

2. Mostek Wheatstone’a

Zespół 3: Górski Paweł, Sozańska Ada

EAlIB Informatyka, Rok II

25 października 2017

1 Wprowadzenie

Celem tego doświadczenia jest wyznaczenie nieznanymi oporów oraz zweryfikowanie wzorów na opór zastępczy oporników w połączeniach: szeregowym i równoległym, przy wykorzystaniu praw Kirchhoffa oraz prawa Ohma.

1.1 Prawa Kirchhoffa, prawo Ohma

Mostek Wheatstone’a jest oparty na trzech fundamentalnych prawach obwodów elektrycznych.

Pierwszym z nich jest *Prądowe Prawo Kirchhoffa*. Dotyczy ono prądów wpływających do węzła obwodu elektrycznego. Mówi ono, że suma algebraiczna prądów wpływających do danego węzła jest równa zeru. Zakładając, że do węzła wpływa n prądów I_j , gdzie $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, prawo to można zapisać następująco:

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0. \quad (1.1)$$

Kolejnym prawem jest *Napięciowe Prawo Kirchhoffa*, które dotyczy spadków napięć w oczku (zamkniętej pętli sieci) obwodu elektrycznego. Mówi ono, że suma spadków napięć na wszystkich elementach w oczku jest równa zero. Zakładając, że w oczku jest n elementów elektrycznych, prawo to można zapisać następująco:

$$\sum_{j=1}^n U_j = 0. \quad (1.2)$$

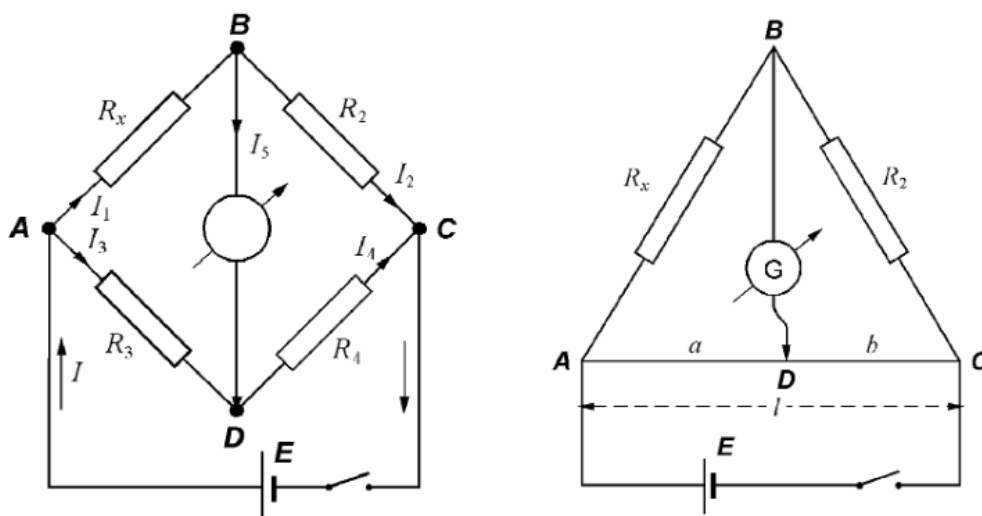
Ostatnim prawem jest *Prawo Ohma*, które definiuje zależność natężenia i napięcia prądu. Mówi ono, że stosunek napięcia U między końcami przewodnika do natężenia prądu I w nim płynącego jest wielkością stałą. Wielkość ta jest nazywana opornością.

$$R = \frac{U}{I}. \quad (1.3)$$

Prawo to może nie być spełnione w elementach nieliniowych (np. dioda) lub gdy temperatura przewodnika nie jest stała.

1.2 Mostek Wheatstone'a

Mostek Wheatstone'a jest układem do porównywania oporów. Oprócz pomiaru wielkości typowych dla obwodów elektrycznych jest on również wykorzystywany do budowania mierników naprężeń, ciśnień hydrostatycznych czy próżni.



Rys. 1: Schemat mostku Wheatstone'a. Niezrównoważony (po lewej) oraz zrównoważony (po prawej).

