初等数学

一. 三角函数

1. 函数值与周期

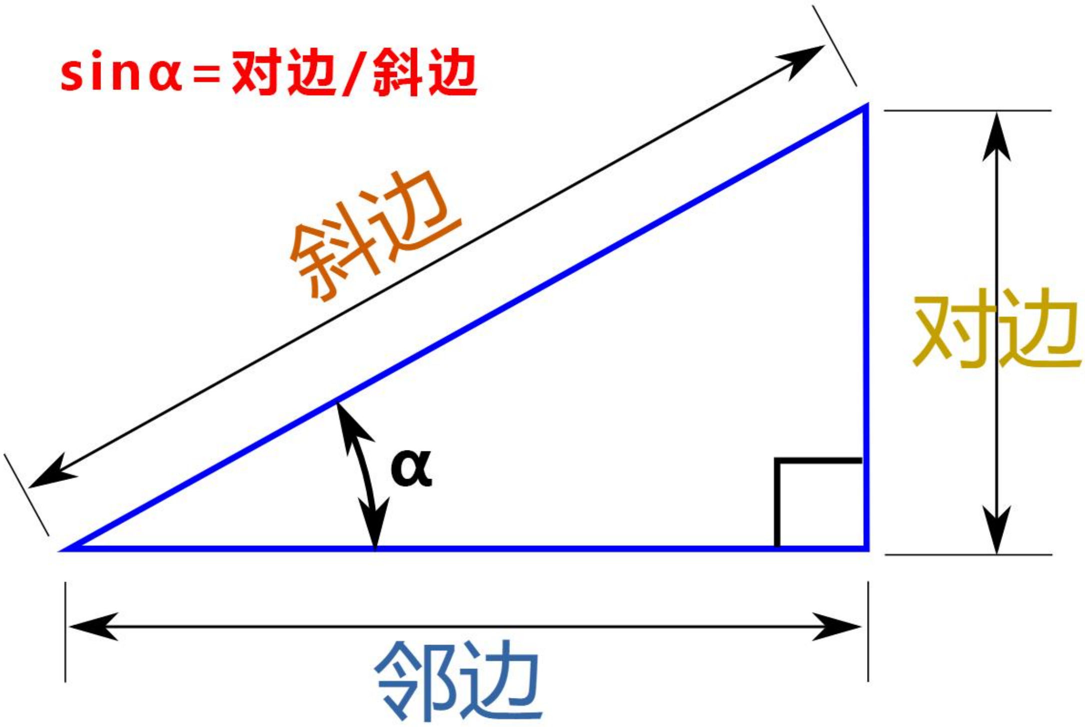

图 1. 直角三角形

对一个特定的角α来说，不论三角形的大小，下面的比值是不变的。

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	无	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	无	0

