

高等数学

一. 导数

1. 函数的和、差、积、商的求导法则

2. 常数和基本初等函数的导数公式

$$\begin{aligned}
 (C)' &= 0 & (X^\mu)' &= \mu X^{\mu-1} & (\sin X)' &= \cos X & (\cos X)' &= -\sin X \\
 (\tan X)' &= \sec^2 X & (\cot X)' &= -\csc^2 X & (\alpha^X)' &= \alpha^X \ln \alpha \quad (\alpha > 0, \alpha \neq 1) \\
 (e^X)' &= e^X & (\log_\alpha X)' &= \frac{1}{X \ln \alpha} \quad (\alpha > 0, \alpha \neq 1) & (\ln X)' &= \frac{1}{X} \\
 (\arcsin X)' &= \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} & (\arccos X)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-X^2}} & (\arctan X)' &= \frac{1}{1+X^2} \\
 (\operatorname{arccot} X)' &= -\frac{1}{1+X^2} & (\ln |X|)' &= \frac{1}{X}
 \end{aligned}$$

3. 复合函数求导法则

如果 $\mu = g(x)$ 在点 X 处可导, 而 $y = f(\mu)$ 在点 $\mu = g(x)$ 可导, 那么复合函数 $y = f[g(x)]$ 在点 X 可导, 其导数为 $\frac{dy}{dx} = f'(\mu) \cdot g'(x)$ 或 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx}$.

4. 常用等价无穷小 (当 $x \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned}
 \sin x &\sim x & \arcsin x &\sim x & \tan x &\sim x & \arctan x &\sim x & \ln(1+x) &\sim x & e^x - 1 &\sim x \\
 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) &\sim x & (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x & 1 - \cos x &\sim \frac{1}{2}x^2 \\
 \alpha^x - 1 &\sim x \ln \alpha & x - \sin x &\sim \frac{1}{6}x^3 & \tan x - x &\sim \frac{1}{3}x^3 & x - \ln(1+x) &\sim \frac{1}{2}x^2 \\
 \arcsin x - x &\sim \frac{1}{6}x^3 & x - \arctan x &\sim \frac{1}{3}x^3 & 1 - \cos x &\sim \frac{1}{2}x^2
 \end{aligned}$$

二. 积分

1. 不定积分

1) 不定积分基本公式

2) 常见反常积分的敛散性

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} \text{收敛, } p > 1 \\ \text{发散, } p \leq 1 \end{cases} \quad (\alpha > 0)$$

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx \begin{cases} \text{收敛, } p > 1 \\ \text{发散, } p \leq 1 \end{cases} \quad (\alpha > 1)$$

$$\int_{\alpha}^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \begin{cases} \text{收敛, } p < 1 \\ \text{发散, } p \geq 1 \end{cases}$$

2. 平面图形的面积

1) 直角坐标系

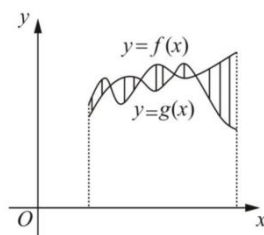


图 1. X 轴

$$S_1 = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

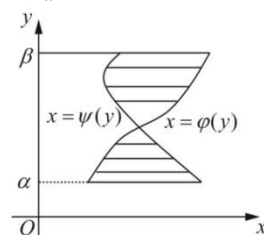


图 2. Y 轴

图 3. $S_2 = \int_\alpha^\beta |\varphi(y) - \psi(y)| dy$

2) 极坐标系

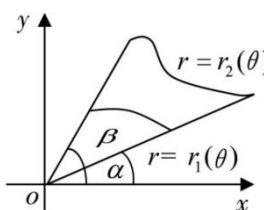


图 4. 极坐标系

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta |r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)| d\theta$$

3. 旋转体体积

平面图形由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 和 x 轴围成, 则

绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 $V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx$ 。

绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 $V_y = 2\pi \int_a^b x |y(x)| dx$ 。

4. 平面曲线弧长

$$L: y = f(x), a \leq x \leq b, l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta, l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

$$\rho = \rho(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta$$

5. 旋转体的侧面积

若平面图形由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 和 x 轴围成, 则图形绕 x 轴旋转所生成的旋转体的侧面积为 $S_{\text{侧}} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ 。

6. 二重积分

1) 选择坐标系

直角坐标系下的二重积分表示:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

极坐标系下的二重积分表示:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta.$$

2) 二重积分的化简

① 如果积分区域 D 关于 x 轴对称, 则二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f(x, -y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f(x, -y) = f(x, y) \end{cases}$$

其中, D_1 为 D 在 $y \geq 0$ 的部分。

② 如果积分区域 D 关于 y 轴对称, 则二重积分

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f(-x, y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f(-x, y) = f(x, y) \end{cases}$$

其中, D_1 为 D 在 $x \geq 0$ 的部分。

③ 如果积分区域 D 关于 $y=x$ 对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma = 2 \iint_D (f(x, y) + f(y, x)) d\sigma$$

