信息论笔记

宋佳欢

2019 年 10 月 9 日

目录

1 信息熵

信息量 $I(x)=f\big(p(x)\big)$，函数 f 需满足下列四个条件:

1.f 单调递减，事件发生的概率越小，获得的信息量越大。

2. 当 $p(x)=1$，$f\big(p(x)\big)=0$

3. 当 $p(x)=0$，$f\big(p(x)\big)=\infty$

4. 两件独立事件同时发生的获取的信息之和为 $I(x,y) = I(x) + I(y) = f\big(p(x)\big) + f\big(p(y)\big) = f\big(p(x,y)\big)$

因此，$p(x,y) = p(x)p(y)$。根据这个关系，$I(x)$ 与 $p(x)$ 一定为对数关系。

根据上述四个条件可得:

$$I(x) = -logp(x)$$

其中负号是用来保证信息量是正数或者零。而 log 函数基的选择是任意的（信息论中基常常选择为 2，因此信息的单位为比特 bits，即信息需要的编码长度；而机器学习中基常常选择为自然常数，因此单位常常被称为奈特 nats；底数为 10，单位则为 Hart）。

$I(x)$ 也被称为随机变量 x 的自信息 (self-information)，描述的是随机变量的某个事件发生所带来的信息量。

现在假设一个发送者想传送一个随机变量的值给接收者。那么在这个过程中，他们传输的平均信息量可以通过求 $I(x)$ 关于概率分布 $p(x)$ 的期望求得，随机变量 X 的信息熵的定义：

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)logp(x_i)$$

熵越大，随机变量的不确定性就越大。是对所有可能发生的事件产生的信息量的期望。

1.1 代数性质

1.1.1 对称性

变量 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 的顺序任意互换，熵不变。

$$H(p_1, p_2, \cdots, p_r) = H(p_2, \cdots, p_r, p_1) = H(p_r, p_1, p_2, \cdots, p_{r-1})$$

1.1.2 非负性

$$H(p_1, p_2, \cdots, p_r) \geq 0$$

1.1.3 连续性

$H(p_1, p_2, \cdots, p_r)$ 是 p_i 的连续函数。

1.1.4 扩展性

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H(p_1, p_2, \cdots, p_i - \varepsilon, \cdots, p_r, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k) = H(p_1, p_2, \cdots, p_r)$$

其中每个 ε 都趋于 0。当信源的消息集中的消息数增多时，因为这些消息对于的概率很小 (比重很小)，所以信源的熵不变。

1.1.5 可加性

统计独立的两个信源 X,Y 的两个联合信源的熵等于分别熵之和:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$$

$$\begin{aligned}
H(X,Y) &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_j log p_i q_j \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_j log p_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i q_j log q_j \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{j=1}^{m} p_i q_j\big) log p_i - \sum_{j=1}^{m}\big(\sum_{i=1}^{n} p_i q_j\big) log q_j \\
&= -\sum_{i=1}^{n} p_i log p_i - \sum_{j=1}^{m} q_j log q_j = H(X) + H(Y)
\end{aligned}$$

1.1.6 递增性

将信源 X 中的其中一个元素划分成 m 个元素，这 m 个元素的概率之和等于原元素的概率，熵增加。

$$H_{n+m-1}(p_1,p_2,\cdots,p_{n-1},q_1,q_2,\cdots,q_m) = H_n((p_1,p_2,\cdots,p_{n-1},p_n) + p_n H_m(\frac{q_1}{p_n},\frac{q_2}{p_n},\cdots,\frac{q_m}{p_n})$$

1.2 解析性质

1.2.1 最大离散熵定理

在离散信源情况下, 信源各符号等概率分布时, 熵达到最大。(概率分布越接近平均分布，熵越大)

$$H(p_1,p_2,\cdots,p_r) \le H(\frac{1}{r},\frac{1}{r},\cdots,\frac{1}{r}) \le log r$$

1.2.2 上凸性

熵函数是严格的上凸函数:

$$H(\theta P_1 + (1-\theta)P_2) > \theta H(P_1) + (1-\theta)H(P_2)$$

2 信道

离散单符号信道可用传递概率表示:

$$\begin{bmatrix}
P(b_1|a_1) & P(b_2|a_1) & \cdots & P(b_s|a_1) \\
P(b_1|a_2) & P(b_2|a_2) & \cdots & P(b_s|a_2) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(b_1|a_r) & P(b_2|a_r) & \cdots & P(b_s|a_r)
\end{bmatrix}$$

a 为输入，b 为输出。且传递矩阵 (信道矩阵) 每一行的元素相加等于 1，即:

$$\sum_{j=1}^{s} P(b_j|a_i) = 1$$

$P(b_i|a_i)$ 表示发送 a 收到 b 的概率（前向概率）描述了信道噪声的特征，$P(a_i|b_i)$ 表示接受到了 b_i，发送端发送 a_i 的概率（后向概率)。