1) 正弦

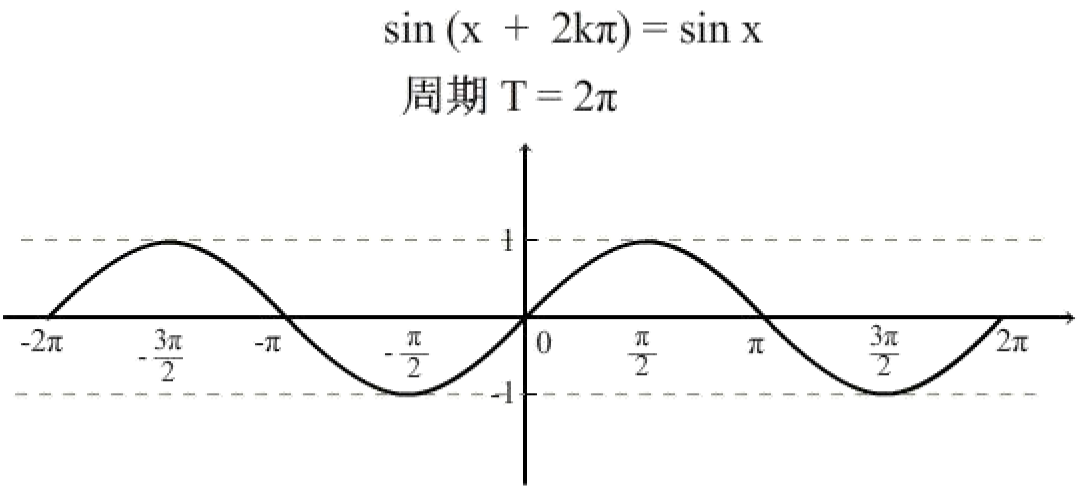

图 2. 正弦函数图像

$$\sin\alpha = \frac{对边}{斜边}$$

2) 余弦

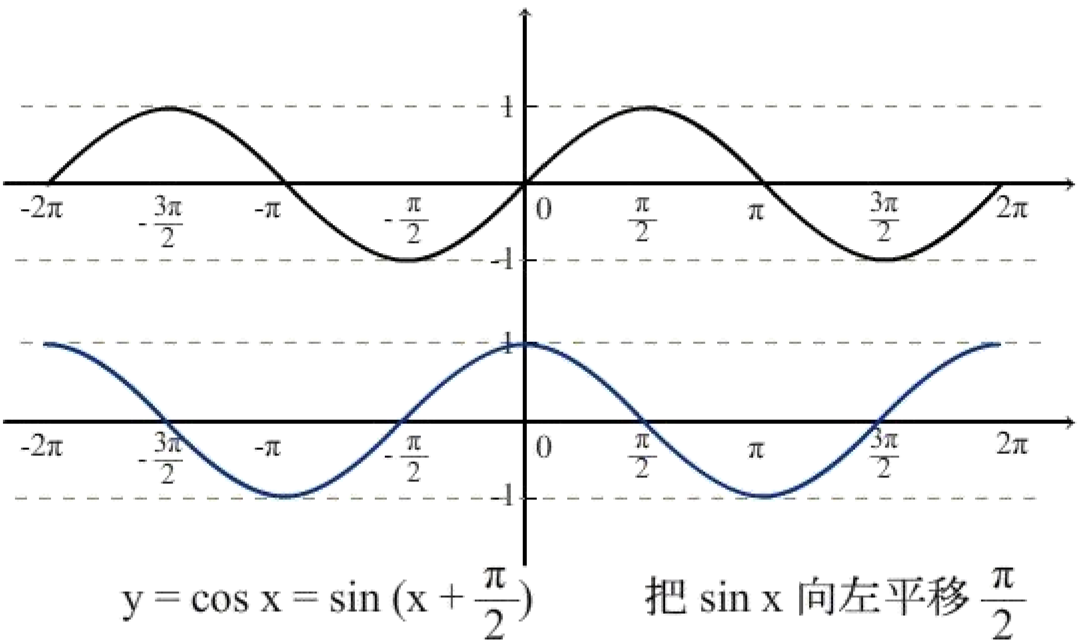

图 3. 余弦函数图像

$$\cos\alpha = \frac{邻边}{斜边}$$

3) 正切

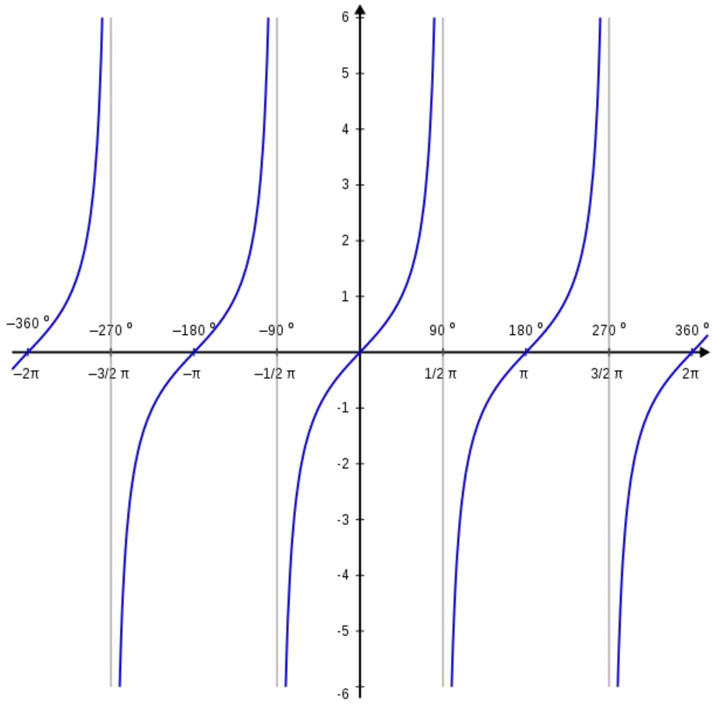

图 4. 正切函数图像

$$\tan\alpha = \frac{对边}{邻边} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

4) 余切

$$\cot\alpha = \frac{邻边}{对边} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

5) 正割

$$\sec\alpha = \frac{斜边}{邻边} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

6) 余割

$$\csc\alpha = \frac{斜边}{对边} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

7) 函数的平移与缩放

2. 关系

1) 平方关系

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \Leftrightarrow \sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Leftrightarrow \csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha$$

$$\sin\alpha\csc\alpha = 1 \quad \cos\alpha\sec\alpha = 1 \quad \tan\alpha\cot\alpha = 1$$

3. 正弦定理

在任意△ABC 中，角 A、B、C 所对的边长分别为 a、b、c，三角形外接圆的半径为 R。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin b}=\frac{c}{\sin c}=2R$$

