高等数学

一. 导数

1. 函数的和、差、积、商的求导法则

2. 常数和基本初等函数的导数公式

$(C)' = 0$ $(X^{\mu})' = \mu\chi^{\mu-1}$ $(\sin X)' = \cos X$ $(\cos X)' = -\sin X$

$(\tan X)' = \sec^2 X$ $(\cot X)' = -\csc^2 X$ $(\alpha^X)' = \alpha^X \ln\alpha\,(\alpha > 0, \alpha \neq 1)$

$(e^X)' = e^X$ $(\log_\alpha X)' = \frac{1}{X\ln\alpha}(\alpha > 0, \alpha \neq 1$ $(\ln X)' = \frac{1}{X}$

$(arcsinX)' = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$ $(arccosX)' = -\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$ $(arctanX)' = \frac{1}{1+X^2}$

$(arccotX)' = -\frac{1}{1+X^2}$ $(\ln|X|)' = \frac{1}{X}$

3. 复合函数求导法则

如果$\mu = g(x)$在点 X 处可导，而 $y = f(\mu)$在点$\mu = g(x)$ *可导，那么复合函数*$y = f[g(x)]$在点 X 可导，其导数为$\frac{d_y}{d_x} = f'(\mu)\cdot g'(x)$*或*$\frac{d_y}{d_x} = \frac{d_y}{d_\mu}\cdot\frac{d_\mu}{d_x}$。

4. 常用等价无穷小（当 x->0）

$\sin x \sim x$ $\arcsin x \sim x$ $\tan x \sim x$ $\arctan x \sim x$ $\ln(1+x) \sim x$ $e^x - 1 \sim x$

$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \sim x$ $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$\alpha^x - 1 \sim x\ln\alpha$ $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$ $x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$

$\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3$ $x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3$ $1 - cos_x^\alpha \sim \frac{\alpha}{2}x^2$

二. 积分

1. 不定积分

1) 不定积分基本公式

2) 常见反常积分的敛散性

$$\int_\alpha^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}\text{收敛，} p > 1\\ \text{发散，} p \leq 1\end{cases}(\alpha > 0)$$

$$\int_\alpha^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx\begin{cases}\text{收敛，} p > 1\\ \text{发散，} p \leq 1\end{cases}(\alpha > 1)$$

$$\int_\alpha^{b}\frac{1}{(x-a)^p}dx\begin{cases}\text{收敛，} p < 1\\ \text{发散，} p \geq 1\end{cases}$$

2. 平面图形的面积

1) 直角坐标系

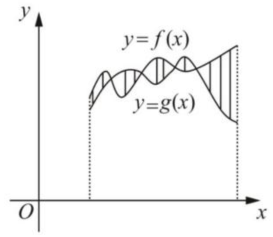

图 1.　　X 轴

$$S_1 = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

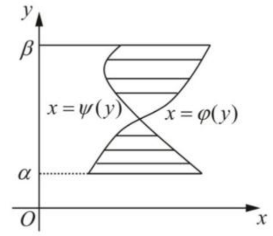

图 2.　　Y 轴

图 3.　　$S_2 = \int_\alpha^\beta |\varphi(x) - \psi(x)|\, dy$

2) 极坐标系

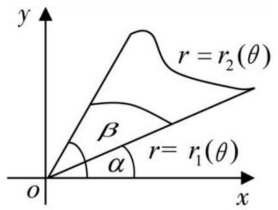

图 4.　　极坐标系

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left|r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)\right| d\theta$$

3. 旋转体体积

平面图形由曲线 y = y(x)与直线 x = a，x = b 和 x 轴围成，则

绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积$V_x = \pi \int_a^b y^2\,(x)\, dx$。

绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积$V_y = 2\pi \int_a^b x\,|y(x)|\, dx$。

4. 平面曲线弧长

$$\mathrm{L}: \mathrm{y} = \mathrm{f(x)}, a \le \mathrm{x} \le \mathrm{b}, l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

$$\mathrm{L}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta, l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$$

$$\rho = \rho(\theta), \alpha \le \theta \le \beta, l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta$$

5. 旋转体的侧面积

若平面图形由曲线 $y = y(x)$与直线 $x = a$，$x = b$和 x 轴围成，则图形绕 x 轴旋转所生成的旋转体的侧面积为$S_{侧} = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$。

6. 二重积分

1) 选择坐标系

直角坐标系下的二重积分表示：

$\iint_D f(x,y)\, d\sigma = \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$。

极坐标系下的二重积分表示：

$\iint_D f(x,y)\, d\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta$。

2) 二重积分的化简

① 如果积分区域 D 关于 x 轴对称，则二重积分

$$\iint_D f(x,y)\, d\sigma = \begin{cases} 0, & f(x,-y) = -f(x,y) \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\, d\sigma, & f(x,-y) = f(x,y) \end{cases}$$

其中，D_1为 D 在 $y \geq 0$ 的部分。

② 如果积分区域 D 关于 y 轴对称，则二重积分

$$\iint_D f(x,y)\, d\sigma = \begin{cases} 0, & f(-x,y) = -f(x,y) \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\, d\sigma, & f(-x,y) = f(x,y) \end{cases}$$

其中，D_1为 D 在 $x \geq 0$ 的部分。

③ 如果积分区域 D 关于 y=x 对称，则

$$\iint_D f(x,y)\, d\sigma = \iint_D f(y,x)\, d\sigma = 2\iint_D (f(x,y) + f(y,x))\, d\sigma$$