Źródło: Instrukcja do ćwiczenia

Składa się on z czterech oporników o porach: R_x, R_2, R_3, R_4 oraz galwanometru o oporze R_5 . Stosując *Prądowe Prawo Kirchhoffa* (1.1) dla węzłów B, D otrzymujemy następujące równania:

$$\begin{aligned} B : I_1 &= I_2 + I_5, \\ D : I_5 &= I_3 - I_4. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Następnie wykorzystując *Napięciowe Prawo Kirchhoffa* (1.2) dla oczek $ABDA, BCDB$ otrzymujemy dwa równania:

$$\begin{aligned} ABDA : I_1 R_x + I_5 R_5 - I_3 R_3 &= 0, \\ BCDB : I_2 R_2 - I_4 R_4 - I_5 R_5 &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

W doświadczeniu wykorzystujemy układ zrównoważony, w którym potencjały w węzłach B i D są równe. W konsekwencji mamy $I_5 = 0$, co powoduje uproszczenie układu równań (1.4) do:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2, \\ I_3 &= I_4. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dalej, równania (1.5) upraszczają się do postaci:

$$\begin{aligned} I_1 R_x &= I_3 R_3, \\ I_1 R_2 &= I_3 R_4. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Co nam daje:

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (1.8)$$

W mostku zrównoważonym opory R_3 oraz R_4 są oporami wewnętrznymi przewodów o długości kolejno a oraz $b = l - a$ (Rys. 1). Opory te można przedstawić wzorami:

$$R_3 = \rho \frac{a}{S} \quad \text{oraz} \quad R_4 = \rho \frac{l - a}{S}, \quad (1.9)$$

gdzie ρ to oporność właściwa, a S to pole przekroju wewnętrznego przewodu.

Ostatecznie, korzystając z (1.8) i (1.9) otrzymujemy wzór, w którym wszystkie parametry są mierzalne:

$$R_x = R_2 \frac{a}{l - a} \quad (1.10)$$

2 Wykonanie ćwiczenia

W celu wykonania doświadczenia wykorzystaliśmy:

- Listwę o długości 1 m z podziałką milimetrową, drutem oporowym i suwakiem,
- Opornicę dekadową R ,
- Zestaw oporników R_x ,
- Mikroamperomierz,
- Zasilacz stabilizowany 3 A/30 V.

Doświadczenie rozpoczęliśmy od połączenia elementów w zrównoważony mostek Wheatstone'a. Suwak na listwie przesunęliśmy do połowy jej długości ($a = 50$ cm). Dla każdego z oporników R_x ustawialiśmy opór R na opornicy dekadowej tak, aby amperomierz wskazywał 0 A. Następnie osiem razy zmienialiśmy opór R , żeby oscylował w okół wartości początkowej R (ustawionej dla $a = 50$ cm) i dostosowywaliśmy suwak, tak aby za każdym razem amperomierz wskazywał 0 A.

Analogiczne pomiary wykonaliśmy dla połączenia szeregowego (R_{x1} z R_{x2}), równoległego (R_{x1} z R_{x2}) i mieszanego (R_{x3} szeregowo z równolegle połączonymi R_{x1} z R_{x2})

3 Opracowanie danych pomiarowych

3.1 Pomiary

Zmierzona długość wahadła wynosi $l = 341$ mm. Niepewność pomiaru długości wahadła l wynosi $u(l) = 1$ mm, ponieważ jest to najmniejsza działka elementarna wykorzystanego narzędzia.

Tab. 1: Wartości pomiarów okresów wahadła dla stałej długości

L.p.	liczba okresów k	czas t dla k okresów [s]	okres $T_i = t/k$ [s]
1	20	22,61	1,130
2	20	22,88	1,144
3	20	22,64	1,132
4	20	22,78	1,139
5	20	22,77	1,138
6	20	22,88	1,144
7	20	23,09	1,154
8	20	23,07	1,153
9	20	23,15	1,157
10	20	23,24	1,162

Wartość średnia okresu T dla wyników pomiaru okresu T_i (Tab. 1) jest równa $T = 1,145$ s.

Korzystając ze wzoru (??) niepewność pomiaru $u(T)$ jest równa

$$u(T) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (T_i - T)^2}{n(n-1)}}, \quad (3.1)$$

Dla danych z tabli otrzymujemy wynik $u(T) = 0,0034$ s.

Poniżej znajdują się wyniki pomiarów (Tab. 2) przy zmiennej długości wahadła potrzebne do wykonania regresji liniowej.