4. 余弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

5. 两角和差

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

6. 和差化积

$$\sin\alpha+\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

7. 积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

8. 倍角公式

1) 二倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{\tan\alpha+\cot\alpha}$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2\cot \alpha}$$

2) 三倍角公式

9. 半角公式

半角公式的正负号由$\frac{\alpha}{2}$所在象限决定。

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

10. 辅助角公式

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha + \arctan\frac{b}{a}\right)$$

11. 万能公式

12. 诱导公式

奇变偶不变，符号看象限。

1) 公式一

设α为任意角，终边相同的角的同一三角函数其值相等。

$$\sin(2k\pi+\alpha) = \sin\alpha, k\epsilon Z$$
$$\cos(2k\pi+\alpha) = \cos\alpha, k\epsilon Z$$
$$\tan(2k\pi+\alpha) = \tan\alpha, k\epsilon Z$$
$$\cot(2k\pi+\alpha) = \cot\alpha, k\epsilon Z$$

2) 公式二

设α为任意角，则$\pi+\alpha$与α的三角函数值之间的关系为：

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

3) 公式三

任意角$-\alpha$与α的三角函数值之间的关系：

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

4) 公式四

任意角α与$\pi-\alpha$的三角函数值之间的关系：

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

5) 公式五

任意角α与 $2\pi-\alpha$的三角函数值之间的关系：

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

6) 公式六

13. 降幂公式

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$
$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$
$$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

二. 数列

1. 等差数列

在等差数列里，后一项和前一项的差是一个固定的常数。我们称这个常数为公差，记为d。

1) 通项公式

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

2) 求和公式

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\mathrm{d}$$

3) 等差中项

设 a，b，c 成等差数列，则等差中项 b = $\frac{(a+c)}{2}$

2. 等比数列

在等比数列里，后一项和前一项比值是一个固定的常数。我们称这个常数为公比，记为q。

1) 通项公式

$$a_n=a_1q^{n-1}(a_n\neq 0,q\neq 0)$$

2) 求和公式

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & 当q\neq 1\\ na_1 & 当q=1\end{cases}$$

3. 常用的几种数列的和

① $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

② $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

④ $1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

⑤ $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

三. 排列和组合

1. 排列

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)$$

$$A_n^n=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots3*2*1=n!$$

2. 组合

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

1) 性质

$$C_n^m=C_n^{n-m}$$

$$C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$$

3. 常用方法

1) 捆绑法

a. 特征

当题目中出现“相邻”“在一起”“连续”等要求时，考虑捆绑法。

b. 具体用法

① 把相邻的元素捆绑起来，注意内部有无顺序。

② 将捆绑后的元素看成一个元素，与其他元素进行后续排列。

2) 插空法

a. 特征

当题目中出现“间隔”“不相邻”“不连续”等要求时，考虑插空法。

b. 具体用法

① 将可以相邻的元素进行排列，排列后形成若干个空位。
② 将不相邻的元素插入形成的空位中。

3) 插板法

a. 特征

题目形式为把 n 个相同的物品分给 m 个主体时，要求每个主体至少分 1 个，利用插板法。

b. 具体用法

直接用公式：方法数为C_{n-1}^{m-1}

4) 全错位排列

a. 特征

当题目中要求不能一一对应时，比如 n 把钥匙对应 n 个锁，要求每个锁和一把不能打开它的钥匙放进一个信封，这就是全错位排列。

b. 具体用法

用 D 表示 n 个数字的全错位排列。
记住：$D_1=0$，$D_2=1$，$D_3=2$，$D_4=9$，$D_5=44$，事业单位考试中 $D_3=2$，$D_4=9$ 的考频较高。

四. 指数与对数

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$
$$(a^n)^m = a^{mn}$$
$$(\mathrm{ab})^n = a^n \cdot b^n$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}\text{（换底公式）}$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^y = \mathrm{y}\log_a x \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$$

$$x = e^{\ln x} \qquad x = a^{\log_a x}$$

五. 角度与弧度

“ 弧度”和“度”（角度）是度量角大小的两种不同的单位。

一个圆形是 360 度，如果用弧度来描述它，是 2π 弧度。因此，360° 和 2π 都代表“围绕”圆形一圈。

由此我们可以知道，$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$，$1\ \mathrm{rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$。一弧度约等于 57.3 度

在旋转角度（rotation）里的角，以“角度”为单位；而在三角函数（程序中的数学库）里的角要以“弧度”为单位。这个规定是我们首先要记住的!!!

