设计一种中国利率上限、下限和双限合约并用标准市场模型进行定价分析

2023年5月23日

目录

1　衍生品介绍

1.1　理论简介

利率期权可以分为场内和场外两大类，前者如芝加哥商品交易所推出的欧洲美元期权（Eurodollar Options）、10 年期美债期权（10-Year T-Note Options），后者则包含常见的互换期权和利率上 / 下限期权等。利率波动有好有坏，从趋利避害的角度看，利率上 / 下限期权的风险结构要优于利率互换。

利率上限期权通常在 OTC 市场上进行交易，它通过在未来特定时间内限定带有可变动利率或浮动利率的最高限额，从而确定利息成本的上限。如果市场利率比约定最高利率高，则期权出售者将差额支付给购买者。按照期权交易方式，期权出售者因对购买者作出一个保证而收入期权费，期权费的高低取决于市场利率和约定的最高利率。因为约定的最高利率与现行市场利率之间差价较大，所以平价利率上限期权出售者所收到的期权费比溢价期权出售者要求得高。

同理，利率下限可以防范利率下降的风险。如果市场利率下降，固定利率债务的利息负担就会相对加重，浮动利率投资的利息收人减少。通过买入利率下限，一旦市场利率下降，固定利率借款人和浮动利率投资者就可以获得市场利率与协定利率的差额作为补偿。利率下限实质就是一系列欧式利率卖权。

利率双限是利率上限协议的多头（或空头）和利率下限协议的空头（或多头）的组合合约它等价于一系列定幅式远期合约头寸。实质是借款人买入一个看涨期权，同时卖出一个看跌期权，目的是以收入的看跌期权的期权费抵消一部分付出的看涨期权的期权费。

1.2　市场状况

深化利率市场化改革一直是近年来人民银行的政策重点之一。2019 年 8 月 LPR 形成机制改革后，人民银行继续推进存量浮动利率贷款定价基准转换。随着利率市场化的深化和利率波动性的提高，利率衍生品市场也迎来深化发展的新机遇。

2020 年 1 月 2 日，全国银行间同业拆借中心发布《关于试点利率期权业务有关准备事项的通知》，决定于 2 月 24 日起试运行利率期权交易及相关服务，主要推出的品种是挂钩 LPR1Y / LPR5Y 的利率互换期权、利率上

/下限期权，期权类型为欧式期权。2020 年 3 月 23 日，银行间市场 LPR 利率期权业务正式上线，主要参与者为银行、证券公司等机构。

根据全国银行间同业拆借中心数据，我国利率上/下限期权是指期权买方在约定期限内有权要求期权卖方支付由于参考利率超过/低于约定的利率水平而产生的差额利息的期权合约。期权买方向卖方支付期权费，期权卖方在参考利率高于/低于约定利率水平时向买方支付差额部分的利息。

表 1.1 我国利率上/下限期权交易规则

交易方式	**询价交易** ● **利率期权交易基于期权价格成交，交易中心提供隐含波动率计算等交易相关服务。** ● **交易中心组织报价机构通过交易系统向市场提供利率期权报价，并进行日终波动率曲线报价。**
参考利率	参考利率包括但不限于中国人民银行认可的公开发布的市场利率。 试运行初期，推出 LPR1Y、LPR5Y、FDR001、FDR007 等。后续，交易中心将在中国人民银行的指导下推出更多可挂钩的参考利率。
交易主体	利率期权市场交易成员是指与交易中心联网的利率期权市场参与者，包括但不限于境内外商业银行、信托公司、企业集团财务公司、证券公司、基金管理公司、期货公司、保险公司等经国家金融管理部门许可的金融机构，上述金融机构依法合规面向客户发行的投资产品，以及非金融机构等。 金融机构及其投资产品开展利率期权交易前，应当向交易中心申请成为利率期权市场交易成员。 利率期权市场交易成员之间的利率期权交易应在交易中心交易系统达成。利率期权市场交易成员与非交易成员间的利率期权交易，应当由利率期权市场交易成员于交易达成次一工作日北京时间中午 12：00 前将相关交易情况报交易中心备案。
交易时间	每周一至周五（国家法定节假日调整除外）北京时间 9:00-12:00，13:30-17:00。交易中心可根据市场情况调整交易时间，并另行公布。
清算方式	利率期权交易由交易双方进行双边清算。新增其他清算方式的，交易中心将另行通知。
行权	欧式期权。交易中心可根据市场发展情况另行推出其他行权方式，并向市场发布。 利率互换期权买方可在行权日行使权利。买方应当在行权日通过交易系统行权模块对利率互换期权进行行权处理，行权截止时间为行权日当日北京时间 16:00 点整；买方在 16:00 之前未行权则视为放弃行权。行权后，交易系统自动生成对应的利率互换交易行权单，交易双方应当按照行权单进行交割。
交割方式	采用现金交割方式，由期权卖方向买方支付期权收益。

