# 随机信号处理笔记

宋佳欢

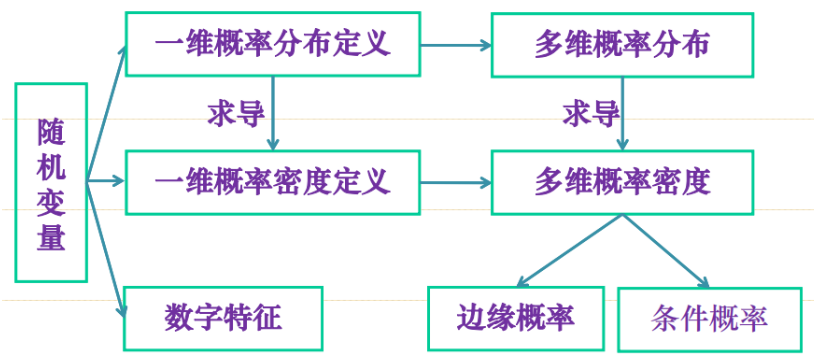
2019 年 10 月 9 日

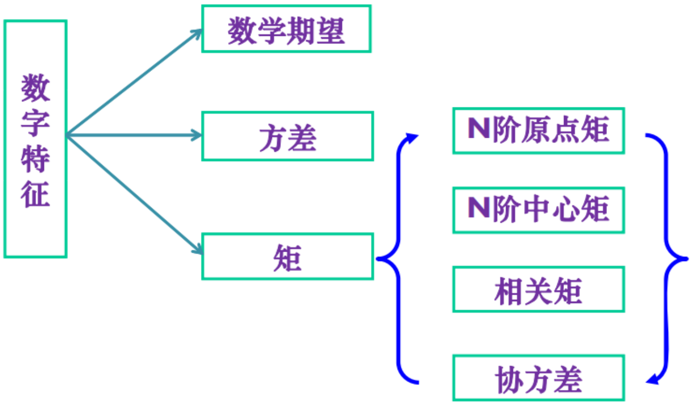
## 目录



# 1 随机信号基础

## 1.1 随机变量与随机过程






#### 1.1.1 随机过程的数学定义

定义 1：设 E 时随机试验，它的样本空间是 $S=\{\xi\}$, 对于每一个 $\xi \subset \{S\}$, 总有一个确定的时间函数 $u(t,\xi)$ 与之对应。这样可得到一簇时间 t 的函数，该簇称为随机过程。簇中的每一个函数称为这个随机过程的样本函数。

定义 2：设 E 有一个过程 $u(t)$，对于每一个时刻 $t_j(j=1,2,...)$，$u(t_j)$ 时一个随机变量，则称 $u(t)$ 为随机过程。(默认采用该定义描述)

