§4.4 RLS自适应滤波算法

- LMS横向自适应滤波器，其收敛速度较慢。
- 为了解决这一问题，可以采用**递归最小二乘**（**RLS**）自适应滤波器。
- 最小二乘法是**递归最小二乘**（**RLS**）自适应滤波器的理论基础。

◆1. 时间平均意义下的最优维纳解

- 横向自适应滤波器的输出误差为

$$e(i) = d(i) - \mathbf{w}^H(n)\mathbf{u}(i)$$

建立代价函数

$$J(n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \left|e(i)\right|^2 + \delta\lambda^n \| \mathbf{w}(n) \|^2$$

求使得上述代价函数最小的权值向量

$$\mathbf{w}(n) = [w_0(n), w_1(n), \ldots, w_{M-1}(n)]^T$$

- 为最小化 $J(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\left|e(i)\right|^2+\delta\lambda^n\|\mathbf{w}(n)\|^2$

  可以令

$$\frac{\partial J(n)}{\partial \mathbf{w}^*}=\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\left|e(i)\right|^2+\delta\lambda^n\|\mathbf{w}(n)\|^2}{\partial \mathbf{w}^*}=0$$

- 注意： $\left|e(i)\right|^2=e(i)e^*(i)$

  $\|\mathbf{w}(n)\|^2=\mathbf{w}^H(n)\mathbf{w}(n)$

则有

$$\frac{\partial J(n)}{\partial \mathbf{w}^*(n)} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^*(n)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}[e(i)e^*(i)] + \delta\lambda^n \|\mathbf{w}(n)\|^2\right\}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{u}(i)[d^*(i) - \mathbf{u}^H(i)\mathbf{w}(n)] + \delta\lambda^n\mathbf{w}(n) = 0$$

- 上式可整理成

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{u}(i)\mathbf{u}^H(i)\mathbf{w}(n) + \delta\lambda^n\mathbf{w}(n) = \sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{u}(i)d^*(i)$$

- 令 $$\mathbf{\Phi}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{u}(i)\mathbf{u}^{H}(i)+\delta\lambda^{n}\mathbf{I}$$

$$\mathbf{z}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{u}(i)d^{*}(i)$$

则 $$\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{u}(i)\mathbf{u}^{H}(i)\mathbf{w}(n)+\delta\lambda^{n}\mathbf{w}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{u}(i)d^{*}(i)$$

可写成 $$\mathbf{\Phi}(n)\mathbf{w}(n)=\mathbf{z}(n)$$

称为递归最小二乘问题的正则方程。

$\mathbf{\Phi}(n)$ 和$\mathbf{z}(n)$ 的递归计算

- 将式 $\mathbf{\Phi}(n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\mathbf{u}(i)\mathbf{u}^{H}(i)+\delta\lambda^{n}\mathbf{I}$

写成

$$\mathbf{\Phi}(n)=\lambda\left[\sum_{i=1}^{n-1}\lambda^{n-1-i}\mathbf{u}(i)\mathbf{u}^{H}(i)+\delta\lambda^{n-1}\mathbf{I}\right]+\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^{H}(n)$$

$$=\lambda\mathbf{\Phi}(n-1)+\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^{H}(n)$$

- 类似地， $\mathbf{z}(n)$的递推公式可写成

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z}(n) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \mathbf{u}(i) d^*(i) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{n-1-i} \mathbf{u}(i) d^*(i) + \mathbf{u}(n) d^*(n) \\
&= \lambda \mathbf{z}(n-1) + \mathbf{u}(n) d^*(n)
\end{aligned}
$$

- 若 $\mathbf{\Phi}(n)$ 为非奇异矩阵，则可求得最优解为

$$\mathbf{w}(n)=\mathbf{\Phi}^{-1}(n)\mathbf{z}(n)$$

- 上式为最小二乘意义下的维纳解。
- 缺点：需要求矩阵 $\mathbf{\Phi}(n)$ 的逆，计算量很大。

矩阵求逆引理

- 设**A**和**B**是两个 $M\times M$ 正定矩阵，之间的关系为

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{C}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^{H}$$

其中， **D**为 $N\times N$ 正定矩阵，**C**为 $N\times N$矩阵。

则A的逆矩阵为

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{C}(\mathbf{D}+\mathbf{C}^{H}\mathbf{B}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^{H}\mathbf{B}$$

◆2. RLS迭代解

令 $\mathbf{A}=\mathbf{\Phi}(n), \mathbf{B}^{-1}=\lambda\mathbf{\Phi}(n-1), \mathbf{C}=\mathbf{u}(n), \mathbf{D}=1$

而 $\mathbf{\Phi}(n)=\lambda\mathbf{\Phi}(n-1)+\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)$

由 $\begin{cases}\mathbf{A}=\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{C}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^H \\ \mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{C}(\mathbf{D}+\mathbf{C}^H\mathbf{B}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H\mathbf{B}\end{cases}$ 可得

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(n)=\lambda^{-1}\mathbf{\Phi}^{-1}(n-1)-\frac{\lambda^{-2}\mathbf{\Phi}^{-1}(n-1)\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)\mathbf{\Phi}^{-1}(n-1)}{1+\lambda^{-1}\mathbf{u}^H(n)\mathbf{\Phi}^{-1}(n-1)\mathbf{u}(n)}$$

