

初等数学

一. 三角函数

1. 函数值与周期

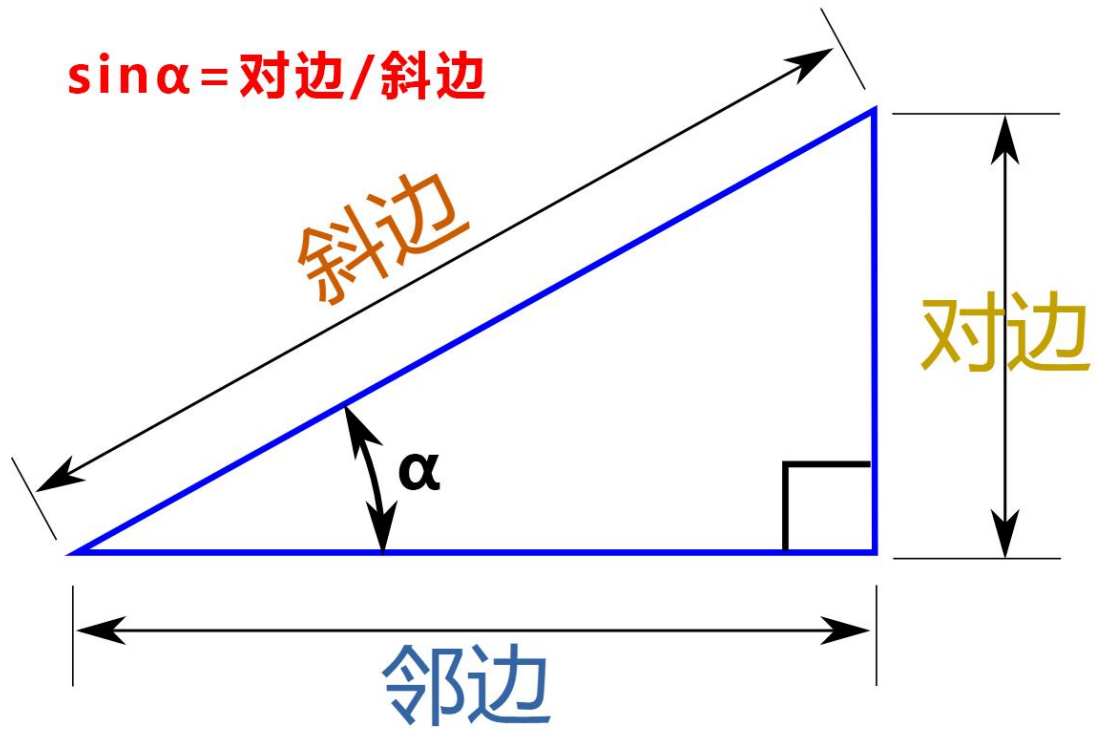


图 1. 直角三角形

对一个特定的角 α 来说，不论三角形的大小，下面的比值是不变的。

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	无	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	无	0