**A. 当t和ξ都是可变量时，u是一个时间函数族；**

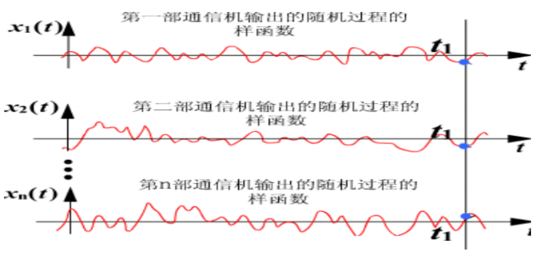
**B. 当t是可变量、ξ固定时，u是一个确定的时间函数；**

**C. 当t固定，ξ是可变量时，u是一个随机变量；**

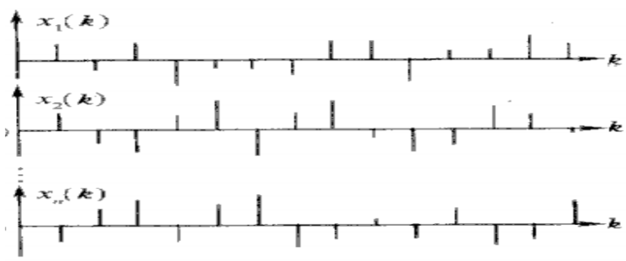
**D. 当t固定，ξ固定时，u是一个确定数。**

#### 1.1.2 随机过程的分类

1. 连续型随机过程：时间、状态都连续。

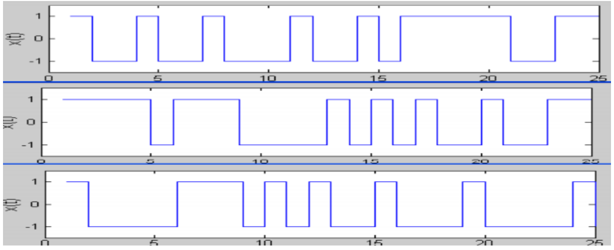



2. 离散时间型随机过程：时间离散，状态连续。

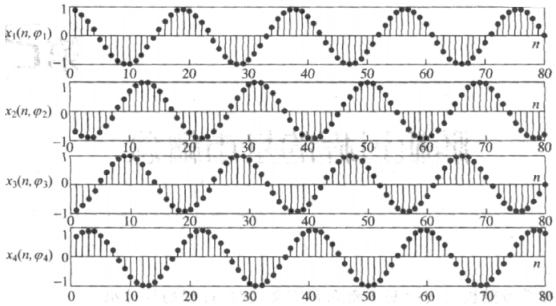



连续随机序列的一族样本函数

3. 离散幅度型随机过程：时间连续，状态离散。




4. 离散型随机过程：时间、状态都离散。




（数字信号处理，处理的是第 2 种信号）

### 1.2 随机信号的时域（统计）表示

考虑由时间序列 $u(n), u(n-1), \cdots, u(n-M+1)$ 示的离散时间随机过程 $\{u(n)\}$。为了简化表示方式，从现在起，也使用 $u(n)$ 表示该离散时间随机过程。（随机过程等价于多维随机变量）

#### 1.2.1 随机信号的一维概率分布

对于一个随机过程 $u(n)$，在任意时刻 n 是一个随机变量，它的一维概率分布函数为：

$$F_{u(n)}(u,n) = P\{u(n) \le u\}$$

若 $F(u,n)$ 的一阶偏导数存在，则随机过程 $u(n)$ 的一维概率密度函数为：

$$f_{u(n)}(u,n) = \frac{\partial F(u,n)}{\partial u}$$

#### 1.2.2 随机信号的 N 维概率分布

对于一个随机过程 $u$，在任意 N 个时刻 $n_1, n_2, \cdots, n_N$，可构成 N 维随机变量 $\{u(n_1), u(n_2), \cdots, u(n_N)\}$, 它的的 N 维联合概率分布函数为：

$$F_u(u_1, u_2, \cdots, u_N; n_1, n_1, \cdots, n_N) = P\{u(n_1) \le u_1, u(n_2) \le u_2, \cdots, u(n_N) \le u_N\}$$

若 $F_u(u_1, u_2, \cdots, u_N; n_1, n_1, \cdots, n_N)$ 对 $u_1, u_2, \cdots, u_N$ 的偏导数存在，则随机过程 $u(n)$ 的 N 维概率密度函数为：

$$f_u(u_1, u_2, \cdots, u_N; n_1, n_1, \cdots, n_N) = \frac{\partial^2 F_u(u_1, u_2, \cdots, u_N; n_1, n_1, \cdots, n_N)}{\partial u_1 \partial u_2 \cdots \partial u_N}$$

### 1.2.3 离散时间随机过程的数字特征

随机过程的数字特征有随机变量的数字特征推广而来，但一般不再是确定的数值，而是关于时间的函数。

**1. 数学期望**：表示随机过程所有样本函数的统计平均函数。

$$\mu(n) = E(u(n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_{u(n)}(u,n) du$$

**2. 自相关函数**

复数域：$r(n,n-k) = E[u(n)u^*(n-k)]$

实数域：$r(n,n-k) = E[u(n)u(n-k)]$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

**3. 自协方差函数**

复数域：

$$c(n,n-k) = E\{[u(n)-\mu(n)][u(n-k)-\mu(n-k)]^*\}$$

实数域：

$$c(n,n-k) = E\{[u(n)-\mu(n)][u(n-k)-\mu(n-k)]\}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

