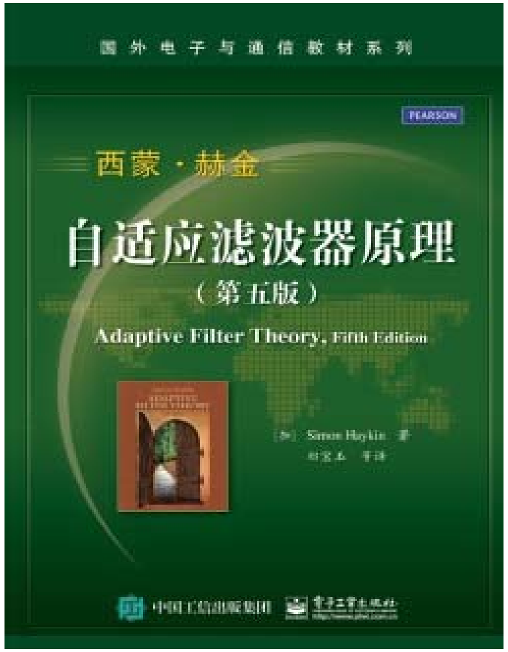
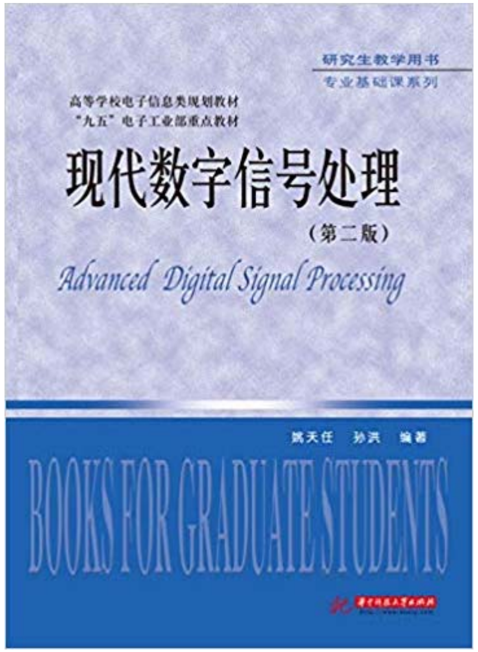
硕士研究生学位课程

随机信号处理

参考书

- 西蒙.赫金，《自适应滤波器原理》(第四/五版)，电子工业出版社，2006/2016年.
- 姚天任等,《现代数字信号处理》(第二版), 华中理工大学出版社，2018年.



