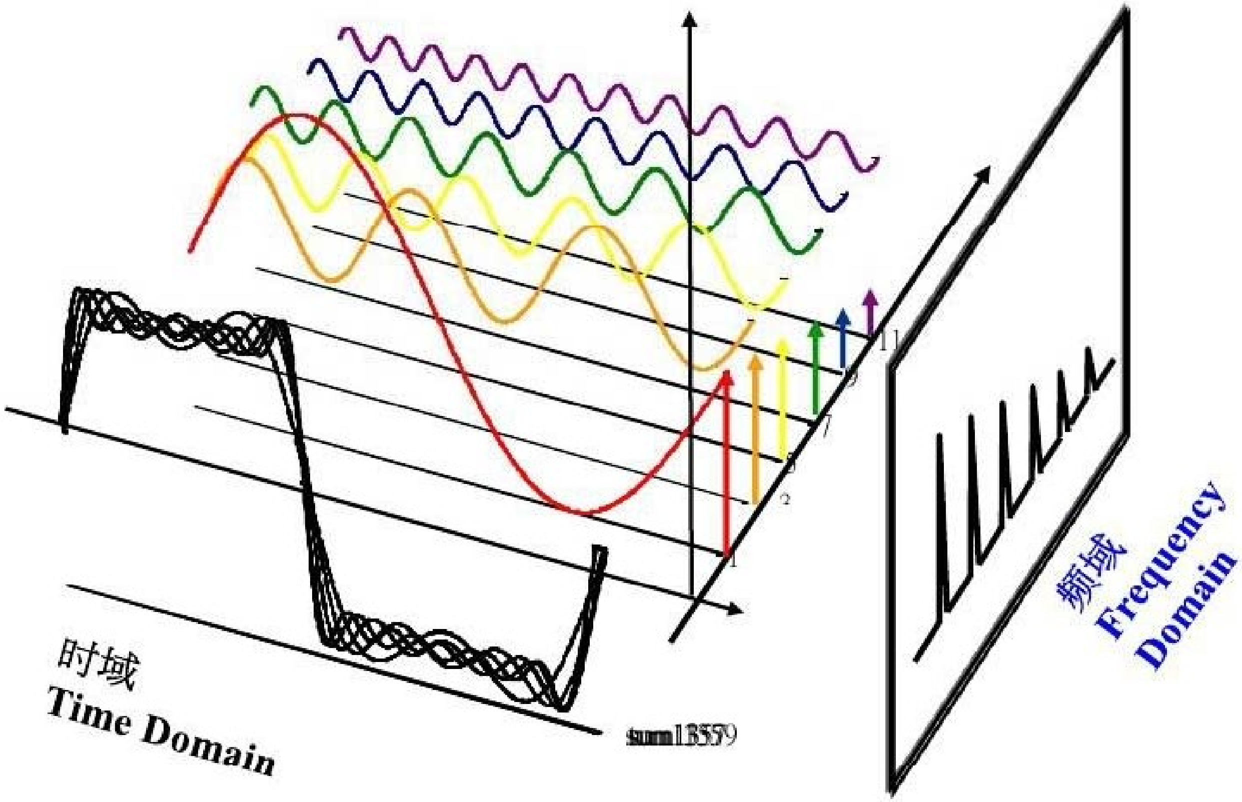
第五章 功率谱估计功率

□较全面地描述确定性信号的特征：

➢ 时域：**时间函数**

➢ 频域：**信号频谱**



- 较全面地描述(广义)平稳随机信号的特征：
  - 时域：**自协方差序列**
  - 频域：**功率谱**

- 功率谱的优点：可以看出平稳随机过程在时域中难以看出的某些隐含的性质，如：
  - 周期性
  - 距离很近的谱峰

- 本章讨论的内容：
  - 如何根据有限数据估计平稳随机过程的功率谱的问题，简称**谱估计问题**。
- 谱估计方法的分类：
  - 经典法(**非参数方法**)
  - 现代法(**参数方法**)