1. 角度的定义

“两条射线从圆心向圆周射出，形成一个夹角和夹角正对的一段弧。当这段弧长正好等于圆周长的 360 分之一时，两条射线的夹角的大小为 1 度。

2. 弧度的定义

两条射线从圆心向圆周射出，形成一个夹角和夹角正对的一段弧。当这段弧长正好等于圆的半径时，两条射线的夹角大小为 1 弧度。

3. 角度与弧度转换

角度= 弧度 * （180/π）

弧度 = 角度 * （π/180）

六. 乘法公式与因式分解

1. 平方差公式

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

2. 完全平方公式

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. 立方和与立方差

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

4. 完全立方公式

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

七. 不等式

1. 普通常用不等式

2. 绝对值不等式

$$\left||a| - |b|\right| \le |a \pm b| \le |a| + |b|$$

3. 重要不等式

八. 平面几何

1. 周长

周长是环绕二维图形边缘的长度。圆的周长叫圆周，其值为半径乘 2π 。

1) 三角形

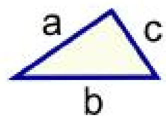

图 5. 三角形周长

周长为 a+b+c。

2) 正方形

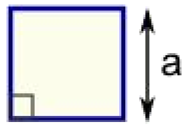

图 6. 正方形周长

其周长等于边长乘 4，即 $4 \times a$。

3) 矩形

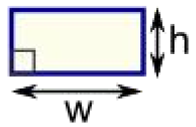

图 7. 矩形周长

其周长等于宽加高的两倍，即 $c = 2(w + h)$。

4) 四边形

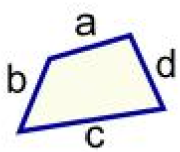

图 8. 四边形周长

四边形的周长等于四边形的四边长相加。

5) 圆

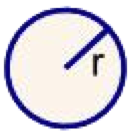

图 9. 圆的周长

圆的周长等于 π 乘直径，即 $2\pi r$。

6) 扇形

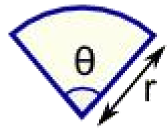

图 10. 扇形周长

扇形的周长则相对麻烦一点，其周长是圆弧加上两条半径，即 $r(\theta+2)$。（r 为半径，θ 为以弧度为单位的角度）

2. 面积

1) 三角形

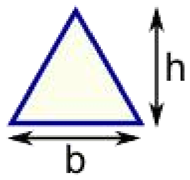

图 11. 三角形面积

三角形的面积是底和高乘积的二分之一，即$\frac{底\times高}{2}=\frac{b\times h}{2}$。

2) 正方形

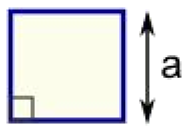

图 12. 正方形面积

正方形的面积非常简单，就是边长的平方，即a^2。

3) 矩形

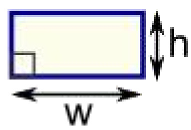

图 13. 矩形面积

矩形的面积就是正方形面积的变体，或者说正方形的面积是矩形面积公式的特例。当宽和高相等时，矩形的面积公式就变为了正方形的面积公式，因此矩形的面积公式为 $s=宽\times高$。

