线性代数

一. 点和向量

点(Point)是 n 维空间中的一个位置，在数学中，坐标属于标量，只表示大小，不表示方向。

矢量(Vector,也被称为向量)，通常来说，矢量是指 n 维空间中一种包含了模(magnitude)和方向(direction)的有向线段，它同时具备长度和方向信息，顶点的法线向量、切线向量等都是矢量。

在数学上，常用一条有向线段来表示向量。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。

图 1. 二维向量

上图表示以点 b 为起点，点 a 为终点的向量$\overrightarrow{\boldsymbol{ba}}$。区分点和矢量之间的不同非常重要，尽管它们在数学表达式上是一样的，都是一串数字而已。如果一定要给它们之间建立一个联系的话，我们可以认为，任何一个点都可以表示成一个从原点出发的矢量。

1. 具体来讲

矢量的模指的是这个矢量的长度。一个矢量的长度可以是任意的非负数。

矢量的方向则描述了这个矢量在空间中的指向。

矢量的表示方法和点类似。我们可以使用 v=(x,y)来表示二维矢量，用 v=(x,y,z)来表示三维矢量，用 v=(x,y,z,w)来表示四维矢量。

为了方便阐述，我们对不同类型的变量在书写和印刷上使用不同的样式。

对于标量，我们使用小写字母来表示，如 a，b，x，y，z，，a 等。

对于矢量，我们使用小写的粗体字母来表示，如 **a**，**b**，**u**，**v** 等。

对于矩阵，我们使用大写的粗体字母来表示，如 **A**，**B**，**S**，**M**，**R** 等。

2. 自由向量

在实际问题中，有些向量与其起点有关(例如质点运动的速度与该质点的位置有关，一个力与该力的作用点的位置有关) ,有些向量与其起点无关。由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，因此在数学上我们只研究与起点无关的向量,并称这种向量为自由向量，即只考虑向量的大小和方向而不论它的起点在什么地方。当遇到与起点有关的向量时,可在一般原则下作特别处理。

对于自由向量，如果两个向量$\vec{\boldsymbol{a}}$和$\vec{\boldsymbol{b}}$的大小相等,且方向相同，我们就说向量$\vec{\boldsymbol{a}}$和$\vec{\boldsymbol{b}}$是相等的，记作$\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{b}}$.这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的。

3. 点和矢量的区别

点是一个没有大小之分的空间中的位置，而矢量是一个有模和方向但没有位置的量。从这里看，点和矢量具有不同的意义。但是，从表示方式上两者非常相似。

在前面我们提到，矢量通常用于描述偏移量，因此，它们可以用于描述相对位置，即相对于另一个点的位置，此时矢量的尾是一个位置，那么矢量的头就可以表示另一个位置了。

而一个点可以用于指定空间中的一个位置（即相对于原点的位置）。如果我们把矢量的尾固定在坐标系原点，那么这个矢量的表示就和点的表示重合了。下图表示了点和矢量之间

的关系。

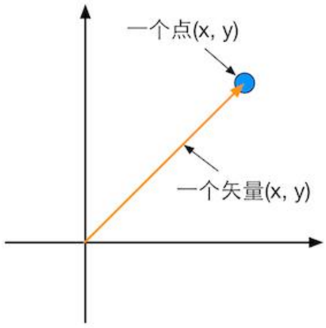

图 2.　　点和矢量之间的关系

尽管上面的内容看起来显而易见，但区分点和矢量之间的不同是非常重要的，尽管它们在数学表达式上是一样的，都是一串数字而已。如果一定要给它们之间建立一个联系的话，我们可以认为，任何一个点都可以表示成一个从原点出发的矢量。为了明确点和矢量的区别，在后面的内容中，我们将用于表示方向的矢量称为方向矢量。

4. 矢量的基础运算

1) 矢量和标量的乘除

标量是只有模没有方向的量，虽然我们不能把矢量和标量进行相加或者相减的运算（想象一下，我们会尝试把速度和距离进行相加吗），但可以对它们进行乘法运算，结果会得到一个不同长度且可能方向相反的新的矢量。

公式非常简单，我们只需要把矢量的每个分量和标量相乘即可：

$$\mathrm{k}\mathbf{v} = (\mathrm{k}v_x, \mathrm{k}v_y, \mathrm{k}v_z)$$

类似的，一个矢量也可以被一个非零的标量进行除法运算。这等同于和这个标量的倒数相乘：

$$\frac{\mathbf{v}}{k} = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})}{k} = \frac{\mathbf{1}}{k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \left(\frac{\mathrm{x}}{k}, \frac{\mathrm{y}}{k}, \frac{\mathrm{z}}{k}\right), \ \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

注意，对于乘法来说，矢量和标量的位置可以互换。但对于除法，只能是矢量被标量除，而从几何意义上看，把一个矢量**v**和一个标量 k 相乘，意味着对矢量**v**进行一个大小为 k 的缩放。

例如，如果想要把一个矢量放大两倍，就可以乘以 2。当 k<0 时，矢量的方向也会取反，下图展示了这样的一些例子。

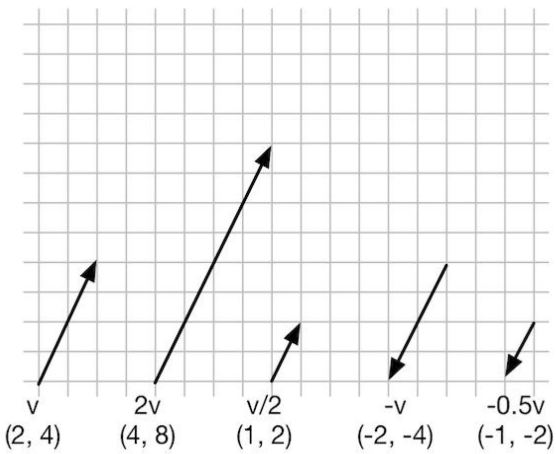

图 3.　　二维矢量和一些标量的乘法和除法

2) 矢量的加法和减法(必须同维度)

我们可以对两个矢量进行相加或相减，其结果是一个相同维度的新矢量。

我们只需要把两个矢量的对应分量进行相加或相减即可。

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$$
$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$$

需要注意的是，一个矢量不可以和一个标量相加或相减，或者是和不同维度的矢量进行运算。

从几何意义上来看，对于加法，我们可以把矢量$\mathbf{a}$的头连接到矢量$\mathbf{b}$的尾，然后画一条从$\mathbf{a}$的尾到$\mathbf{b}$的头的矢量，来得到$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$相加后的矢量。也就是说，如果我们从一个起点开始进行了个位置偏移$\mathbf{a}$，然后又进行一个位置偏移$\mathbf{b}$，那么就等同于进行了一个$\mathbf{a}+\mathbf{b}$的位置偏移。这被称为矢量加法的三角形定则。矢量的减法也是类似的，其方向指向被减向量。