2 定价方法介绍

2.1 定价模型简介

利用标准市场模型，对利率上限、下限、双限合约进行定价。首先需要得到利率上限、下限、双限的单元定价模型，该模型是布莱克模型的自然推广。考虑 n 个利率重置日，利率单元价格累加后可以得到利率合约的价格。

利率上限单元定价公式如下：

$$L\delta_k P\left(0,t_{k+1}\right)\left[F_k N\left(d_1\right)-R_K N\left(d_2\right)\right] \tag{1}$$

其中，

$$d_1=\frac{\ln\left(F_k/R_K\right)+\sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}}$$
$$d_2=\frac{\ln\left(F_k/R_K\right)-\sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k\sqrt{t_k}}=d_1-\sigma_k\sqrt{t_k}$$

其中 L 为本金，$\delta_k=t_{k+1}-t_k$，F_k 是 0 期观察到的 t_k 与 t_{k+1} 之间的远期利率，σ_k 是远期利率的波动率，R_K 为上限利率，$P\left(0,t_{k+1}\right)$ 是贴现因子。

利率下限单元的定价公式如下：

$$L\delta_k P(0,t_{k+1})[R_K N(-d_2)-F_k N(-d_1)] \tag{2}$$

利率双限是由一个利率上限多头和一个利率下限的空头组成，在构造时通常使得上限的价值等于下限的价值，其价格也即利率该上限多头和利率下限空头的投资组合的价格。

我们通过设计利率上限、下限和双限合约，规定到期期限、限定利率、本金等变量，选用中国零息国债即期利率计算远期利率，再通过历史数据测算远期利率的波动率，将各变量代入模型，为利率单元进行定价。如果已知每个利率重置日的利率单元价格，则通过累加可以求一个利率合约的价格。

2.2 模型推导

2.2.1 利率上限单元定价：布莱克模型的推广

下面以一个利率上限单元为例推导定价公式，利率上限可以看作一个利率看涨期权的组合，也可以看成一个零息债券看跌期权的组合。

一方面，考虑一个利率上限，期限为 T，本金为 L，上限利率为 R_K，R_k 表示 t_k 时观察到 t_k 到 t_{k+1} 之间的 LIBOR 利率，则利率上限在 t_{k+1} 时的收益率为：

$$L\delta_k \max\left(R_k - R_K, 0\right) \tag{3}$$

该收益也即利率看涨期权的收益。

另一方面，利率上限在 t_k 时的收益可以表示为

$$\frac{L\delta_k}{1+R_k\delta_k} \max\left(R_k - R_K, 0\right) = \max\left[L - \frac{L\left(1+R_K\delta_k\right)}{1+R_k\delta_k}, 0\right] \tag{4}$$

其中 $\frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_k\delta_k}$ 表示 t_{k+1} 时有收益 $L\left(1+R_K\delta_k\right)$ 的零息债券在 t_k 时的贴现值，上式即一个零息债券上看跌期权的收益，期权到期日为 t_k，债券到期日为 t_{k+1}，面值为 $L\left(1+R_K\delta_k\right)$, 执行价格为 L。因此利率上限也可以看成一个关于零息债券欧式看跌期权的组合。