1) 正弦

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\text{周期 } T = 2\pi$$

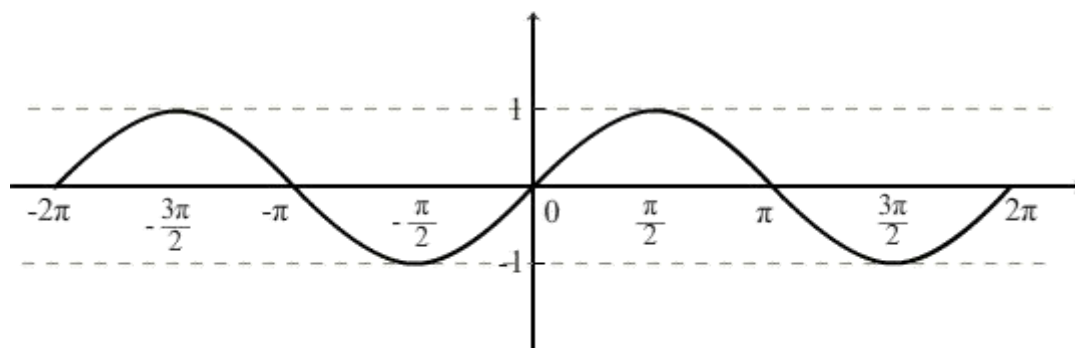


图 2. 正弦函数图像

$$\sin \alpha = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$$

2) 余弦

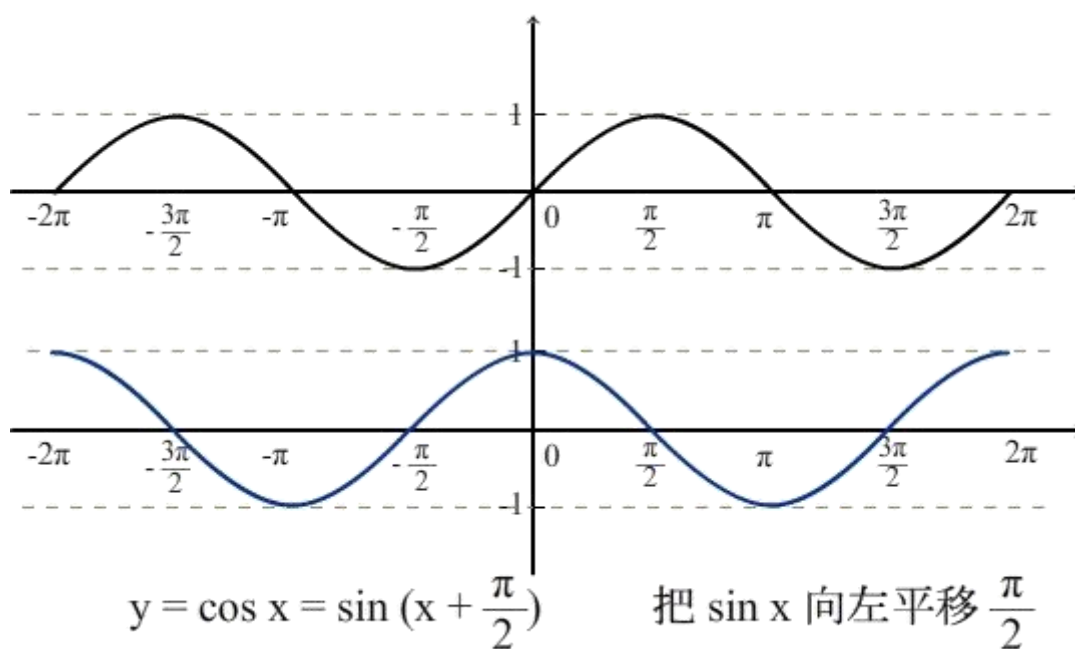


图 3. 余弦函数图像

$$\cos \alpha = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$$

3) 正切

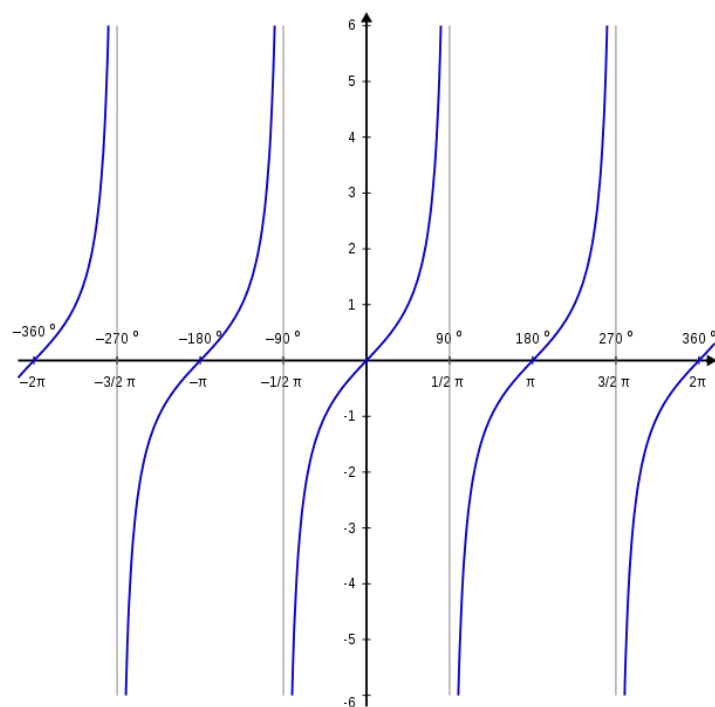


图 4. 正切函数图像

$$\tan \alpha = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

4) 余切

$$\cot \alpha = \frac{\text{邻边}}{\text{对边}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

5) 正割

$$\sec \alpha = \frac{\text{斜边}}{\text{邻边}} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

6) 余割

$$\csc \alpha = \frac{\text{斜边}}{\text{对边}} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

7) 函数的平移与缩放

2. 关系

1) 平方关系

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \Leftrightarrow \sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha \Leftrightarrow \csc^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha$$

$$\sin \alpha \csc \alpha = 1 \quad \cos \alpha \sec \alpha = 1 \quad \tan \alpha \cot \alpha = 1$$

3. 正弦定理

在任意 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 所对的边长分别为 a、b、c, 三角形外接圆的半径为 R。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

4. 余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

5. 两角和差

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

6. 和差化积

$$\sin \alpha + \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

7. 积化和差

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

8. 倍角公式

1) 二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

2) 三倍角公式

9. 半角公式

半角公式的正负号由 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限决定。

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

10. 辅助角公式

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \left(\alpha + \arctan \frac{b}{a} \right)$$