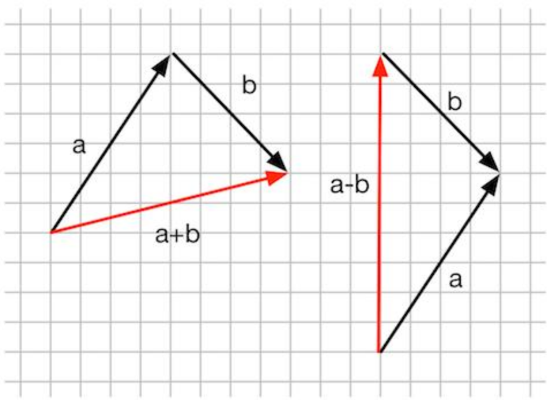

图 4.　　二维矢量的加法和减法

在计算机图形学中，矢量通常用于描述位置偏移（简称位移）。因此，我们可以利用矢量的加法和减法来计算一点相对于另一点的位移。

假设，空间内有两点 a 和 b。我们可以用矢量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$来表示它们相对于原点的位移。如果我们想要计算点 b 相对于点 a 的位移，就可以通过把$\mathbf{b}$和$\mathbf{a}$相减得到，如下图所示。

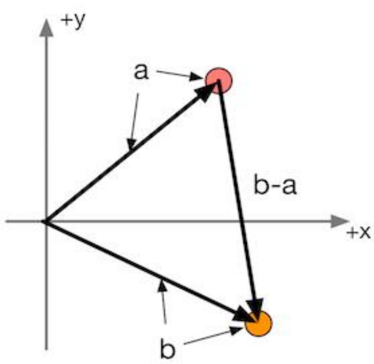

图 5.　　使用矢量减法来计算从点 a 到点 b 的位移

5. 单位矢量

在很多情况下，我们只关心矢量的方向而不是模。例如，在计算光照模型时，我们往往需要得到顶点的法线方向和光源方向，此时我们并不关心这些矢量有多长。

在这些情况下，我们就需要计算单位矢量（unit vector）。

单位矢量指的是那些模为 1 的矢量。单位矢量也被称为被归一化的矢量（normalized vector）。

对任何给定的非零矢量，把它转换成单位矢量的过程就被称为归一化(normalization)。给定任意非零矢量 v，我们可以计算和 v 方向相同的单位矢量。在这里，我们将通过在一个矢量的头上添加一个戴帽符号来表示单位矢量，例如$\widehat{\boldsymbol{V}}$。

为了对矢量进行归一化，我们可以用矢量除以该矢量的模来得到。

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}，\mathbf{v}\text{是任意非零矢量}$$

零矢量（即矢量的每个分量值都为 0，如$\mathbf{v} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$）是不可以被归一化的。这是因为做除法运算时分母不能为 0。

从几何意义上看，对二维空间来说，我们可以画一个单位圆，那么单位矢量就可以是从圆心出发、到圆边界的矢量。在三维空间中，单位矢量就是从一个单位球的球心出发、到达球面的矢量。

下图给出了二维空间内的一些单位矢量。

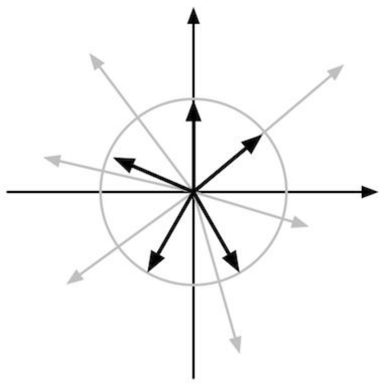

图 6.　　二维空间的单位矢量都会落在单位圆上

需要注意的是，在后面我们将会不断遇到法线方向（也被称为法矢量）、光源方向等，这些矢量不一定是归一化后的矢量。由于我们的计算往往要求矢量是单位矢量，因此在使用前应先对这些矢量进行归一化运算。

6. 向量在轴上的投影

7. 数量积、向量积

1) 数量积（点乘）

向量$\vec{\boldsymbol{a}}$和$\vec{\boldsymbol{b}}$的数量积，计作$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}$，即$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}| \cos \theta$

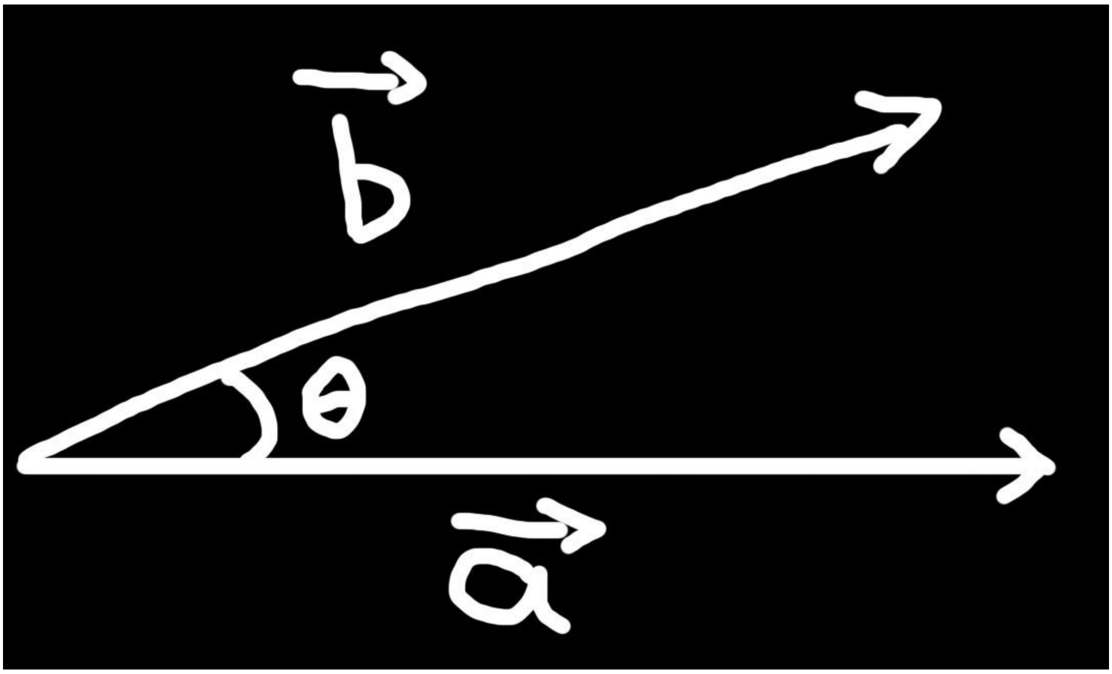

图 7.　　向量的数量积

因为$|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$，当$\vec{a} \neq 0$时是向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$的方向上的投影，用 $\mathrm{Prj}_a b$ 来表示这个投影，便有$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\mathrm{Prj}_a \mathrm{b}$。

当$\vec{b} \neq 0$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|\mathrm{Prj}_b \mathrm{a}$。

这就是说，两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积。

a.　几何意义

点积的几何意义很重要，因为点积几乎应用到了图形学的各个方面。其中一个几何意义就是投影（projection）。

假设，有一个单位矢量$\hat{\boldsymbol{a}}$和另一个长度不限的矢量$\mathbf{b}$。现在，我们希望得到$\mathbf{b}$在平行于$\hat{\boldsymbol{a}}$的一条直线上的投影。那么，我们就可以使用点积$\hat{\boldsymbol{a}} \cdot \mathbf{b}$来得到$\mathbf{b}$在$\hat{\boldsymbol{a}}$方向上的有符号的投影。

那么，投影到底是什么意思呢？这里给出一个通俗的解释。

我们可以认为，现在有一个光源，它发出的光线是垂直于$\hat{\boldsymbol{a}}$方向的，那么$\mathbf{b}$在$\hat{\boldsymbol{a}}$方向上的投影就是$\mathbf{b}$在$\hat{\boldsymbol{a}}$方向上的影子，如下图所示。