- **经典法(非参数法)**:
  - 周期图法(Periodogram)
  - 周期图法的改进

- **优点**：对数据序列的类型未做任何限制，因而适用于任何类型的随机过程；
- **缺点**：对数据或自相关序列进行了加窗处理，因而在数据少的情况下，频率分别率差。

- **现代法(参数法)：**
  - **自回归模型(AR)**
  - **滑动平均模型(MA)**
  - **滑动平均自回归模型(ARMA)**

- **优点：**
  - 克服了非参数法的加窗效应；
  - 在数据较少的情况下，效果也很好。

§3.1　自相关序列的估计

3.1.1 功率谱的定义

- 全称为**功率谱密度**(Power Spectral Density)，简称为**功率谱**(Power Spectrum)。

- 零均值广义平稳随机过程$\{x(n)\}$的功率谱定义为**自相关序列** $R_{xx}(m)$ 的傅里叶变换：

$$S_{xx}(e^{j\omega}) \equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xx}(m)e^{-j\omega m} \qquad (3.1.1)$$

即**维纳-辛钦定理**(Wiener-Khinchin Theorem)。

- **问题**：如何计算自相关序列?

3.1.2 自相关序列

- 自相关序列定义为**滞后积**的数学期望：

$$R_{xx}(m) \equiv E[x(n)x^*(n+m)] \qquad (3.1.2)$$

- 设 $\{x(n)\}$ 是遍历性随机过程，则式(3.1.2)所示的集平均可以用**时间平均**来计算：

$$R_{xx}(m) \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)x^*(n+m) \qquad (3.1.3)$$

➢ 随机过程的均值假设

- 对于零均值的广义平稳随机过程$\{x(n)\}$的功率谱估计，归结为对它的自相关序列的估计；

- 对于均值不为零的随机过程$\{x(n)\}$，将其均值移去后，功率谱不会改变。因此，在后面的讨论中，都假设**随机过程的均值为零**；

- 用时间平均$R_{xx}(m) \equiv \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)x^*(n+m)$来计算自相关序列，存在如下问题：

- 计算滞后时间 $m\in(-\infty,+\infty)$，需要知道所有离散时间点 $n\in(-\infty,+\infty)$ 上的 $x(n)$ 值，但现实中不可能采集无限多样值。

- ✓ 实际中，只能根据**有限个含噪数据**来估计随机过程的自相关序列，进而估计功率谱。

3.1.3 采用矩形窗截断(解决方法1)

- 设已知随机过程$\{x(n)\}$的一个取样序列$x(n)$的一段数据(有N个)为$x_N(n)$，即

$$x_N(n) = w_R(n)x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad (3.1.4)$$

- 式中，$w_R(n)$是宽度为N的**矩形窗**，即

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad (3.1.5)$$

- 当用$x_N(n)$ 估计自相关序列 $R_{xx}(m)$ 时，计算时间平均的式(3.1.3)中的滞后积$x(n)x^*(n+m)$是长为 $N-|m|$的序列，因为

$$m \geq 0: \quad \underbrace{x(0)x^*(m),\cdots,x(N-1-m)x^*(N-1)}_{(N-m)=(N-|m|)\text{个数据}}$$

$$m < 0: \quad \underbrace{x(-m)x^*(0),\cdots,x(N-1)x^*(N-1+m)}_{(N+m)=(N-|m|)\text{个数据}}$$

因此，其时间平均为

$$R_N'(m) = \frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x^*(n+m), \quad |m| \leq N-1 \tag{3.1.6}$$

- 从 $R_N'(m)=\dfrac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}x(n)x^*(n+m),\quad |m|\le N-1$

  可以看出：

- 滞后积$x(n)x^*(n+m)$是共轭对称序列，$R_N'(m)$ 也为**共轭对称序列**，即$R_N'(m)=R_N'^*(-m)$ ；当是实序列时，$R_N'(m)$是**偶序列**，即 $R_N'(m)=R_N'(-m)$；
- 滞后积序列$\{x(n)x^*(n+m)\}$长度随$|m|$ 的增加而变短。

$R_N'(m)$ 的期望值

$$E[R_N'(m)] = \frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1-|m|} E[x(n)x^*(n+m)]$$
$$= \frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1-|m|} R_{xx}(m) = R_{xx}(m) \qquad (3.1.7)$$