Tab. 2: Wartości pomiarów okresów wahadła dla zmiennej długości

L.p.	l [mm]	k	t [s]	T_i [s]	T_i^2 [s ²]
1	439	20	26,2	1,310	1,716
2	403	20	24,9	1,245	1,550
3	366	20	23,68	1,184	1,401
4	327	20	22,55	1,127	1,270
5	285	20	21,16	1,058	1,119
6	241	20	19,32	0,9660	0,9331
7	194	20	17,87	0,8935	0,7983
8	153	20	15,19	0,7595	0,5768
9	108	20	13,21	0,6605	0,4362
10	63	20	10,34	0,5170	0,2672

3.2 Analiza wyniku dla stałej długości wahadła

Wartość przyspieszenia ziemskiego g dla długości wahadła l oraz okresu wahadła T wynosi:

$$\begin{aligned} l &= 0,341 \text{ m}, \quad T = 1,145 \text{ s}, \\ g &= 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \approx 10,26 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Korzystając ze wzoru (??) na niepewność złożoną otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u_c(g) &= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}u(l)\right)^2 + \left(-8\pi^2 \frac{l}{T^3}u(T)\right)^2} \\ &\approx \sqrt{9,06 \cdot 10^{-4} + 37,82 \cdot 10^{-4}} \\ &\approx 0,068 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Niepewność złożona $u_c(g)$ oraz niepewność rozszerzona $U(g)$ (wzór ??) wynoszą:

$$u_c(g) = 0,068 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \tag{3.4}$$

$$U(g) = 0,136 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \tag{3.5}$$

Wartość tabelaryczna przyspieszenia ziemskiego w Krakowie wynosi $g_0 = 9,811 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$$|g - g_0| = 0,37 > U(g) = 0,136 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] \tag{3.6}$$

Wynik wskazuje na to, że mógł zostać popełniony błąd systematyczny podczas pomiarów okresów wahadła (żadne dane nie odbiegają od siebie w znaczący sposób). Prawdopodobnie wynika on z braku synchronizacji osób przeprowadzających doświadczenie.

3.3 Analiza wyniku dla zmiennej długości wahadła

Wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów przypasowaliśmy następującą prostą:

$$\begin{aligned}y &= ax, \quad a = 3,888 \left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}} \right], \\u(a) &= 0,023 \left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}} \right].\end{aligned}\tag{3.7}$$

Korzystając ze wzoru:

$$g = \frac{4\pi^2}{a} \quad (3.8)$$

wyliczamy wartość przyspieszenia ziemskiego $g = 10,15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Korzystając z równania (??) mamy:

$$\begin{aligned} u_c(g) &= \left| -\frac{4\pi^2}{a^2}u(a) \right| \approx 2,61 \cdot 0,023 \\ &\approx 0,060 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Niepewność złożona $u_c(g)$ oraz niepewność rozszerzona $U(g)$ pomiaru wynoszą:

$$u_c(g) = 0,060 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad (3.10)$$

$$U(g) = 0,120 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (3.11)$$

Porównując z wartością tabelaryczną jak poprzednio mamy:

$$|g - g_0| = 0,26 > U(g) = 0,120 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]. \quad (3.12)$$

Ponownie otrzymana wartość przyspieszenia ziemskiego g nie jest zgodna z wartością tabelaryczną.

4 Wnioski

Mimo zmniejszenia czynnika ludzkiego (10 pomiarów 20 okresów) oraz wyliczenia średniej ze zmierzonych wartości w celu zminimalizowania niepewności, wyniki otrzymane przy pomocy obu metod nie są zgodne z wartością tabelaryczną dla Krakowa.

Dla naszych danych, metoda druga (wykorzystująca regresję liniową) cechuje się większą dokładnością (3.12) aniżeli metoda pierwsza (3.6).

Zmierzone wartości okresów musiały być obarczone błędem systematycznym. Błąd ten mógł być spowodowany brakiem synchronizacji eksperymentatorów lub zbyt dużym kątem odchylenia wahadła (większym niż 3°), bowiem wtedy aproksymacja, którą wykorzystujemy ma większy błąd (zwiększenie kąta z 3° do 15° powoduje ok. dwudziestokrotnie większy błąd).