为一系列的参考路径点  $(x_i, y_i)$ , 局部轨迹规划以这些参考路径点作为局部目标, 根据传感器获得的局部环境信息给出相邻两个局部目标点间安全、无碰的期望轨迹. 不失一般性, 路径规划中通常用圆弧对运行轨迹进行描述<sup>[5]</sup>, 故可用线速度  $v_i$  和角速度  $w_i$  来表征  $(x_i, y_i)$  到  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  间的期望轨迹. 将得到的期望轨迹  $(v_i, w_i)$  作为机器人轨迹跟踪控制器的参考输入, 通过闭环控制, 使机器人能较好地跟踪轨迹  $(v_i, w_i)$ . 现有研究中, 大部分的研究将路径规划和轨迹跟踪分别独立研究, 如动态窗口搜索算法<sup>[5-6]</sup>、势场法<sup>[7-8]</sup>、智能算法<sup>[9-11]</sup> 等, 只考虑了如何得到速度向量, 没有考虑轨迹跟踪的问题. 所以本文研究的重点是如何将轨迹规划和轨迹跟踪相结合, 在轨迹规划时充分考虑轨迹跟踪控制器和机器人的动态特性, 从而获得更准确的能耗最优轨迹.

能耗最优轨迹规划的目的就是找到恰当的  $(v_i, w_i)$ , 使得机器人从一个局部目标点运动到下一个局部目标点能耗最低, 其关键是建立准确的能耗模型, 构建相应的能耗损失函数. 现有研究中, 从不同的角度提出了多种能耗损失函数. 大量研究简单地将最优耗能等价于最短运行距离, 认为在运行环境 (如摩擦因数) 不变时, 以直线运行的最短路径能耗最低<sup>[12-13]</sup>. 这种最短距离模型虽然减少了运动中的摩擦耗能, 但忽略了在转折点处由于速度和方向角的变化引起的加减速过程所带来的运行状态改变耗能: 有文献证明了较少的加减速操作有利于降低运动能耗<sup>[14]</sup>. 因此, 许多研究将轨迹的光滑度作为能耗损失函数, 如采用最小曲率变化的 B 样条<sup>[15]</sup>, 引入贝塞尔曲线及其变体<sup>[16-18]</sup> 等使轨迹光滑, 有研究提出了一种动态 Dubins-螺旋曲线法<sup>[19-20]</sup>, 可以得到三维空间中的光滑最短曲线. 光滑的轨迹虽然减少了由速度和运行方向变化带来的状态改变耗能, 但使运动距离变长, 增加了运行中用于克服摩擦力的能耗. 因此只考虑距离最短或轨迹光滑不能准确地得到能耗最优轨迹, 需要将两者综合考虑. 还有许多研究为了简化运算, 采用控制输入的平方等形式作为能耗损失函数, 如将系统输入线速度和角速度的平方作为损失函数<sup>[21]</sup>, 集中寻求直流电机的最小控制损失<sup>[2]</sup>, 但这些方法不能保证来自电池的总能耗达到最优, 只能作为一种评判各轨迹规划方法的标准.

上述方法只是从刚体运动的角度来构建能耗模型和损失函数的, 其模型较为宏观, 未考虑驱动电机的运动特性, 因此不能准确地反映机器人系统, 尤其是驱动电机系统的真实运动耗能. 针对此不足, 文

献 [13] 充分考虑了电机中电流与电压关系, 用电机真实能耗, 即功率的积分作为能耗损失函数, 能更准确的反映系统能耗, 但其只考虑了小车的直线运动, 忽略了机器人运行方向改变所需的能耗, 并且没有考虑非运动耗能 (如传感器、微控器耗能). 文献 [17] 综合考虑了运动耗能和非运动耗能, 利用能量守恒定律建立了系统整体能耗模型, 并将 A\* 算法中的损失函数改为与能耗相关的描述. 首先通过变换后的 A\* 算法得到无碰撞的能耗最优几何路径, 然后根据得到的能耗模型, 通过优化三次贝塞尔曲线的参数得到一条能耗最优的光滑轨迹. 但该方案是通过不断试凑得到最优轨迹的, 计算量大且无法实现动态规划, 并且未充分考虑机器人的动态特性, 如认为减速过程不耗能、忽略控制器动态响应能耗等, 预测能耗与真实能耗之间存在一定的误差.

值得指出的是, 在大部分已有的能耗最优轨迹规划方法中, 通常忽略了轨迹跟踪控制器对运动指令的动态响应过程, 认为设置了新的期望轨迹  $(v_i, w_i)$ , 机器人能瞬时完成轨迹调整, 即刻沿新的期望轨迹运行<sup>[6, 17]</sup>. 而在实际过程中, 如图 1 上部分所示, 其中虚线为期望轨迹, 实线为实际轨迹, 由于机器人具有质量和惯性, 轨迹跟踪控制器的动态响应具有一定的滞后和超调, 切换到新的运动轨迹的过程是一个动态渐变的过程, 因此实际轨迹和期望轨迹会有一定差异, 两者间的能耗也不尽相同. 所以只通过优化期望轨迹能耗得到的轨迹实际上并不一定是能耗最低的.

另一方面, 对于采用由系统真实功率表示能耗损失函数的轨迹规划方法<sup>[2, 13, 22]</sup>, 虽然该模型能较准确地反映真实能耗, 但由于模型较复杂, 其求最优解需要采用复杂的优化方法, 或在可行范围内对损失函数进行数值迭代来得到. 这占用了大量移动机器人有限的计算资源, 降低了系统的实时性.

本文综合运行距离和轨迹光滑, 认为期望轨迹在相邻两个局部目标点间为光滑圆弧, 但在交界处如图 4 中最优能耗轨迹所示, 运行方向有一定的突变, 改变量为  $\sigma$ , 故将期望轨迹重新定义为  $(v_i, w_i, \sigma_i)$ . 针对能耗模型不准和能耗损失函数优化求解困难的问题, 本文综合轨迹规划、轨迹跟踪控制器和机器人动力学模型, 在频域范围内, 建立了包括状态改变、稳态运行以及非运动部分的准确能耗模型. 在此基础上, 对能耗最小的最优运动轨迹进行了规划. 规划过程中, 由全局路径规划得到的路径点作为局部轨迹规划的目标点, 结合圆弧中各参数的转换关系, 通过简单的参数求解优化相邻两个局部目标点间的能耗, 获得最优的运动轨迹和运行时间. 本文主要内容有两方面:

低速运动情况下, 对加减速不敏感, 可以认为加减速不耗能

把轨迹规划控制器和电机控制器的两级控制放入同一控制模型

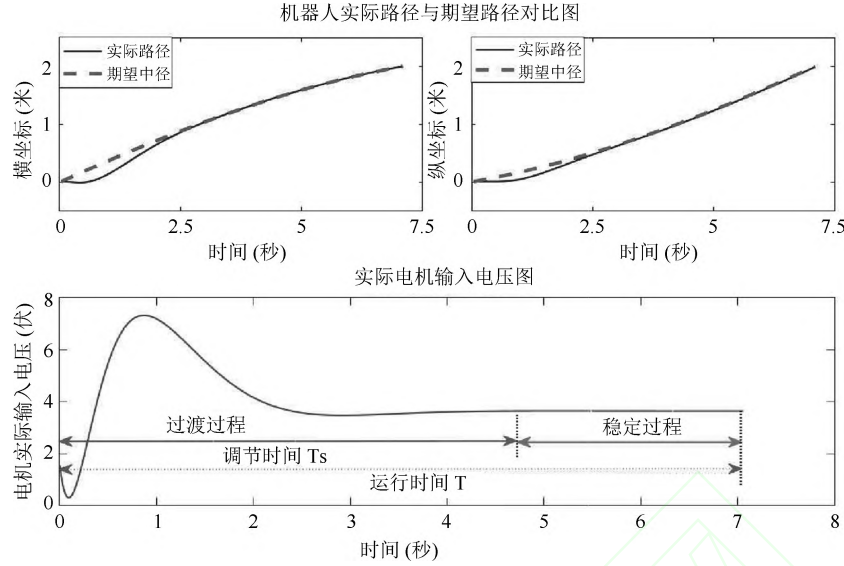


图1 机器人实际路径与期望路径对比图以及对应的控制器动态过程示意图

Fig. 1 The actual path of the robot is compared with the expected path and the controller dynamic process