三. 质心、形心公式

	质量	质心$(\bar{x},\bar{y})$或$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$
曲线 L 的线密度为ρ	$m = \int_L \rho\, ds$	$\bar{x} = \frac{\int_L x\rho\, ds}{\int_L \rho\, ds}, \bar{y} = \frac{\int_L y\rho\, ds}{\int_L \rho\, ds}$
平面图形 D 的面密度为ρ(x, y)	$m = \iint_D \rho(x,y)\, dx\, dy$	$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D \rho(x,y)\, dx\, dy}$ $\bar{y} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D \rho(x,y)\, dx\, dy}$

密度均匀（即密度为一常数 C）的物体的质心即为形心。

四. 常用的麦克劳林公式

1. e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (0 \leq n \leq \infty)$$

2. sinx

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad (0 \leq n \leq \infty)$$

3. arcsinx

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

4. cosx

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad (0 \le n \le \infty)$$

5. ln (1 + x)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n) \quad (1 \le n \le \infty)$$

6. $(1+x)^m$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

7. $\frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

8. $\frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

9. arctanx

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (0 \le n \le \infty)$$

10. tanx

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1} + \dots \quad (0 \le n \le \infty)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

五. 方程

1. 可分离变量方程

$$f_1(x)g_1(y)\,dx + f_2(x)g_2(y)\,dy = 0$$

分离变量两边同除$g_1(y)f_2(x) \ne 0$，的$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{dx} + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\mathrm{dy} = 0$，然后两边积分即可。

2. 齐次方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $y' = u + x\frac{du}{dx}$, 于是原方程可化为$u + x\frac{du}{dx} = f(u) \Rightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|x| + C$。

3. 一阶线性方程

$y' + p(x)y = q(x)$。求解公式为 $y = [\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C]e^{-\int p(x)\,dx}$。

4. 二阶常系数线性齐次微分方程

$y'' + py' + qy = 0$，其中p，q 均为常数。

特征方程：$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$。

① 当λ_1, λ_2为互异实根时，微分方程通解为 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$。

② 当$\lambda_1 = \lambda_2$时，通解为 $y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda_1 x}$。

③ 当$\lambda = \alpha \pm i\beta$（复根）时，通解 $y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$。

5. 二阶常系数线性非齐次方程

$y'' + py' + qy = f(x)$，其中p，q 均为常数。

通解的求解步骤：

① 求对应的齐次方程的通解 Y(x)。

② 用待定系数法求出非齐次方程的特解$y^*(x)$。

③ 写出非齐次方程的通解为$y^*(x) + Y(x)$。

6. 二阶常系数线性非齐次方程的非齐次项 f(x)与特解y^*的关系

$y'' + py' + qy = f(x)$	特解$y^*(x)$的形式
$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$其中$P_n(x)$为 x 的 n 次多项式	α不是特征根，$y^*(x) = R_n(x)e^{\alpha x}$， α是特征方程的单根，$y^*(x) = xR_n(x)e^{\alpha x}$， α是特征方程的重根，$y^*(x) = x^2R_n(x)e^{\alpha x}$（$R_n(x)$为 n 次多项式的一般形式）
$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$或$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$，其中$P_n(x)$为 n 次多项式的一般形式	$y^*(x) = x^k e^{\alpha x}[\varrho_n(x)\cos\beta x + W_n(x)\sin\beta x]$ $\alpha \pm i\beta$不是特征根，$k = 0$ $\alpha \pm i\beta$是特征根，$k = 1$（$\varrho_n(x), W_n(x)$为 n 次多项式的一般形式）

7. 高于二阶的常系数线性齐次微分方程

n 阶常系数线性齐次微分方程的一般形式是：$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$，其中$p_i (i = 1,2,\dots,n)$为常数。相应的特征方程为$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$。

1) 特征方程有 n 个不同的实根$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

则方程通解 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$。

2) 若λ_0为特征方程的 k 重实根$(k \le n)$

则方程通解中含有$(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1})e^{\lambda_0 x}$。

3) 若$\alpha \pm i\beta$为特征方程的 k 重共轭复根$(2k \le n)$

则方程通解中含有$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1})\cos\beta x + (D_1 + D_2 x + \dots + D_k x^{k-1})\sin\beta x]$。

8. 可降阶微分方程

方程$y^{(n)}(x) = f(x)$，直接求 n 次积分得解。

方程$y'' = f(x, y')$的特点是不显含未知函数 y。令$u = y'(x)$，则微分方程$y'' = f(x, y')$变为一阶微分方程$u' = f(x, u)$。

方程$y'' = f(y, y')$的特点是不显含未知函数 x。令$u = y'$，则$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = uu'$，则微分方程$y'' = f(y, y')$变为$uu' = f(y, u)$，这是一个以 y 为自变量，$u(y)$为未知函数的一阶微分方程。

9. 切线方程与渐近线

切线方程：$y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0)$。

法线方程：$y - y_0 = -\frac{1}{f^{'}(x_0)}(x - x_0)$。

水平渐近线：若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$（或$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$或$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$），那么 y=A 是曲线 $y = f(x)$的水平渐近线。

垂直渐近线：若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$（或$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$），那么 $x = x_0$是曲线 $y = f(x)$的垂直渐近线。

斜渐近线：若$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$且$(f(x) - ax) = b$（或$x \to -\infty$或$x \to +\infty$），那么 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$的斜渐近线。

曲率：$K = \frac{|y^{''}|}{(1+y^{'2})^{\frac{3}{2}}}$。