分别减去了均值。

**4. 自相关函数与自协方差函数的关系**

复数域：

$$c(n,n-k) = r(n,n-k) - \mu(n)\mu^*(n-k)$$

实数域：

$$c(n,n-k) = r(n,n-k) - \mu(n)\mu(n-k)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

当期望为 0 时，有 $c(n,n-k) = r(n,n-k)$

**5. 广义平稳:** 均值与时间无关，即 $E(\mu(n)) = \mu$, 其自相关函数、自协方差函数与时间无关，只与样值之间的时间差有关。即：$r(n,n-k) = r(k), \quad c(n,n-k) = c(k).$

**6. 平均各态历经（遍历性）：** 对于广义平稳的随机过程，其均值和相关函数具有各态历经性，也称具有遍历性。具有具有各态历经性的随机序列，可以用时间平均来获得集平均 (期望)。

随机过程的 N 个样本的时间平均为：

$$\hat{\mu_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u(n)$$

对于所有的 N 值，可得 $E[\hat{\mu}_N] = \mu$, 当 $N \to \infty$ 时，有 $\hat{\mu}_N = \mu$，则称随机过程在均值意义上是各态历经的，因为概率分布不随时间发生变化。

**6. 相关矩阵:**

定义随机向量 $\mathbf{u}(n)=[u(n),u(n-1),\cdots,u(n-M+1)]^T$, 则该随机过程的 M 为相关矩阵的定义为:

复数域: $\mathbf{R}=E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)]$ (上标 H 表示转置及共轭操作)

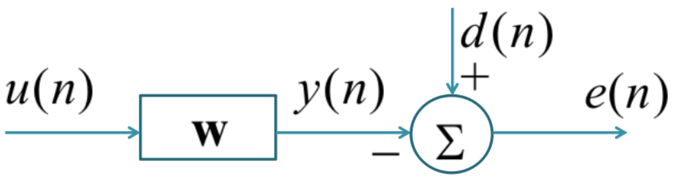
实数域: $\mathbf{R}=E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^T(n)]$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(M-1) \\ r(-1) & r(0) & \cdots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-M+1) & r(-M+2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix}$$

复数域 $\mathbf{R}^H=\mathbf{R}$, $r(-k)=r^*(k)$

实数域 $\mathbf{R}^T=\mathbf{R}$, $r(-k)=r(k)$

## 2 维纳滤波器




维纳数字滤波框图

$$e(n)=d(n)-y(n)$$

**已知输入信号 $u(n)$ 和期望响应(参考信号) $d(n)$，使误差信号 $e(n)$ 在某种统计意义上最小。**

### 2.1 正交性原理

对于因果滤波器，其 n 时刻的输出为卷积:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}w_k^*u(n-k)=\mathbf{w}^H\mathbf{u}(n),\quad n=0,1,2\cdots$$

使用均方误差作为代价函数, 优点：该代价函数具有唯一的最小值。

$$J(n)=E[|e(n)|^2]=E[e(n)e^*(n)]$$

如何求最小值：求函数对所有变量的偏导数，令所有偏导数为 0，其对应的变量为多元函数取得最小值的解。为了方便表示，常将所有的偏导数写成列向量，该列向量称为函数的梯度或共轭梯度。因此，令所有偏导数为 0，等价于令梯度或共轭梯度为 0。

第 k 个滤波器的系数可表示为：

$$w_k = a_k = jb_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

整个滤波器系数向量可表示为：

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{M-1} \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + jb_0 \\ a_1 + jb_1 \\ \vdots \\ a_{M-1} + jb_{M-1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

把代价函数 $J(n)$ 对 $\mathbf{w}$ 中的每个 $w_k$ 系数求偏导得到：

$$\nabla_k J = E\left[\frac{\partial e(n)}{\partial a_k} e^*(n) + \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} e(n) + \frac{\partial e(n)}{\partial b_k} je^*(n) + \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} je(n)\right], \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

计算四个偏导数分别为：

$$\frac{\partial e(n)}{\partial a_k} = -u(n-k), \quad \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} = -u^*(n-k)$$

$$\frac{\partial e(n)}{\partial b_k} = ju(n-k), \quad \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} = -ju^*(n-k)$$