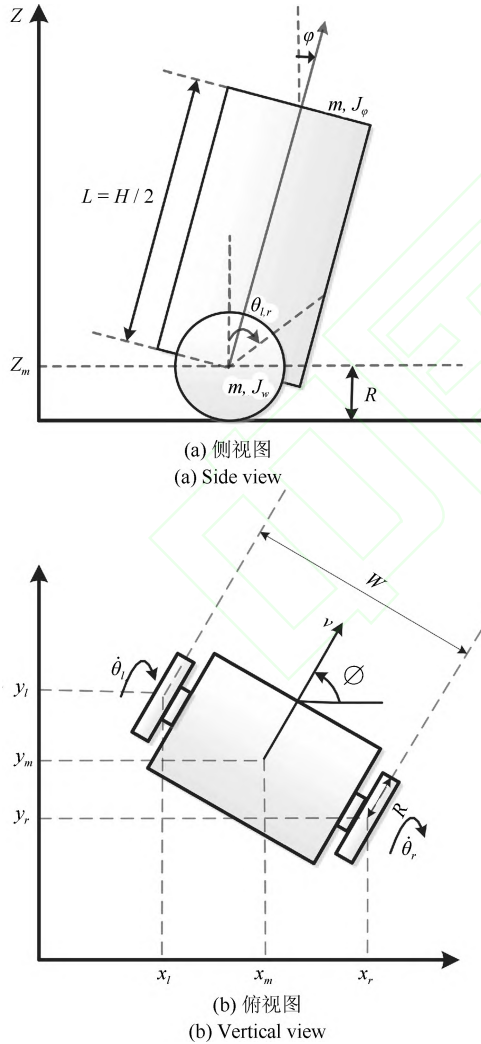


Fig. 2 The side view and vertical view of two-wheel self-balancing robot

第一, 基于两轮自平衡机器人, 将轨迹规划和由轨迹跟踪控制器和机器人动力学模型组成的运动控制模型相结合, 深入分析了轨迹跟踪控制器的动态响应过程, 将电机能耗分为过渡过程和稳定过程两部分, 如图1下部分所示, 其能耗分别为状态改变耗能 and 克服摩擦耗能. 为方便计算, 将机器人模型线性化处理, 推导出了期望运行轨迹到电机驱动电压之间的传递函数, 准确刻画了机器人和轨迹跟踪控制器在机器人运动过程中的动态特性. 并创新性的利用信号能量在频域与时域间的对应关系<sup>[23]</sup>, 将时域上复杂的能耗计算转换到频域上进行计算, 提出了一种新的基于频域的线性能耗模型. 该模型准确反映了通过轨迹规划得到的期望轨迹和系统真实运行能耗之间的机理关系, 更接近实际情况.

第二, 针对无动态障碍物、道路状况不变的室内环境, 提出了一种以最小运行能耗依次抵达各局部目标点的轨迹规划算法. 基于所得模型结构, 采取最小二乘线性回归法<sup>[24]</sup>对模型系数进行辨识. 考虑到圆弧轨迹中各状态的转换关系, 通过一定的数学转换将所得线性能耗模型降维到只含轨迹对应圆心角  $\gamma$  和运行时间  $T$  两个变量的线性模型, 再利用简单的参数求导, 直接得到能耗最优轨迹和运行时间. 不需要繁琐的数值迭代搜索过程, 使计算量大大降低.

本文内容安排如下: 在第二节基于两轮自平衡机器人模型, 结合路径跟踪控制器, 综合考虑电机和其余部件耗能, 建立了系统能耗模型. 基于此能耗模型, 第三节提出了一种能耗最优轨迹规划算法, 通

图2 两轮自平衡小车侧视图与俯视图



过参数辨识和参数求导,可直接得到能耗最低轨迹.在第四节,以  $A^*[25]$  算法得到的路径点作为局部轨迹规划的局部目标点,通过仿真实验验证了本文所提能耗模型的准确性以及所得轨迹的能耗最优性,并与运行距离最短和能耗最优三次贝塞尔曲线法<sup>[17]</sup>进行比较,验证了本文所提能耗模型的准确性和轨迹规划算法的节能性.第五节对本文工作进行了总结.

## 1 两轮自平衡机器人能耗模型

准确的能耗模型是能耗最优轨迹规划的前提条件和设计基础.本节基于自平衡机器人运动控制模型,通过频域分析得到了具有明确机理表达的、能准确反映系统能耗与轨迹状态关系的运行能耗模型.

### 1.1 轨迹跟踪控制系统

自平衡机器人的侧视图与俯视图如图 2 所示,机器人的实时位置可由车轴中点坐标  $(x_m, y_m)$  表示,位置角  $\theta$  为车轴中点转过的角度,设  $\theta_l$  和  $\theta_r$  分别为左右轮的旋转角度,则  $\theta = (\theta_l + \theta_r)/2$ ; 偏航角  $\phi$  为车体前进方向与  $x$  轴正方向的夹角,由差速旋转来表示:  $\phi = R(\theta_r - \theta_l)/W$ ,  $R$ 、 $W$  分别为车轮半径和车体宽度,值得注意的是,  $\theta$  和  $\phi$  是机器人开始运动到当前时刻的累加量;车体倾斜角  $\psi$  为车体与竖直方向的夹角,  $\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}$  为对应的位置角速度、倾斜角速度和偏航角速度.

设机器人状态向量为  $\mathbf{x} = [\theta, \psi, \phi, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}]^T$ , 参考前期工作<sup>[26]</sup>, 采用拉格朗日函数法得到自平衡机器人的动力学模型. 为了得到线性能耗模型, 方便之后求取最优解, 在竖直平衡点处 ( $\psi = 0$ ) 进行线性化处理, 得到系统的线性状态空间方程如下所示:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{A}$  为系统状态矩阵,  $\mathbf{B}$  为控制矩阵, 详细表达见 [26] 中式 (19)-(21).  $\mathbf{u}$  为左右轮电机输入电压,  $\mathbf{u} = [u_l, u_r]^T$ ,  $\mathbf{C}$  为  $6 \times 6$  的单位阵.

本文采用的两轮自平衡机器人平衡和轨迹跟踪控制器与文献 [26] 相同, 即将 LQR 与 PID 控制结合, 在状态向量  $\mathbf{x}$  中加入对位置角  $\theta$  和偏航角  $\phi$  的积分项, 得到新的状态向量  $\bar{\mathbf{x}} = [\theta, \psi, \phi, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}, \int \theta dt, \int \phi dt]^T$ . 通过设定合适的  $Q$  和  $R$ , 解 Riccati 方程来优化能量函数  $J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$ , 从而得到控制增益  $\mathbf{K}$ . LQR 控制器考虑了对控制量的优化, 是一个比较节能的控制器. 将轨迹规划与轨迹跟踪控制器、机器人动力学模型相结合, 本文所研究的移动机器人轨迹规划和控制系统体系结构如图 3 所示.

设每两个局部目标点间的期望轨迹为  $\mathbf{r} = [v, w, \phi + \sigma]^T$ . 其中,  $v$  为机器人前进线速度, 单位为  $m/s$ ;  $w$  为车体旋转角速度, 单位为  $rad/s$ ;  $\sigma$  为在当前轨迹起始位置处机器人相比于前一时刻运行方向的改变量, 也就是两段轨迹相连处偏航角  $\phi$  的改变量, 所以  $\phi + \sigma$  为当前轨迹起始处的偏航角. 考虑到较多的加减速会增加系统能耗<sup>[16]</sup>, 所以认为每两个局部目标点间期望机器人做匀速运动, 即在每一段轨迹中线速度  $v$  和角速度  $w$  保持不变, 当  $w = 0$  时为匀速直线运动, 当  $w \neq 0$  时为匀速圆弧运动. 通过轨迹规划可以得到当前期望轨迹相比于上一段轨迹结束时的改变量, 即  $\Delta \mathbf{r} = [\Delta v, \Delta w, \sigma]^T$ . 在新一段轨迹中,  $\Delta \mathbf{r}$  中各项为常量, 保持不变. 由轨迹参数转换模块可得对应的机器人系统状态向量改变量为  $\Delta \mathbf{x} = [\Delta \theta, \Delta \psi, \Delta \phi, \Delta \dot{\theta}, \Delta \dot{\psi}, \Delta \dot{\phi}]^T$ , 在 LQR-PID 轨迹跟踪控制器的作用下, 通过闭环反馈修正状态改变量, 从而控制机器人跟踪上期望轨迹  $\mathbf{r}$ .