因此，用$R_N'(m)$是 $R_{xx}(m)$ 的无偏估计。

- $R_N'(m)$ 的方差 $\mathrm{Var}[R_N'(m)]$

根据 $R_N'(m)$的表达式，其均方值为

$$E\{[R_N'(m)]^2\} \tag{3.1.8}$$

$$=\frac{1}{(N-|m|)^2}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}\sum_{k=0}^{N-1-|m|}E[x(n)x^*(n+m)x(k)x^*(k+m)]$$

考虑实序列的情况(复序列结论相同)，上式简化为

$$E\{[R_N'(m)]^2\}$$

$$=\frac{1}{(N-|m|)^2}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}\sum_{k=0}^{N-1-|m|}E[x(n)x(n+m)x(k)x(k+m)]$$

当$\{x(n)\}$是零均值实数高斯随机序列时，有如下**高斯矩分解定理**：

$$\begin{aligned} E[x(k)x(l)x(m)x(n)] = {} & E[x(k)x(l)]E[x(m)x(n)] \\ & + E[x(k)x(m)]E[x(l)x(n)] \\ & + E[x(k)x(n)]E[x(l)x(m)] \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

$$E(1,2,3,4) = E(1,2)E(3,4) + E(1,3)E(2,4) + E(1,4)E(2,3)$$

➢ 使用上述定理，$R_N'(m)$ 可简化为

$$E\{[R_N'(m)]^2\}$$

$$=\frac{1}{(N-|m|)^2}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}\sum_{k=0}^{N-1-|m|}\{E[x(n)x(n+m)]E[x(k)x(k+m)]$$

$$+E[x(n)x(k)]E[x(n+m)x(k+m)]$$

$$+E[x(n)x(k+m)]E[x(n+m)x(k)]\}$$

$$=\frac{1}{\left(N-|m|\right)^2}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}\sum_{k=0}^{N-1-|m|}\left[[\underbrace{R_{xx}^2(m)}_{(1)}+\underbrace{R_{xx}^2(n-k)}_{(2)}\right.$$

$$\left.+\underbrace{R_{xx}(n-k-m)R_{xx}(n-k+m)}_{(3)}\right],\quad |m|\le N-1 \qquad (3.1.10)$$

➢ 对于第一个求和项 $\sum_{n=0}^{N-1-|m|}\sum_{k=0}^{N-1-|m|}\left[[\underbrace{R_{xx}^2(m)}_{(1)}\right]$

因为 $R_{xx}(m)$ 与 n 和 k 无关，而两重求和共有 $\left(N-|m|\right)^2$ 次求和，所以有

$$\sum_{n=0}^{N-1-|m|}\sum_{k=0}^{N-1-|m|}\left[\underbrace{R_{xx}^2(m)}_{(1)}\right]=\left(N-|m|\right)^2 R_{xx}^2(m) \qquad (3.1.11a)$$

➢ 对于剩下的求和项

$$\sum_{n=0}^{N-1-|m|}\sum_{k=0}^{N-1-|m|}[\underbrace{R_{xx}^2(n-k)}_{(2)}+\underbrace{R_{xx}(n-k-m)R_{xx}(n-k+m)}_{(3)}]$$

令$r=n-k$, $\quad \varphi(r,m)=R_{xx}^2(r)+R_{xx}(r-m)R_{xx}(r+m)$

- ✓ 因为 n 和 k 都从 $0\sim(N-1-|m|)$ 取值，则 r 从 $-(N-1-|m|)\sim(N-1-|m|)$ 取值；
- ✓ 对应于任一个 $r=n-k$ 值，对应 $N-|m|-|r|$个相同的项。