三. 质心、形心公式

| | 质量 | 质心 (\bar{x}, \bar{y}) 或 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ |
|-----------------------------|--------------------------------|--|
| 曲线 L 的线密度为 ρ | $m = \int_L \rho ds$ | $\bar{x} = \frac{\int_L x \rho ds}{\int_L \rho ds}, \bar{y} = \frac{\int_L y \rho ds}{\int_L \rho ds}$ |
| 平面图形 D 的面密度为 $\rho(x, y)$ | $m = \iint_D \rho(x, y) dx dy$ | $\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}$ $\bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}$ |

密度均匀 (即密度为一常数 C) 的物体的质心即为形心。

四. 常用的麦克劳林公式

1. e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (0 \leq n \leq \infty)$$

2. $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad (0 \leq n \leq \infty)$$

3. $\arcsin x$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

4. $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad (0 \leq n \leq \infty)$$

5. $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n) \quad (1 \leq n \leq \infty)$$

6. $(1+x)^m$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

7. $\frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

8. $\frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

9. $\arctan x$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (0 \leq n \leq \infty)$$

10. $\tan x$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \dots + \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots \quad (0 \leq n \leq \infty)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

五. 方程

1. 可分离变量方程

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

分离变量两边同除 $g_1(y)f_2(x) \neq 0$, 的 $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0$, 然后两边积分即可。

2. 齐次方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$, $y' = u + x \frac{du}{dx}$, 于是原方程可化为 $u + x \frac{du}{dx} = f(u) \Rightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|x| + C。$$

3. 一阶线性方程

$y' + p(x)y = q(x)$ 。求解公式为 $y = \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right] e^{-\int p(x)dx}$ 。

4. 二阶常系数线性齐次微分方程

$y'' + py' + qy = 0$, 其中 p, q 均为常数。

特征方程: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 。

- ① 当 λ_1, λ_2 为互异实根时, 微分方程通解为 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 。
- ② 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时, 通解为 $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$ 。
- ③ 当 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ (复根) 时, 通解 $y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ 。

5. 二阶常系数线性非齐次方程

$y'' + py' + qy = f(x)$, 其中 p, q 均为常数。

通解的求解步骤:

- ① 求对应的齐次方程的通解 $Y(x)$ 。
- ② 用待定系数法求出非齐次方程的特解 $y^*(x)$ 。
- ③ 写出非齐次方程的通解为 $y^*(x) + Y(x)$ 。

6. 二阶常系数线性非齐次方程的非齐次项 $f(x)$ 与特解 y^* 的关系

| $y'' + py' + qy = f(x)$ | 特解 $y^*(x)$ 的形式 |
|---|--|
| $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ 其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式 | α 不是特征根, $y^*(x) = R_n(x)e^{\alpha x}$, α 是特征方程的单根, $y^*(x) = xR_n(x)e^{\alpha x}$, α 是特征方程的重根, $y^*(x) = x^2R_n(x)e^{\alpha x}$ ($R_n(x)$ 为 n 次多项式的一般形式) |
| $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x$ 或 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$, 其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式的一般形式 | $y^*(x) = x^k e^{\alpha x} [\varrho_n(x) \cos \beta x + W_n(x) \sin \beta x]$ $\alpha \pm i\beta$ 不是特征根, $k = 0$ $\alpha \pm i\beta$ 是特征根, $k = 1$ ($\varrho_n(x), W_n(x)$ 为 n 次多项式的一般形式) |

7. 高于二阶的常系数线性齐次微分方程

n 阶常系数线性齐次微分方程的一般形式是: $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$, 其中 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为常数。相应的特征方程为 $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$ 。

- 1) 特征方程有 n 个不同的实根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
则方程通解 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$ 。
- 2) 若 λ_0 为特征方程的 k 重实根 ($k \leq n$)
则方程通解中含有 $(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda_0 x}$ 。
- 3) 若 $\alpha \pm i\beta$ 为特征方程的 k 重共轭复根 ($2k \leq n$)
则方程通解中含有 $e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \dots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$ 。

8. 可降阶微分方程

方程 $y^{(n)}(x) = f(x)$, 直接求 n 次积分得解。

方程 $y'' = f(x, y')$ 的特点是不显含未知函数 y 。令 $u = y'(x)$, 则微分方程 $y'' = f(x, y')$ 变为一阶微分方程 $u' = f(x, u)$ 。

方程 $y'' = f(y, y')$ 的特点是不显含未知函数 x 。令 $u = y'$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = uu'$, 则微分方程 $y'' = f(y, y')$ 变为 $uu' = f(y, u)$, 这是一个以 y 为自变量, $u(y)$ 为未知函数的一阶微分方程。

9. 切线方程与渐近线

切线方程: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ 。

法线方程: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ 。

水平渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$), 那么 $y=A$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线。

垂直渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$), 那么 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐近线。

斜渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ (或 $x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow +\infty$), 那么 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线。

曲率: $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 。