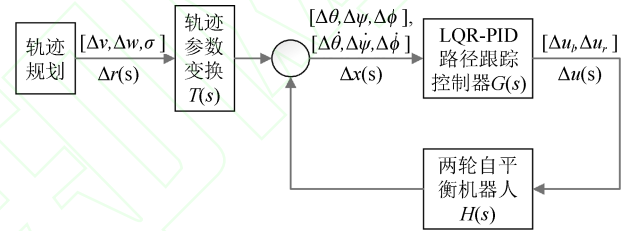


图 3 本文采用的轨迹规划和控制系统体系结构

Fig. 3 Mobile robot trajectory planning and control system architecture in this paper

### 1.2 轨迹跟踪能耗模型

忽略电机内部耗能<sup>[27]</sup>, 在机器人由当前轨迹  $\mathbf{r}_{i-1}$  转变到目标轨迹  $\mathbf{r}_i$  这一过程中, 系统总能耗包括运动能耗和非运动能耗两部分. 由于控制器存在超调和滞后, 运动能耗不仅与动能改变和克服摩擦力做功有关<sup>[17]</sup>, 也与控制器和系统模型的结构有关, 故将运动能耗分为状态改变耗能  $E_{\text{state}}$  和克服摩擦力做功  $E_{\text{fri}}$  两部分.

#### 1.2.1 状态改变耗能

如图 1 下部分所示, 在期望轨迹发生改变后的  $T_s$  秒内, 此时机器人处于过渡阶段,  $T_s$  为控制器的调整时间, 此时电机能耗除了要实现速度改变和克服摩擦, 还包括不确定的加减速过程所消耗的能量, 将这一过程中的电机耗能称为状态改变耗能  $E_{\text{state}}$ . 由于自平衡机器人要始终保持竖直平衡, 令车体倾斜角及其角速度的期望改变量  $\Delta \psi, \Delta \dot{\psi}$  始终为 0, 其余部分可由期望轨迹改变量  $\Delta \mathbf{r}$  转换得到:

$$\Delta \dot{\theta} = \Delta v / R$$

$$\begin{aligned}
\Delta\theta &= \int \Delta\dot{\theta} dt \\
\Delta\dot{\phi} &= \Delta w \\
\Delta\phi &= \sigma + \int \Delta\dot{\phi} dt
\end{aligned} \quad (2)$$

对上式进行拉普拉斯变换可得轨迹参数转换模块的传递函数矩阵为:

$$T(s) = \Delta\mathbf{x}(s)/\Delta\mathbf{r}(s) = \begin{bmatrix} 1/Rs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 1 \\ 1/R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

由 LQR-PID 轨迹跟踪控制器可得  $2 \times 8$  维的反馈控制增益矩阵  $K^{[26]}$ , 通过控制左右轮电机电压实现对位置角  $\theta$ , 偏航角  $\phi$  和车体倾斜角  $\psi$  的跟踪. 其控制等价于一组 PID 控制器, 可用传递函数表示如下:

$$\Delta\mathbf{u}(s) = (K_p + \frac{K_I}{s})\mathbf{e}(s) + K_D\dot{\mathbf{e}}(s) \quad (4)$$

其中控制参数  $K_p, K_I$  和  $K_D$  分别对应于控制增益  $K$  中的元素. 设  $\mathbf{e}(t) = [\Delta\theta, \Delta\psi, \Delta\phi]^T$ , 由拉普拉斯变换可得轨迹跟踪控制器传递函数矩阵为:

$$G(s) = \frac{\Delta\mathbf{u}(s)}{\Delta\mathbf{y}(s)} = \frac{\Delta\mathbf{u}(s)}{\Delta\mathbf{x}(s)} = \begin{bmatrix} K_{11} + \frac{K_{17}}{s} & K_{12} & K_{13} + \frac{K_{18}}{s} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} + \frac{K_{27}}{s} & K_{22} & K_{23} + \frac{K_{28}}{s} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \end{bmatrix} \quad (5)$$

对自平衡机器人线性状态空间方程 (1) 进行拉普拉斯变换可得被控对象传递函数矩阵为:

$$H(s) = \frac{\Delta\mathbf{y}(s)}{\Delta\mathbf{u}(s)} = (sI - A)^{-1}B \quad (6)$$

综上所述, 由图 3 系统结构图可得期望轨迹改变量  $\Delta\mathbf{r}$  与电机输入电压变化量  $\Delta\mathbf{u}$  之间的传递函数为:

$$F(s) = \frac{\Delta\mathbf{u}(s)}{\Delta\mathbf{r}(s)} = \frac{T(s)G(s)}{1 + H(s)G(s)} = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) & F_{13}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) & F_{23}(s) \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中传递函数矩阵  $F(s)$  中各项均只含一个复频域变量  $s$ . 由于参考输入量  $\Delta\mathbf{r}$  的各项均为常数, 左右

轮电机输入电压变化量的频域表达可表示为:

$$\Delta u_l(s) = \frac{F(s)_1 \Delta\mathbf{r}}{s} = \frac{F_{11}(s)}{s} \Delta v + \frac{F_{12}(s)}{s} \Delta w + \frac{F_{13}(s)}{s} \sigma \quad (8)$$

$$\Delta u_r(s) = \frac{F(s)_2 \Delta\mathbf{r}}{s} = \frac{F_{21}(s)}{s} \Delta v + \frac{F_{22}(s)}{s} \Delta w + \frac{F_{23}(s)}{s} \sigma \quad (9)$$

为了描述更准确, 采用电机真实能耗, 即功率的积分作为能耗损失函数. 那么机器人在新一段轨迹中的状态改变耗能  $E_{\text{state}}$  在时域上可表示为:

$$E_{\text{state}} = \frac{1}{R_m} \int_0^{T_s} (u_{l-} + \Delta u_l)^2 + (u_{r-} + \Delta u_r)^2 dt \quad (10)$$

其中  $T_s$  为调节时间,  $u_{l-}, u_{r-}$  为上一段轨迹稳定时左右轮电机的输入电压,  $R_m$  为电机内阻. 由帕塞瓦尔定理<sup>[28]</sup> 知信号在时间域内积累的总能量与该信号在频域内积累的总能量相等, 即信号经傅立叶变换后其总能量保持不变. 故式 (10) 可改写为:

$$E_{\text{state}} = \frac{1}{2\pi R_m} \int_{-\infty}^{\infty} ((u_{l-}(w) + \Delta u_l(w))^2 + (u_{r-}(w) + \Delta u_r(w))^2) dw \quad (11)$$

又知将复频域中的  $s$  替换为  $jw$  即为对应的频域表达<sup>[20]</sup>, 故用  $jw$  替换式 (8)(9) 中的  $s$  可得  $\Delta u_l(w), \Delta u_r(w)$ . 在一段轨迹中, 参考输入  $\Delta v, \Delta w, \sigma$  均为固定值, 将式 (11) 中的平方项展开后, 所得的频域函数是  $\Delta v, \Delta w, \sigma$  和  $F_{11}(w), F_{12}(w), \dots, F_{23}(w)$  的多项式. 注意  $F_{11}(w), F_{12}(w), \dots, F_{23}(w)$  描述的是自平衡机器人的传递函数, 与  $\Delta v, \Delta w$  和  $\sigma$  无关, 可以分别积分. 在自平衡机器人系统参数给定的情况下, 这些传递函数及其多项式 (如  $F_{11}^2(w), F_{11}(w)F_{12}(w)$  等) 在频域积分均为实常数. 因此, 通过计算积分可得在频域上的系统状态改变耗能为:

$$\begin{aligned}
E_{\text{state}} &= a_1 \Delta v^2 + a_2 \Delta w^2 + a_3 \sigma^2 + a_4 \Delta v \Delta w + \\
&+ a_5 \Delta v \sigma + a_6 \Delta w \sigma + u_{l-}(a_7 \Delta v + a_8 \Delta w + a_9 \sigma) + \\
&+ u_{r-}(a_{10} \Delta v + a_{11} \Delta w + a_{12} \sigma) + a_{13} P_-
\end{aligned} \quad (12)$$

