第二章 维纳滤波

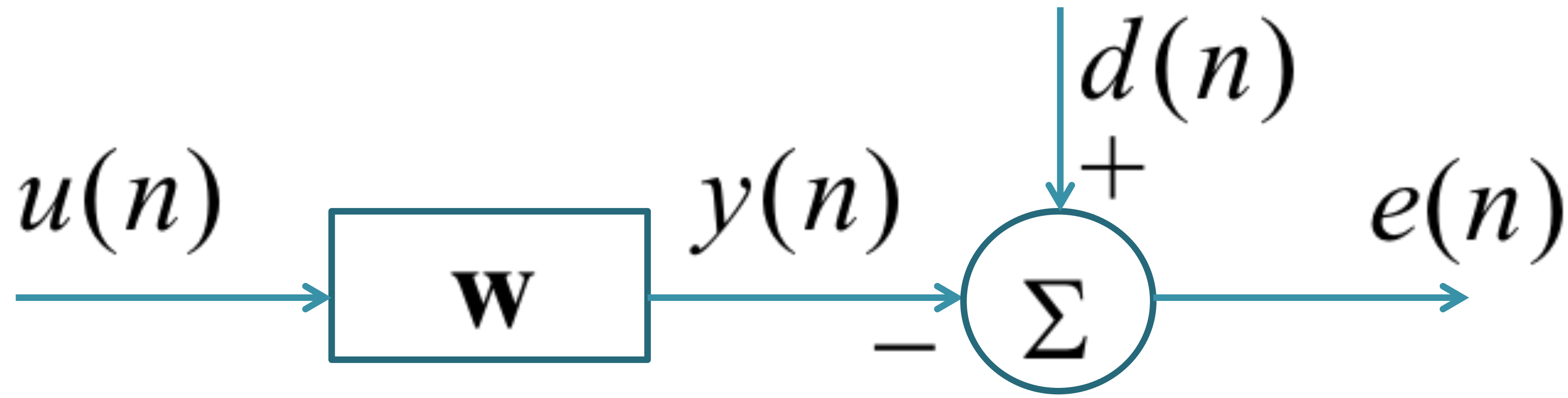
§2.1 线性最优滤波

1、传统数字滤波与维纳数字滤波

传统数字滤波框图

已知输入信号 $u(n)$ 和滤波器 $\mathbf{w}$，求输出 $y(n)$

其目的是滤除输入信号 $u(n)$ 中的某些频谱



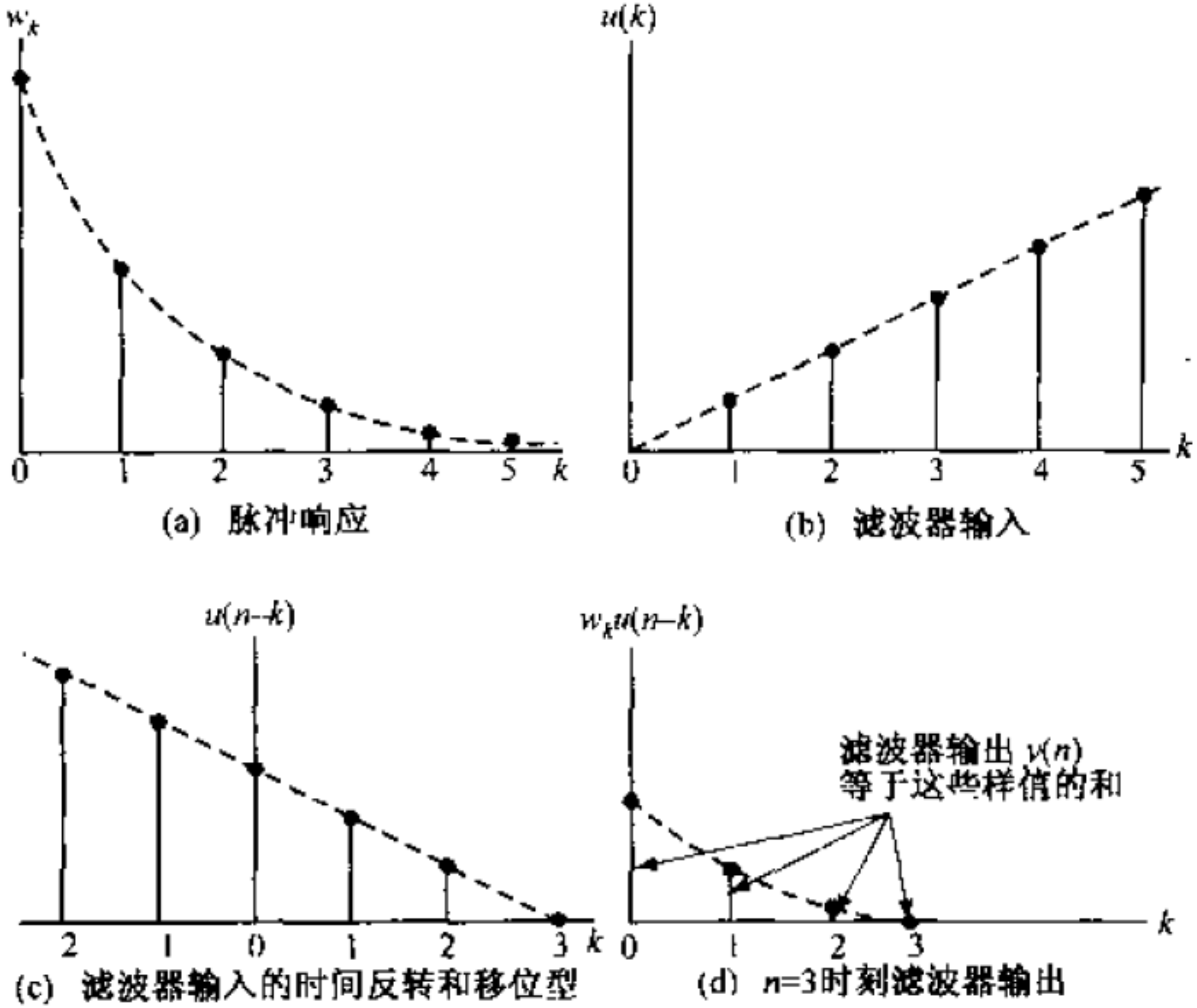
维纳数字滤波框图

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

已知输入信号 $u(n)$ 和期望响应(参考信号) $d(n)$ ，使误差信号 $e(n)$ 在某种统计意义上最小。

对于一个因果滤波器，其n时刻的输出为卷积

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty} w_k^* u(n-k), n=0,1,2,\cdots$$



(a) 脉冲响应　(b) 滤波器输入

(c) 滤波器输入的时间反转和移位型　(d) n=3时刻滤波器输出

2、代价函数的选择

使 $e(n)=d(n)-y(n)$ 在某种统计意义上最小，需要定义关于 $e(n)$ 的代价函数。

估计误差的均方值 $\mathrm{E}[|e(n)|^2]$

估计误差绝对值的期望 $\mathrm{E}[|e(n)|]$

估计误差绝对值的高阶矩 $\mathrm{E}[e^p(n)], p\geq 3$

§2.2 正交性原理及其推论

1、最小均方误差准则

$$J(n)=\mathrm{E}[|e(n)|^2]=\mathrm{E}[e(n)e^*(n)]$$ (复数情况)

$$J(n)=\mathrm{E}[|e(n)|^2]=\mathrm{E}[e^2(n)]$$ (实数情况)

采用均方误差的优点：该代价函数具有唯一的最小值。

2、如何求最小值

求函数对所有变量的偏导数，令所有偏导数为0，其对应的变量为多元函数取得最小值的解。

为了方便表示，常将所有的偏导数写成列向量，该列向量称为函数的梯度或共轭梯度。

因此，令所有偏导数为0，等价于令梯度或共轭梯度为0。

3、正交性原理

设第k个滤波器系数可表示为

$$w_k = a_k + jb_k, \ k = 0,1,2,\cdots$$

则滤波器系数向量可表示为

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{M-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + jb_0 \\ a_1 + jb_1 \\ \vdots \\ a_{M-1} + jb_{M-1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