另外，布莱克模型可以对欧式期货期权定价，假设期货价格服从对数正态分布，则期权价格为：

$$c = e^{-rT}[F_0 N(d_1) - K N(d_2)] \tag{5}$$

$$p = e^{-rT}[K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \tag{6}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

此处考虑利率上限作为利率看涨期权的组合，利用式 (3) 表示的利率看涨期权收益，也即在 t_k 时被重置的利率上限单元在时间 t_{k+1} 收益，结合式 (5) 布莱克公式的自然推广，可推出利率上限单元的定价公式，即前文提到的式 (1):

$$L\delta_k P\left(0, t_{k+1}\right)\left[F_k N\left(d_1\right) - R_K N\left(d_2\right)\right]$$

同理可推出如式 (2) 所示的，利率下限单元的定价公式：

$$L\delta_k P(0, t_{k+1})[R_K N(-d_2) - F_k N(-d_1)]$$

2.2.2 理论依据：布莱克模型的改进

以上的推导是采用了布莱克模型的自然推广，布莱克模型是利用标的资产的远期或期货价格对欧式期权定价。我们可以利用等价鞅测度的结论对布莱克模型进行改进，得到可设置利率为随机变量的布莱克模型，将其代入利率上限单元的收益公式，也可以推出其定价公式。具体推导如下。

第一，考虑等价鞅测度的重要结论：

$$f_0 = g_0 E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \tag{7}$$

其中 f 和 g 表示两个可交易证券的价格，证券价格 g 被称为计价单位。E_g 表示在计价单位 g 定义的世界里的期望，f 和 g 在 0 期和 T 期的价格满足上式。

第二，考虑以零息债券价格作为计价单位。定义到期期限为 T 的零息债券在 t 期的价格为 $P\left(t, t_T\right)$ 当计价单位 $g = P\left(t, t_T\right)$ 时,E_T 表示 $P\left(t, t_T\right)$ 为远期风险中性世界的期望，由式 (7) 可推出零息债券价格作为计价单位时，满足：

$$f_0 = P(0, T) E_T\left(f_T\right) \tag{8}$$

假设 θ 为除利率外的任意变量，考虑 θ 上的到期期限为 T 的远期合约，该远期合约的价格满足：

$$f_0 = P(0, T)\left[E_T\left(\theta_T\right) - K\right]$$

由 θ 的远期价格 F 等于使得 $f_0 = 0$ 的执行价格 K，即 F=K，可得：

$$\begin{aligned} P(0, T)\left[E_T\left(\theta_T\right) - F\right] &= 0 \\ \Rightarrow F &= E_T\left(\theta_T\right) \end{aligned} \tag{9}$$

该公式表明如果 $P\left(t, t_T\right)$ 是一个远期风险中性的世界，则其中除利率外的任何变量的远期价格都等于即期价格的期望值。

第三，考虑一个标的资产上执行价格为 K，期限为 T 的欧式看涨期权。基于式 (8) 可得到期权价格可以表示为：

$$c = P(0, T) E_T\left[\max\left(S_T - K, 0\right)\right] \tag{10}$$

同时定义资产远期价格在 0 期和 T 期分别为 F_0 和 F_T，假设资产远期价格 F_T 满足对数正态分布，通过数理推导，式 (10) 可以表示为：

$$\begin{aligned} c &= P(0, T) E_T\left[\max\left(F_T - K, 0\right)\right] \\ &= E_T\left(F_T\right) N\left(d_1\right) - K N\left(d_2\right) \end{aligned}$$

再根据式 (9) 的结论，可知 $E_T(F_T)=E_T(S_T)=F_0$, 因此可以推出看涨期权的定价公式：

$$c=P(0,T)\left[F_0N(d_1)-KN(d_2)\right] \tag{11}$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\left[F_0/K\right]+\sigma_F^2T/2}{\sigma_F\sqrt{T}}$$
$$d_2=\frac{\ln\left[F_0/K\right]-\sigma_F^2T/2}{\sigma_F\sqrt{T}}$$