证明：$\sum_{n=0}^{N-1-|m|} \sum_{k=0}^{N-1-|m|} \varphi(n-k,m),\ \ r=n-k$

- ✓ 当 $r=n-k>0$ 时，有如下情况对应

$n=r,\ r+1,\cdots,\ N-1-|m|$

$k=0,\ 1,\quad \cdots,\ N-1-|m|-r \Leftrightarrow N-1-|m|-|r|$

总计：$N-|m|-|r|$

- ✓ 当 $r=n-k<0$ 时，有如下情况对应

$k=0,\quad 1,\qquad \cdots,\ N-1-|m|+r \Leftrightarrow N-1-|m|-|r|$

$n=-r,\ -r+1,\cdots,\ N-1-|m|$

总计：$N-|m|-|r|$

因而可得

$$\sum_{n=0}^{N-1-|m|}\sum_{k=0}^{N-1-|m|}[\underbrace{R_{xx}^{2}(n-k)}_{(2)}+\underbrace{R_{xx}(n-k-m)R_{xx}(n-k+m)}_{(3)}]$$

$$=\sum_{r=-(N-1-|m|)}^{N-1-|m|}(N-|m|-|r|)\varphi(r,m) \qquad (3.1.11b)$$

其中，$\varphi(r,m)=R_{xx}^{2}(r)+R_{xx}(r-m)R_{xx}(r+m)$

➢ 将两个求和项(3.1.11a&b)代入(3.1.11)，可得：

$$E\{[R'_N(m)]^2\}$$

$$=\frac{1}{(N-|m|)^2}\Big\{(N-|m|)^2 R_{xx}^2(m)$$

$$+\sum_{r=-(N-1-|m|)}^{N-1-|m|}(N-|m|-|r|)\varphi(r,m)\Big\}$$

$$=R_{xx}^2(m)+\frac{1}{(N-|m|)^2}\sum_{r=-(N-1-|m|))}^{N-1-|m|}(N-|m|-|r|)\varphi(r,m) \quad (3.1.12)$$

其中，$\varphi(r,m)=R_{xx}^2(r)+R_{xx}(r-m)R_{xx}(r+m)$

- 因此，$R_N'(m)$的方差为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[R_N'(m)] \\
&= E\{[R_N'(m)]^2\} - E\{[R_N'(m)]\}^2 \\
&= E\{[R_N'(m)]^2\} - R_{xx}^2(m) \\
&= \frac{1}{(N-|m|)^2} \sum_{r=-(N-1-|m|)}^{N-1-|m|} (N-|m|-|r|)\varphi(r,m) \qquad (3.1.13a)
\end{aligned}
$$

其中，$\varphi(r,m) = R_{xx}^2(r) + R_{xx}(r-m)R_{xx}(r+m)$

◆ 对于大样本情况(满足$N \gg |m|+|r|$)：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[R_N^{'}(m)] \\
&= \frac{1}{(N-|m|)^2} \sum_{r=-(N-1-|m|))}^{N-1-|m|)} (N-|m|-|r|)\varphi(r,m) \\
&\approx \frac{N}{(N-|m|)^2} \sum_{r=-(N-1-|m|)}^{N-1-|m|} [R_{xx}^2(r)+R_{xx}(r-m)R_{xx}(r+m)]
\end{aligned}
\qquad (3.1.13b)
$$

取极限，可得：

$$
\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}[R_N^{'}(m)] = 0 \qquad (3.1.14)
$$

所以，$R_N^{'}(m)$ 是 $R_{xx}(m)$ 的一致估计。

- 对于小样本情况(不满足$N \gg |m|$):

当$|m|$接近于N时，滞后积序列$\{x(n)x^*(n+m)\}$长度$N-|m|$很短，用来计算平均的元素很少，计算出的$R_N'(m)$相对于$R_{xx}(m)$误差很大。

所以，在小样本情况下，式(3.1.14)

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}[R_N'(m)] = 0$$

不成立。为了减小估计方差，下面采用三角窗截断来提高性能。

3.1.4 采用三角窗截断(解决方法2)

- 定义三角窗$w_B(m)=\begin{cases}1-\dfrac{|m|}{N}, & |m|\le N-1\\ 0, & 其他\end{cases}$

- 用三角窗乘以滞后积序列，以减小大$|m|$值时的估计误差。这样得到的自相关函数的估计为

$$R_N(m)=\frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}\left(1-\frac{|m|}{N}\right)x(n)x^*(n+m)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}x(n)x^*(n+m),\quad |m|\le N-1 \qquad (3.1.15)$$