2.1 互信息与平均互信息

互信息 (Mutual Information):$I(a_i;b_j)$ 表示接受到 b_j 后，能从 b_j 获得的关于 a_i 的信息量。互信息的三种写法:

$$\begin{aligned} I(a_i;b_j) &= I(a_i) - I(a_i|b_j) \\ &= I(b_j) - I(b_j|a_i) \\ &= I(a_i) + I(b_j) - I(a_i,b_j) \end{aligned}$$

但是单个样本的互信息不足以表示整个系统，因此需要对多个样本取期望，即平均互信息:

$$I(X;Y) = E_{P(X,Y)}\{I(a_i;b_j)\}$$

对于单个样本的互信息，其值可正可负或为零，但是平均互信息一定不会为负值。

证明:

$$I(X;Y) = E_{P(X,Y)}\{I(a_i;b_j)\} = \sum_i \sum_j P(a_i,b_j) log\frac{P(a_i,b_j)}{P(a_i)P(b_j)}$$

$$-I(X;Y) = \sum_i \sum_j P(a_i,b_j) log\frac{P(a_i)P(b_j)}{P(a_i,b_j)}$$

根据琴生不等式，以及:

$$\sum_i \sum_j P(a_i)P(b_j) = 1$$

所以

$$-I(X;Y) = \sum_i \sum_j P(a_i,b_j) log\frac{P(a_i)P(b_j)}{P(a_i,b_j)} \leq log\Big(\sum_i \sum_j P(a_i,b_j)\frac{P(a_i)P(b_j)}{P(a_i,b_j)}\Big) = log1 = 0$$

即

$$I(X;Y) \geq 0$$

互信息有三种写法，平均互信息也衍生出三种写法:

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - \underbrace{H(X|Y)}_{\text{疑义度（损失熵）}} \\ &= H(Y) - \underbrace{H(Y|X)}_{\text{噪声熵}} \\ &= H(X) + H(Y) - \underbrace{H(XY)}_{\text{联合熵（共熵）}} \end{aligned}$$

2.2 信道容量

每一个信道都有一个最大的信息传输率，这个最大传输率定义为：

$$C = \max_{P(x)}\{I(X;Y)\} \quad \text{单位：比特/符号}$$

信道单位时间内平均传输的最大信息量为：

$$C_t = \frac{C}{t} \quad \text{单位：比特/秒}$$

2.2.1 无噪无损信道（输入输出一一对应）

该信道的信道矩阵每行每列仅有一个 1，其他都为 0。

这类信道的平均互信息为：

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) - \underbrace{H(X|Y)}_{\text{疑义度 }=0} \\ &= H(Y) - \underbrace{H(Y|X)}_{\text{噪声熵 }=0} \\ &= H(X) = H(Y) \end{aligned}$$

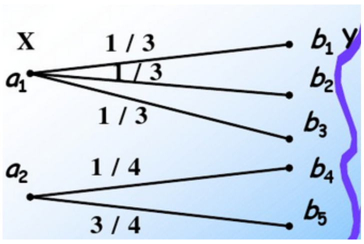
当输入信源确定后，接收到的符号也确定，为确定性事件，所以噪声熵为 0；同理疑义度（损失熵）也为 0。

当输入信源等概率分布时，此类信道的信息传输率达到极大值：

$$C = \max_{P(x)}\{I(X;Y) = \max_{P(x)} H(X) = logr$$

2.2.2 无损信道

一个输入对应多个输出，但是每个输出只对应一个输入。



信道矩阵特点： 信道矩阵中每列有且仅有一个非零元素。

这类信道的损失熵（疑义度）=0，即当输出符号确定后，输入符号也随之确定。噪声熵不为 0。

平均互信息为：

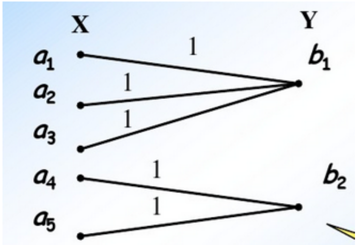
$$I(X;Y) = H(X) < H(Y)$$

信道容量为（信源等概率分布时取到）：

$$C = \max_{P(x)} H(X) = logr$$

2.2.3 无噪有损信道

多个输入对应一个输出，一个输出对应多个输入。



信道矩阵特点：每行仅有一个非零元素。
这类信道的噪声熵为 0，损失熵（疑义度）不为 0。
平均互信息：

$$I(X;Y) = H(Y) < H(X)$$

信道容量为（总能找到一个最佳的输入分布 X，使得输出 Y 达到等概率分布）：

$$C = \max_{P(x)} H(Y) = logr$$

2.2.4 对称离散信道

信道矩阵特点：信道矩阵中的每一行都是由同一 $\{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_s^{'}\}$ 集的各个元素不同排列组成。每一行都是由同一 $\{q_1^{'}, q_2^{'}, ..., q_r^{'}\}$ 集的各个元素不同排列组成。平均互信息：