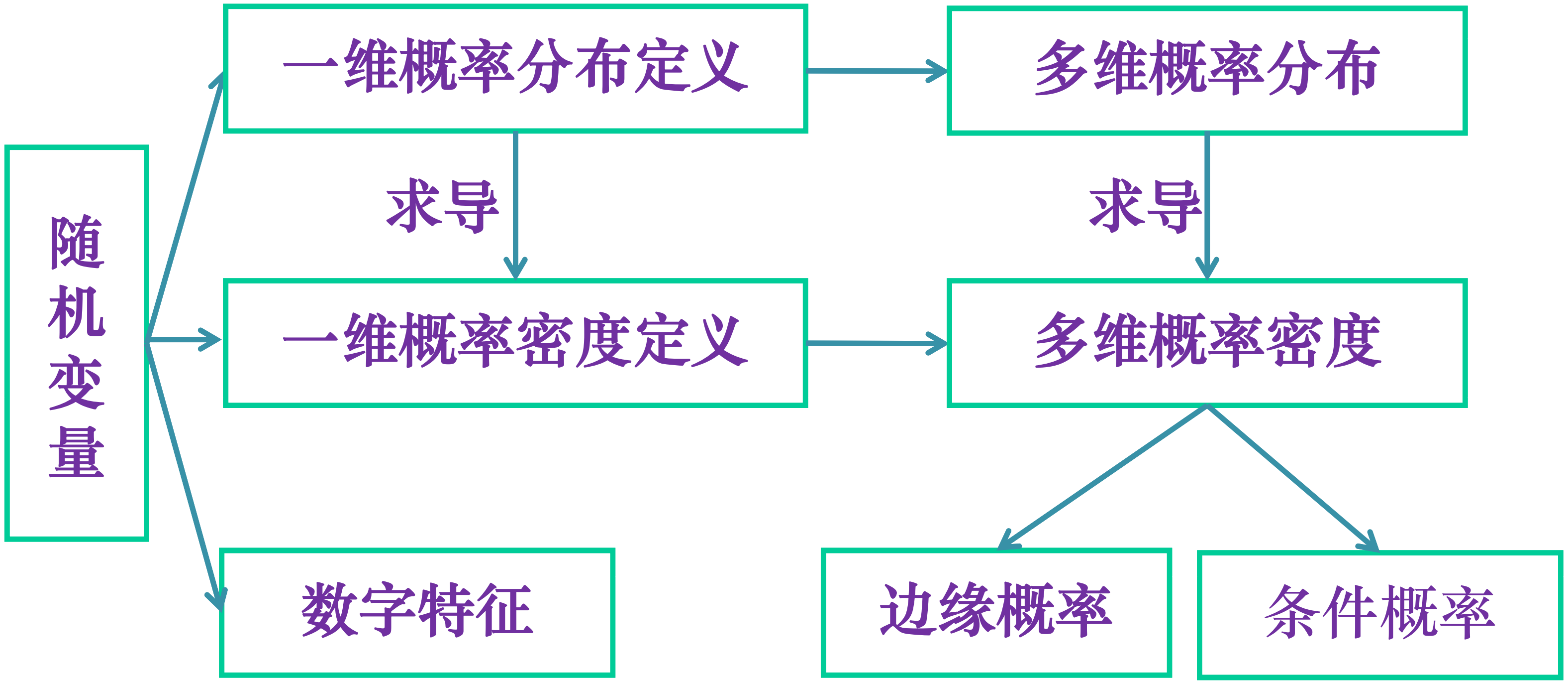


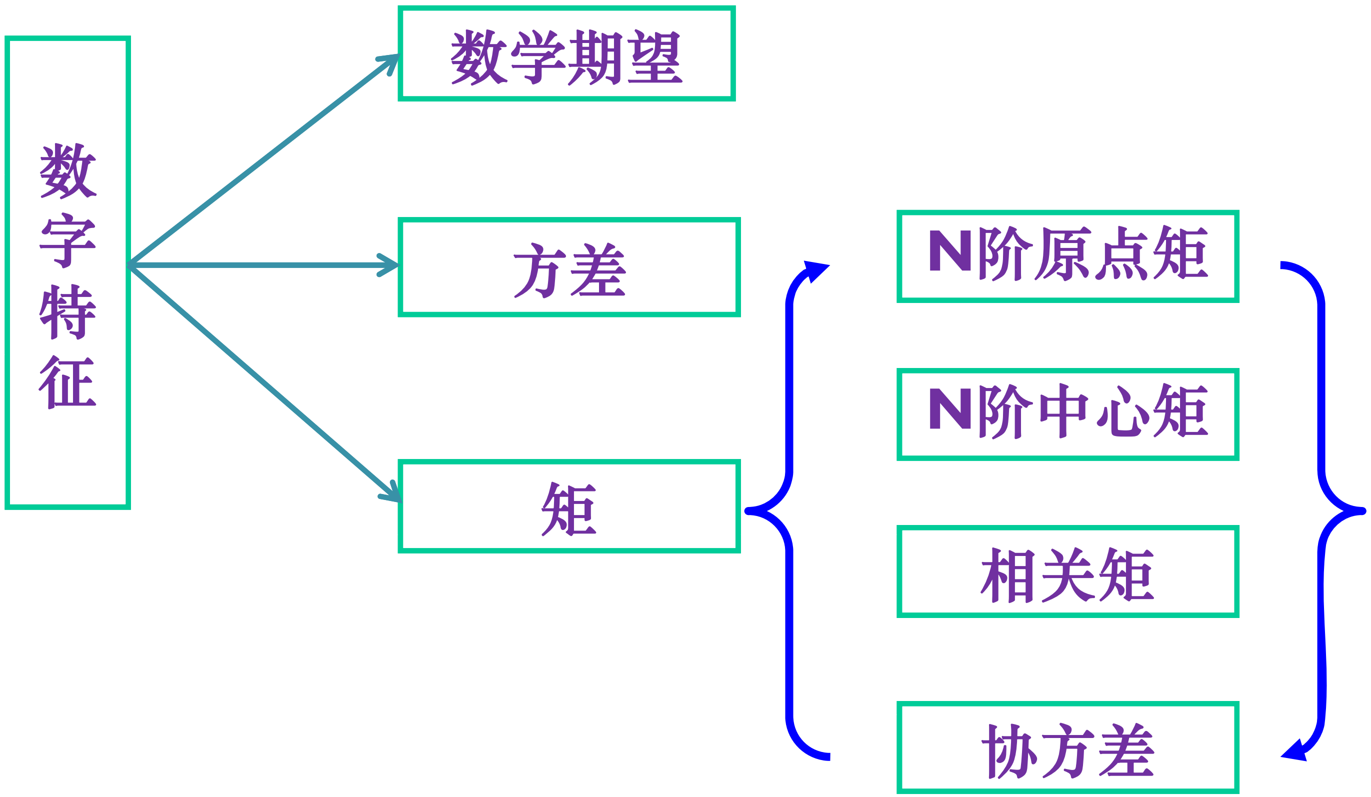
课程内容

- 一、随机信号基础
- 二、维纳滤波
- 三、自适应滤波
- 四、功率谱估计
- 五、卡尔曼滤波
- 六、同态滤波

第一章 随机信号基础

§1.1 随机变量与随机过程


随机变量
一维概率分布定义
多维概率分布
求导
求导
一维概率密度定义
多维概率密度
数字特征
边缘概率
条件概率


数字特征
数学期望
方差
矩
N阶原点矩
N阶中心矩
相关矩
协方差

1、随机过程的数学定义(1)

定义1：设E是随机试验，它的样本空间是S={ξ}，若对每个ξ∈{S}，总有一个确定的时间函数u(t, ξ), t∈T与它相对应。这样对于所有的ξ∈{S}，可得到一族时间t的函数，该簇称为**随机过程**。

族中的每一个函数称为这个随机过程的**样本函数**。

2、随机过程的数学定义(2)