可以定义一个梯度算子$\nabla = [\nabla_0, \nabla_1, \cdots, \nabla_{M-1}]^T$，其第$k$个元素可以写成实部和虚部的一阶偏微分形式

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial a_k} + j\frac{\partial}{\partial b_k} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

将算子∇用于代价函数J，可得到一个多维复数值梯度向量∇J，其第k个元素为

$$\nabla_k J = \frac{\partial J}{\partial a_k} + j\frac{\partial J}{\partial b_k} \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

根据代价函数 $J(n) = \mathrm{E}[e(n)e^*(n)]$ 可得

$$\nabla_k J = E[\frac{\partial e(n)}{\partial a_k} e^*(n) + \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} e(n)$$

$$+ \frac{\partial e(n)}{\partial b_k} j e^*(n) + \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} j e(n)]$$

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \mathbf{w}^H \mathbf{u}(n)$$

$$= d(n) - \sum_{k=0}^{\infty} w_k^* u(n-k)$$

$$e^*(n) = d^*(n) - \sum_{k=0}^{\infty} w_k u^*(n-k)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \mathbf{w}^H \mathbf{u}(n)$$

$$= d(n) - \sum_{k=0}^{\infty} w_k^* u(n-k)$$

$$e^*(n) = d^*(n) - \sum_{k=0}^{\infty} w_k u^*(n-k)$$

$$\frac{\partial e(n)}{\partial a_k} = -u(n-k), \quad \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} = -u^*(n-k)$$

$$\frac{\partial e(n)}{\partial b_k} = ju(n-k), \quad \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} = -ju^*(n-k)$$