11. 万能公式

12. 诱导公式

奇变偶不变，符号看象限。

1) 公式一

设 α 为任意角，终边相同的角的同一三角函数其值相等。

$$\sin (2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos (2k\pi + \alpha) = \cos \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan (2k\pi + \alpha) = \tan \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot (2k\pi + \alpha) = \cot \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

2) 公式二

设 α 为任意角，则 $\pi + \alpha$ 与 α 的三角函数值之间的关系为：

$$\sin (\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan (\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot (\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

3) 公式三

任意角 $-\alpha$ 与 α 的三角函数值之间的关系：

$$\sin (-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan (-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot (-\alpha) = -\cot \alpha$$

4) 公式四

任意角 α 与 $\pi - \alpha$ 的三角函数值之间的关系:

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

5) 公式五

任意角 α 与 $2\pi - \alpha$ 的三角函数值之间的关系:

$$\begin{aligned}\sin(2\pi - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(2\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(2\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

6) 公式六

13. 降幂公式

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \tan^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}\end{aligned}$$

二. 数列

1. 等差数列

在等差数列里, 后一项和前一项的差是一个固定的常数。我们称这个常数为公差, 记为 d 。

1) 通项公式

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

2) 求和公式

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n - 1)}{2}d$$

3) 等差中项

设 a , b , c 成等差数列, 则等差中项 $b = \frac{(a+c)}{2}$

2. 等比数列

在等比数列里, 后一项和前一项比值是一个固定的常数。我们称这个常数为公比, 记为 q 。

1) 通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1} (a_n \neq 0, q \neq 0)$$

2) 求和公式

$$S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} & \text{当 } q \neq 1 \\ na_1 & \text{当 } q = 1 \end{cases}$$

3. 常用的几种数列的和

- ① $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- ② $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- ③ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
- ④ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- ⑤ $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

三. 排列和组合

1. 排列

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

2. 组合

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

1) 性质

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

3. 常用方法

1) 捆绑法

a. 特征

当题目中出现“相邻”“在一起”“连续”等要求时，考虑捆绑法。

b. 具体用法

- ① 把相邻的元素捆绑起来，注意内部有无顺序。
- ② 将捆绑后的元素看成一个元素，与其他元素进行后续排列。

2) 插空法

a. 特征

当题目中出现“间隔”“不相邻”“不连续”等要求时，考虑插空法。

b. 具体用法

- ① 将可以相邻的元素进行排列，排列后形成若干个空位。
- ② 将不相邻的元素插入形成的空位中。

3) 插板法**a. 特征**

题目形式为把 n 个相同的物品分给 m 个主体时，要求每个主体至少分 1 个，利用插板法。

b. 具体用法

直接用公式：方法数为 C_{n-1}^{m-1}

4) 全错位排列**a. 特征**

当题目中要求不能一一对应时，比如 n 把钥匙对应 n 个锁，要求每个锁和一把不能打开它的钥匙放进一个信封，这就是全错位排列。

b. 具体用法

用 D 表示 n 个数字的全错位排列。

记住： $D_1=0$ ， $D_2=1$ ， $D_3=2$ ， $D_4=9$ ， $D_5=44$ ，事业单位考试中 $D_3=2$ ， $D_4=9$ 的考频较高。

四. 指数与对数

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (\text{换底公式})$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$x = e^{\ln x} \quad x = a^{\log_a x}$$

五. 角度与弧度

“弧度”和“度”（角度）是度量角大小的两种不同的单位。

一个圆形是 360 度，如果用弧度来描述它，是 2π 弧度。因此， 360° 和 2π 都代表“围绕”圆形一圈。

由此我们可以知道， $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ ， $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$ 。一弧度约等于 57.3 度

在[旋转角度](#)（rotation）里的角，以“**角度**”为单位；而在[三角函数](#)（程序中的数学库）里的角要以“**弧度**”为单位。这个规定是我们首先要记住的!!!