同理可知：

$$p=P(0,T)\left[KN(-d_2)-F_0N(-d_1)\right] \tag{12}$$

综上，通过以上方法推导的布莱克公式，允许利率为随机变量时，利用标的资产的远期价格对欧式期权定价。

2.2.3 理论依据：定价公式的再推导

以上的推导说明了布莱克公式在放宽常数利率的假设下，利率为随机变量时，仍可以采用布莱克模型利用标的资产的远期价格对欧式期权定价。

一方面，将利率上限的收益公式代入以上改进的布莱克模型，可得到其单元定价公式。另一方面，使用以上的推导思想，可再验证利率上限的单元定价公式。

首先，考虑在到期期限为 t_{k+1} 的零息债券作为计价单位定义的世界。由式 (8) 可知，在该世界中，任意证券价值都等于证券在 t_{k+1} 时的期望值称零息债券的价格。再由式 (9) 可知在该世界中，时间 t_k 与 t_{k+1} 之间利率的期望值等于远期利率。以下是根据这两步结论推导的利率上限单元的定价公式：

$$\begin{aligned}
&L\delta_kP(0,t_{k+1})E_{k+1}[\max(R_k-R_K,0)]\\
&=L\delta_kP(0,t_{k+1})[E_{k+1}(R_k)N(d_1)-R_KN(d_2)]\\
&=L\delta_kP\left(0,t_{k+1}\right)\left[F_kN\left(d_1\right)-R_KN\left(d_2\right)\right]
\end{aligned}$$

3 合约设计

假设 2023 年 5 月 22 日签订了以下三个合约。

3.1 利率上限合约

基准利率	6 个月国债即期利率
利率上限期限	3 年
利率重设日	每 6 个月
名义本金额	1000 元
利率上限期权执行利率	3%（每半年复利一次）
支付期限	延期 6 个月

3.2 利率下限合约

基准利率	6 个月国债即期利率
利率上限期限	3 年
利率重设日	每 6 个月
名义本金额	1000 元
利率下限期权执行利率	2%（每半年复利一次）
支付期限	延期 6 个月

3.3 利率双限合约

基准利率	6 个月国债即期利率
利率上限期限	3 年
利率重设日	每 6 个月
名义本金额	1000 元
利率上限期权执行利率	3%（每半年复利一次）
利率下限期权执行利率	2%（每半年复利一次）
支付期限	延期 6 个月

以下代码首先确定了利率上限、下限、双限单元定价和合约定价的函数，再利用实例进行函数检验，以验证代码的可行性，最后为设计的合约进行定价。

4 定价函数介绍

4.1 函数设置

caplet_value	利率上限/下限单元定价函数
collar_caplet_value	利率双限单元定价函数
contract_value	利率上限/下限合约定价函数
collar_value	利率双限合约定价函数

4.2 利率上限/下限单元定价

基于式 (1) 和式 (2) 对利率上限及下限单元的定价公式，得到以下的定价函数：

4.2.1 变量设置

tk	float, 在 t_k 时刻观察 t_k 和 t_{k+1} 之间的基准利率 R_k
tk1	float, 期权的收益发生在 t_{k+1} 时刻
Fk	float, 在 0 期观察到的 t_k 和 t_{k+1} 之间的远期利率
RK	float, 合约约定的上限/下限利率
L	float, 利率上限/下限合约本金
Pk1	float, 贴现因子: 将发生在 t_{k+1} 时刻的收益贴现到 0 时刻
sigmak	float, 在 0 时刻上观察到的 t_k 和 t_{k+1} 之间的远期利率的波动率
cap	T or F, 表示利率上限/利率下限

4.2.2 函数代码

```
def caplet_value(tk, tk1, Fk, RK, L, sigmak, Pk1, cap=True):
      deltak = tk1-tk
      d1 = (log(Fk / RK) + (0.5 * sigmak ** 2) * tk) / (
          sigmak * sqrt(tk))
      d2 = d1 - sigmak * sqrt(tk)
      if cap:
```

```
            value = L * deltak * Pk1 * (Fk * norm.cdf(d1) - RK * norm.cdf(d2))
        else:
            value = L * deltak * Pk1 * (RK * norm.cdf(-d2) - Fk * norm.cdf(-d1))
        return value
```

