概率论与数理统计

一. 事件的运算律

1. 交换律

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

2. 结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3. 分配律

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. 德·摩根律（对偶律）

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

二. 概率

1. 几何型概率

当试验的样本空间是某区域（该区域可以是一维，二维或三维等），以 L(S)表示其几何度量（长度、面积、体积等）。L(S)为有限，且试验结果出现在 S 中任何区域的可能性只与该区域几何度量成正比。

事件 A 的样本点所表示的区域为S_A，则事件 A 的概率为 $P(A) = \frac{L(S_A)}{L(S)} = \frac{S_A\text{的几何度量}}{S\text{ 的几何度量}}$。

2. 条件概率

设 A、B 是两个事件，且 $P(A) > 0$，称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率。

对于任意事件B_1，B_2，$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A)$。

三. 概率的五大计算公式

1. 加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

2. 减法公式

$$P(B - A) = P(B) - P(AB)$$

3. 乘法公式

若 P(A)>0，则 P(AB) =P(B|A)P(A)；若 P(B)>0，则 P(AB) =P(A|B)P(B)。

若 P(AB)>0，则 $P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A) = P(C|AB)P(A|B)P(B)$。

4. 全概率公式

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$，其中$B_iB_j = \phi(i \neq j)$，$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$。

5. 贝叶斯公式

$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$，其中$B_iB_j = \phi(i \neq j)$，$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$。

上述公式中事件B_i的个数可以是可列个。

6. 例题

1) 例题一

生产线	一	二	三	四
生产率	15%	20%	30%	35%
不合格率	0.05	0.04	0.03	0.02

求任意抽取一产品是不合格的概率。

解：

设A_1、A_2、A_3、A_4分别表示四条生产线的产品，B 表示不合格。

$$\begin{aligned}P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4)\\ &= 0.15*0.05 + 0.2*0.04 + 0.3*0.03 + 0.35*0.02 = 0.0315\end{aligned}$$

四. 事件的独立性

A 与 B 独立 <=> $P(AB) = P(A)P(B)$。

A、B、C 两两独立 <=> $\begin{cases}P(AB) = P(A)P(B)\\ P(AC) = P(A)P(C)\\ P(BC) = P(B)P(C)\end{cases}$。

A、B、C 相互独立 <=> $\begin{cases}P(AB) = P(A)P(B)\\ P(AC) = P(A)P(C)\\ P(BC) = P(B)P(C)\\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C)\end{cases}$。

五. 独立的性质及结论

① 若事件 A、B 相互独立，则 A 与$\overline{B}$，$\overline{A}$与 B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立。

② 独立的等价说法

若 $0 < P(A) < 1$，则事件 A、B 独立 <=> $\begin{cases}P(AB) = P(A)P(B)\\ P(B) = P(B|A)\\ P(B) = P(B|\overline{A})\\ P(B|A) = P(B|\overline{A})\end{cases}$。

③ 若A_1，A_2，⋯，A_m，B_1，B_2，⋯，B_n相互独立，则 f（A_1，A_2，⋯，A_m）与 g（B_1，B_2，⋯，B_n）也相互独立，其中 f（*），g（*）分别表示对相应事件作任意事件运算。

④ 若 $P(A) = 0$ 或 $P(A) = 1$，则 A 与任何事件 B 都相互独立。

六. 独立、互斥、互逆的关系

① A 与 B 互逆 → A 与 B 互斥，但反之不一定成立。

② A 与 B 互斥（或互逆）且均为非零概率事件 → A 与 B 不独立。

③ A 与 B 相互独立且均为非零概率事件 → A 与 B 不互斥。

【注】一般情况下，独立和互斥无关，独立推不出互斥、互斥也推不出独立。

七. 分布函数的性质

1. 非负性

$$0 \le F(x) \le 1$$

2. 规范性

$$F(-\infty) = 0\,，\ F(+\infty) = 1$$

3. 单调不减性

对于任意$x_1 < x_2$，有 $F(x_1) \le F(x_2)$。

4. 右连续性

$$F(x_0 + 0) = F(x_0)$$

八. 密度函数的性质

1. 非负性

$$f(x) \ge 0(-\infty < x < +\infty)$$

2. 规范性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d_x = 1$$

① 对于任意实数 a 和 b（a<b），有 $P\{a < X\} \le b = \int_a^b f(x)\, d_x$。

② 对于连续型随机变量 X，有 P｛X＝x｝＝0，对$\forall x \in R$成立。

③ 连续型随机变量的分布函数$F(x)$是连续函数。

④ 在$f(x)$的连续点处，有$F'(x) = f(x)$。

九. 方差的性质

① 设 C 是常数，$D(C) = 0$。（常数的方差等于 0）

② 设 X 是随机变量，C 是常数，$D(CX) = C^2D(X)$　$D(X+C) = D(X)$

③ 设 X、Y 是两个随机变量$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(y)]\}$

④ 若 X、Y 相互独立，则$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

⑤ $D(X) = 0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 E(X) $P\{X = E(X)\} = 1 <=> D(X) = 0$