4) 平行四边形

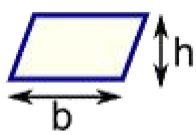

图 14.　平行四边形面积

平行四边形是一个特殊的矩形，因此其面积公式依旧可以使用矩形的面积公式来表示，即 $s = 底 \times 高$。

5) **梯形**

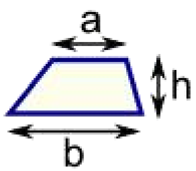

图 15.　梯形面积

梯形的面积则相对要复杂一点，梯形的面积公式是 $s = \frac{(上底+下底)\times 高}{2}$。

6) **圆**-Circle

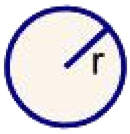

图 16.　圆面积

圆的面积我们是再熟悉不过了，其面积公式为 $s = \pi r^2$

7) **椭圆形**

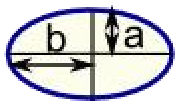

图 17.　椭圆形面积

椭圆形的面积等于 π 乘以椭圆的长半轴和短半轴，即 $S = \pi ab$。

8) **扇形**

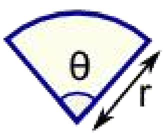

图 18.　扇形面积

扇形的面积与夹角和半径有关，其面积公式 $S = \frac{r^2 \times \theta}{2}$。（$\theta$是以弧度为单位的角度）

九.　立体几何

1.　立方体

立方体也叫正方体或六面体，因为它是有 6 个面组成的多面体。立方体可以用来做很好的 6 面骰子，因为它有规则的形状，且每面面积是相同的。

立方体也是特殊的长方体，因为它的三个长度都相同，且面都为矩形。

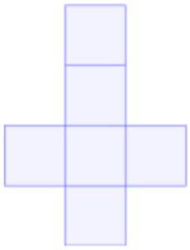

图 19.　　立方体的几何展开

1) 表面积

因为立方体是由 6 个正方形组成的，因此其表面积也就是正方形面积的六倍。

$$\text{表面积} = 6 * \text{棱长}^2$$

2) 体积

对于体积，其实就是一个正方形的面积再乘上一个棱长。

$$\text{体积} = \text{棱长}^3$$

2. 长方体

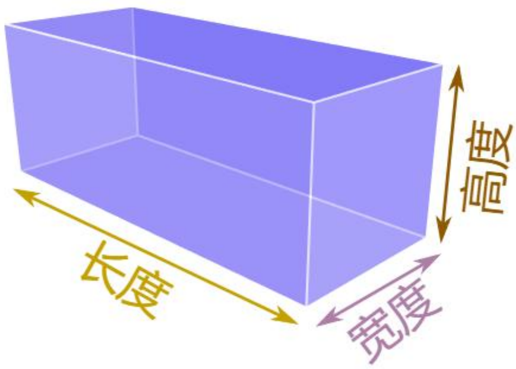

图 20.　　长方体示意图

长方体是像个箱子的物体，它具有六个平面，其所有的角都是直角，所有的面都是矩形。它也是个棱柱体，因为沿着长度的截面是相同的。

1) 表面积

对于长方体而言，它的表面积就是三视图下，各图形面积的两倍之和。因为长方体的各视图下的图形都可能不一样，因此必须精确计算各平面的面积才行。

$$\text{表面积} = 2 * \text{长} * \text{宽} + 2 * \text{长} * \text{高} + 2\ \text{宽} * \text{高}$$

2) 体积

它的体积其实和立方体的计算方式一样，只不过立方体的各个边长是一样的，因此对于立方体就是棱长的三次方。对于长方体而言，我们的长、宽、高都有可能是不一样的，因此体积的计算就是这三者的乘积。

$$\text{体积} = \text{长} * \text{宽} * \text{高}$$

十. 复数

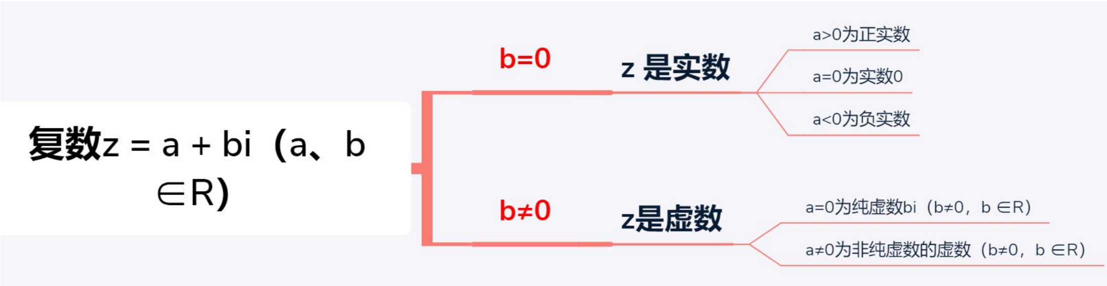

图 21. 复数

1. 定义

任意一个复数 $z \in \mathrm{C}$ 都可以表示为 $z = a + bi$ 的形式，其中 $a, b \in \mathrm{R}$ 而且$i^2 = -1$。我们将 a 称之为这个复数的实部（Real Part），b 称之为这个复数的虚部（Imaginary Part）。

1) 向量表示

因为 $z = a + bi$ 其实就是对于 $\{1, i\}$ 这个基（Basis）的线性组合（Linear Combination），我们也可以用向量来表示一个复数：$z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$，a、b 表示复数的实部和虚部。

因为这个向量有两个元素，我们可以使用复平面上的一个点来表示一个复数。复平面的横坐标 Re 代表它的实部，纵坐标 Im 代表它的虚部。

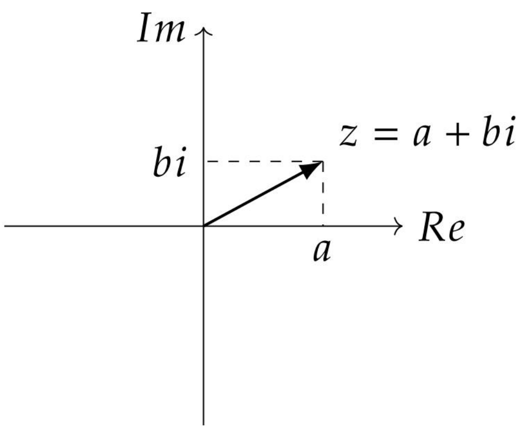

图 22. 用复平面表示复数

2) 矩阵表示

定义两个“基“矩阵 I 和 J，$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。矩阵 J 的平方就等于矩阵$-\mathrm{I}$。可以看出，这个关系和复数里面的实部基（ 1 ）、虚部基（ i ）的关系是对应的（ $i^2 = -1$ ）。因此，将复数的两个基{1，i}替换为{I，J}，即可得到 $z = a\mathrm{I} + b\mathrm{J} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$。