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y|X) = \sum_X P(x)|sum_Y P(y|x) log\frac{1}{P(y|x)} = \sum_X P(x)H(Y|X=x)$$

x 取某一值时，$H(Y|X=x)$ 即为对信道矩阵的某一行求和，因为信道矩阵每一行都是相同元素的排列组合，所以该值对于所以的 x 都相同，即与 x 无关：

$$H(Y|X=x) = H(p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_s^{'})$$

所以信道容量 C 为：

$$C = \max_{P(x)} [H(Y) - H(p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_s^{'})]$$

问题转化为求一个输入分布 $P(x)$，使得 $H(Y)$ 取最大值的问题。若输出信号 Y 等概率分布，就能得到最大的 $H(Y) = logs$。

每个输出符号的概率为：

$$P(y_i) = \sum_X P(x)P(y_i|x)$$

将输入信号设为等概率分布，即 $P(x) = \frac{1}{r}$，上式变为：

$$P(y_i) = \sum_X \frac{1}{r} P(y_i|x) = \frac{1}{r} \sum_X P(y_i|x)$$

由于信道矩阵的每一列都是相同元素的不同组合，所以 $\sum_X P(y_i|x)$ 不变，为信道矩阵每一列的和 $\sum_{i=1}^s q_i^{'}$。即当输入信号等概率时，输出信号也等概率。

对称离散信道的信道容量为:

$$C = logr - H(p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_s^{'}), (\text{比特/符号})$$

2.2.5 准对称信道

信道矩阵特点： 1. 行可排。2. 列不可排，若分为若干子集，在子集中可排。

将信道矩阵按列分为 m 个子集，每个子集含有 s_l 列，$l = 1, 2, ..., m$。$P(b_l)$ 为第 l 个子集输出符号的平均概率。

准对称信道的信道容量为：

$$C = -\sum_{l=1}^{m} s_l P(b_l) log(b_l) - H(p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_s^{'})$$

2.2.6 一般离散信道（等量平衡定理）

求信道容量, 等价于一个带约束的优化问题：

$$C = \max_{P(x)} I(X; y), \quad s.t. \sum_{i=1}^{r} P(a_i) = 1$$

利用拉格朗日乘子法，做辅助函数：

$$F(p(a_1), p(a_2), ...p(a_r), \lambda) = I(X; Y) - \lambda \left[\sum_{i=1}^{r} P(a_i) - 1 \right]$$

分别对 $p(a_1), p(a_2), ...p(a_r)$ 求偏导，并置之为零。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial P(a_i)} &= \frac{\partial I(X; Y)}{\partial P(a_i)} - \lambda \\ &= \sum_{j=1}^{s} p(b_j|a_i) ln \frac{p(b_j|a_i)}{p(b_j)} - 1 - \lambda \\ &= I(a_i; Y) - 1 - \lambda \end{aligned}$$

即：

$$\sum_{j=1}^{s} p(b_j|a_i) ln \frac{p(b_j|a_i)}{p(b_j)} = 1 + \lambda$$

假设使 $I(X; Y)$ 达到最大值的输入信源的概率是 $p_1, p_2, ...p_r$，两边关于输入信源的概率求积分（求和）：

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} p_i p(b_j|a_i) ln \frac{p(b_j|a_i)}{p(b_j)} = \sum_{i=1}^{r} p_i (1 + \lambda)$$

等式左边就是信道容量，所以：

$$C = 1 + \lambda$$

等量平衡定理: 当信道的平均互信息达到信道容量时，输入信源符号集中的每个信源符号 x 对输入端提供的互信息都相等，除概率为 0 的符号以外。

2.2.7 可逆矩阵信道的信道容量

略（手写笔记）

2.2.8 信道容量的迭代计算

一般信道容量计算复杂，使用迭代的方法对信道容量近似计算。

信道的平均互信息是先验概率 $p(a_i)$ 和后验概率 $p(a_i|b_j)$ 的一个函数：

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{r} p(a_i)lnp(a_i) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} p(a_i)p(b_j|a_i)lnp(a_i|b_j)$$

而这两个变量之间并不是独立的，满足:

$$p(a_i|b_j) = \frac{p(a_i)p(b_j|a_i)}{\sum_{i=1}^{r} p(a_i)p(b_j|a_i)}$$

1. 固定 $p(a_i)$，求解使得 $I(X;Y)$ 最大的 $p(a_i|b_j)$。
2. 固定 $p(a_i|b_j)$，求解使得 $I(X;Y)$ 最大的 $p(a_i)$。
3. 重复上述步骤，不断迭代至收敛。

2.3 平均互信息量的不增性

略（手写笔记）