十. 几个常见的分布

1. 离散型分布

1) 0-1 分布 $\mathbf{X \sim B(1, p)}$

$$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}，(k = 0,1)$$

$$E(X) = p，D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p(1-p)$$

2) 二项分布 $\mathbf{X \sim B(n, p)}$

$$P(X = k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}，(k = 0,1\ldots, n)$$

$$E(X) = np，D(X) = np(1-p)$$

3) 泊松分布 $\mathbf{X \sim P(\lambda)(\lambda > 0)}$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, (k = 0,1,2\ldots)$$

$$E(X) = \lambda，D(X) = \lambda$$

4) 几何分布 $\mathbf{X \sim G(p)}$

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, (0 < p < 1, k = 1,2,\ldots)$$

$$E(X) = \frac{1}{p}，D(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

5) 超几何分布 $\mathbf{X \sim H(N, M, n)}$

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, (k = 0,1,\ldots,\min\{n, M\})$$

2. 连续型分布

1) 均匀分布 $\mathbf{X \sim U(a,b)}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, a<x<b\\ 0，其他\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}，D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

2) 指数分布 $\mathbf{X}\sim E(\lambda)$ $(\lambda>\mathbf{0})$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0，其他\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}，D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

3) 正态分布

a. 一般正态分布 $\mathbf{X\sim N(\mu,\sigma^2)}$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E(X)=\mu，D(X)=\sigma^2$$

b. 标准正态分布 $\mathbf{X\sim N(0,1)}$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<+\infty)$$

i. **性质**

$\phi(-x)=1-\phi(x)$；$\phi(0)=\frac{1}{2}$；$P\{|X|\le\alpha\}=2\phi(\alpha)-1$。

ii. **上α分位点**

设 X~N(0,1)，对于给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，如果μ_α满足条件：$P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha$，则称μ_α为标准正态分布的上α分位点。

iii. **标准正态分布与一般正态分布的关系**

正态分布 X~N(μ,σ^2)，通过线性变换 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$变为标准正态分布。

十一. 随机变量的独立性

1. 定义

① 对于任意实数 x 和 y 有：$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，则称 X 和 Y 相互独立。

② 对于任意 i, j = 1,2…有：$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$，则称二维离散型随机变量 X 和 Y 相互独立。

③ 对于任意实数 x 和 y 有：$f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$，则称二维连续型随机变量 X 和 Y 相互独立。

2. 性质

① 若 X 与 Y 相互独立，f(x)和 g(x)为连续函数，则 f(X)和 g(Y)也相互独立。

② 若X_1，$X_2 \ldots X_n$，Y_1，$Y_2 \ldots Y_m$相互独立，$f(*)$为 n 元连续函数和 $g(*)$为 m 元连续函数，则 $f(X_1, X_2 \ldots X_n)$与 $g(Y_1, Y_2 \ldots Y_m)$也相互独立。

十二. 一维随机变量函数的分布

1. 离散型

问题：若 $P(X=x_i)=P_i, Y=g(X)$，求 Y 的分布律。

方法：$P(X=y_j)=\sum_{g(x_i)=y_i} P(X=x_i)$

2. 连续型

问题：$X \sim f_X(x), Y=g(X)$，求 Y 的分布密度。

方法：分布函数法

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)\int_{g(x)\le y} f_X(x)\,dx$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)$$

十三. 联合分布函数的概念与性质

1. 定义

F(x,y)=P$\{X\le x, Y\le y\}(-\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty)$称为二维随机变量(X,Y)的联合分布函数，它表示随机事件$\{X\le x\}$与$\{Y\le y\}$同时发生的概率。

2. 性质

1) 非负性

对于任意实数 $x,y\in R$，$0\le F(x,y)\le 1$。

2) 规范性

$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0$，$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0$

$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0$，$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1$

3) 单调不减性

$F(x,y)$分别关于 x 和 y 单调不减。

4) 右连续性

$F(x,y)$分别关于 x 和 y 具有右连续性，即 $F(x,y)=F(x+0,y)$，$F(x,y)=F(x,y+0)$，$x,y\in R$。

十四. 二维离散型随机变量及其分布

1. 二维离散型随机变量及其分布

若二维随机变量(X,Y)可能的取值为有限对或可列无穷多对实数，则称(X,Y)为二维离散型随机变量。

2. 联合分布律

$P(X=x_i,Y=y_j)=P_{ij},(i,j=1,2\ldots),P_{ij}\geq 0$；$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}P_{ij}=1$。

3. 边缘分布律

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{+\infty}P_{ij}=P_{i*}(i=1,2,\ldots)$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P_{ij}=P_{*j}(j=1,2,\ldots)$$