其中  $a_1, a_2, \dots, a_{13}$  为实常数, 是传递函数的频域积分值, 由系统参数决定, 可记为参数向量  $\boldsymbol{\theta}_1 = [a_1, a_2, \dots, a_{13}]$ . 功率  $P_- = (u_{l-}^2 + u_{r-}^2)/R_m$ , 代表前一段轨迹稳定时的功率. 当机器人静止于起始位置时, 维持状态所需的电机输入电压  $u_{l-}, u_{r-}$

和功率  $P_-$  均为 0, 可作为系统初始值使用. 令  $\mathbf{C} = u_{l-} \cdot \Delta \mathbf{r}, \mathbf{D} = u_{r-} \cdot \Delta \mathbf{r}$ , 式 (12) 可整理为:

$$E_{\text{state}} = [\Delta v^2, \Delta w^2, \Delta \sigma^2, \Delta v \Delta w, \Delta v \sigma, \Delta w \sigma, \mathbf{C}, \mathbf{D}, P_-] \boldsymbol{\theta}_1^T \quad (13)$$

也可以写成向量形式:

$$E_{\text{state}} = \mathbf{X}_1 \cdot \boldsymbol{\theta}_1^T \quad (14)$$

由式 (14) 可见, 系统状态改变耗能与前一段轨迹的稳态功率  $P_-$  和当前轨迹的状态改变量  $\Delta \mathbf{r}$  相关.

### 1.2.2 稳定状态能耗模型

经过调节时间  $T_s$  后, 机器人稳定在期望轨迹  $\mathbf{r}_i$ , 并做匀速运动, 此时电机能耗主要用来克服摩擦力, 记为  $E_{\text{fri}}$ . 摩擦力主要为车轮与地面的摩擦力  $F_w$  和电机与轮轴之间的摩擦力  $F_m$ . 大多数文献<sup>[6, 17]</sup> 忽略了  $F_m$ , 并认为车轮与地面间的摩擦力为动摩擦力, 事实上, 在不发生侧滑和空转时,  $F_w$  与  $F_m$  均为静摩擦力<sup>[22]</sup>.

根据文献 [26] 中自平衡机器人广义力表达式可知, 摩擦力  $F_w, F_m$  在前进方向上的作用力  $F_{f\theta}$  与车轴中点转速  $\dot{\theta}$  成线性关系, 在旋转方向的作用力  $F_{f\phi}$  与旋转速度  $\dot{\phi}$  成线性关系, 作用距离分别为:

$$s_\theta = \dot{\theta}(T - T_s), s_\phi = \dot{\phi}(T - T_s) \quad (15)$$

其中,  $T$  为机器人在新一段轨迹  $\mathbf{r}_i$  中的运行时间. 在  $T_s$  秒后机器人的线速度  $v$  和角速度  $w$  保持不变, 已知  $\dot{\theta} = v/R, \dot{\phi} = w$  那么电机克服摩擦力耗能为:

$$E_{\text{fri}} = (b_1(v_- + \Delta v)^2 + b_2(w_- + \Delta w)^2)(T - T_s) \quad (16)$$

其中,  $v_-, w_-$  为上一段期望轨迹的线速度和角速度,  $b_1, b_2$  为常数. 上式可改写为:

$$E_{\text{fri}} = [[v^2, w^2](T - T_s)] \cdot \boldsymbol{\theta}_2^T = \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\theta}_2^T \quad (17)$$

其中,  $\mathbf{X}_2$  为数据向量,  $\boldsymbol{\theta}_2 = [b_1, b_2]$  为参数向量.

### 1.2.3 运动总能耗模型及参数辨识

除了电机耗能, 对于传感器、微控器和内部电路等非机械部件, 其功率在一段时间内是相对稳定的. 为了计算方便, 可以将其功率看为常数, 记为  $P_s$ . 5 则非运动能耗可以表示为:

$$E_{\text{other}} = P_s T \quad (18)$$

最后综合运动和非运动能耗, 由式 (14)、(17) 和 (18) 可得在新一段轨迹  $\mathbf{r}_i$  中, 两轮自平衡机器人系统真实运行总能耗模型为:

$$E_{\text{total}}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, T) = E_{\text{state}} + E_{\text{fri}} + E_{\text{other}} = \mathbf{X}_1 \boldsymbol{\theta}_1^T + \mathbf{X}_2 \boldsymbol{\theta}_2^T + P_s T \quad (19)$$

尽管能耗模型的参数向量  $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$  可从机器人的系统参数 (如质量, 几何尺寸, 控制器参数等) 推导得到, 但会比较复杂, 且理论计算与实际情况会存在一定误差. 本文将  $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$  作为数据向量, 选取不同的设定值进行实验, 并记录机器人电流、电压值, 从而得到总能耗  $E_{\text{total}}$ . 在本文所证明的能耗模型可转为线性模型 (19) 的基础上, 采用最小二乘法进行辨识得到参数  $[\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2]$  的值.

首先辨识调节时间  $T_s$ , 在约束条件下分别进行  $n$  组实验, 令  $\varepsilon = 0.01V$ , 对实时电压前后取差, 当差值小于  $\varepsilon$  时, 此时对应的时间即为该段轨迹的过渡时间  $T_s$ , 取  $n$  次实验的平均值作为调节时间  $T_s$  的估计值. 在  $T_s$  确定后, 再依次取得  $n$  组对应的  $E_{\text{state}}, E_{\text{fri}}$  和数据向量  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$  作为样本, 利用最小二乘线性回归法可得参数向量  $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$  的值, 具体的辨识过程和辨识结果将在第 4 节给出.

## 2 能耗最优轨迹规划

本节结合得到的能耗模型, 对能耗最小的最优运动轨迹进行了规划. 本文认为每两个相邻的局部目标点之间的运行轨迹为圆弧, 基于圆弧中各状态的转换关系, 可以将能耗模型 (19) 转换为只含变量  $\gamma$  和  $T$  的表达式, 其中  $\gamma$  为轨迹对应圆心角,  $T$  为运行时间. 对  $\gamma$  和  $T$  采用简单的参数求导就可以直接得到能耗最优的期望轨迹和运行时间, 不需要对潜在可能的轨迹一一搜索, 使计算量大幅降低.

由上文所述, 求每两个局部目标点间能耗最优轨迹等价于解决以下优化问题:

$$\min_{\Delta v, \Delta w, \sigma, T} J = E_{\text{total}}(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, T) \quad (20)$$

即通过寻找合适的期望轨迹改变量  $\Delta \mathbf{r}$  和运行时间  $T$  来使系统整体能耗达到最低. 机器人由第  $i-1$  个局部目标点到第  $i$  个局部目标点的期望运行轨迹示意图如图 4 所示, 机器人当前位置坐标为  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ , 目标位置坐标为  $(x_i, y_i)$ , 当前运行状态为  $(v_{i-1}, w_{i-1}, \phi_{i-1})$ ,  $\phi_{i-1}$  为当前位置的偏航角. 其中实线为本文所求的最优期望轨迹, 虚线为光滑轨迹 (在起始位置  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  运行方向不发生突变). 在第  $i$  段轨迹中, 机器人期望运行轨迹相比于上一段轨迹结束时的改变量为  $\Delta \mathbf{r}_i = (\Delta v_i, \Delta w_i, \sigma_i)$ , 运行时间为  $T_i$ , 那么:

当前位置与目标点的直线距离为:

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad (21)$$

运行轨迹对应的圆心角  $\gamma_i$  为:

$$\gamma_i = 2(\arctan(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}) - (\phi_{i-1} + \sigma_i)) \quad (22)$$



$\phi_{i-1}$  可通过迭代得到:

$$\phi_{i-1} = \phi_{i-2} + \sigma_{i-1} + \int_0^{T_{i-1}} w_{i-1} dt \quad (23)$$