1. 角度的定义

“两条射线从圆心向圆周射出，形成一个夹角和夹角正对的一段弧。当这段弧长正好等于圆周长的 360 分之一时，两条射线的夹角的大小为 1 度。

2. 弧度的定义

两条射线从圆心向圆周射出，形成一个夹角和夹角正对的一段弧。当这段弧长正好等于圆的半径时，两条射线的夹角大小为 1 弧度。

3. 角度与弧度转换

$$\text{角度} = \text{弧度} * (180/\pi)$$

$$\text{弧度} = \text{角度} * (\pi/180)$$

六. 乘法公式与因式分解

1. 平方差公式

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2. 完全平方公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. 立方和与立方差

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

4. 完全立方公式

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

七. 不等式

1. 普通常用不等式

2. 绝对值不等式

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

3. 重要不等式

八. 平面几何

1. 周长

周长是环绕二维图形边缘的长度。圆的周长叫圆周，其值为半径乘 2π 。

1) 三角形

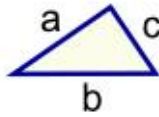


图 5. 三角形周长

周长为 $a+b+c$ 。

2) 正方形

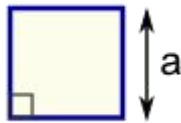


图 6. 正方形周长

其周长等于边长乘 4，即 $4 \times a$ 。

3) 矩形

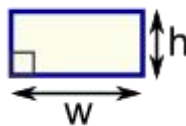


图 7. 矩形周长

其周长等于宽加高的两倍，即 $c = 2(w + h)$ 。

4) 四边形

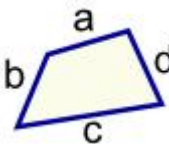


图 8. 四边形周长

四边形的周长等于四边形的四边长相加。

5) 圆



图 9. 圆的周长

圆的周长等于 π 乘直径，即 $2\pi r$ 。

6) 扇形

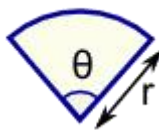


图 10. 扇形周长

扇形的周长则相对麻烦一点，其周长是圆弧加上两条半径，即 $r(\theta + 2)$ 。(r 为半径， θ 为以弧度为单位的角度)

2. 面积

1) 三角形

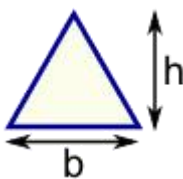


图 11. 三角形面积

三角形的面积是底和高乘积的二分之一，即 $\frac{\text{底} \times \text{高}}{2} = \frac{b \times h}{2}$ 。

2) 正方形

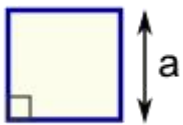


图 12. 正方形面积

正方形的面积非常简单，就是边长的平方，即 a^2 。

3) 矩形

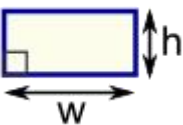


图 13. 矩形面积

矩形的面积就是正方形面积的变体，或者说正方形的面积是矩形面积公式的特例。当宽和高相等时，矩形的面积公式就变为了正方形的面积公式，因此矩形的面积公式为 $s = \text{宽} \times \text{高}$ 。

4) 平行四边形

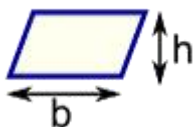


图 14. 平行四边形面积

平行四边形是一个特殊的矩形，因此其面积公式依旧可以使用矩形的面积公式来表示，即 $s = \text{底} \times \text{高}$ 。

5) 梯形

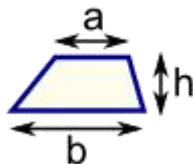


图 15. 梯形面积

梯形的面积则相对要复杂一点，梯形的面积公式是 $s = \frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2}$ 。