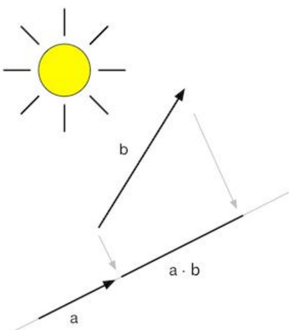

图 8.　　矢量 b 在单位矢量 a 方向上的投影

需要注意的是，投影的值可能是负数。投影结果的正负号与$\hat{\boldsymbol{a}}$和$\mathbf{b}$的方向有关：当它们的方向相反（夹角大于 90°）时，结果小于 0；当它们的方向互相垂直（夹角为 90°）时，

结果等于 0；当它们的方向相同（夹角小于 90°）时，结果大于 0。下图给出了这 3 种情况的图示。

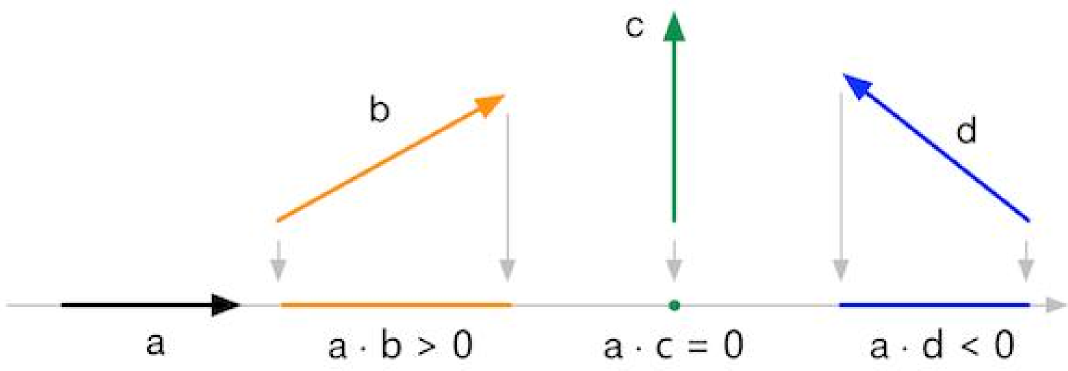

图 9. 点积的符号

也就是是说，点积的符号可以让我们知道两个矢量的方向关系。小于 0 就是方向相反；大于 0 就是方向相同；等于 0 就是垂直。

b. 代数表示

设$\vec{a} = (X_1, Y_1, Z_1)$，$\vec{b} = (X_2, Y_2, Z_2)$。

则$\vec{a} \cdot \vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$

c. 推论

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$（因为向量是同一向量，夹角 θ 为 0）=>$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \cos 0$。

有两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$如果$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$，那么$\vec{a} \perp \vec{b}$；反之，如果$\vec{a} \perp \vec{b}$，那么$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$。（因为零向量与任何向量都垂直，因此前置条件非零向量可不要。）

这意味着，我们可以直接利用点乘来求向量的模，而不需要使用模的计算公式。当然，我们需要对点积结果进行开平方的操作来得到真正的模。

但很多情况下，我们只是想要比较两个矢量的长度大小，因此可以直接使用点积的结果。毕竟，开平方的运算需要消耗一定性能。

d. 运算规律

① 交换律

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

② 分配律

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

③ 结合律

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) \text{（其中}\lambda\text{为常数）}$$

因为$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$所以当$\vec{a}$和$\vec{b}$都不是零向量时，$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

2) 向量积（叉乘）

与数量积不同的是，向量积的结果依旧是一个向量，而非一个标量。

$\vec{c}$的模$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，其中 θ 为$\vec{a}$和$\vec{b}$之间的夹角。（$\vec{c}$的指向按右手准则，从$\vec{a}$转向$\vec{b}$确定）

向量$\vec{c}$叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积，计作$\vec{a}\times\vec{b}$=>$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$（向量$\vec{c}$垂直于$\vec{a}$与$\vec{b}$）

a. 代数表示

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$$

b. 推论

$\vec{a}\times\vec{a} = 0$（因为夹角为 0）

对于两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，如果$\vec{a}\times\vec{b} = 0$，那么$\vec{a} \parallel \vec{b}$，反之，如果$\vec{a} \parallel \vec{b}$，那么$\vec{a}\times\vec{b} = 0$。（由于零向量与任何向量都平行，前置条件可忽略）

c. 运算规律

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$，交换律对向量积不成立。所以我们可以使用叉乘的正负值来判断 a，b 的相对位置，即 b 是处于 a 的顺时针还是逆时针方向。

分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

结合律：$(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$（其中λ为常数）

d. 几何意义

由公式$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$可以知道，如果以向量$\vec{a}$和$\vec{b}$为边构成一个平行四边形，那么这两个向量外积的模，与这个平行四边形的面积相等。

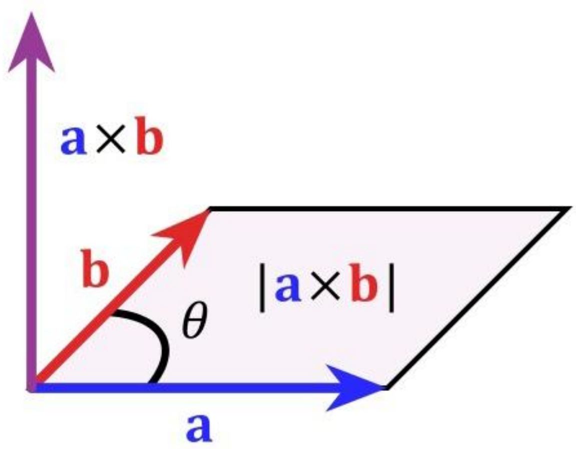

图 10.　　叉乘的几何意义

我们知道了叉乘的几何意义是平行四边形的面积，那么就可能出现一种情况，如果$\vec{a}$和$\vec{b}$平行（可以是方向完全相同，也可以是完全相反）怎么办，不就不能构建平行四边形了吗？

我们可以认为构建出来的平行四边形面积为 0，那么$\vec{a} \times \vec{b} = 0$。注意，这里得到的是零向量，而不是标量 0。

下面，我们来看结果矢量的方向。实际上，我们有两个方向可以选择，这两个方向都和这两个矢量垂直。那么，我们要选择哪个方向呢？

这里就要和之前提到的左手坐标系和右手坐标系联系起来了，如下图所示。

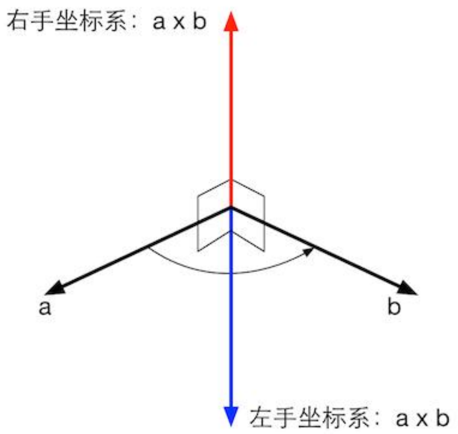

图 11.　分别使用左手坐标系和右手坐标系得到的叉积结果

这个结果是怎么得到的呢？举起我们的双手！哦，不……先举起我们的右手。

在右手坐标系中，$\vec{a} \times \vec{b}$的方向将使用右手法则来判断。我们先想象把手心放在了$\vec{a}$和$\vec{b}$的尾部交点处，然后张开手掌让手掌方向和$\vec{a}$的方向重合，再弯曲四指让它们向$\vec{b}$的方向靠拢，最后伸出我们的大拇指！