对比如下两式

$$R_N'(m)=\frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}x(n)x^*(n+m),\quad |m|\le N-1 \quad (3.1.6)$$

$$R_N(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}x(n)x^*(n+m),\quad |m|\le N-1 \quad (3.1.15)$$

可得

$$R_N(m)=\frac{N-|m|}{N}\frac{1}{N-|m|}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}x(n)x^*(n+m)$$

$$=\frac{N-|m|}{N}R_N'(m),\quad |m|\le N-1 \quad (3.1.16)$$

- $R_N(m)$的期望值

根据关系式

$$R_N(m) = \frac{N-|m|}{N} R_N^{'}(m), \qquad |m| \le N-1 \quad (3.1.16)$$

可得

$$E[R_N(m)] = \frac{N-|m|}{N} E[R_N^{'}(m)] = \frac{N-|m|}{N} R_{xx}(m)$$
$$\ne R_{xx}(m), \quad |m| \le N-1 \qquad (3.1.17)$$

因此，用$R_N(m)$是$R_{xx}(m)$的有偏估计。

$$\lim_{N\to\infty} E[R_N(m)] = \lim_{N\to\infty} \frac{N-|m|}{N} R_{xx}(m), \quad |m| \le N-1$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) R_{xx}(m), \quad |m| \le N-1$$

$$= \begin{cases} R_{xx}(m), N \gg |m| & (3.1.18a) \\ 0, \qquad N\text{接近于}\,|m| & (3.1.18b) \end{cases}$$

所以，当$N \gg |m|$时，$R_N(m)$是$R_{xx}(m)$的**渐进无偏估计**。但当N接近于$|m|$时，误差为$R_{xx}(m)$。

$R_N(m)$的方差

根据 $R_N(m)=\frac{N-|m|}{N}R_N^{'}(m),\ |m|\le N-1$ (3.1.16)可得

$$\mathrm{Var}[R_N(m)]=\left(\frac{N-|m|}{N}\right)^2\mathrm{Var}[R_N^{'}(m)]$$

$$=\left(\frac{N-|m|}{N}\right)^2\frac{1}{(N-|m|)^2}\sum_{r=-(N-1-|m|)}^{N-1-|m|)}(N-|m|-|r|)\varphi(r,m)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{r=-(N-1-|m|)}^{N-1-|m|)}\left(1-\frac{|m|+|r|}{N}\right)\varphi(r,m) \qquad (3.1.19)$$

其中，$\varphi(r,m)=R_{xx}^2(r)+R_{xx}(r-m)R_{xx}(r+m)$

当 $N \gg |m|$ 时：

$$\mathrm{Var}[R_N(m)] = \frac{1}{N}\sum_{r=-(N-1-|m|)}^{N-1-|m|)}\left(1-\frac{|m|+|r|}{N}\right)\varphi(r,m)$$

$$\approx \frac{1}{N}\sum_{r=-(N-1-|m|)}^{N-1-|m|)}\varphi(r,m) \qquad (3.1.20)$$

$$\approx 0 \qquad (3.1.21)$$

所以，当 $N \gg |m|$ 时，$R_N(m)$是 $R_{xx}(m)$ 的**一致估计**。

当不满足$N \gg |m|$时(N接近$|m|$):

$$E[R_N(m)] = \frac{N-|m|}{N} R_{xx}(m) \approx 0, \quad |m| \le N-1 \quad (3.1.18b)$$

所以，当不满足$N \gg |m|$时，$R_N(m)$不是$R_{xx}(m)$的渐进无偏估计。

但从式(3.1.19) $\mathrm{Var}[R_N(m)] = \left(\frac{N-|m|}{N}\right)^2 \mathrm{Var}[R_N'(m)]$

可知，

$$\mathrm{Var}[R_N(m)] < \mathrm{Var}[R_N'(m)] \quad (3.1.22)$$

因此，通常总是用$R_N(m)$，而不是$R_N'(m)$来估计功率谱。