所以，我们可以将复数$z = a + bi$的矩阵形式定义为，$z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$。而一个矩阵可以代表一种变换，所以，一个复数，也可以理解为一种变换。

2. 复数的运算

1) 加法

两个复数相加，只要将实部和实部相加，虚部与虚部相加即可。

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$（a、b、c、d 为实数）

2) 减法

两个复数相减，只要将实部和实部相减，虚部与虚部相减即可。（复数的减法就是加法的逆运算，与实数的减法类似）

$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$（a、b、c、d 为实数）

3) 乘法

复数的乘法也很简单，可以看做是两个关于 i 的多项式相乘。

假设有两个复数：$Z_1=a+bi$，$Z_2=c+di$。

$$
\begin{aligned}
Z_1Z_2 &= (a+bi)(c+di) \\
&= ac+adi+bci+bdi^2 \text{(这里通过下面的乘方法则可以得知} i^2=-1\text{)} \\
&= ac-bd+adi+bci = ac-bd+(bc+ad)i
\end{aligned}
$$

这样看上去并没有什么特别的。但是，借助复数的向量和矩阵表示，我们可以重新理解它所表示的实际含义。

如果将Z_1写成矩阵形式，将Z_2 写成向量形式，则$Z_1Z_2=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$。则可以将其理解为：将$Z_1=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$这个矩阵表示的变换，应用到$Z_2=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$这个向量上。

如果将Z_1和Z_2都写成矩阵形式，则$Z_1Z_2=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{bmatrix}$。则可以将其理解为，将两个矩阵表示的两种变换合并为一个变换。（复数的乘法是满足交换律的）

4) 乘方

a. 乘方法则

$$i^{4n+1}=i; i^{4n+2}=-1; i^{4n+3}=i; i^{4n}=1$$

b. 运算方式

复数乘方与实数的乘方类似，$(a+bi)^2=(a+bi)(a+bi)=(a^2-b^2)+(2ab)i$。

复数的乘方也满足下列性质。

① $Z^mZ^n=Z^{m+n}$

② $(Z^m)^n=Z^{mn}$

③ $(Z_1Z_2)^n={Z_1}^n{Z_2}^n$

5) 除法

复数的除法原理很简单，但是计算要稍微复杂些。

求$\frac{(a+bi)}{(c+di)}$，假设最终的结果为 $x+yi$，我们只需解方程$(a+bi)=(c+bi)(x+yi)$即可。

也就是说方程组 $cx-dy=a$，$cy+dx=b$，解得 $x=\frac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)}$，$y=\frac{(bc-ad)}{(c^2+d^2)}$。

满足$(c+bi)(x+yi)=(a+bi)$的复数 $x+yi(x,y\epsilon R)$，叫做复数 a+bi 除以复数 c+di 的商。

a. 运算方法

将分子和分母同时乘以分母的共轭复数，再用乘法法则运算。

即$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$。

3. 复数相等

如果两个复数相等，则它们的实部和虚部分别相等。反之，如果两个复数的实部和虚部分别相等，则这两个复数相等。$(a+bi)=(c+di)$等价于 a=c 且 b=d

4. 复数的模

将复数的实部与虚部的平方和的正的平方根的值称为该复数的模，记作|Z|。

即对于复数 $Z=a+bi$，它的模$|Z|=\sqrt{a^2+b^2}$。

5. 复数的算术性质

1) 交换性 —— commutativity

对所有 α, β ∈C 都有 α ＋ β ＝ β ＋ α， α β ＝ β α。

2) 结合性 —— associativity

对所有 α, β, λ ∈C 都有(α ＋ β)＋ λ ＝ α ＋(β ＋ λ)，(α β) λ ＝ α (β λ)。

3) 单位元 —— identities

对所有 λ ∈C 都有 λ ＋0＝ λ， λ 1＝ λ。

4) 加法逆元 —— additive inverse

对每个 α ∈C 都存在唯一的 β ∈C 使得 α ＋ β ＝0。

5) 乘法逆元 —— multiplicative inverse

对每个 α ∈C， α ≠0 都存在唯一的 β ∈C 使得 α β ＝1。

6) 分配性质 —— distributive property

对所有 λ, α, β ∈C 都有 λ(α ＋ β)＝ λ α ＋ λ β。

6. 共轭复数

a. 定义

对于复数 $z=a+bi$，称复数$\mathbb{Z}=a-bi$ 为 z 的共轭复数。即两个实部相等，虚部互为相反数的复数互为共轭复数（conjugate complex number）。复数 z 的共轭复数记作$\mathbb{Z}$。

b. 性质

根据定义，若 $z=a+bi$（a∈R，b∈R），则$\mathbb{Z}=a-bi$（a∈R，b∈R）。共轭复数所对应的点关于实轴对称。两个复数 x+yi 与 x-yi 称为共轭复数，它们的实部相等，虚部互为相反数。