大拇指指向的方向就是右手坐标系中$\vec{a} \times \vec{b}$的方向了。如果实在不明白怎么摆放和扭动手，那么就看下面的图好了。

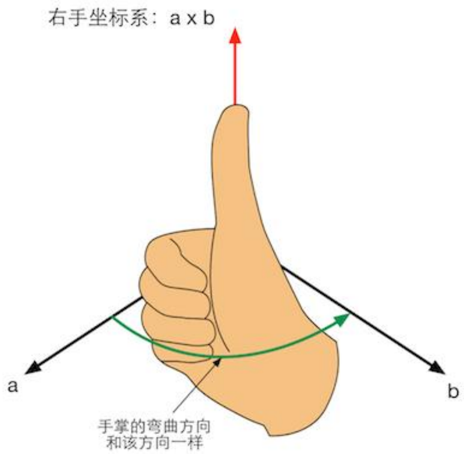

图 12.　使用右手法则判断右手坐标系中 a×b 的方向

同理，我们可以使用左手法则来判断左手坐标系中$\vec{a} \times \vec{b}$的方向。赶紧举起我们的左手试试吧（可能就会发现这个姿势比较扭曲）！

需要注意的是，虽然看起来左右手坐标系的选择会影响叉乘的结果，但这仅仅是“看起

来”而已。

从叉乘的数学表达式可以发现，使用左手坐标系还是右手坐标系不会对计算结果产生任何影响，它影响的只是数字在三维空间中的视觉化表现而已。当从右手坐标系转换为左手坐标系时，所有点和矢量的表达和计算方式都会保持不变，只是当呈现到屏幕上时，我们可能会发现，“咦，怎么图像反过来了！”。

当我们想要两个坐标系达到同样的视觉效果时，可能就需要改变一些数学运算公式。

那么，叉积到底有什么用呢？最常见的一个应用就是计算垂直于一个平面、三角形的矢量。另外，还可以用于判断三角面片的朝向。

8. 向量的内积（点乘）

设有 n 维向量

$\vec{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ，$\vec{\boldsymbol{Y}}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$，令$[\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{Y}}]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

$[\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{Y}}]$ 称为向量$\vec{\boldsymbol{X}}$和$\vec{\boldsymbol{Y}}$的内积。

内积是两个向量之间的一种运算，其结果是一个实数。

1) 内积性质

其中$\vec{\boldsymbol{X}}$、$\vec{\boldsymbol{Y}}$、$\vec{\boldsymbol{Z}}$为 n 维向量，λ为实数。

a. 对称性

$[\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{Y}}]=[\vec{\boldsymbol{Y}},\vec{\boldsymbol{X}}]$

b. 线性性

$[\lambda\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{Y}}]=\lambda[\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{Y}}]=[\vec{\boldsymbol{X}},\lambda\vec{\boldsymbol{Y}}]$

c. 分配律

$[\vec{\boldsymbol{X}}+\vec{\boldsymbol{Y}},\vec{\boldsymbol{Z}}]=[\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{Z}}]+[\vec{\boldsymbol{Y}},\vec{\boldsymbol{Z}}]$

d. 正定性

当$\vec{\boldsymbol{X}}=0$ 时，$[\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{X}}]=0$；当$\vec{\boldsymbol{X}}\neq 0$ 时，$[\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{X}}]>0$。

$[\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{Y}}]^2\leq[\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{X}}][\vec{\boldsymbol{Y}},\vec{\boldsymbol{Y}}]\Leftrightarrow[\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{Y}}]^2\leq||\vec{\boldsymbol{X}}||\cdot||\vec{\boldsymbol{Y}}||$

9. 向量的范数（长度）

令$\|\vec{\boldsymbol{X}}\|=\sqrt{[\vec{\boldsymbol{X}},\vec{\boldsymbol{X}}]}=\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}$

$\|\vec{\boldsymbol{X}}\|$称为 n 维向量$\vec{\boldsymbol{X}}$的长度（或范数）。

例子：$\vec{\boldsymbol{\alpha}}=(1,3,5)^T$则$\|\vec{\boldsymbol{\alpha}}\|=\sqrt{1^2+3^2+5^2}=\sqrt{35}$

1) 性质

a. 非负性

当$\vec{X} \neq 0$时，$\|\vec{X}\| > 0$；当$\vec{X} = 0$时，$\|\vec{X}\| = 0$。

b. 齐次性

$\|\lambda\vec{X}\| = \sqrt{[\lambda\vec{X}, \lambda\vec{X}]} = \sqrt{\lambda^2[\vec{X}, \vec{X}]} = |\lambda|\sqrt{[\vec{X}, \vec{X}]} = |\lambda|\|\vec{X}\|$（其中$\lambda$为常数）

若$\|\vec{X}\| = 1$时，则称$\vec{X}$为单位向量。若$\alpha \neq 0$，取$\vec{X} = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$，则$\vec{X}$是一个单位向量。由向量$\vec{\alpha}$得到$\vec{X}$的过程称为把向量$\vec{\alpha}$单位化。

二. 行列式

行列式一定是一个正方形矩阵得到的，即行列式一定是 n 行 n 列。

1. 二阶行列式

1) 几何意义

平行四边形的面积。

2) 计算

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cd$$

即主对角线相乘减去副对角线相乘。

2. 三阶行列式

1) 几何意义

平行六面体的体积。

2) 计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

3. n 阶行列式

n 阶行列式完全展开后有 n!项。

1) 计算

不同行不同列元素乘积的代数和。

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$$

该项前面带何值是看，列这个排列是偶排列还是奇排列。当 $p_1p_2p_3\ldots p_n$ 为偶排列时，该项前面带正号；当 $p_1p_2p_3\ldots p_n$ 为奇排列时，该项前面带负号。

4. 性质

① 行列式与它的转置行列式相等。

② 对换行列式的两行（列），行列式变号。(奇偶性发生变化)
③ 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于 0。
④ 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于 0。
⑤ 行列式某一行（列）中所有元素都乘同一数，等于用数 k 乘此行列式。
⑥ 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号外面。
⑦ 把行列式的某一行（列）的各元素乘同一数然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变。(某行（列）的 k 倍加到另一行（列），行列式值不变)
⑧ 某行（列）所有元素都是两个数的和，则可把行列式写成两个行列式之和。(n 阶行列式如果每一行（列）都是两个数的和，则应写成 2^n 个 n 阶行列式的和)