6) 圆 - Circle



图 16. 圆面积

圆的面积我们是再熟悉不过了，其面积公式为 $s = \pi r^2$

7) 椭圆形

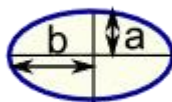


图 17. 椭圆形面积

椭圆形的面积等于 π 乘以椭圆的长半轴和短半轴，即 $S = \pi ab$ 。

8) 扇形

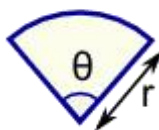


图 18. 扇形面积

扇形的面积与夹角和半径有关，其面积公式 $S = \frac{r^2 \times \theta}{2}$ 。（ θ 是以弧度为单位的角度）

九. 立体几何

1. 立方体

立方体也叫正方体或六面体，因为它是有 6 个面组成的多面体。立方体可以用来做很好的 6 面骰子，因为它有规则的形状，且每面面积是相同的。

立方体也是特殊的长方体，因为它的三个长度都相同，且面都为矩形。

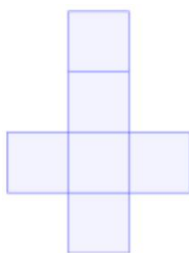


图 19. 立方体的几何展开

1) 表面积

因为立方体是由 6 个正方形组成的，因此其表面积也就是正方形面积的六倍。

$$\text{表面积} = 6 * \text{棱长}^2$$

2) 体积

对于体积，其实就是一个正方形的面积再乘上一个棱长。

$$\text{体积} = \text{棱长}^3$$

2. 长方体

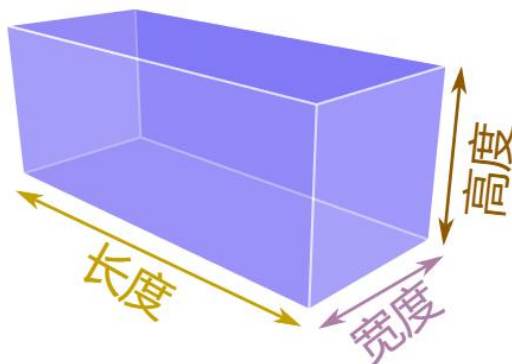


图 20. 长方体示意图

长方体是像个箱子的物体，它具有六个平面，其所有的角都是直角，所有的面都是矩形。它也是个棱柱体，因为沿着长度的截面是相同的。

1) 表面积

对于长方体而言，它的表面积就是三视图下，各图形面积的两倍之和。因为长方体的各视图下的图形都可能不一样，因此必须精确计算各平面的面积才行。

$$\text{表面积} = 2 * \text{长} * \text{宽} + 2 * \text{长} * \text{高} + 2 * \text{宽} * \text{高}$$

2) 体积

它的体积其实和立方体的计算方式一样，只不过立方体的各个边长是一样的，因此对于立方体就是棱长的三次方。对于长方体而言，我们的长、宽、高都有可能是不一样的，因此体积的计算就是这三者的乘积。

$$\text{体积} = \text{长} * \text{宽} * \text{高}$$

十. 复数

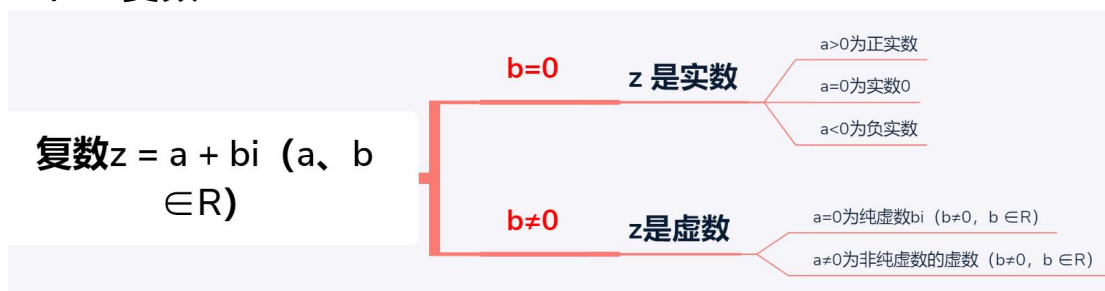


图 21. 复数

1. 定义

任意一个复数 $z \in \mathbb{C}$ 都可以表示为 $z = a + bi$ 的形式，其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 而且 $i^2 = -1$ 。我们将 a 称之为这个复数的实部 (Real Part)， b 称之为这个复数的虚部 (Imaginary Part)。

1) 向量表示

因为 $z = a + bi$ 其实就是对于 $\{1, i\}$ 这个基 (Basis) 的线性组合 (Linear Combination)，我们也可以用向量来表示一个复数： $z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ， a, b 表示复数的实部和虚部。

因为这个向量有两个元素，我们可以使用复平面上的一个点来表示一个复数。复平面的横坐标 Re 代表它的实部，纵坐标 Im 代表它的虚部。

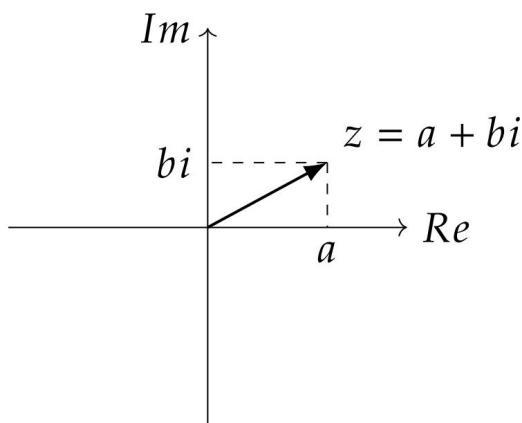


图 22. 用复平面表示复数

2) 矩阵表示

定义两个“基”矩阵 I 和 J ， $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。矩阵 J 的平方就等于矩阵 $-I$ 。可以看出，这个关系和复数里面的实部基 (1)、虚部基 (i) 的关系是对应的 ($i^2 = -1$)。因此，将复数的两个基 $\{1, i\}$ 替换为 $\{I, J\}$ ，即可得到 $z = aI + bJ = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ 。

所以，我们可以将复数 $z = a + bi$ 的矩阵形式定义为， $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ 。而一个矩阵可以代表一种变换，所以，一个复数，也可以理解为一种变换。

2. 复数的运算

1) 加法

两个复数相加，只要将**实部和实部相加**，**虚部与虚部相加**即可。

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad (a, b, c, d \text{ 为实数})$$