将四个式子带入到 $\nabla_k J$，得到：

$$\nabla_k J = -2E[u(n-k)e^*(n)], \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

当梯度为零时，代价函数达到最小值，所以梯度向量 $\nabla J$ 的所以元素都要等于 0：

$$\nabla_k J = -2E[u(n-k)e^*(n)] = 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

等效于 (下标 o 表示 optimal)：

$$E[u(n-k)e_o^*(n)] = 0$$

**正交性原理**: 代价函数最小的充要条件是：估计误差 $e_o(n)$ 与 n 时刻进入期望响应估计的每个输入样值 $u(n-k)$ 正交。

## 正交性原理推论

**根据自适应滤波器的输出，可得**

$$E[y(n)e^*(n)] = E[\sum_{k=0}^{\infty} w_k^* u(n-k)e^*(n)]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} w_k^* E[u(n-k)e^*(n)]$$

**根据正交性原理**

$$E[u(n-k)e_o^*(n)] = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

**可推得** $E\left[y_o(n)e_o^*(n)\right] = 0$

### 2.2 最小均方误差

达到最优时:

$$e_o(n) = d(n) - y_o(n) = d(n) - \hat{d}(n|\mathcal{U}_n)$$

$\mathcal{U}_n$ 表示输入限号 $u(n)$ 直到时刻 n 的输入样值张成的空间。根据卷积公式，计算得到的输出实际上就是直到时刻 n 的输入样值的线性组合。

$$d(n) = \hat{d}(n|\mathcal{U}_n) + e_o(n)$$

$$d^*(n) = \hat{d}^*(n|\mathcal{U}_n) + e_o^*(n)$$

所以:

$$\sigma_d^2 = d(n)d^*(n) = \sigma_{\hat{d}(n|\mathcal{U}_n)}^2 + E[\hat{d}(n|\mathcal{U}_n)e_o^*(n)] + E[\hat{d}^*(n|\mathcal{U}_n)e_o(n)] + \sigma_{e_0}^2$$

由正交性原理的推论可得，式子中的两项期望为 0，所以有:

$$\sigma_d^2 = \sigma_{\hat{d}}^2 + J_{min}$$

$$J_{min} = \sigma_d^2 - \sigma_{\hat{d}}^2$$

归一化均方误差:

$$\sigma = \frac{J_{min}}{\sigma_d^2} = 1 - \frac{\sigma_{\hat{d}}^2}{\sigma_d^2}, \quad 0 \le \sigma \le 1$$

## 2.3 维纳-霍夫方程（求解）

### 一般情况下的维纳-霍夫方程

根据最优情况下误差信号的定义

$$e_o(n) = d(n) - y_o(n) = d(n) - \sum_{i=0}^{\infty} w_{o,i}^* u(n-i)$$

和正交性原理

$$E[u(n-k)e_o^*(n)] = 0, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

可得

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{o,i} E[u(n-k)u^*(n-i)] = E[u(n-k)d^*(n)]$$

$$k = 0,1,2\ldots$$

第一个期望 $E[u(n-k)u^*(n-i)]$：等于相隔 $i-k$ 个延迟的输入信号自相关函数，即

$$r(i-k) = E[u(n-k)u^*(n-i)]$$

第二个期望 $E[u(n-k)d^*(n)]$：等于输入信号 $u(n-k)$ 与期望响应 $d(n)$ 相隔 $-k$ 个延迟的互相关，即

$$p(-k)=E[u(n-k)d^*(n)]$$

将 $r(i-k)$ 与 $p(-k)$ 代入:

可得维纳霍-夫方程

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{o,i} r(i-k) = p(-k), \quad k = 0,1,2\ldots$$

**对于横向滤波器，第$n$时刻的输入向量可表示为**

$$\mathbf{u}(n)=[u(n),u(n-1),...,u(n-M+1)]^T$$

**则其相关矩阵为**

$$\mathbf{R}=E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)]$$
$$=\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & ... & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & ... & r(M-2) \\ ... & ... & ... & ... \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & ... & r(0) \end{bmatrix}$$