4. 条件分布律

对于给定的 j，若 $P\{Y=y_j\}>0(j=1,2,\ldots)$，则称 $P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{P_{ij}}{P_{*j}}(i=1,2,\ldots)$为在$Y=y_j$的条件下，随机变量 X 的条件概率分布。

对于给定的 i，若 $P\{X=x_i\}>0(i=1,2,\ldots)$，则称 $P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{P_{ij}}{P_{i*}}(j=1,2,\ldots)$为在$X=x_i$的条件下，随机变量 Y 的条件概率分布。

十五. 二维连续性随机 变量及其分布

1. 定义

设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为 F(x,y)，如果存在非负可积的二元函数 f(x,y)，使得对任意实数 x,y，有 $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)d_ud_v$，则称(X,Y)为二维连续型随机变量，称函数 f(x,y)为二维随机变量(X,Y)的概率密度函数或联合密度函数。

2. 性质

① $f(x,y)\geq 0(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$。

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,d_xd_y=1$。

③ 设 D 是 xOy 平面上任一区域，则点(x,y)落在 D 内的概率为 $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)d_\sigma$。

④ 若$f(x,y)$在点(x,y)处连续，则有$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial_x\partial_y}$。

3. 边缘密度函数

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)d_y;\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)d_x$$

4. 条件密度函数

当$f_Y(y)>0$时，称$f_{X|Y}(X|Y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在条件 Y=y 下 X 的条件密度函数。

当$f_x(x)>0$时，称$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$为在条件 X=x 下 Y 的条件密度函数。

十六. 两个常见的二维连续型分布

1. 二维均匀分布

1) 定义

设 G 是平面上有界可求面积的区域，其面积为|G|，若二维随机变量(X,Y)具有密度函数

$\mathrm{f(x,y)}=\begin{cases}\frac{1}{|G|},(x,y)\epsilon G\\0,(x,y)\notin G\end{cases}$ 则称(X,Y)在区域 G 上服从二维均匀分布。

2) 性质

若(X,Y)在各边平行于坐标轴的矩形区域 $\mathrm{D}=\{(\mathrm{x,y})|\mathrm{a}\le\mathrm{x}\le\mathrm{b},\mathrm{c}\le\mathrm{y}\le\mathrm{d}\}$上服从二维均匀分布，则它的两个分量 X 和 Y 是独立的，并且分别服从区间[a, b]，[c, d]上的一维均匀分布。

2. 二维正态分布

1) 定义

如果二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为

$$\mathrm{f(x,y)}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{x(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$(-\infty<\mathrm{x}<+\infty,-\infty<\mathrm{y}<+\infty)$。其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，$-1<\rho<1$ 均为常数，则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$和$\rho$的二维正态分布，记作$(\mathrm{X,Y})\sim\mathrm{N}(\mu_1,\mu_2,;\sigma^2{}_1,\sigma^2{}_2;\rho)$。

2) 性质

① $\mathrm{X}\sim\mathrm{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$，$\mathrm{Y}\sim\mathrm{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$。

② X 与 Y 独立的充分必要条件是$\rho=0$。

③ X 与 Y 的非零线性组合服从一维正态分布，且

当 X 与 Y 不独立时，$\mathrm{k_1X+k_2Y\sim N(k_1\mu_1+k_2\mu_2,k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2+2k_1k_2\rho\sigma_1\sigma_2)}$。

当 X 与 Y 独立时，$k_1X+k_2Y\sim\mathrm{N}(k_1\mu_1+k_2\mu_2,k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2)$。

④ 若(X_1,X_2)服从二维正态分布且行列式$\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq0$，则$(\mathrm{a}X_1+\mathrm{b}X_2$，$cX_1+\mathrm{d}X_2)$也服从二维正态分布。

十七. 两个随机变量简单函数的概率分布

1. 离散型

已知(X,Y)的概率分布为 $\mathrm{P}\{X=x_i,Y=y_i\}=P_{ij}$，$i,j=1,2\ldots$则 $\mathrm{Z=g(X,Y)}$的分布律为

$\mathrm{P}(\mathrm{Z}=z_k)=\mathrm{P}\{\mathrm{g(X,Y)}=z_k\}=\sum_{g(x_i,y_i)=z_k}P\{X=x_i,Y=y_i\}$。

2. 连续型

1) 一般方法（分布函数法）

设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为 f(x,y)，则随机变量 Z = g(X,Y)的分布函数和概率密度为$F_z(Z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint_{g(x,y)\le z}f(x,y)\,dx\,dy$，$f_z(Z)=F_z'(\mathrm{Z})$。

2) 公式法（卷积公式）

设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为 f(x,y)，则随机变量 Z=X+Y 的密度函数为

$f_z(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$或$f_z(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,dy$。

上面这个公式就称为独立和卷积公式。

十八. 关于随机变量 X 的数学期望

1. 离散型

2. 连续型

3. 随机变量函数 $Y=g(X)$的期望

1) 离散型

连续型