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1) 例题

a. 不计算行列式的值，用行列式性质证明 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}=0$。

i. **<u>解法一</u>**

某行（列）的 k 倍加到另一行（列），行列式值不变

行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于 0。

把第 2 行的-1 倍加到第 3 行，再把第 1 行的-1 倍加到第 2 行。

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \xRightarrow{r_3+(-1)r_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xRightarrow{r_2+(-1)r_1} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

ii. **<u>解法二</u>**

行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于 0。

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8-1 \\ 2 & 5 & 10-2 \\ 3 & 6 & 12-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 10 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix}=0$$

b. 证明 $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix}=0$。

行列式与它的转置行列式相等。

行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号外面。

$$D=\begin{vmatrix}0 & -a & b\\ a & 0 & -c\\ -b & c & 0\end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & a & -b\\ -a & 0 & c\\ b & -c & 0\end{vmatrix}$$

$$\because D=-D\therefore D=0$$

5. 特殊的行列式

1) 主对角线上三角与下三角行列式

上三角行列式是对角线下方的元素全为零，下三角行列式是对角线上方的元素全为零！

$$上三角行列式=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$下三角行列式=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2) 副对角线上三角与下三角行列式

上三角行列式是对角线下方的元素全为零，下三角行列式是对角线上方的元素全为零！

$$副对角线上三角行列式=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

$$副对角线下三角行列式=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$$

3) 对角行列式

主对角线以上和以下的元素都为 0 的行列式。

$$主对角线行列式=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}*a_{22}*\ldots*a_{nn}。$$

4) 例题

a. **计算** $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$

iii. **<u>解法一</u>**

某行（列）的 k 倍加到另一行（列），行列式值不变。

行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号外面。

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xRightarrow{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\Rightarrow 6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\begin{matrix}r_2+(-1)r_1\\r_3+(-1)r_1\\\Rightarrow\\r_4+(-1)r_1\end{matrix}6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}$$

$$=48$$

iv. **解法二**

上三角行列式是对角线下方的元素全为零。

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\begin{matrix}r_2+(-1)r_1\\r_3+(-1)r_1\\\Rightarrow\\r_4+(-1)r_1\end{matrix}\begin{vmatrix}3&1&1&1\\-2&2&0&0\\-2&0&2&0\\-2&0&0&2\end{vmatrix}\begin{matrix}c_1+c_2\\c_1+c_3\\\Rightarrow\\r_4+(-1)r_1\end{matrix}\begin{vmatrix}6&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=6*2*2*2$$

$$=48$$

三. 全排列和对换

1. 全排列（排列）

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列。

2. 逆序

一个排列中，如果一个大的数排在一个小的数的前面，就称这两个数构成一个逆序。一个排列中的所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列。

3. 对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的叫做对换，将相邻两个元素对换，叫做相邻对换。

1) 定理

① 一个排列中的任意两个元素对换，排列奇偶性改变。

② 奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数，偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数。

③ 任意一个 n 阶排列可经一系列对换变成自然排列。

四. 矩阵

1. 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$）排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{matrix}$$称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵。

1) 方阵

行数和列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。阶矩阵 A 也计作A_n。

2) 行向量

只有一行的矩阵 $A=[a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n]$，称为行矩阵，又称行向量。

3) 列向量

只有一列的矩阵 $B=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_3\end{bmatrix}$，称为列矩阵，又称列向量。

4) 同型矩阵

两个矩阵的行数相等、列数也相等时，就称它们是同型矩阵。若两个矩阵是同型矩阵，且对应元素相等，就称矩阵 A 与矩阵 B 相等，计作 A=B。

5) 零矩阵

元素都是零的矩阵称为零矩阵，计作 O。（注意，不同型的零矩阵是不同的）

6) 对角矩阵

除主对角线的元素以外，其余元素都是 0 的矩阵。

$$\begin{bmatrix}a_{11}&0&0&0\\0&a_{22}&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&a_{nn}\end{bmatrix}$$

7) 单位矩阵

主对角线的元素全是 1，其余元素都是 0 的矩阵。

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

8) 上三角和下三角矩阵

上三角矩阵，其主对角线下方的元素全是 0。

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\vdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&a_{mn}\end{bmatrix}，当 i>j 时，a_{ij}=0。$$

下三角矩阵，其主对角线上方的元素全是 0。

$$\begin{bmatrix}a_{11}&0&0&0\\a_{12}&a_{22}&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{12}&a_{12}&a_{12}&a_{mn}\end{bmatrix}，当 i<j 时，a_{ij}=0。$$

9) 对称矩阵与反对称矩阵

a. 对称矩阵

设 A 为 n 阶方阵，如果满足$A^T=\mathrm{A}$，即$a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$。那么 A 称为对称矩阵，简称对称阵，对称矩阵的特点是，它的元素以对角线为对称轴对应相等。

PS：

$\begin{bmatrix}1&2&0\\2&3&-1\\0&-1&5\end{bmatrix}$是一个对称矩阵。

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$是一个对称矩阵。

b. 反对称矩阵

设 A 为 n 阶方阵，如果满足$A^T =- \mathrm{A}$，即$a_{ij} =- a_{ji}(i,j = 1,2,\cdots,n)$。那么 A 称为反对称矩阵，反对称矩阵的特点是，它的元素以对角线为对称轴，元素数值对应相反。

PS：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}\text{是一个反对称矩阵。}$$

2. 矩阵的计算

1) 矩阵加法

设有两个 m × n 矩阵 $\mathrm{A} = (a_{ij})$和 $\mathrm{B} = (b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 A+B，规定为 $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$。

注意，只有当两个矩阵是同型矩阵时，这两个矩阵才能进行加法运算。

a. 运算规律

① $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{B} + \mathrm{A}$
② $(\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C} = \mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{C})$
③ $\mathrm{A} + (-\mathrm{A}) = \mathrm{O}$
④ $\mathrm{B} = \mathrm{A} + (- \mathrm{B})$

b. 例题

① 若 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$，$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$，求 A+B。

解：

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1+8 & 3+3 & (-2)+5 \\ 0+1 & (-4)+2 & 5+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

注意，只有当两个矩阵是同型矩阵时，这两个矩阵才能进行加法运算。

2) 数与矩阵相乘

数λ与矩阵 A 的乘积计作λA 或 Aλ，规定为$\lambda\mathrm{A} = \mathrm{A}\lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$。（即，数乘以矩阵中的每一个元素）

a. 运算规律

① $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
② $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
③ $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

b. 例题

① 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$，求 3A。

解：

$$3A = \begin{bmatrix} 3*1 & 3*3 & 3*(-2) \\ 3*0 & 3*(-4) & 3*5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -6 \\ 0 & -12 & 15 \end{bmatrix}$$

3) 矩阵与矩阵相乘

前面的一个矩阵决定行数，后一个矩阵决定列数。注意，只有当第一个矩阵（左矩阵）的列数，等于第二个矩阵（右矩阵）的行数时，两个矩阵才能相乘。

a. 运算规律

矩阵之间的乘法不满足交换律，特殊情况下除外。
① $(AB)C = A(BC)$ （结合律）
② $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
③ $A(B + C) = AB + AC$，$(B + C)A = BA + CA$
④ $AE = EA = A$，单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数 1。

b. 例题

4) 矩阵的转置

把矩阵 A 的行换成同序数的列，所得到的一个新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，计作A^T。

矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$的转置矩阵为$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

a. 运算规律

矩阵的转置也是一种运算，满足下述的运算规律。
① $(A^T)^T = A$
② $(A + B)^T = A^T + B^T$
③ $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
④ $(AB)^T = B^T A^T$
⑤ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

b. 例题

5) 方阵的行列式

6) 重点例题

a. 设$A = E - \alpha\alpha^T$，$B = E + 2\alpha\alpha^T$，其中$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，则 AB 为。（矩阵乘法和转置运算）