在起点  $(0,0)$  处,  $\phi_0 = 0$ ,  $T_{i-1}$  为第  $i-1$  段轨迹的运行时间, 期望轨迹改变量  $\Delta \mathbf{r}_i$  中各项可分别表示为:

$$\Delta v_i = \frac{\gamma_i d_i}{2T_i \sin(\gamma_i/2)} - v_{i-1} \quad (24)$$

$$\Delta w_i = \frac{\gamma_i}{T_i} - w_{i-1} \quad (25)$$

$$\sigma_i = \arctan\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) - \phi_{i-1} - \frac{\gamma_i}{2} \quad (26)$$

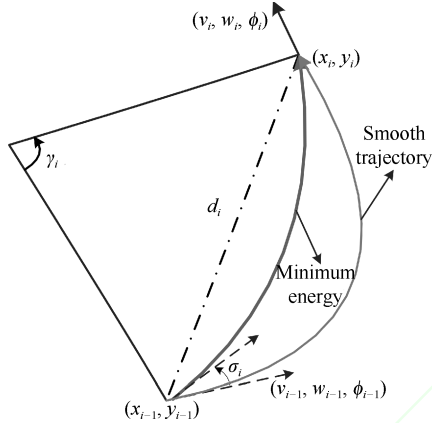


图4 机器人运行轨迹示意图

Fig. 4 Diagram of robot navigation trajectory

由式 (24)~(26) 可知期望轨迹改变量  $\Delta \mathbf{r}_i$  中的每项均为只含变量  $\gamma_i$  和  $T_i$  的多项式, 将辨识得到的参数  $\theta_1, \theta_2$  和式 (24)~(26) 代入式 (19), 那么优化问题 (20) 可改写为:

$$\min_{\gamma_i, T_i} J = E_{\text{total}}(\gamma_i, T_i) \quad (27)$$

即通过优化参数  $\gamma_i$ 、 $T_i$ , 使第  $i$  段轨迹总能耗最小, 分别对  $\gamma_i, T_i$  求偏导, 令其偏导数为 0, 即:

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \gamma_i} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial T_i} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

将方程组的解代回式 (24)~(26), 可得第  $i$  段能耗最优期望轨迹相比于上一段轨迹结束时的改变量  $(\Delta v_i, \Delta w_i, \sigma_i)$ .

### 3 仿真实验

#### 3.1 参数辨识与能耗模型验证

由于本文建立能耗模型时将轨迹规划与由跟踪控制器和机器人动力学模型组成的运动控制模型充

分结合, 所以对于不同的路径跟踪控制器和机器人模型, 系统能耗模型有所不同. 本文以两轮自平衡机器人为例, 采用文献 [26] 中提出的 LQR-PID 路径跟踪控制器, 为了证明对机器人动力学模型线性化处理得到的系统能耗模型, 对机器人真实能耗预测仍具有较高的准确性, 仿真实验中机器人采用由拉格朗日函数法得到的非线性模型, 机器人参数如表 1 所示. 考虑到室内环境的复杂性和安全性, 限制机器人最大运行线速度为 1 m/s; 为防止出现打滑, 限定机器人最大旋转角速度  $w_{max}$  为 0.35 rad/s, 运行方向最大改变量为  $80^\circ$ .

表1 两轮自平衡机器人模型参数

Table 1 Two-wheel self-balancing robot model parameters

	机器人参数	参数值
$M$	机器人质量	3.2 (kg)
$R$	车轮半径	0.15 (m)
$W$	车体宽度	0.35 (m)
$f_m$	电机与轮轴摩擦系数	0.0022
$f_w$	车轮与地面摩擦系数	0.035
$R_m$	电机内阻	6.69 ( $\Omega$ )
$P_s$	非机械元件功率	6 (w)

首先采用最小二乘法对模型参数进行离线辨识. 在限制范围内随机取 1000 组对应的轨迹:  $\mathbf{r}_1 = (v_1, w_1, \phi_0 + \sigma_1)^T$ ,  $\mathbf{r}_2 = (v_2, w_2, \phi_1 + \sigma_2)^T$ , 其中  $\phi_0 = 0$ ,  $\phi_1 = w_1 \cdot T_1$ , 两段轨迹的运行时间  $T_1, T_2$  均取 10 秒. 首先将  $\mathbf{r}_1$  对应的  $v_1, w_1, \sigma_1$  通过轨迹参数转换作为轨迹跟踪控制器和两轮自平衡机器人 Simulink 模型的参考输入, 运行 10 秒, 记录 10 秒时左右轮电机电压  $u_{l-}, u_{r-}$ . 然后将模型参考输入换为  $\mathbf{r}_2$  再运行 10 秒, 记录相应的过渡时间  $T_s$ 、状态改变耗能  $E_{\text{state}}$  和克服摩擦力耗能  $E_{\text{fri}}$ , 其中  $E_{\text{state}}$  为第 10 秒到第  $10+T_s$  秒间的能耗,  $E_{\text{fri}}$  为第  $10+T_s$  秒到第 20 秒间的能耗, 并记录数据向量  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ . 因为由式 (28) 计算最优轨迹时, 需要提前知道过渡时间  $T_s$ , 但真实的过渡时间需要经过实时测量得知, 故将 1000 组实验得到的真实过渡时间的平均值作为  $T_s$  的估计值, 由实验知,  $T_s$  的估计值为 5.82 秒. 在所得的 1000 组数据向量和能耗值中随机抽取 700 组作为测试集, 剩余 300 组作为验证集.

在测试集上利用最小二乘法对模型参数进行辨识. 以辨识参数变量  $\theta_1$  为例, 最小二乘参数辨识原理如下<sup>[19]</sup>:

1) 拟合多项式为  $E_{\text{state}} = \mathbf{X}_1 \theta_1^T$

2) 由测试集数据可知对应的数据向量  $\mathbf{X}_1$  和对应的真实状态改变耗能  $E_{\text{state}}$ . 损失函数取平方损失:  $R^2 = \sum_{i=1}^{700} (E_{\text{state}(i)} - \mathbf{X}_{1(i)} \theta_1^T)^2$

3) 最小化平方损失, 对  $\theta_1$  中各项求偏导并令其等于 0. 通过整理可得:  $\theta_1 = (X_1^T X_1)^T X_1^T E_{state}$

$\theta_2$  的辨识过程与  $\theta_1$  相似. 辨识得到的模型参数向量如表 2 所示:

表 2 两轮自平衡机器人初始能耗模型参数  
Table 2 Initial energy consumption model parameters of two-wheel self-balancing robot

参数	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
数值	172.2	7.57	13.2	-0.66	-0.94
参数	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
数值	1.37	16.26	-4.39	-1.11	15.97
参数	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$b_1$	$b_2$
数值	4.27	1.09	5.82	20.83	0.93

在 300 组验证集上对得到的模型参数进行验证, 每一组随机输入对应的能耗模型预测值与真实能耗之间的绝对误差和百分比误差如图 5 所示. 可见在验证集上, 能耗模型预测的绝对误差在  $\pm 1$  J 内, 百分比相对误差的平均值为 0.63 %. 由于本文采用了两轮自平衡机器人的非线性模型进行仿真, 较小的预测误差表明了将机器人动力学模型在平衡点处经线性处理后仍能较好地刻画机器人的非线性动态特性, 验证了本文通过频域分析法得到的运动能耗模型结构准确, 能够很好地描述整个运动控制系统的真实运动能耗.

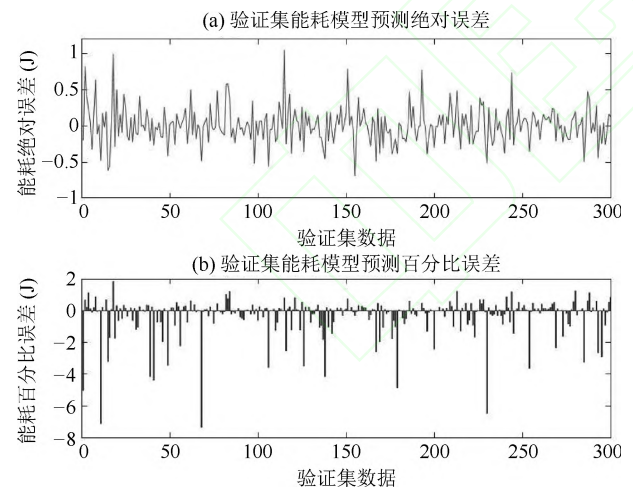


图 5 能耗模型参数验证集拟合效果误差图  
Fig. 5 The fitting effect error graph of energy consumption model parameters in validation set

### 3.2 能耗最优轨迹验证

本节针对平坦路面、无动态障碍物、道路状况不变的室内环境, 利用本文所提算法得到的能耗最优轨迹与通过迭代搜索得到的真实最优能耗轨迹相

比较, 证明了本文所提局部轨迹规划算法的能耗最优性.