**将滤波器的输入向量与期望响应的互相关向量记为**

$$\mathbf{p}=E[\mathbf{u}(n)d^*(n)]$$

**则维纳-霍夫方程可写成矩阵形式：**

$$\mathbf{R}\mathbf{w}_o=\mathbf{p}$$

**其中，** $\mathbf{w}_o=\left[w_{o,0},w_{o,1},...,w_{o,M-1}\right]^T$

**如果相关矩阵是非奇异的，则可解出令代价函数最小的最优权值向量，即**

$$\mathbf{w}_o=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$$

**换个角度：利用向量求导来求解**

误差：

$$e(n)=d(n)-\mathbf{w}^H\mathbf{u}(n)$$

误差的平方：

$$\begin{aligned} e(n)e^*(n) &= \left(d(n)-\mathbf{w}^H\mathbf{u}(n)\right)\left(d^*(n)-\mathbf{u}^H(n)\mathbf{w}\right) \\ &= |d(n)|^2-d(n)\mathbf{u}^H(n)\mathbf{w}-\mathbf{w}^H\mathbf{u}(n)d^*(n)+\mathbf{w}^H\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)\mathbf{w} \end{aligned}$$

对误差的平方取期望：

$$E[|e(n)|^2]=E\left[|d(n)|^2\right]+E\left[d(n)\mathbf{u}^H(n)\right]\mathbf{w}+\mathbf{w}^H E\left[\mathbf{u}(n)d^*(n)\right]+\mathbf{w}^H E\left[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)\right]\mathbf{w}$$

其中 $E\left[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)\right]=\mathbf{R}$, 并令 $E\left[\mathbf{u}(n)d^*(n)\right]=\mathbf{p}$（与维纳-霍夫方程中的记法相同），带入上式得损失函数：

$$J(\mathbf{w})=E[|e(n)|^2]=\sigma_d^2-\mathbf{p}^H\mathbf{w}+\mathbf{w}^H\mathbf{p}+\mathbf{w}^H\mathbf{R}\mathbf{w}$$

对上式求 $\mathbf{w}$ 的共轭梯度，并令其等于 0：

$$\frac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}^*}=-\mathbf{p}+\mathbf{R}\mathbf{w}=0$$

同样可以求得参数 $\mathbf{w}$。

# 3 最速下降法

## 3.1 最速下降法的基本思想

迭代下降法:从某一初始值 $\mathbf{w}(0)$ 开始,按照固定的步骤,产生一系列权重向量 $\mathbf{w}(1), \mathbf{w}(2), \mathbf{w}(3), \cdots$ ,使得代价函数的值在每一次迭代之后都下降:

$$J(\mathbf{w}(n+1)) < J(\mathbf{w}(n))$$

迭代下降法的一种简单形式——最速下降法,沿着负梯度方向连续调整权重向量 $\mathbf{w}$,将梯度表示为:

$$\mathbf{g} = \nabla J(\mathbf{w})$$

从而最速下降法可表示为 ($\mu$ 为步长):

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{1}{2}\mu\mathbf{g}(n)$$

## 3.2 最速下降算法应用于维纳滤波器

第 2 章中提到维纳滤波器的代价函数为:

$$J(\mathbf{w}) = E[|e(n)|^2] = \sigma_d^2 - \mathbf{p}^H\mathbf{w}(n) + \mathbf{w}^H(n)\mathbf{p} + \mathbf{w}^H(n)R\mathbf{w}(n)$$

其中:

$$\sigma_d^2 = E[d^2(n)]$$
$$\mathbf{p} = E[\mathbf{u}()d^*(n)]$$
$$\mathbf{R} = E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)]$$

其梯度向量为:

$$\nabla J(n) = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{w}(n)$$

代入最速下降法的公式中, 迭代解为:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu(\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{w}(n))$$

【1】与维纳滤波器的闭合解 $\mathbf{w}_o = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$ 相比,迭代解不需要求相关矩阵 $\mathbf{R}$ 的逆。

【2】迭代解是经典的最小均方算法的基础。

## 3.3 最速下降法的稳定性

问:当 $n \to \infty$ 时,是否有 $\mathbf{w}(n) \to \mathbf{w}_o$? 若有,需要满足什么条件?