4.3 利率双限单元定价

4.3.1 变量设置

tk	float, 在 t_k 时刻观察 t_k 和 t_{k+1} 之间的基准利率 R_k
tk1	float, 期权的收益发生在 t_{k+1} 时刻
Fk	float, 在 0 期观察到的 t_k 和 t_{k+1} 之间的远期利率
L	float, 利率上限/下限合约本金
Pk1	float, 贴现因子: 将发生在 t_{k+1} 时刻的收益贴现到 0 时刻
sigmak	float, 在 0 时刻上观察到的 t_k 和 t_{k+1} 之间的远期利率的波动率
RK_c	float, 上限利率
RK_f	float, 下限利率

4.3.2 函数代码

```
def collar_caplet_value(tk, tk1, Fk, RK_c, RK_f, L, sigmak, Pk1):
    value = caplet_value(tk, tk1, Fk, RK_c, L, sigmak, Pk1, cap=True) - caplet_value(tk, tk1, Fk, RK_f, L, sigmak, Pk1, cap=False)
    return value
```

4.4 利率上限/下限合约定价

4.4.1 变量设置

t	list, $t_1, t_2, t_3, ..., t_{n+1}$
F	list, $F_1, F_2, F_3, ..., F_n$
RK	float, 上限/下限利率
L	float, 利率上限/下限合约本金
sigma	list, $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$
P	list, $P_2, P_3, ..., P_{n+1}$
cap	T or F, 利率上限 or 利率下限

4.4.2 函数代码

```python
def contract_value(t, F, RK, L, sigma, P, cap=True):
    n = len(t) - 1
    sum = 0
    for i in range(n):
        sum = sum + caplet_value(t[i], t[i+1], F[i], RK, L,
            sigma[i], P[i], cap)
    return sum
```

4.5 利率双限合约定价

4.5.1 变量设置

t	list, $t_1, t_2, t_3, ..., t_{n+1}$
F	list, $F_1, F_2, F_3, ..., F_n$
L	float, 利率上限/下限合约本金
sigma	list, $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$
P	list, $P_2, P_3, ..., P_{n+1}$
RK_c	float, 上限利率
RK_f	float, 下限利率

4.5.2 函数代码

```python
def collar_value(t, F, RK_c, RK_f, L, sigma, P):
    n = len(t) - 1
```

```
        sum = 0
        for i in range(n):
            sum = sum + collar_caplet_value(t[i], t[i + 1], F[i
                ], RK_c, RK_f, L, sigma[i], P[i])
        return sum
```

5 定价函数验证

5.1 例 29-3 利率上限单元定价

考虑一个在一年后开始，并持续 3 个月的将 1000 万美元的 LIBOR 利率限定在 8%以下 (每季度复利一次) 的利率上限。这里所描述的上限单元有可能是上限合约的一个组成部分。假设以 LIBOR/互换零息曲线作为无风险利率用来贴现，而且假定 LIBOR/互换零息曲线形状为水平，每年 7%，复利频率为每季度一次。利率上限单元所对应的 3 个月期限远期利率波动率为每年 20%，对应于所有期限的 (连续复利) 利率均为 6.9394%。

```
        tk = 1.0
        tk1 = 1.25
        Fk = 0.07
        RK = 0.08
        L = 10
        sigmak = 0.2
        Pk1 = 0.9169
        price = caplet_value(tk, tk1, Fk, RK, L, sigmak, Pk1,
            cap=True)
        print(price)
        # 0.00516 结果与题目答案一致
```

5.2 练习题 29.5 利率上限单元定价

计算以下期权的价格: 在 15 个月时将 3 个月期的利率上限定为 13%(按季度复利)，本金为 1000 美元。对应这段时间的远期利率为 12%(按季度复利),18 个月期限的无风险利率为每年 11.5%(连续复利)，远期利率的波动率为每年 12%。

```python
tk = 1.25
tk1 = 1.5
Fk = 0.12
RK = 0.13
L = 1000
sigmak = 0.12
Pk1 = exp(-0.115*1.5)
price = caplet_value(tk, tk1, Fk, RK, L, sigmak, Pk1,
    cap=True)
print(price)
# 0.5972 结果与题目答案一致
```