默认机器人移动时车轮与地面不发生打滑, 对于给定的行驶环境, 本文采用 A\* 全局路径规划算法生成一条全局路径, 如图 6 所示. 取全局路径上的路径点作为局部轨迹规划的局部目标点, 整个运行路径可看作由 4 条局部轨迹组成, 利用本文所提算法可以得到依次通过各局部目标点的能耗最优期望运行轨迹和运行时间. 表 3 为每段期望最优轨迹对应的运行线速度  $v$ 、旋转角速度  $w$ 、运行方向角的改变值  $\sigma$ 、运行时间  $T$  和运行能耗  $E_{total}$ .

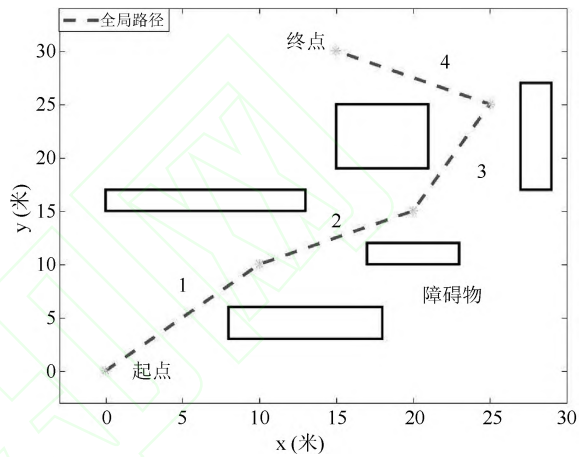


图 6 全局路径  
Fig. 6 Global path

由表 3 可以看出第一段轨迹由于运行时间较长, 并由静止状态到期望状态, 状态改变较大, 所以第一段轨迹能耗相应较大. 而后 3 段各状态差别不大, 能耗较为相似, 符合实际情况. 每一段最优期望轨迹均为匀速圆弧运动, 但如前文所述, 实际运行轨迹与期望轨迹稍有偏差, 但本文在设计能耗模型时已充分考虑了由路径跟踪控制器的动态响应所带来的过渡阶段耗能, 所得能耗模型能准确预测期望轨迹所对应的真实轨迹的能耗, 所以得到的实际运行轨迹即为能耗最优轨迹. 图 7 为基于本文所提算法得到的能耗最优期望轨迹与实际运行轨迹的对比图.

表 3 能耗最优轨迹仿真结果  
Table 3 Energy consumption optimal trajectory simulation results

轨迹序列	分段能耗 $E_{total}$ (J)	运行时间 $T$ (s)	线速度 $v$ (m/s)	角速度 $w$ (rad/s)	方向角改变 $\sigma$ ( $^\circ$ )
1	336.97	28.46	0.499	0.011	36.28
2	252.43	21.42	0.523	-0.011	-20.68
3	256.15	21.38	0.526	0.017	33.06
4	270.15	21.62	0.527	0.03	61



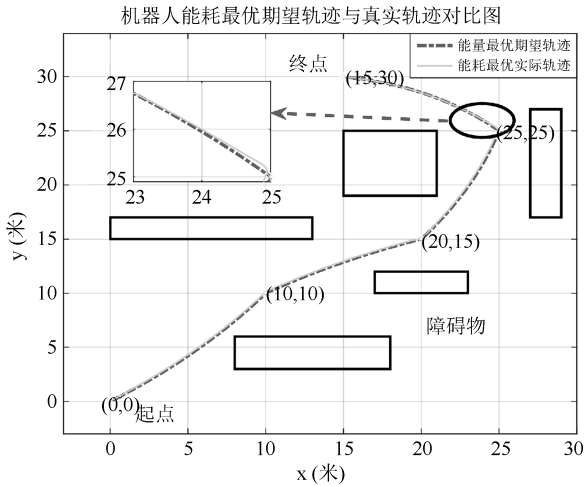


图7 能耗最优期望轨迹与实际轨迹对比图

Fig. 7 Comparison diagram of the optimal energy consumption desired trajectory and actual trajectory

为了更好地描述机器人运行的实际轨迹与期望轨并不完全相同, 两者实时坐标误差如图 8 所示.

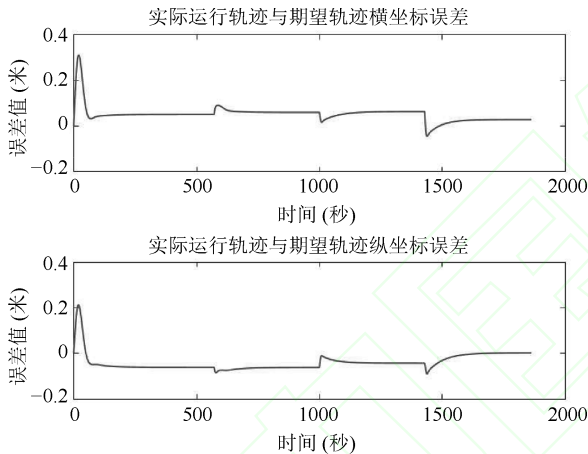


图8 能耗最优期望轨迹与实际轨迹坐标误差图

Fig. 8 Coordinate error graph of the optimal energy consumption desired trajectory and actual trajectory

由图 8 可知, 在每一次期望轨迹状态发生变化时, 由于控制器和机器人的动态响应, 跟踪上新轨迹是一个渐变的过程, 机器人实际位置与期望位置存在相对较大的误差, 但在控制器的作用下能很快收敛到一个较小值, 有效实现轨迹跟踪, 准确达到指定的路径点. 由于本文为了方便地描述期望轨迹  $r$  与能耗间的关系, 采用的是速度控制器, 没有对位置坐标进行跟踪控制, 所以有很小的稳态误差. 但本文所提算法能够在控制器给定的情况下, 通过轨迹优化实现节能. 事实上, 只需修改轨迹参数转换部分, 本文对于任意跟踪控制器均有效.

为了证明由本文所提方案能够找到最小能耗的轨迹, 取图 7 中第一段轨迹进行验证, 采用数值迭代

搜索对经过坐标 (0,0) 和 (10,10) 的所有符合条件的圆心角  $\gamma$  和运行时间  $T$  进行测试. 其中,  $\gamma$  的取值范围为 0.1 rad-1 rad,  $T$  的取值范围为 26 s-32 s, 取值间隔分别为 0.01 rad 和 0.05 s. 在上述范围内, 真实能耗如图 9 中的三维曲面所示. 其中右边箭头指向真实最小能耗, 左边箭头指向通过本算法得出的最小能耗.

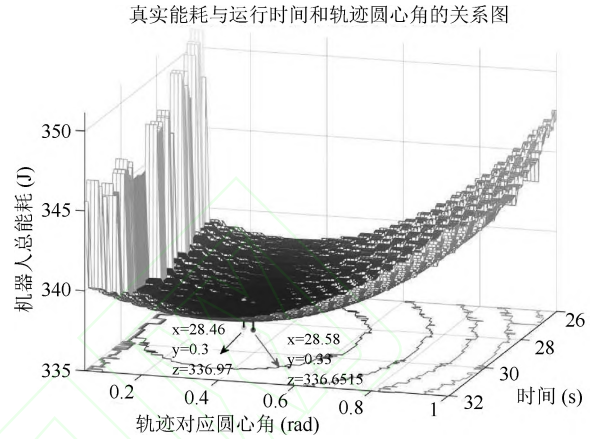


图9 真实能耗与运行时间和轨迹圆心角关系图

Fig. 9 The relational graph of real energy consumption with running time and track circle angle

如图 9 可见, 真实最优能耗为 336.65 J, 对应的  $\gamma$  和  $T$  分别为 0.33 rad 和 28.58 s, 所对应的轨迹为 (0.4971 m/s, 0.012 rad/s, 35.55°), 由表 3 知, 按照本文提出的算法, 得到的能耗最优轨迹为 (0.499 m/s, 0.011 rad/s, 36.28°), 运行时间为 28.46 s, 对应的能耗为 336.97 J. 与真实最优能耗相比误差率为 0.1%, 存在误差的主要原因来自测量误差和参数辨识误差, 但误差较小, 表明本算法能较准确地找到具有最低能耗的运行轨迹, 算法可信度较高.