2) 减法

两个复数相减，只要将**实部和实部相减**，**虚部与虚部相减**即可。（复数的减法就是加法的逆运算，与实数的减法类似）

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \quad (a, b, c, d \text{ 为实数})$$

3) 乘法

复数的乘法也很简单，可以看做是两个关于 i 的多项式相乘。

假设有两个复数： $Z_1 = a + bi$ ， $Z_2 = c + di$ 。

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \quad (\text{这里通过下面的乘方法则可以得知 } i^2 = -1) \\ &= ac - bd + adi + bci = \textcolor{red}{ac - bd} + (\textcolor{red}{bc + ad})i \end{aligned}$$

这样看上去并没有什么特别的。但是，借助复数的向量和矩阵表示，我们可以重新理解它所表示的实际含义。

如果将 Z_1 写成**矩阵形式**，将 Z_2 写成**向量形式**，则 $Z_1 Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 。则可以将其理解为：将 $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ 这个矩阵表示的变换，应用到 $Z_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 这个向量上。

如果将 Z_1 和 Z_2 都写成**矩阵形式**，则 $Z_1 Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcolor{blue}{ac - bd} & \textcolor{blue}{-(bc + ad)} \\ \textcolor{blue}{bc + ad} & \textcolor{blue}{ac - bd} \end{bmatrix}$ 。则可以将其理解为，**将两个矩阵表示的两种变换合并为一个变换**。（复数的乘法是满足交换律的）

4) 乘方

a. 乘方法则

$$i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i; i^{4n} = 1$$

b. 运算方式

复数乘方与实数的乘方类似， $(a + bi)^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + (2ab)i$ 。
复数的乘方也满足下列性质。

- ① $Z^m Z^n = Z^{m+n}$
- ② $(Z^m)^n = Z^{mn}$
- ③ $(Z_1 Z_2)^n = Z_1^n Z_2^n$

5) 除法

复数的除法原理很简单，但是计算要稍微复杂些。

求 $\frac{a+bi}{c+di}$ ，假设最终的结果为 $x + yi$ ，我们只需解方程 $(a + bi) = (c + bi)(x + yi)$ 即可。

也就是说方程组 $cx - dy = a$, $cy + dx = b$, 解得 $x = \frac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)}$, $y = \frac{(bc-ad)}{(c^2+d^2)}$ 。

满足 $(c + bi)(x + yi) = (a + bi)$ 的复数 $x + yi (x, y \in \mathbb{R})$, 叫做复数 $a+bi$ 除以复数 $c+di$ 的商。

a. 运算方法

将分子和分母同时乘以分母的共轭复数, 再用乘法法则运算。

$$\text{即 } \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

3. 复数相等

如果两个复数相等, 则它们的实部和虚部分别相等。反之, 如果两个复数的实部和虚部分别相等, 则这两个复数相等。 $(a + bi) = (c + di)$ 等价于 $a=c$ 且 $b=d$

4. 复数的模

将复数的实部与虚部的平方和的正的平方根的值称为该复数的模, 记作 $|Z|$ 。

即对于复数 $Z = a + bi$, 它的模 $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。

5. 复数的算术性质

1) 交换性 —— commutativity

对所有 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 都有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\alpha \beta = \beta \alpha$ 。

2) 结合性 —— associativity

对所有 $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$ 都有 $(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda)$, $(\alpha \beta) \lambda = \alpha (\beta \lambda)$ 。

3) 单位元 —— identities

对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$ 都有 $\lambda + 0 = \lambda$, $\lambda 1 = \lambda$ 。

4) 加法逆元 —— additive inverse

对每个 $\alpha \in \mathbb{C}$ 都存在唯一的 $\beta \in \mathbb{C}$ 使得 $\alpha + \beta = 0$ 。

5) 乘法逆元 —— multiplicative inverse

对每个 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ 都存在唯一的 $\beta \in \mathbb{C}$ 使得 $\alpha \beta = 1$ 。

6) 分配性质 —— distributive property

对所有 $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 都有 $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda \alpha + \lambda \beta$ 。

6. 共轭复数

a. 定义

对于复数 $z = a + bi$, 称复数 $\bar{z} = a - bi$ 为 z 的共轭复数。即两个实部相等, 虚部互为相反数的复数互为共轭复数 (conjugate complex number)。复数 z 的共轭复数记作 \bar{z} 。

b. 性质

根据定义, 若 $z = a + bi$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$), 则 $\bar{z} = a - bi$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$)。共轭复数所对应的点关于实轴对称。两个复数 $x+yi$ 与 $x-yi$ 称为共轭复数, 它们的实部相等, 虚部互为相反数。