定义2：设E设有一个过程u(t)，若对于每一个固定的时刻$t_j(j=1,2,\ldots)$，$u(t_j)$是一个随机变量，则称u(t)为**随机过程**。

可把随机过程看成是依赖于时间t的一族**随机变量**。

后面各章节，都采用该定义进行描述随机过程。

3、随机过程u的不同情况下的意义

A. 当t和ξ都是可变量时，u是一个**时间函数族**；

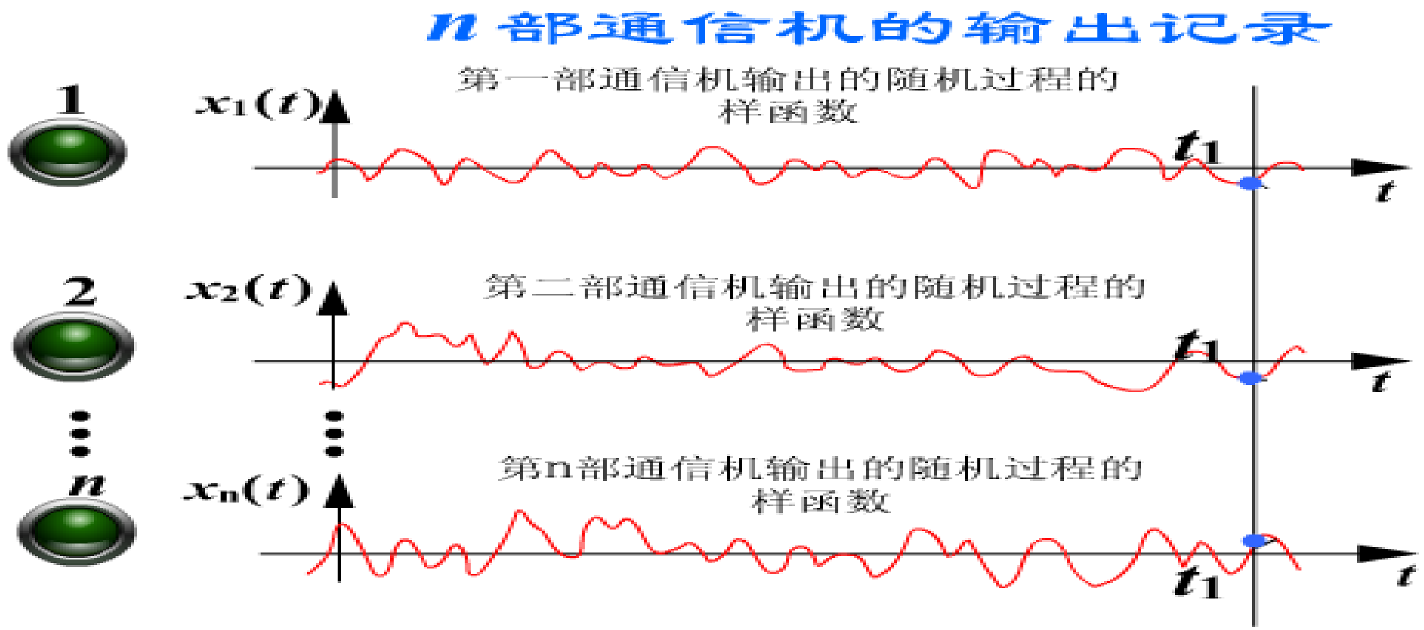
B. 当t是可变量、ξ固定时，u是一个确定的**时间函数**；