在复平面上，表示两个共轭复数的点关于 x 轴对称，而这一点正是“共轭”一词的来源——两头牛平行地拉一部犁，它们的肩膀上要共架一个横梁，这横梁就叫做“轭”。如果用 z 表示 x+yi，那么在字母 z 上面加上一条横线就表示它的共轭复数 x-yi。

① $|\mathrm{x}+\mathrm{yi}| = |\mathrm{x}-\mathrm{yi}|$

② $(\mathrm{x}+\mathrm{yi})(\mathrm{x}-\mathrm{yi}) = x^2 + y^2$

7. 复数相乘与 2D 旋转

既然与复数的相乘代表着$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$矩阵所作出的变换，那这种变换代表着什么呢?

实际上，如果我们对这个矩阵进行一些变形，这个问题就很容易解决了!

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}$$

我们将矩阵中每一个元素都除以了模长$\|Z\| = \sqrt{a^2+b^2}$，并将这一项提到了矩阵外面。经过这一变换，我们只需要观察一下复平面就能够解答之前的问题了。

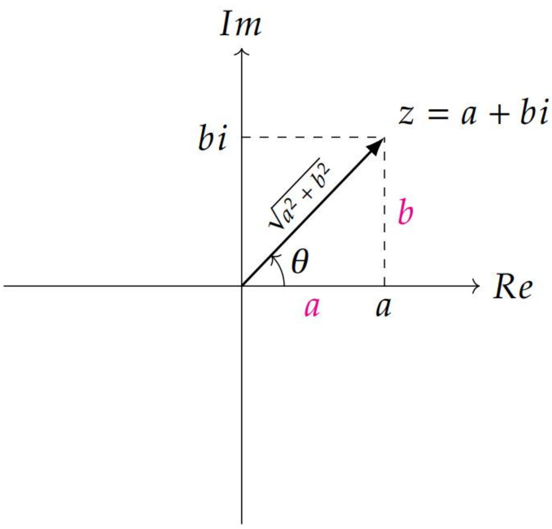

图 23.　　复平面

可以看到，$\|Z\|$正是复数 z 与坐标轴所形成的三角形的斜边长，而 a，b 分别为三角形的两个直角边。如果将斜边与实数轴 Re 正方向的夹角记为 θ 的话，按照三角函数的定义可以得出$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$，且$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta$，这个角度 θ 其实就是 atan2($b$，$a$)（返回以弧度表示的 y/x 的反正切）。

知道了这些，原矩阵就可以变形为，$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$ $\|Z\|\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \|Z\| * E * \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$（对任意方形矩阵 A ＝ EA)） ＝ $\begin{bmatrix} \|Z\| & 0 \\ 0 & \|Z\| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$。

我们将原本的矩阵变形为了两个变换矩阵的复合，其中左边的$\begin{bmatrix} \|Z\| & 0 \\ 0 & \|Z\| \end{bmatrix}$是缩放矩阵，

而右边的$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$则是我们熟悉的 2D 旋转矩阵。即便不认识后面的那个旋转矩阵也没有关系，我们可以看看这个矩阵对两个基$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$的$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$变换效果。

1) **作用于$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$时的变换效果**

$\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\|Z\| & 0\\ 0 & \|Z\|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\|Z\| & 0\\ 0 & \|Z\|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$。

第一步首先将$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$变换到了$\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$的位置，也就是逆时针旋转了 θ 度，接下来$\begin{bmatrix}\|Z\| & 0\\ 0 & \|Z\|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\|Z\|\cos\theta\\ \|Z\|\sin\theta\end{bmatrix}$，缩放矩阵将$\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$缩放了$\|Z\|$倍，变为$\begin{bmatrix}\|Z\|\cos\theta\\ \|Z\|\sin\theta\end{bmatrix}$。总的来说，就是对$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$逆时针旋转了 θ 度，并缩放了$\|Z\|$倍。

2) **作用于$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$时的变换效果**

$\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\|Z\| & 0\\ 0 & \|Z\|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\|Z\| & 0\\ 0 & \|Z\|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$。

第一步首先将$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$变换到了$\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$的位置，与前者一样也是逆时针旋转了 θ 度。