5.3 练习题 29.22 利率上限单元定价

计算一个 9 个月期、标的变量为 90 天 LIBOR 的利率上限价格，其中本金为 1000 美元。采用布莱克模型及以下信息进行计算:
(a)9 个月期的欧洲美元期货价格为 92 美元 (忽略期货与远期利率的差别);
(b)9 个月期的欧洲美元期权隐含波动率为每年 15%;
(c) 当前连续复利的 12 个月期限的利率为每年 7.5%;
(d) 上限利率为每年 8% (假定计量天数惯例为“实际天数/360”)。

```python
tk = 0.75
tk1 = 1.0
Fk = 0.08
RK = 0.08
L = 1000
sigmak = 0.15
Pk1 = exp(-0.075*1.0)
price = caplet_value(tk, tk1, Fk, RK, L, sigmak, Pk1,
    cap=True)
print(price)
# 0.96 结果与题目答案一致
```

5.4 练习题 29.24 利率双限合约定价

对以下 5 年期的双限定价: 双限保证 LIBOR (每季度确定一次利率) 的最大及最小利率分别为 7%及 5%。所有 3 个月期的 LIBOR 远期利率均为

6%(按季度复利)。在定价中采用单一波动率 20%，本金数量为 100 美元，无风险利率 (OIS) 期限结构为水平状，等于 5.8%。

```
t = [0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0, 2.25, 2.5, 2.75, 3.0, 3.25, 3.5, 3.75, 4.0, 4.25, 4.5, 4.75, 5.0]
F = [0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06, 0.06]
sigma = [0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2]
P = [0.9714164644666048, 0.957432554090967, 0.9436499474367985, 0.9300657466602784, 0.9166770956331523, 0.9034811793422207, 0.8904752232974726, 0.8776564929487385, 0.8650222931107413, 0.8525699673964233, 0.8402968976584314, 0.828200503438642, 0.8162782414256099, 0.8045276049198279, 0.7929461233066837, 0.7815313615370046, 0.7702809196150792, 0.759192432094049, 0.7482635675785652]
RK_c = 0.07
RK_f = 0.05
L = 100
price = collar_value(t, F, RK_c, RK_f, L, sigma, P)
price2 = contract_value(t, F, RK_c, L, sigma, P, cap=True)
price3 = contract_value(t, F, RK_f, L, sigma, P, cap=False)
print(price)   # 双限合约价格: 0.398
print(price2)  # 上限合约价格: 1.514
print(price3)  # 下限合约价格: 1.116
```

6 即期收益率和远期利率

6.1 利率选取及其理由

即期收益率就是常说的零息利率，也就是无息债券的到期收益率。由于基准利率是中国国债即期利率，远期利率是由当前零息利率所蕴含的将来一定期限的利率，故选取中国国债即期收益率来计算远期利率。本组选取 2020 年 5 月 22 日至 2023 年 5 月 22 日的中国国债即期收益率数据来进行远期利率及远期利率波动率的计算。数据来源于 ifind 金融数据终端，wind。

表 6.1 国债即期收益率（按年复利，单位：%）

	2023-5-22	2023-5-19	2023-5-18	2023-5-17	2023-5-16
0.5 年	1.9359	1.9953	2.0095	2.0099	2.0228
1.0 年	2.0205	2.0581	2.0785	2.0725	2.0666
1.5 年	2.1382	2.1748	2.1962	2.1913	2.187
2.0 年	2.2558	2.2915	2.3139	2.3101	2.3073
2.5 年	2.2982	2.3292	2.3449	2.3393	2.3495
3.0 年	2.3406	2.3669	2.3758	2.3684	2.3917