在复平面上，表示两个共轭复数的点关于 x 轴对称，而这一点正是“共轭”一词的来源——两头牛平行地拉一部犁，它们的肩膀上要共架一个横梁，这横梁就叫做“轭”。如果用 z 表示 $x+yi$ ，那么在字母 z 上面加上一条横线就表示它的共轭复数 $x-yi$ 。

$$\textcircled{1} \quad |x+yi| = |x-yi|$$

$$\textcircled{2} \quad (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$$

7. 复数相乘与 2D 旋转

既然与复数的相乘代表着 $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ 矩阵所作出的变换，那这种变换代表着什么呢？

实际上，如果我们对这个矩阵进行一些变形，这个问题就很容易解决了！

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{bmatrix}$$

我们将矩阵中每一个元素都除以了模长 $\|Z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，并将这一项提到了矩阵外面。经过这一变换，我们只需要观察一下复平面就能够解答之前的问题了。

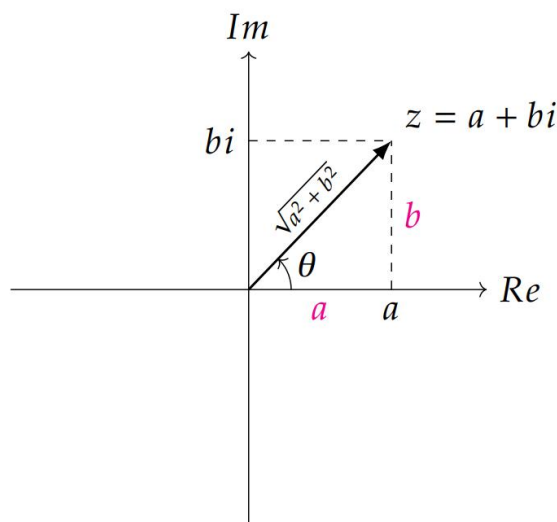


图 23. 复平面

可以看到， $\|Z\|$ 正是复数 z 与坐标轴所形成的三角形的斜边长，而 a, b 分别为三角形的两个直角边。如果将斜边与实数轴 Re 正方向的夹角记为 θ 的话，按照三角函数的定义可以得出 $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \theta$ ，且 $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \theta$ ，这个角度 θ 其实就是 $\text{atan2}(b, a)$ （返回以弧度表示的 y/x 的反正切）。

知道了这些，原矩阵就可以变形为， $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} =$

$$\|Z\| \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \|Z\| * E * \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{对任意方形矩阵 } A = EA) =$$

$$\begin{bmatrix} \|Z\| & 0 \\ 0 & \|Z\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

我们将原本的矩阵变形为了两个变换矩阵的复合，其中左边的 $\begin{bmatrix} \|Z\| & 0 \\ 0 & \|Z\| \end{bmatrix}$ 是缩放矩阵，

而右边的 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 则是我们熟悉的 [2D 旋转矩阵](#)。即便不认识后面的那个旋转矩阵也

没有关系，我们可以看看这个矩阵对两个基 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 变换效果。

1) 作用于 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 时的变换效果

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|Z\| & 0 \\ 0 & \|Z\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|Z\| & 0 \\ 0 & \|Z\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}.$$

第一步首先将 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 变换到了 $\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$ 的位置，也就是逆时针旋转了 θ 度，接

下来 $\begin{bmatrix} \|Z\| & 0 \\ 0 & \|Z\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|Z\| \cos \theta \\ \|Z\| \sin \theta \end{bmatrix}$ ，缩放矩阵将 $\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$ 缩放为 $\|Z\|$ 倍，变为 $\begin{bmatrix} \|Z\| \cos \theta \\ \|Z\| \sin \theta \end{bmatrix}$ 。

总的来说，就是对 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 逆时针旋转了 θ 度，并缩放了 $\|Z\|$ 倍。

2) 作用于 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 时的变换效果

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|Z\| & 0 \\ 0 & \|Z\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|Z\| & 0 \\ 0 & \|Z\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}.$$

第一步首先将 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 变换到了 $\begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$ 的位置，与前者一样也是逆时针旋转了 θ 度。

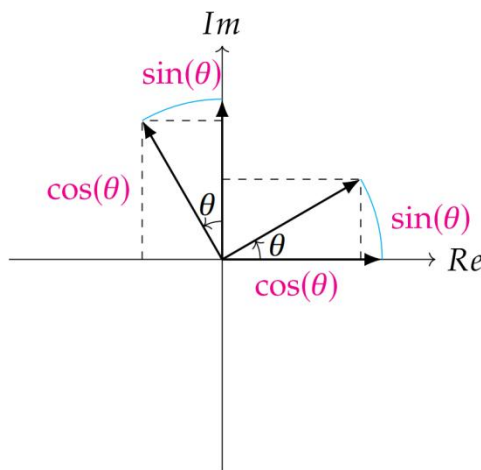


图 24. 将坐标进行旋转

第二步的变换同样会将 $\begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$ 缩放为 $\begin{bmatrix} -\|Z\| \sin \theta \\ \|Z\| \cos \theta \end{bmatrix}$ 。这样等于是将整个坐标系逆时针旋转了 θ 角，并缩放了 $\|Z\|$ 倍。