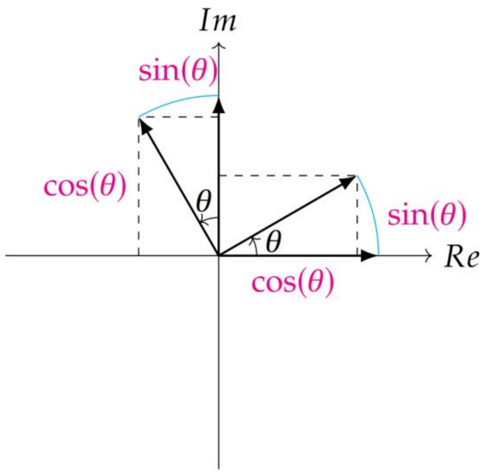

图 24.　将坐标进行旋转

第二步的变换同样会将$\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$缩放为$\begin{bmatrix}-\|Z\|\sin\theta\\ \|Z\|\cos\theta\end{bmatrix}$。这样等于是将整个坐标系逆时针旋转了 θ 角，并缩放了$\|Z\|$倍。

所以，复数的相乘其实是旋转与缩放变换的复合. 如果有一个复数 $z = a+bi$，那么 z 与任意一个复数 c 相乘都会将 c 逆时针旋转 $\theta=\mathrm{atan2}(b, a)$ 度，并将其缩放$\|Z\|=\sqrt{a^2+b^2}$。

如果 $\|Z\|=1$，也就是说$a^2+b^2=1$，即这个复数可以用一个单位向量来表示，那么这个复数所代表的几何意义就完全只有旋转了。所留下来的部分就只有纯粹的旋转矩阵

$$Z=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

如果我们想让 2D 空间中任意一个向量 v 旋转 θ 度，那么我们就可以使用这个矩阵对 v 进行变换:$V'=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$V（2D 旋转公式——矩阵型）。

注意！其实$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$这个旋转矩阵如果写成复数形式的话就是$\cos\theta + i\sin\theta$。

如果我们将向量 $V = \begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$看作是一个复数 $V = x + yi$，其中实部为 x，虚部为 y。那么，我们可以构造一个复数 $Z = \cos\theta + i\sin\theta$，并将它与 V 相乘来进行旋转。旋转 θ 度之后的向量 v' 可以用等价的复数乘法来表示：$V' = ZV = (\cos\theta + i\sin\theta)V$（2D 旋转公式——复数积型）。

8. 复数的极坐标型

$\cos\theta + i\sin\theta$还可以进行下一步的变形。根据欧拉公式（Euler’s Formula），$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$。欧拉公式的证明在微积分的课程中应该都会涉及到，这里就不作证明了。有了这一个等式，我们能将复数表示为 $Z = \|Z\|\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \|Z\|(\cos\theta + i\sin\theta) = \|Z\|e^{i\theta}$。

如果我们定义 $r = \|Z\|$，我们就得到了复数的极坐标形式 $z = re^{i\theta}$。

现在复数的定义就与实部与虚部的两个分量 a，b 无关了，我们可以使用一个缩放因子 r 和旋转角度 θ 的形式来定义任意一个复数，而且它旋转与缩放的性质仍然存在。

如果我们想对 2D 空间中向量 $V = \begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix}$进行旋转并缩放，我们可以类似地将这个向量看作是一个复数 $V = x + yi$。那么，经过旋转 θ 度，缩放 r 倍之后的向量 V' 就可以这样计算：$V' = re^{i\theta}V$。

如果仅需要旋转 θ 度的话，可以令缩放因子 $r = 1$，那么变换后的结果就是：$V' = e^{i\theta}V$。

这样我们就得到了 2D 旋转公式——指数型：$V' = e^{i\theta}V$。

这三种 2D 旋转公式其实都是等价的，根据不同的需求我们可以使用旋转的不同形态。在我们之后讨论四元数的时候，我们也会看到非常类似的公式。

9. 旋转的复合

如果我们有两个代表 2D 旋转的单位复数，$Z_1 = \cos\theta + i\sin\theta$，$Z_2 = \cos\phi + i\sin\phi$ 以及一个向量 $V = x + yi$，我们可以先对 V 进行Z_1的旋转$V' = Z_1V$，在此基础上，我们对V'进行Z_2的旋转$V'' = Z_2(Z_1V) = (Z_2Z_1)V$（复数乘法的结合律）。

如果我们将这两次旋转所作出的等效变换称之为 Z_{net}，那么$V'' = (Z_2Z_1)V = Z_{net}V$。因此，$Z_{net} = Z_2Z_1$；又因为复数的相乘遵守交换律，所以$Z_{net} = Z_2Z_1 = Z_1Z_2$。

如果尝试计算一下 Z_{net}，我们就会发现$Z_{net} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos\theta\cos\phi + i(\cos\theta\sin\phi) + i(\sin\theta\cos\phi) - \sin\theta\sin\phi = (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + (\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)i$。

上面的式子利用三角恒等式可以化简为，$Z_{net} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos(\theta + \phi) + i * sin(\theta + \phi)$。所以，当我们对两个 2D 旋转进行复合时，所得到的变换 Z_{net} 仍是一个旋转，而且与施加的次序无关。这个等效变换的旋转角是 Z_1 与Z_2旋转角之和。