3. 矩阵的逆
4. 矩阵的秩
5. 缩放矩阵

1) 二维缩放

缩放变换非常简单，它的目的是增大或者缩小物体的尺寸。假设一个物体以坐标轴原点为缩放中心点，它顶点的最大值是(x,y)。如果我们要求它在 X 方向上缩放 S_x 倍，在 Y 方向上缩放 S_y 倍，进行坐标变换后的坐标为$x' = S_x * x$ 而$y' = S_y * y$。我们也是可以使用矩阵来表示上述的两个公式。

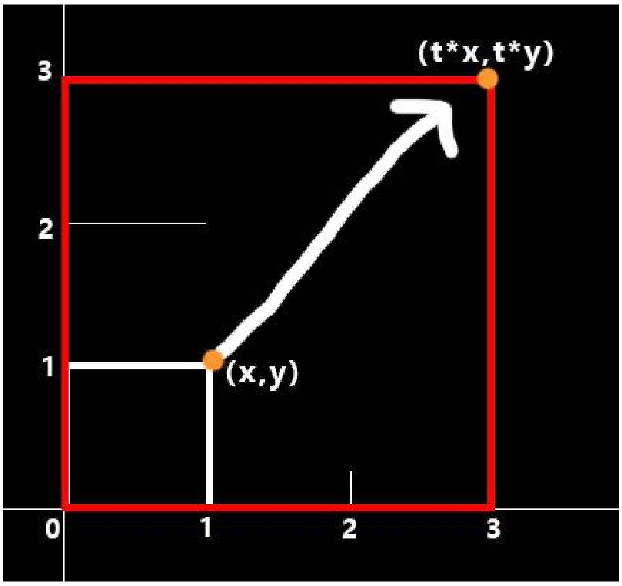

图 13. 二维缩放矩阵示意图

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x * x \\ S_y * y \end{bmatrix}$$

2) 三维缩放

由前面的二维缩放矩阵，我们可以很轻易的得知三维缩放矩阵，我们只需要将矩阵进行升维即可。对于一个三维坐标（x, y, z），其矩阵的表达可以写成，$Vector_2$=Matrix * $Vector_1$。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x * x \\ S_y * y \\ S_z * z \end{bmatrix}$$

6. 平移矩阵

1) 二维平移矩阵

如果我们想要平移空间中的物体，假设在 X 方向上的位移是 tx，Y 方向上的位移是 ty，那么我们就可以得知其 X 坐标和 Y 坐标的变换公式。

$x^{'}=x+t_x$ 而 $y^{'}=y+t_y$。

a. 几何意义

2) 三维平移矩阵

7. 旋转矩阵

1) 二维旋转矩阵

假设我们要旋转二维平面中的某一点 Q(x,y)，它与原点的距离为ρ，与 X 轴形成的夹角为α，根据三角函数我们可以将 x 写作 $x=\rho*\cos\alpha$，$y=\rho*\sin\alpha$。（极坐标系转化为直角坐标系）假设我们沿着原点逆时针将 Q 旋转θ度，那么旋转后的坐标可以被类似的写作 $x'=\rho*\cos(\alpha+\theta)$，$y^{'}=\rho*\sin(\alpha+\theta)$。

由三角函数的和差化积公式，我们可以将上述式子进行展开。

$x^{'}=\rho*\cos\alpha\cos\theta-\rho*\sin\alpha\sin\theta$，$y^{'}=\rho*\sin\alpha\cos\theta+\rho*\cos\alpha\sin\theta$。

最后，再将里面的极坐标系公式转化成熟悉的直角坐标系，就可以将旋转后的坐标，表示成旋转前的坐标与三角函数的乘积之和。

$x^{'}=x\cos\theta-y\sin\theta$，$y^{'}=y\cos\theta+x\sin\theta$。

我们将上面的公式进一步进行简化，简化成矩阵的形式。

$$\begin{bmatrix}x^{'}\\y^{'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$ （这里使用矩阵乘法）

2) 三维旋转矩阵

8. 投影矩阵

9. 错切变换

错切变换是一种数学变换，最简单的理解就是以四边形的一条边不动，然后拖动另一对边的顶点，这个过程就是错切的过程。错切变换可以用于在游戏中扭曲整个场景，创建一种迷幻效果，或者也可用于扭曲模型的外观。有六个基本的错切变换矩阵，$H_{xy}(s),H_{xz}(s),H_{yx}(s),H_{yz}(s),H_{zx}(s),H_{zy}(s)$ 。第一个下标用于表示哪一个坐标被错切矩阵改变，第二个下标表示完成错切的坐标。

$$H_{xz}(s)=\begin{pmatrix}1&0&s&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

从上面的方程中观察到，两个下标可以用于确定参数 s 的位置。x 对应第一行，即索引为 0 的行， z 对应第 3 列，即索引为 2 列。所以，s 应放在矩阵(0, 2)处。用这个错切矩阵乘以一个点 p 产生的结果为$(P_x+sP_z \quad P_y \quad P_z)^T$ 。下图清晰地说明了这个错切矩阵施加在一

个单位正方形上的效果。在图中 y 轴和 z 轴的值不受影响，而 x 轴的值为旧的 x 轴加上 s 乘以 z 的值，结果正方形倾斜成了平行四边形。可以注意到变换后，面积保持不变。

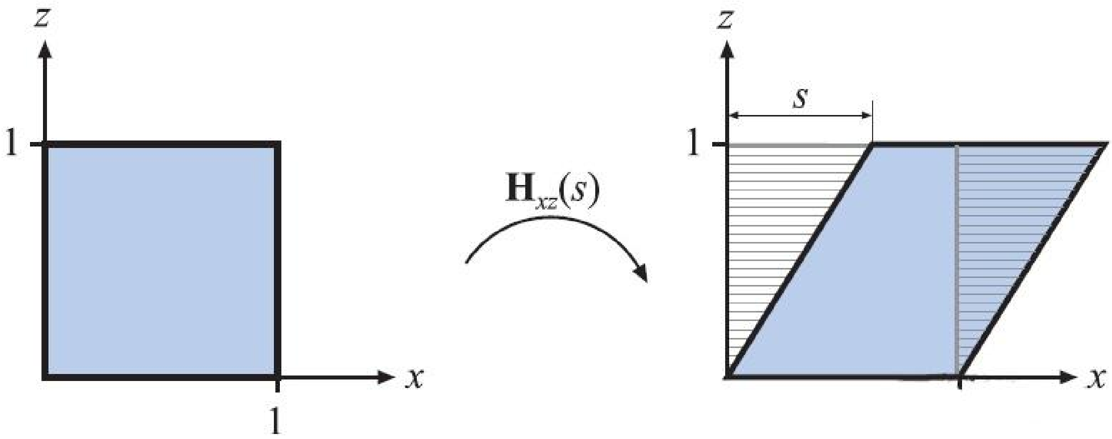

图 14. 错切效果

错切矩阵$H_{ij}(s), i \neq j$的逆矩阵，$H_{ij}^{-1}(s) = H_{ij}(-s)$。

1) 二维错切变换

通过前面的推导，我们可以很方便的知道水平错切变换矩阵和垂直错切变换矩阵。

水平错切变换矩阵$\begin{pmatrix} 1 & \tan\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$；垂直错切变换矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan\alpha & 1 \end{pmatrix}$。