C. 当t固定，ξ是可变量时，u是一个**随机变量**；

D. 当t固定，ξ固定时，u是一个**确定数**。

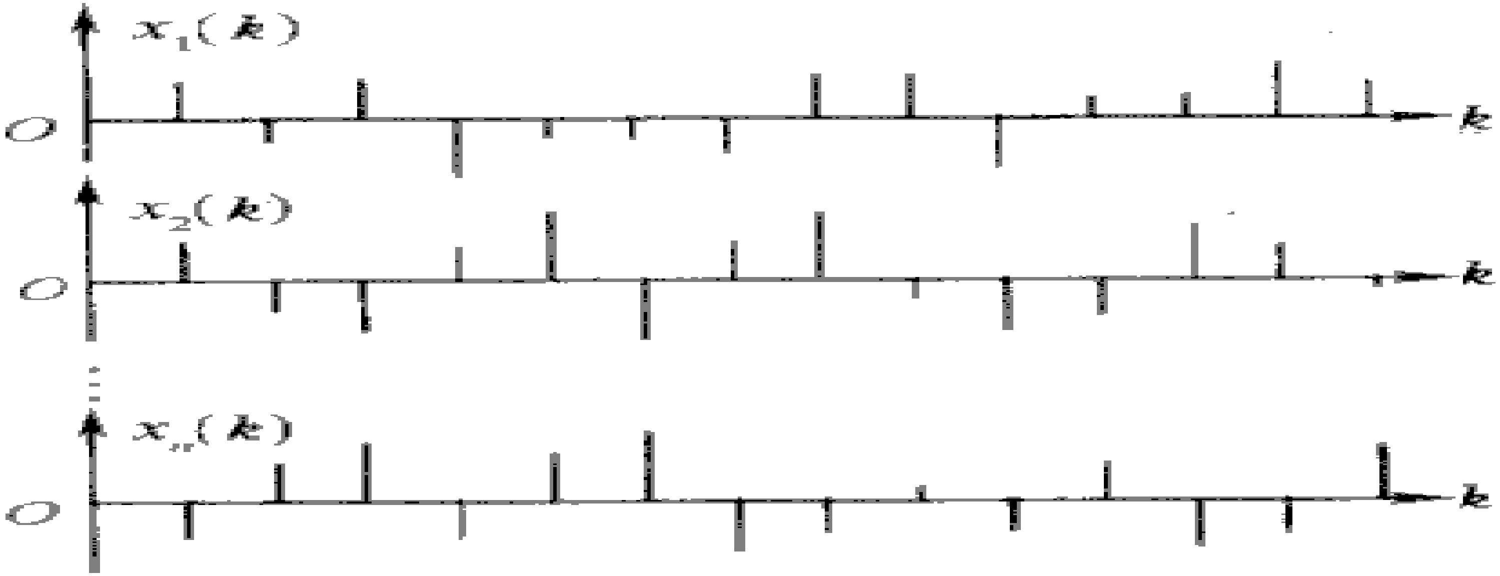
4、随机过程的分类

A. 连续型随机过程：u对于任意的t∈T，u(t)都是连续型随机变量，也就是时间和状态都是连续的情况；



4、随机过程的分类

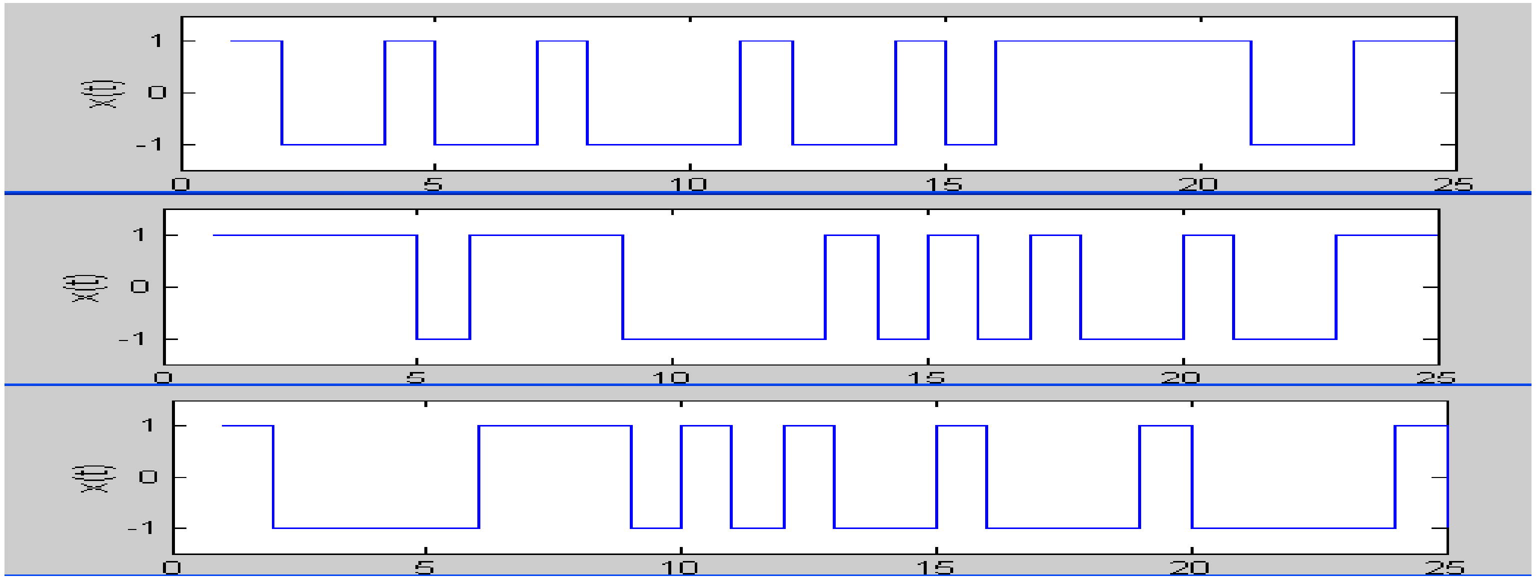
B. 离散时间型随机过程：随机过程u在任一离散时刻，其状态是连续型随机变量，也就是时间离散，状态连续的情况；