定义:n 时刻的权重误差向量:

$$\mathbf{c}(n) = \mathbf{w}_o - \mathbf{w}(n)$$

将迭代式:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu(\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{w}(n))$$

两边同时减去 $\mathbf{w}_o$，并消去负号，可得：

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) - \mu(\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{w}(n))$$

将维纳方程 $\mathbf{R}\mathbf{w}_o = \mathbf{p}$ 代入上式，消去 $\mathbf{p}$，可得：

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) - \mu\mathbf{R}(\mathbf{w}_o - \mathbf{w}(n))$$

$$\mathbf{c}(n+1) = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{R})\mathbf{c}(n)$$

根据上式的误差向量的关系类推，得到：

$$\mathbf{c}(n+1) = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{R})^2\mathbf{c}(n-1)$$

$$\mathbf{c}(n+1) = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{R})^{n+1}\mathbf{c}(0)$$

每一次迭代之后误差向量都乘上了 $(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R})$, 如果该项小于 0，那么误差向量是在不断减小的。

使用特征值分解，将相关矩阵分解为:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^H$$

迭代式变为:

$$\mathbf{c}(n+1) = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^H)\mathbf{c}(n)$$

两边同乘以 $\mathbf{Q}^H$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^H\mathbf{c}(n+1) &= (\mathbf{Q}^H - \mu\Lambda\mathbf{Q}^H)\mathbf{c}(n)\\ &= (\mathbf{I} - \mu\Lambda)\mathbf{Q}^H\mathbf{c}(n)\end{aligned}$$

定义变换向量 $\mathbf{v}(n) = \mathbf{Q}^H\mathbf{c}(n)$, 代换后有:

$$\mathbf{v}(n+1) = (\mathbf{I} - \mu\Lambda)\mathbf{v}(n)$$

初始权重常取 $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$, 所以:

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{Q}^H\mathbf{c}(0) = \mathbf{Q}^H[\mathbf{w}_o - \mathbf{0}] = \mathbf{Q}^H\mathbf{w}_o$$

- **若证明** $n \to \infty$**时，**$\mathbf{w}(n) \to \mathbf{w}_o$
  **可证明** $n \to \infty$**时，**$\mathbf{c}(n) = \mathbf{w}_o - \mathbf{w}(n) \to \mathbf{0}$
  **或证明** $n \to \infty$**时，**$\mathbf{v}(n) = \mathbf{Q}^{\mathrm{H}}\mathbf{c}(n) \to \mathbf{0}$

- **令** $v_k(n)$ **为**$\mathbf{v}(n)$ **的第**$k$**个元素，** $k = 1, 2, \cdots, M$

**即要求证明：** $n \to \infty$时, $v_k(n+1) \to 0$

- 式 $\mathbf{v}(n+1)=(\mathbf{I}-\mu\mathbf{\Lambda})\mathbf{v}(n)$ 的展开式为

$$\begin{bmatrix} v_1(n+1) \\ v_2(n+1) \\ \vdots \\ v_M(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\mu\lambda_1 & & & \\ & 1-\mu\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-\mu\lambda_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ \vdots \\ v_M(n) \end{bmatrix}$$

- 或写成

$$\begin{gathered} v_1(n+1)=(1-\mu\lambda_1)v_1(n) \\ v_2(n+1)=(1-\mu\lambda_2)v_2(n) \\ \vdots \\ v_M(n+1)=(1-\mu\lambda_M)v_M(n) \end{gathered}$$

- 由第$k$个方程

$$v_k(n+1)=(1-\mu\lambda_k)v_k(n),\ k=1,2,\cdots,M$$

递推可得

$$v_k(n+1)=(1-\mu\lambda_k)^{n+1}v_k(0)$$

- 要使得 $v_k(\infty)\to 0$，上式中必须满足

$$-1<(1-\mu\lambda_k)<1,\ k=1,2,\cdots,M$$

- 因此，最速下降法的**稳定性条件**为 $0<\mu<\dfrac{2}{\lambda_{\max}}$

其中

$$\lambda_{\max}=\max\{\lambda_1,\lambda_1,\cdots,\lambda_M\}$$