在错切变换中，坐标保持不变的轴被称为依赖轴，余下的坐标轴被称为方向轴。水平方向的错切变换，就是保持 Y 坐标不变，仅改变 X 坐标的的过程，这个变换的等式可以表示为$\begin{cases} x' = x + y\tan\alpha \\ y' = y \end{cases}$。

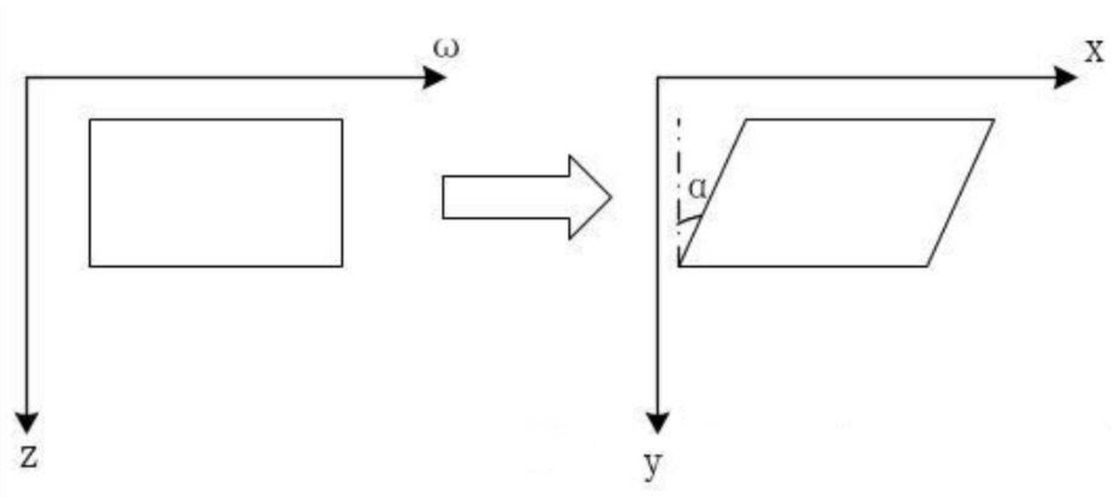

图 15. 水平错切变换

同理，垂直方向的错切变换，就是保持 X 坐标不变，仅改变 Y 坐标的的过程，这个变换的等式可以表示为$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + x\tan\alpha \end{cases}$。

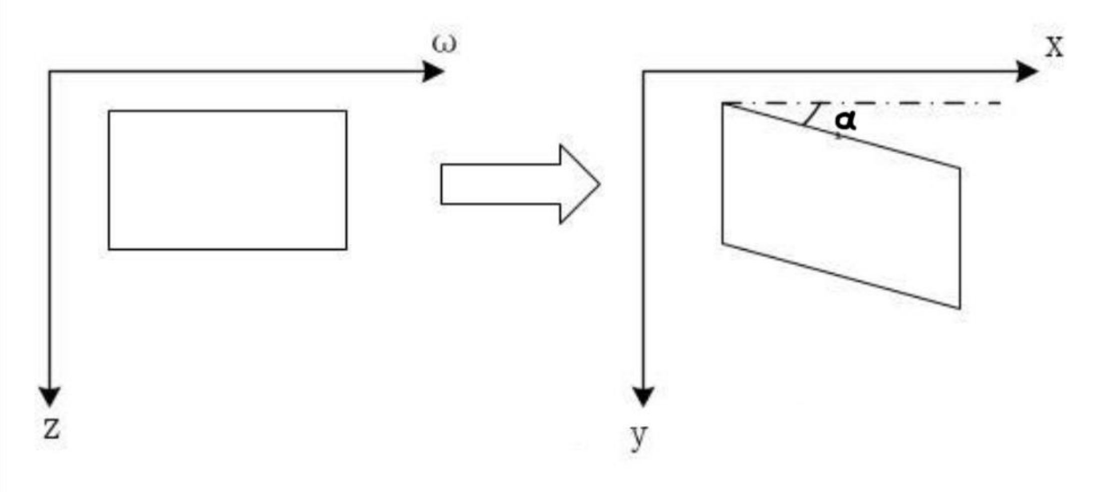

图 16. 垂直错切变换

10. 齐次坐标

任何高维矩阵，可以完整的表述出一个低纬度的矩阵。

11. 矩阵等价

如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，则称矩阵 A 与 B 等价。

A 与 B 等价⇔存在可逆矩阵 P 及 Q，使 PAQ=B

A 与 B 等价⇔A，B 是同型矩阵，且 $r(A) = r(B)$。

12. 相似矩阵的性质

A 与 B 相似=>A 与 B 有相同的特征多项式，即$|A - \lambda E| = |B - \lambda E|$。

=>A 与 B 有完全相同的特征值。（但是特征向量不一定相同）

=>$|A| = |B| = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$，$\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$。

=>A 与 B 等价，$r(A) = r(B)$。

=>A^T与B^T相似，A^{-1}与B^{-1}相似。

=>f(A)与 f(B)相似（f 为多项式）。

13. 矩阵可相似对角化

1) 条件

① n 阶矩阵 A 可以对角化的充分必要条件是：A 有 n 个线性无关的特征向量（即 A 的 k 重特征值入有 k 个线性无关的特征向量）。

② n 阶矩阵 A 可以对角化的充分条件：

a) A 有 n 个不同的特征值，则 A 一定能对角化。

A、 A 为实对称矩阵，则 A 一定能对角化。

2) 步骤

① 求出 A 的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$。

② 求出 A 的的 n 个线性无关的特征向量$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$。

③ 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$，$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP = \Lambda$。

14. 用正交阵将对称阵对角化的步骤

① 求出对称阵 A 的特征值$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$。

② 求出 A 的 n 个线性无关的特征向量$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$。

③ 将$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$正交化和单位化，得到$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$。

令 $Q = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$，$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，则$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$。

五. 向量的线性相关与线性表示

1. 线性表示

1) 向量β可由$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$线性表示

① $\overset{定义}{\Longleftrightarrow}$存在数$k_1, k_2, ..., k_m$，使$\beta = k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, ..., k_m\alpha_m$。

② ⇔线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_m\alpha_m = \beta$有解。

③ ⇔$r(A) = r(A, B)$，其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$。

2) 向量组$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$可由$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$线性表示

① $\overset{定义}{\Longleftrightarrow}$ β_j能由$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$线性表示，$j = 1,2, ..., t$。

② ⇔$r(A) = r(A, B)$ ，其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), B = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t)$。

3) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$与$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$等价

① $\overset{定义}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$与$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$能互相线性表示。

② ⇔$r(A) = r(B) = r(A, B)$，其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), B = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t)$。

③ ⇔$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_t$可由$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$线性表示，且 $r(A) = r(B)$。

2. 线性相关性

1) 线性相关

a. n 维向量组$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$线性相关

① $\overset{定义}{\Longleftrightarrow}$存在一组不全为 0 的数$k_1, k_2, ..., k_m$，使$k_1\alpha_1, k_2\alpha_2, ..., k_m\alpha_m = 0$。

② ⇔齐次线性方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_m\alpha_m = 0$ 有非零解。