连续随机序列的一族样本函数

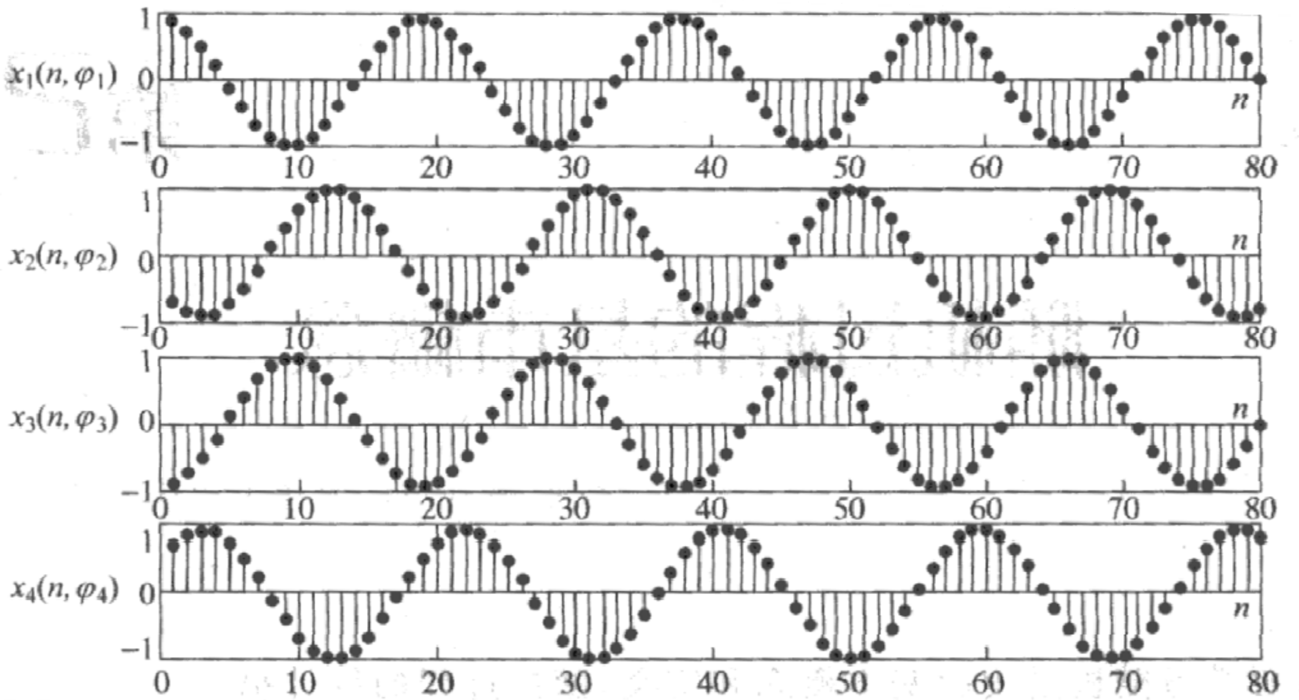
4、随机过程的分类

C．离散幅度型随机过程： u对任意的t∈T，u(t)都是离散型随机变量，也就是时间连续，状态离散的情况；



4、随机过程的分类

D. 离散型随机过程：时间和状态(随机变量)都是离散的情况；



§ 1.2 随机信号的时域(统计)表示

考虑由时间序列$u(n), u(n-1), \cdots, u(n-M+1)$表示的离散时间随机过程 $\{u(n)\}$。

为了简化表示方式，从现在起，也使用$u(n)$表示该离散时间随机过程，简称为随机过程。

可以看出，随机过程等价于**多维随机变量**。

1、随机过程的一维概率分布

对于一个随机过程$u(n)$，其在任意时刻n，是一个随机变量，它的**一维概率分布函数**定义为：

$$F_{u(n)}(u,n)=P\{u(n)\le u\}$$

性质：1. 如果$u_1<u_2$，则有$F(u_1,n)<F(u_2,n)$

2. $F(-\infty,n)=0,\ F(\infty,n)=1$

若 $F(u,n)$ 的一阶偏导数存在，则

$$f_{u(n)}(u,n)=\frac{\partial F(u,n)}{\partial u}$$

定义为随机过程$u(n)$的**一维概率密度函数**。

2、随机过程的二维概率分布

对于随机过程$u(n)$，在任意两个时刻 n_1和 n_2 ，得到的随机变量 $u(n_1)$ 和 $u(n_2)$，可构成二维随机变量$\{u(n_1),u(n_2)\}$，它的二维分布函数

$$F_{u(n_1),u(n_2)}(u_1,u_2;n_1,n_2) = P\{u(n_1)\le u_1,u(n_2)\le u_2\}$$

称为随机过程 $u(n)$ 的二维联合概率分布函数。

若 $F_{u(n_1),u(n_2)}(u_1,u_2;n_1,n_2)$对$u_1$和$u_2$的偏导数存在，则定义

$$f_{u(n_1),u(n_2)}(u_1,u_2;n_1,n_2) = \frac{\partial^2 F_{u(n_1),u(n_2)}(u_1,u_2;n_1,n_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