### 3.3 与其他能耗最优轨迹比较

为验证本文所提算法较其他节能轨迹规划算法具有更好的节能效果, 分别与运行距离最短和能耗最优三次贝塞尔曲线法<sup>[17]</sup> 进行比较. 采用相同的运行环境、起始点和目标点, 分别对上述三种方法进行实验仿真. 对于以运行距离最短为目标的方法, 令每一段直线轨迹的运行时间与通过本文所提算法得到的最优运行时间相同, 每两个局部目标点间期望轨迹为匀速直线运动; 对于能耗最优三次贝塞尔曲线法, 以生成三次贝塞尔曲线的方法使路径光滑, 通过迭代算法优化到达每个局部目标点的运行时间和速度从而达到整体能耗最优. 图 10 为三者对比图, 3 种方法的总能耗和运行时间如表 4 所示.

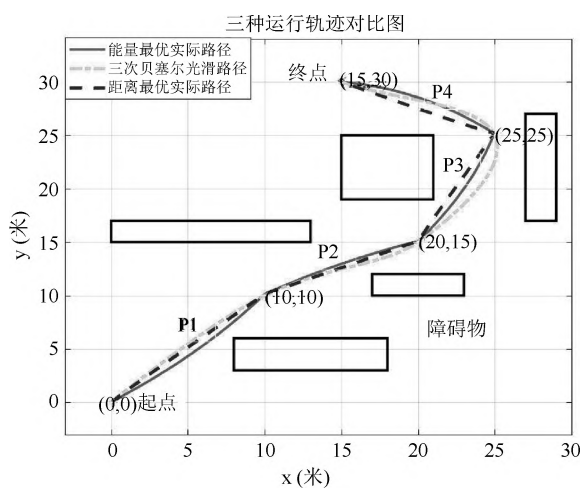


图 10 三种运行轨迹对比图

Fig. 10 Contrast figure of three kinds of running trajectory

表 4 与其他方法仿真结果比较

Table 4 Compare with other methods simulation results

轨迹序列	能耗最优 算法	路径最短 策略	三次贝塞 尔曲线
1	336.97	338.15	345.5
2	252.43	252.03	265.72
3	256.15	255.89	290.72
4	270.15	283.82	292.3
总能耗 (焦耳)	1 115.7	1 129.8	1 203.3
运行时间 (秒)	92.88	92.88	81.32
能耗比率 (%)	100	101.26	107.85

在图 10 中, 实线为利用本文所提算法通过仿真实验得出的实际路径, 虚线为采用运行距离最短方案得出的实际最短路径, 点划线为采用三次贝塞尔曲线得到的光滑路径. 可以看出由本文所提算法得出的路径介于直线和光滑路径之间, 这是因为本文综合考虑了距离最短所增加的状态改变耗能和光滑轨迹所增加的摩擦耗能. 事实上, 所得最优轨迹的形状取决于状态改变耗能  $E_{\text{state}}$  和稳定状态耗能  $E_{\text{fri}}$  在运动能耗中的贡献, 与机器人的转动惯量和摩擦系数有关, 需具体问题具体分析. 如果  $E_{\text{state}}$  远远大于同比的  $E_{\text{fri}}$ , 则通过本文所提算法得到的轨迹更趋近于光滑轨迹, 反之, 趋近于直线. 而对于本文所设定的机器人参数, 由表 4 可以看出, 路径最短方案能耗小于光滑方案, 即  $E_{\text{state}}$  小于同比的  $E_{\text{fri}}$ , 所以所得最优能耗应偏于直线, 与图 10 结果相符.

表 4 证明了只考虑运行距离或轨迹光滑的规划方法能耗不是最优的, 本文由于充分利用了底层轨迹跟踪控制器的动态响应特性, 实现了在直线轨迹和光滑轨迹之间的综合考虑, 所规划的路径能耗更低. 由实验结果可知, 相比于运行距离最短和能耗最

优三次贝塞尔曲线法, 本文所提的能耗最优轨迹规划算法所需能耗分别降低了 1.26 % 和 7.85 %, 节能效果提高明显. 但本文所提方法需先对模型参数进行离线辨识, 对参数变化较为敏感, 并对变化的运行环境 (如摩擦系数) 适应性不强. 针对此不足, 可以采用动态辨识策略, 即在运行过程中实时采集数据, 进行加权辨识, 这将作为下一步的工作.

### 3.4 在多场景下最优轨迹的比较

为了消除运行场景的不同对节能效果的影响, 充分证明在多场景下本文所提方法仍保持其优势, 本小节采用与文献 [17] 图 7(a) 中相同的场景对上述三种方法进行实验. 三种方法结果对比如图 11 所示, 总能耗, 节能率和运行时间如表 5 所示.

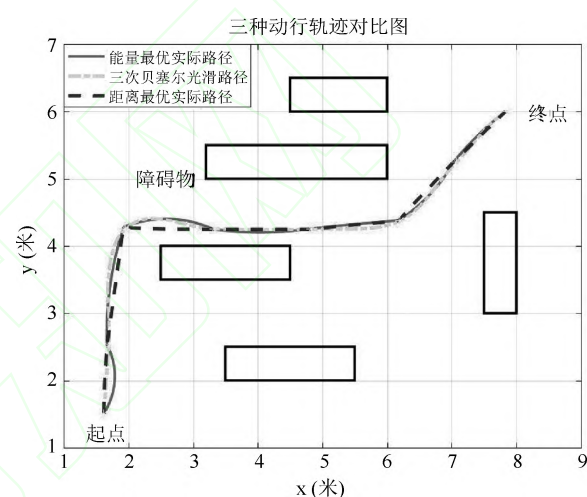


图 11 三种运行轨迹对比图

Fig. 11 Contrast figure of three kinds of running trajectory

表 5 与其他方法仿真结果比较

Table 5 Compare with other methods simulation results

轨迹序列	能耗最优 算法	路径最短 策略	三次贝塞 尔曲线
1	28.43	30.811	26.03
2	40.56	39.87	52.4
3	33.61	36.36	35.12
4	33.89	33.62	36.12
5	30.91	30.93	32.33
6	28.57	29.02	28.82
7	24.68	24.56	25.28
总能耗 (焦耳)	220.64	225.18	236.1
运行时间 (秒)	18.6	18.6	15.3
能耗比率 (%)	100	102.06	107

由表 5 知在多场景下, 相比于运行距离最短和光滑轨迹, 本文所提的能耗最优轨迹仍具有较大优势, 运行场景的不同对节能效果影响不大.

## 4 结论

为了减少移动机器人运行能耗, 延长其工作时间, 本文针对两轮自平衡可移动机器人, 提出了一种新的基于运动控制模型和频域分析的能耗最优轨迹规划算法. 本算法创新地将轨迹规划与轨迹跟踪控制器和机器人动力学模型相结合, 更符合真实情况. 通过分析轨迹与电机输入电压间的传递函数, 将期望轨迹与机器人真实运行能耗直接联系起来, 基于能量在时域与频域上的转换关系, 建立了基于明确机理表达的系统能耗模型. 基于所得能耗模型, 采用最小二乘法对模型参数进行离线辨识, 并通过实验证明了所得能耗模型的准确性, 利用一定的数学转换和参数求导, 直接得到了能耗最优的运行轨迹和对应的运行时间. 这与传统的迭代搜索算法相比, 计算量大大降低. 通过仿真实验结果可知, 由本文所提算法得到的最优轨迹能耗值与真实最低能耗的误差不大于 0.1%; 与最短运行距离和最优能耗三次贝塞尔曲线法相比, 节能效果分别提高 1.26% 和 7.85%, 效果改善明显. 在不同的场景下, 本文所提算法仍保持较大节能优势.