③ ⇔至少有一个向量可由其余向量线性表示。

④ ⇔$r(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) < m$。

⑤ $\overset{m=n}{\Longleftrightarrow}$ $|\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m| = 0$。（行列式不等于 0 有唯一解）

2) 线性无关

a. n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$线性无关

① $\overset{定义}{\Longleftrightarrow}$若$k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,\ldots,k_m\alpha_m=0$，则必有$k_1,k_2,\ldots,k_m=0$。

② ⇔齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_m\alpha_m=0$ 只有零解。

③ ⇔任意向量都不能由其余向量线性表示。

④ ⇔$\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)=\mathrm{m}$。

⑤ $\overset{m=n}{\Longleftrightarrow}|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m|\neq 0$。（行列式不等于 0 有唯一解）

3. 线性相关性的一些结论

① 如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关；若整个向量组也线性无关，则部分向量组也线性无关.（简记为：部分相关，整体相关；整体无关，部分无关）。

② 如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关，则$\binom{\alpha_1}{\beta_1},\binom{\alpha_2}{\beta_2},\ldots,\binom{\alpha_m}{\beta_m}$线性无关；反之，若

$\binom{\alpha_1}{\beta_1},\binom{\alpha_2}{\beta_2},\ldots,\binom{\alpha_m}{\beta_m}$线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性相关。（简记为：低维无关，高维无关；高维相关，低维相关。）

③ 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性无关，而$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$线性表示，且表示法唯一。

④ 若向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性表示，且 $\mathrm{t}>\mathrm{s}$，则$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$线性相关。（多的能由少的线性表示，则多的必线性相关）

⑤ 若向量组$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性表示，且$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$线性无关则 $\mathrm{t}\leq\mathrm{s}$。（无关向量组不能由比它个数少的向量组表出）

⑥ n+1 个 n 维向量必相关。

4. 线性方程组解的个数

1) n 元线性方程组 $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$

① 无解⇔$\mathrm{r(A)}<\mathrm{r(A,b)}$。

② 有唯一解⇔ $\mathrm{r(A)}=\mathrm{r(A,b)}=\mathrm{n}$。

③ 有无穷多解⇔ $\mathrm{r(A)}=\mathrm{r(A,b)}<n$。

2) n 元线性方程组 $\mathrm{Ax}=0$

① 只有零解⇔ $\mathrm{r(A)}=n$。

② 有非零解⇔ $\mathrm{r(A)}<n$。

5. 线性方程组解的性质

① 若ξ_1,ξ_2是 $\mathrm{Ax}=0$ 的解，则$\xi_1+\xi_2$也是 $\mathrm{Ax}=0$ 的解。

② 若ξ是 $\mathrm{Ax}=0$ 的解，$\mathrm{k}\in\mathrm{R}$，则 $\mathrm{k}\xi$也是 $\mathrm{Ax}=0$ 的解。

③ 若η_1,η_2是 $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$ 的解，则$\eta_1-\eta_2$是对应的齐次线性方程组 $\mathrm{Ax}=0$ 的解。

④ 若η是 $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$ 的解，ξ是 $\mathrm{Ax}=0$ 的解，则$\xi+\eta$也是 $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$ 的解。

⑤ 若$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$是 $\mathrm{Ax}=\mathrm{b}$ 的解，则

当$k_1+k_2+\ldots+k_t=0$ 是，$k_1\eta_1,k_2\eta_2,\ldots,k_t\eta_t$是 $\mathrm{Ax}=0$ 的解。

当$k_1+k_2+\dots+k_t=1$是，$k_1\eta_1,k_2\eta_2,\dots,k_t\eta_t$是 Ax = b 的解。

6. 线性方程组解的结构

① 设 r(A) = r，$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-r}$是齐次线性方程组 Ax = 0 的一个基础解系，则 Ax = 0 的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots+k_{n-r}\xi_{n-r}$($k_1,k_2,\dots,k_{n-r}$是任意常数)。

② 设η^*是 Ax = b 的一个特解，$\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{n-r}$是对应的齐次线性方程组 Ax = 0 的一个基础解系，则 Ax = b 的通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*$($k_1,k_2,\dots,k_{n-r}$是任意常数)。

六. 特征值与特征向量的性质

① 设$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$是 n 阶方阵 A 的 n 个特征值，则$\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$，$\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n=|A|$。

② 矩阵 A 对应于不同特征值的特征向量线性无关。

③ 矩阵 A 的 k 重特征值λ至多有 k 个线性无关的特征向量。特别地，当 A 有 n 个不同的特征值时（没有重根），A 有 n 个线性无关的特征向量。

④ 设 n 阶方阵 A 的特征值为λ，A 的属于特征值λ的特征向量为α，则

A	A + kE	kA	A^k	f(A)	A^{-1}	A^*	A^T	$P^{-1}AP$
λ	$\lambda+k$	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ	λ
α	α	α	α	α	α	α	不确定	$P^{-1}\alpha$

七. 标准正交化

将一线性无关的向量组（以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为例）化为标准正交向量组的方法：

1) 步骤一-施密特正交化

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

2) 步骤二-规范化（单位化）

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

八. 化二次型为标准型

1. 正交变换法

① 写出二次型 f 的矩阵 A。

② 求出 A 的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$。

③ 求出 A 的 n 个线性无关的特征向量$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$。

④ 将$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$正交化和单位化，得到正交规范向量组$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$。

⑤ 构造正交阵 $Q=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$，令 x = Qy，得二次型的标准形 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\dots+\lambda_ny_n^2$。

2. 配方法

① 设二次型中含有平方项，不妨设包含x_1^2项，即系数$a_{11}\neq0$，则对所有含x_1的项配方，配方后余下各项不再含x_1，再对所有含x_2的项配方，…，直至所有项都在各自完全平方项中，引入新变量$y_1,y_2,\dots,y_n$，由$y=C^{-1}x$，得$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\dots+k_ny_n^2$。

② 若二次型中不含平方项，但有混合项，不妨设有x_1x_2项，即系数$a_{12}\neq0$，则可令$x_1=$

$y_1+y_2, x_2=y_1-y_2, x_3=y_3, \dots, x_n=y_n$。经此变换，二次型中出现平方项$a_{12}y_1^2-a_{12}y_2^2$，再按前面的步骤进行配方。

九. 相似与合同

1. 判断相似

① 若$P^{-1}AP=B$，则 A 与 B 相似。

② 若 A 与 B 相似，B 与 C 相似，则 A 与 C 相似。

③ 设 A 与 B 均可相似对角化，则 A 与 B 相似⇔A 与 B 有完全相同的特征值。

2. 判断合同

① 若$C^TAC=B$，则 A 与 B 合同。

② 若 A 与 B 合同，B 与 C 合同，则 A 与 C 合同。

③ 实对称矩阵 A 与 B 合同⇔A 与 B 有相同的正、负惯性指数。

3. 相似与合同的关系

① 普通矩阵相似不一定合同，合同也不一定相似。

② 实对称矩阵相似一定合同。

十. 正定

f(x) $=x^TAx$为正定二次型（或对称阵 A 为正定二次型）的充分必要条件有：

① 对任何 x ≠ 0，都有$x^TAx>0$。

② f 的正惯性指数为 n。

③ 存在可逆矩阵 C，使得 A = C^TC，即 A 与 E 合同。

④ A 的所有特征值全为正数。

A 的各阶顺序主子式都大于 0，即$a_{11}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$。