所以，复数的相乘其实是旋转与缩放变换的复合。如果有一个复数 $z = a+bi$ ，那么 z 与任意一个复数 c 相乘都会将 c 逆时针旋转 $\theta = \text{atan2}(b, a)$ 度，并将其缩放 $\|Z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。

如果 $\|Z\| = 1$ ，也就是说 $a^2 + b^2 = 1$ ，即这个复数可以用一个单位向量来表示，那么这个复数所代表的几何意义就完全只有旋转了。所留下来的部分就只有纯粹的旋转矩阵

$$Z = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

如果我们想让 2D 空间中任意一个向量 v 旋转 θ 度，那么我们就可以使用这个矩阵

对 v 进行变换： $V' = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} V$ (2D 旋转公式——矩阵型)。

注意！ 其实 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 这个旋转矩阵如果写成复数形式的话就是 $\cos \theta + i \sin \theta$ 。

如果我们将向量 $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 看作是一个复数 $V = x + yi$ ，其中实部为 x ，虚部为 y 。那么，我们可以构造一个复数 $Z = \cos \theta + i \sin \theta$ ，并将它与 V 相乘来进行旋转。旋转 θ 度之后的向量 V' 可以用等价的复数乘法来表示： $V' = ZV = (\cos \theta + i \sin \theta)V$ (2D 旋转公式——复数积型)。

8. 复数的极坐标型

$\cos \theta + i \sin \theta$ 还可以进行下一步的变形。根据欧拉公式 (Euler's Formula)， $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ 。欧拉公式的证明在微积分的课程中应该都会涉及到，这里就不作证明了。有了这一个等式，我们能将复数表示为 $Z = \|Z\| \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \|Z\|(\cos \theta + i \sin \theta) = \|Z\|e^{i\theta}$ 。

如果我们定义 $r = \|Z\|$ ，我们就得到了复数的极坐标形式 $z = re^{i\theta}$ 。

现在复数的定义就与实部与虚部的两个分量 a, b 无关了，我们可以使用一个缩放因子 r 和旋转角度 θ 的形式来定义任意一个复数，而且它旋转与缩放的性质仍然存在。

如果我们想对 2D 空间中向量 $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 进行旋转并缩放，我们可以类似地将这个向量看作是一个复数 $V = x + yi$ 。那么，经过旋转 θ 度，缩放 r 倍之后的向量 V' 就可以这样计算： $V' = re^{i\theta}V$ 。

如果仅需要旋转 θ 度的话，可以令缩放因子 $r = 1$ ，那么变换后的结果就是： $V' = e^{i\theta}V$ 。

这样我们就得到了 2D 旋转公式——指数型： $V' = e^{i\theta}V$ 。

这三种 2D 旋转公式其实都是等价的，根据不同的需求我们可以使用旋转的不同形态。在我们之后讨论四元数的时候，我们也会看到非常类似的公式。

9. 旋转的复合

如果我们有代表 2D 旋转的单位复数， $Z_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ ， $Z_2 = \cos \phi + i \sin \phi$ 以及一个向量 $V = x + yi$ ，我们可以先对 V 进行 Z_1 的旋转 $V' = Z_1V$ ，在此基础上，我们对 V' 进行 Z_2 的旋转 $V'' = Z_2(Z_1V) = (Z_2Z_1)V$ (复数乘法的结合律)。

如果我们将这两次旋转所作出的等效变换称之为 Z_{net} ，那么 $V'' = (Z_2Z_1)V = Z_{\text{net}}V$ 。因此， $Z_{\text{net}} = Z_2Z_1$ ；又因为复数的相乘遵守交换律，所以 $Z_{\text{net}} = Z_2Z_1 = Z_1Z_2$ 。

如果尝试计算一下 Z_{net} ，我们就会发现 $Z_{\text{net}} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \phi + i \sin \phi) = \cos \theta \cos \phi + i(\cos \theta \sin \phi) + i(\sin \theta \cos \phi) - \sin \theta \sin \phi = (\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + (\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi)i$ 。

上面的式子利用三角恒等式可以化简为， $Z_{\text{net}} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \phi + i \sin \phi) = \cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)$ 。所以，当我们对两个 2D 旋转进行复合时，所得到的变换 Z_{net} 仍是一个旋转，而且与施加的次序无关。这个等效变换的旋转角是 Z_1 与 Z_2 旋转角之和。