为随机过程$u(n)$的二维概率密度函数。

3、随机过程的N维概率分布

对于随机过程u，在任意N个时刻$n_1, n_2, \cdots, n_N$可构成N维随机变量 $\{u(n_1), u(n_2), \cdots, u(n_N)\}$ ，它的N维分布函数为

$$
\begin{aligned}
&F_u(u_1, u_2, \cdots, u_N; n_1, n_2 \cdots, n_N) \\
&= P\{u(n_1) \le u_1, u(n_2) \le u_2, \\
&\qquad \cdots, \quad u(n_N) \le u_N\}
\end{aligned}
$$

称为随机过程$u(n)$的N维联合概率分布函数。

若$F_u(u_1,u_2,\cdots,u_N;n_1,n_2\cdots,n_N)$对$u_1$，$u_2$，…$u_N$的偏导数存在，则定义

$$f_u(u_1,u_2,\cdots,u_N;n_1,n_2\cdots,n_N) = \frac{\partial^2 F_u(u_1,u_2,\cdots,u_N;n_1,n_2\cdots,n_N)}{\partial u_1 \partial u_2 \cdots \partial u_N}$$

为随机过程$u(n)$的N维概率密度函数。

4、离散时间随机过程的数字特征

随机过程常用到的数字特征有数学期望、方差、相关函数等。

它们由随机变量的数字特征推广而来的，但是一般不再是确定的数值，而是关于时间的函数。

1．数学期望

$$\mu(n)=E[u(n)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} u f_{u(n)}(u,n)\mathrm{d}u$$

它表示随机过程所有样本函数的统计平均函数。

2．自相关函数

复数域 $r(n,n-k)=E[u(n)u^*(n-k)]$

实数域 $r(n,n-k)=E[u(n)u(n-k)]$

$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

3．自协方差函数

复数域

$$c(n,n-k)$$

$$=E\{[u(n)-\mu(n)][u(n-k)-\mu(n-k]^{*})\}$$

实数域

$$c(n,n-k)$$

$$=E\{[u(n)-\mu(n)][u(n-k)-\mu(n-k])\}$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

4．自相关函数与自协方差函数的关系

复数域

$$c(n,n-k)=r(n,n-k)-\mu(n)\mu^*(n-k)$$

实数域

$$c(n,n-k)=r(n,n-k)-\mu(n)\mu(n-k)$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

当期望为0时，有 $c(n,n-k)=r(n,n-k)$

5．广义平稳与平均各态历经

$$\mu(n) = E[u(n)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u f_{u(n)}(u,n) \mathrm{d}u$$

在计算数学期望时，需要已知概率密度函数 $f_{u(n)}(u,n)$，但该值通常是未知的，且计算结果也是时间n的函数。

5．广义平稳

均值与时间无关，即

$$E[\mu(n)] = \mu$$

其自相关函数、自协方差函数与时间无关，只与样值之间的时间差有关，即

$$r(n,n-k) = r(k) \quad c(n,n-k) = c(k)$$

5．平均各态历经（遍历性）

对于广义平稳的随机过程，其均值和相关函数具有各态历经性，也称具有遍历性。

具有各态历经性的随机序列，可以用时间平均来获得集平均(期望)。

定义随机过程N个样本的时间平均为：

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u(n)$$

显然，对于所有的N值，可得 $E[\hat{\mu}_N] = \mu$

当 $N \to \infty$ 时，如有 $\hat{\mu}_N = \mu$

则称随机过程在均值意义上是各态历经的。

如果下式成立

$$\lim_{N\to\infty} E[|\mu - \hat{\mu}(N)|^2] = 0$$

则称随机过程在均方误差意义上是各态历经的。

6．相关矩阵

定义随机向量

$$\mathbf{u}(n)=[u(n),u(n-1),\ldots u(n-M+1)]^T$$

则该随机过程的M维**相关矩阵**定义为

复数域 $\mathbf{R}=E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)]$

实数域 $\mathbf{R}=E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^T(n)]$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(M-1) \\ r(-1) & r(0) & \cdots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-M+1) & r(-M+2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix}$$

复数域 $\mathbf{R}^H=\mathbf{R}$，$r(-k)=r^*(k)$

实数域 $\mathbf{R}^T=\mathbf{R}$，$r(-k)=r(k)$