将 $$\frac{\partial e(n)}{\partial a_k} = -u(n-k), \quad \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} = -u^*(n-k)$$

$$\frac{\partial e(n)}{\partial b_k} = ju(n-k), \quad \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} = -ju^*(n-k)$$

代入

$$\nabla_k J = E[\frac{\partial e(n)}{\partial a_k} e^*(n) + \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} e(n)$$

$$+ \frac{\partial e(n)}{\partial b_k} je^*(n) + \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} je(n)]$$

可得 $$\nabla_k J = -2E[u(n-k)e^*(n)]$$

$$\nabla_k J = -2E[u(n-k)e^*(n)]$$

为了使代价函数J达到最小值(即滤波器达到最优)，梯度向量∇J的所有元素必须都等于零：

$$\nabla_k J = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

令滤波器达到最优时的误差为$e_o(n)$，则有

$$E[u(n-k)e_o^*(n)] = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

正交性原理：使代价函数J获得最小值的充要条件，是其对应的估计误差正交于n时刻进入期望相应估计的每个输入样值。

4、正交性原理推论

根据自适应滤波器的输出，可得

$$E[y(n)e^*(n)] = E[\sum_{k=0}^{\infty} w_k^* u(n-k)e^*(n)]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} w_k^* E[u(n-k)e^*(n)]$$

根据正交性原理

$$E[u(n-k)e_o^*(n)] = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

可推得 $E\left[y_o(n)e_o^*(n) \right] = 0$

§2.3 最小均方误差

令$\hat{d}(n \mid \mathcal{U}_n)$表示均方意义下最优的期望响应的估值，即

$$y_o(n) = \hat{d}(n \mid \mathcal{U}_n)$$

其中，$\mathcal{U}_n$ 表示输入信号$u(n)$ 直到时刻n的样值张成的空间。当滤波器达到最优时，估计误差可写为

$$e_o(n) = d(n) - y_o(n) = d(n) - \hat{d}(n \mid \mathcal{U}_n)$$

对上式进行整理，可得

$$d(n) = \hat{d}(n \mid \mathcal{U}_n) + e_o(n)$$

令 $J_{\min}=E[|e_o(n)|^2]$ 表示最小均方误差。

对式$d(n)=\hat{d}(n|\mathrm{U}_n)+e_o(n)$ 两边取期望，并利用正交性原理的推论，可得

$$\sigma_d^2=\sigma_{\hat{d}}^2+J_{\min}$$

上式可改写为

$$J_{\min}=\sigma_d^2-\sigma_{\hat{d}}^2$$

将式 $J_{\min} = \sigma_d^2 - \sigma_{\hat{d}}^2$ 两边同除以 σ_d^2，可得归一化均方误差

$$\varepsilon = \frac{J_{\min}}{\sigma_d^2} = 1 - \frac{\sigma_{\hat{d}}^2}{\sigma_d^2}$$

归一化均方误差 ε：

(1)非负

(2)比例满足范围 $0 \le \varepsilon \le 1$。

当 $\varepsilon = 0$ 时，$\hat{d}(n|\mathcal{U}_n)$与 $d(n)$完全一致；

当 $\varepsilon = 1$时，二者很不一致， 对应最差的情况。

§2.4 维纳-霍夫方程

1、一般情况下的维纳-霍夫方程

根据最优情况下误差信号的定义

$$e_o(n) = d(n) - y_o(n) = d(n) - \sum_{i=0}^{\infty} w_{o,i}^* u(n-i)$$

和正交性原理

$$E[u(n-k)e_o^*(n)] = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

可得

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{o,i} E[u(n-k)u^*(n-i)] = E[u(n-k)d^*(n)]$$

$$k = 0,1,2\ldots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{o,i} E[u(n-k)u^*(n-i)] = E[u(n-k)d^*(n)], k=0,1,2...$$