## References

- Mei Y, Lu Y H, Hu Y C, Lee C S G. Deployment of mobile robots with energy and timing constraints. *IEEE Transactions on Robotics*, 2006, **22**(3): 507-522
- Tokekar P, Karnad N, Isler V. Energy-optimal trajectory planning for car-like robots. *Autonomous Robots*, 2014, **37**(3): 279-300
- Cheng Wei-Ming. Research on path planning and tracking control technology in autonomous navigation of mobile robot [Ph.D. dissertation], Nanjing University of Science and Technology, China, 2007  
(成伟明. 移动机器人自主导航中的路径规划与跟踪控制技术研究 [博士学位论文], 南京理工大学, 中国, 2007)
- Chou C C, Lian F L. Velocity space approach with region analysis and look-ahead verification for robot navigation. In: Proceedings of the 48<sup>th</sup> Decision and Control, the 28<sup>th</sup> Chinese Control Conference. Shanghai China: IEEE, 2009. 5971-5976
- Fox, Dieter, Burgard, Wolfram, Thrun, Sebastian. The Dynamic Window Approach to Collision Avoidance. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2002, **4**(1): 23-33
- Henkel C, Bubeck A and Xu W. Energy Efficient Dynamic Window Approach for Local Path Planning in Mobile Service Robotics. *IFAC-PapersOnLine*, 2016, **49**(15): 32-37
- Khatib O. Real-Time Obstacle Avoidance for Manipulators and Mobile Robots. In: Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. Taipei, Taiwan: IEEE, 2003. 90-98
- Han Wei, Sun Kai-Biao. Research on dynamic path planning of fuzzy artificial potential field method. *Computer Engineering and Applications*, 2018, **54**(6): 105-109 (In Chinese)  
(韩伟, 孙凯彪. 基于模糊人工势场法的智能全向车路径规划. 计算机工程与应用, 2018, **54**(6): 105-109)
- Zheng Hui-Jun, Chen Yu-Qiang. Improved ACO-based Path Navigation Algorithm. *Control Engineering of China*, 2016, **23**(4): 608-612 (In Chinese)  
(郑慧君, 陈俞强. 基于改进蚁群的路径导航算法. 控制工程, 2016, **23**(4): 608-612)
- Lamini C, Benhlila S, Elbekri A. Genetic algorithm based approach for autonomous mobile robot path planning. *Procedia Computer Science*, 2018, **127**: 180-189
- Sahoo B, Parhi D, Kumar P B. Analysis of Path Planning of Humanoid Robots using Neural Network Methods and Study of Possible use of Other AI Techniques. *Emerging Trends in Engineering, Science and Manufacturing*, 2018
- Duleba I, Sasiadek J Z. Nonholonomic motion planning based on Newton algorithm with energy optimization. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2003, **11**(3): 355-363
- Chong H K, Kim B K. Minimum-Energy Translational Trajectory Generation for Differential-Driven Wheeled Mobile Robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 2007, **49**(4): 367-383
- Mei Y, Lu Y H, Hu Y C, et al. Energy-efficient motion planning for mobile robots. In: Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. New Orleans, LA, USA: IEEE, 2004: 4344-4349
- Elbanhawi M, Simic M, Jazar R N. Continuous path smoothing for car-like robots using B-spline curves. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 2015, **80**(1): 23-56
- Chen Ling, Wang Sen, Hu Huo-Sheng, McDonald-Maier Klaus, Fei Min-Rui. Novel Path Curvature Optimization Algorithm for Intelligent Wheelchair to Smoothly Pass a Narrow Space. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(12): 1874-1885 (In Chinese)  
(陈灵, 王森, 胡豁生, 麦当劳-麦尔 克劳斯, 费敏锐. 保证智能轮椅平滑通过狭窄通道的路径曲率优化算法. 自动化学报, 2016, **42**(12): 1874-1885)
- Liu S, Sun D. Minimizing Energy Consumption of Wheeled Mobile Robots via Optimal Motion Planning. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2014, **19**(2): 401-411
- Bu Xin-Ping, Su Hu, Zou Wei, Wang Peng, Zhou Hai. Smooth Path Planning Based on Non-uniformly Modeling and Cubic Bezier Curves. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(5): 710-724 (In Chinese)  
(卜新萍, 苏虎, 邹伟, 王鹏, 周海. 基于非均匀环境建模与三阶 Bezier 曲线的平滑路径规划. 自动化学报, 2017, **43**(5): 710-724)
- Wang Y, Wang S, Tan M, Wei Q. Real-Time Dynamic Dubins-Helix Method for 3-D Trajectory Smoothing. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, **23**(2): 730-736

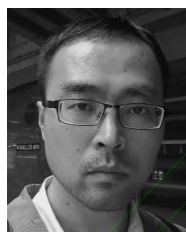


- 20 Wang Y, Wang S, Tan M. Path Generation of Autonomous Approach to a Moving Ship for Unmanned Vehicles. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, **62**(9): 5619-5629
- 21 Yang J, Qu Z H, Wang J, Conrad K. Comparison of optimal solutions to real-time path planning for a mobile vehicle. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2010, **40**(4): 721-731
- 22 Kim H, Kim B K. Minimum-energy translational trajectory planning for battery-powered three-wheeled omnidirectional mobile robots. In: *Proceedings of International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*. IEEE, 2009: 1701-1706
- 23 Wang Jian-Hui, Gu Shu-Sheng. *Principles of Automatic Control*. Beijing: Tsinghua University Press, 2007  
(王建辉, 顾树生. 自动控制原理 (国家精品课程教材). 北京: 清华大学出版社, 2007)
- 24 LennartLjung. *System Identification: User Theory*. Beijing: Tsinghua University Press, 2002  
(LennartLjung. 系统辨识: 使用者的理论. 北京: 清华大学出版社, 2002)
- 25 Hart P E, Nilsson N J, Raphael B. A formal basis for heuristic determination of minimum path cost. *Sequences, Subsequences, & Consequences*. 1968
- 26 Gao Zhi-Wei, Dai Xue-Wu. Design of LQR-PID Optimal Equilibrium and Trajectory Tracking Controller based on Two-Wheeled Self-Balancing Robot. In: *Proceedings of the 28<sup>th</sup> Chinese Process Control Conference*. Chong Qin, China, 2017.7 (In Chinese)  
(高志伟, 代学武. 两轮自平衡小车 LQR-PID 最优平衡和轨迹跟踪控制器设计. 见: 第 28 届中国过程控制会议. 重庆, 中国: 中国自动化学会过程控制专业委员会, 2017.7)
- 27 Trzynadlowski A M. Energy optimization of a certain class of incremental motion DC drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1988, **35**(1): 60-66
- 28 Pollard S. On Parseval's Theorem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1926, s2-**25**(1): 237



**高志伟** 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室硕士研究生. 2016 年获东北大学控制工程学院学士学位. 主要研究方向为移动机器人路径规划与运行控制. E-mail: kinggzw@163.com

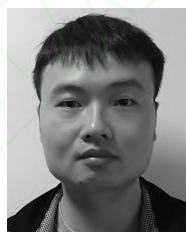
(**GAO Zhi-Wei** M.S. candidate at the State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries at Northeastern University. He received his bachelor degree from Northeastern University in 2016. His research interest covers mobile robots path planning and operation control.)



**代学武** 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室教授. 主要研究方向为动态系统鲁棒状态估计, 无线传感测量与控制、状态监测方面的工作, 及其在工业物联网, 高铁调度等领域的应用. 本文通信作者.

E-mail: daixuewu@mail.neu.edu.cn

(**DAI Xue-Wu** Professor at the State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries at Northeastern University. His research interest include robust state estimation and condition monitoring of industrial systems, Wireless Sensor Actuator Networks, Industrial Internet of Things. He is also interested in networked control systems and train rescheduling. Corresponding author of this paper.)



**郑志达** 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室硕士研究生. 主要研究方向为无线网络控制系统的故障检测.

E-mail: zheng\_zhida@126.com

(**ZHENG Zhi-Da** M.S. candidate at the State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries at Northeastern University. His research interest covers fault detection of wireless network control system.)