为了方便计算，令

$$\mathbf{P}(n)=\mathbf{\Phi}^{-1}(n),\quad \mathbf{k}(n)=-\frac{\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{u}(n)}{1+\lambda^{-1}\mathbf{u}^{H}(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{u}(n)}$$

$\mathbf{P}(n)$ 叫做逆相关矩阵，$\mathbf{k}(n)$叫做增益向量，则有

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(n)=\lambda^{-1}\mathbf{\Phi}^{-1}(n-1)-\frac{\lambda^{-2}\mathbf{\Phi}^{-1}(n-1)\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^{H}(n)\mathbf{\Phi}^{-1}(n-1)}{1+\lambda^{-1}\mathbf{u}^{H}(n)\mathbf{\Phi}^{-1}(n-1)\mathbf{u}(n)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{P}(n)=\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)-\lambda^{-1}\mathbf{k}(n)\mathbf{u}^{H}(n)\mathbf{P}(n-1)$$

将增益向量 $\mathbf{k}(n)=\dfrac{\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{u}(n)}{1+\lambda^{-1}\mathbf{u}^{H}(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{u}(n)}$

整理可得

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k}(n) &= \lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{u}(n)-\lambda^{-1}\mathbf{k}(n)\mathbf{u}^{H}(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{u}(n) \\
&= \Big[\underbrace{\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)-\lambda^{-1}\mathbf{k}(n)\mathbf{u}^{H}(n)\mathbf{P}(n-1)}_{\mathbf{P}(n)}\Big]\mathbf{u}(n) \\
&= \mathbf{P}(n)\mathbf{u}(n) \\
&= \mathbf{\Phi}^{-1}(n)\mathbf{u}(n)
\end{aligned}
$$

权值向量的时间更新

- 由关系式 $\mathbf{z}(n)=\lambda\mathbf{z}(n-1)+\mathbf{u}(n)d^*(n)$

  维纳解可写成

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}(n)&=\mathbf{\Phi}^{-1}(n)\mathbf{z}(n)\\
&=\mathbf{P}(n)\mathbf{z}(n)\\
&=\lambda\mathbf{P}(n)\mathbf{z}(n-1)+\mathbf{P}(n)\mathbf{u}(n)d^*(n)
\end{aligned}
$$

- 将关系式

$$\mathbf{P}(n) = \lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1) - \lambda^{-1}\mathbf{k}(n)\mathbf{u}^{H}(n)\mathbf{P}(n-1)$$

代入 $\mathbf{w}(n)=\lambda\mathbf{P}(n)\mathbf{z}(n-1)+\mathbf{P}(n)\mathbf{u}(n)d^{*}(n)$，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{w}(n)&=\mathbf{P}(n-1)\mathbf{z}(n-1)-\mathbf{k}(n)\mathbf{u}^{H}(n)\mathbf{P}(n-1)\mathbf{z}(n-1)\\&\quad+\mathbf{P}(n)\mathbf{u}(n)d^{*}(n)\\&=\mathbf{w}(n-1)-\mathbf{k}(n)\mathbf{u}^{H}(n)\mathbf{w}(n-1)+\mathbf{P}(n)\mathbf{u}(n)d^{*}(n)\end{aligned}$$

- 注意：$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(n-1)=\mathbf{P}(n-1)$

- 将关系式 $\mathbf{k}(n)=\mathbf{P}(n)\mathbf{u}(n)$ 代入下式

$$\mathbf{w}(n)=\mathbf{w}(n-1)-\mathbf{k}(n)\mathbf{u}^H(n)\mathbf{w}(n-1)+\mathbf{P}(n)\mathbf{u}(n)d^*(n)$$

可得

$$\mathbf{w}(n)=\mathbf{w}(n-1)+\mathbf{k}(n)\left[d^*(n)-\mathbf{u}^H(n)\mathbf{w}(n-1)\right]$$

$$=\mathbf{w}(n-1)+\mathbf{k}(n)\xi^*(n)$$

其中， $\xi(n)=d(n)-\mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{u}(n)$ (先验误差)

$e(n)=d(n)-\mathbf{w}^H(n)\mathbf{u}(n)$ (后验误差)

RLS算法总结

算法初始化

$$\mathbf{w}(0)=\mathbf{0},\ \mathbf{P}(0)=\delta^{-1}\mathbf{I}$$

对每一时刻, $n=1,2,\cdots$， 计算

$$\boldsymbol{\pi}(n)=\mathbf{P}(n-1)\mathbf{u}(n)$$

$$\mathbf{k}(n)=-\frac{\boldsymbol{\pi}(n)}{\lambda+\mathbf{u}^H(n)\boldsymbol{\pi}(n)}$$

$$\xi(n)=d(n)-\mathbf{w}^H(n-1)\mathbf{u}(n)$$

$$\mathbf{w}(n)=\mathbf{w}(n-1)+\mathbf{k}(n)\xi^*(n)$$

$$\mathbf{P}(n)=\lambda^{-1}\mathbf{P}(n-1)-\lambda^{-1}\mathbf{k}(n)\mathbf{u}^H(n)\mathbf{P}(n-1)$$