第一个期望 $E[u(n-k)u^*(n-i)]$：等于相隔 $i-k$ 个延迟的输入信号自相关函数，即

$$r(i-k) = E[u(n-k)u^*(n-i)]$$

第二个期望 $E[u(n-k)d^*(n)]$：等于输入信号 $u(n-k)$ 与期望响应 $d(n)$ 相隔 $-k$ 个延迟的互相关，即

$$p(-k)=E[u(n-k)d^*(n)]$$

将式 $r(i-k)=E[u(n-k)u^*(n-i)]$

$$p(-k)=E[u(n-k)d^*(n)]$$

代入

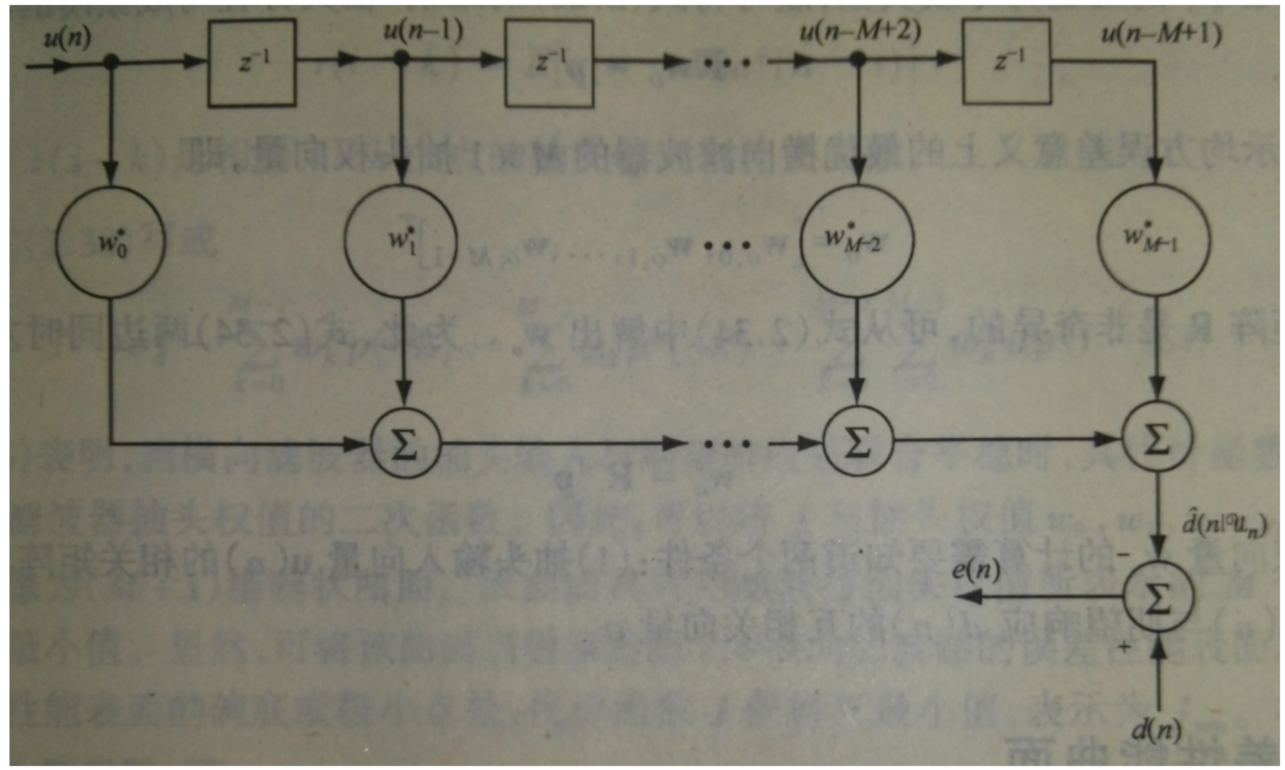
$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{o,i} E[u(n-k)u^*(n-i)] = E[u(n-k)d^*(n)],$$

$$k=0,1,2\ldots$$

可得维纳霍-夫方程

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{o,i} r(i-k) = p(-k), \quad k=0,1,2\ldots$$

2、线性横向滤波器的维纳-霍夫方程



$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{o,i} r(i-k) = p(-k), \quad k = 0,1,2\ldots$$ 简化为

$$\sum_{i=0}^{M-1} w_{o,i} r(i-k) = p(-k), \quad k = 0,1,\ldots,M-1$$

对于横向滤波器，第n时刻的输入向量可表示为

$$\mathbf{u}(n)=[u(n),u(n-1),\ldots,u(n-M+1)]^T$$

则其相关矩阵为

$$\mathbf{R}=E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)]$$
$$=\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \ldots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & \ldots & r(M-2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & \ldots & r(0) \end{bmatrix}$$

将滤波器的输入向量与期望响应的互相关向量记为

$$\mathbf{p}=E[\mathbf{u}(n)d^*(n)]$$

则维纳-霍夫方程可写成矩阵形式：

$$\mathbf{R}\mathbf{w}_o = \mathbf{p}$$

其中，$\mathbf{w}_o = \left[w_{o,0}, w_{o,1}, \ldots, w_{o,M-1} \right]^T$

如果相关矩阵是非奇异的，则可解出令代价函数最小的最优权值向量，即

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$$