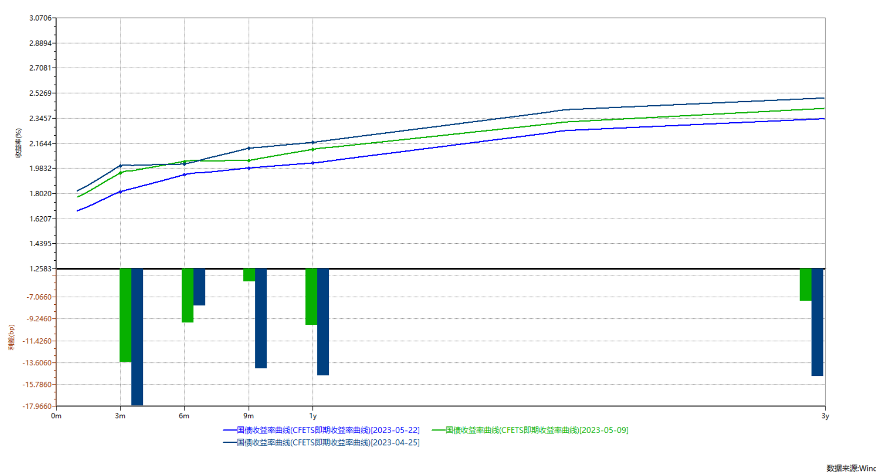

图 6.1 国债即期收益率曲线

6.2 计算远期利率

设 $T_1 < T_2$，R_1 和 R_2 分别对应期限为 T_1 年和 T_2 年的零息利率（按年复利），R_F 为 T_1 年与 T_2 年之间的远期利率（按年复利），则：

$$(1+R_F)^{(T_2-T_1)} = \frac{(1+R_2)^{T_2}}{(1+R_1)^{T_1}} \tag{13}$$

由于利率上限、下限、双限期权执行利率为每半年复利一次，故将 T_1 与 T_2 之间的远期利率 R_F（按年复利）变为远期利率 F_k（每半年复利一次）：

$$(1+\frac{F_k}{2})^2 = 1+R_F \tag{14}$$

计算出的远期利率如表 6.2 所示。

表 6.2 远期利率（每半年复利一次，单位：%）

	2023-5-22	2023-5-19	2023-5-18	2023-5-17	2023-5-16
0.5-1.0 年	2.0942	2.1098	2.1361	2.1239	2.0994
1.0-1.5 年	2.3601	2.3943	2.4174	2.4147	2.4137
1.5-2.0 年	2.5926	2.6252	2.6503	2.6498	2.6515
2.0-2.5 年	2.4529	2.4649	2.4539	2.4413	2.5028
2.5-3.0 年	2.5368	2.5395	2.5146	2.4984	2.5862

6.3 计算远期利率的波动率

根据 2020 年 5 月 22 日至 2023 年 5 月 22 日的远期利率，进一步求出远期利率的波动率。定义:

n ＋ 1　观测次数

F_{ki}　在第 i 个时间区间结束时，以第 i 个时间区间结束为 0 时，所观察到的时间 t_k 与 t_{k+1} 之间的远期利率，i = 0，1，⋯，n

τ　时间区间的长度，以年为单位

令 $u_{ki} = ln(\frac{F_{ki}}{F_{k(i-1)}}), i = 1, 2, \cdots, n$, u_{ki} 标准差的估计值 s 为:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{r}(u_{ki}-\overline{u_k})^2} \tag{15}$$

我们知道，变量 s 是 $\sigma_k\sqrt{\tau}$ 的估计值。所以 $_k$ 本身可以被估计为 $\widehat{\sigma_k}$。其中

$$\widehat{\sigma_k} = \frac{s}{\sqrt{\tau}} \tag{16}$$

又由于这三年内共有 749 个交易日，故 τ=3/749。计算出的远期利率波动率如表 6.3 所示。

表 6.3 远期利率波动率（单位：每年 %）

远期利率期限	远期利率波动率
0.5-1.0 年	34.3125
1.0-1.5 年	20.8198
1.5-2.0 年	29.5631
2.0-2.5 年	28.3287
2.5-3.0 年	36.2510

6.4 计算在 t_{k+1} 到期的零息债券的价格

定义一个在时间 T、收益为 1 元的零息债券在时间 t 的价格为 $P(t,T)$。记 2023 年 5 月 22 日为 0 时，设 R_T 为期限为 T 年的零息国债利率（按年复利），则：

$$P(0,T) * (1+\mathrm{R_T})^T = 1 \tag{17}$$

可计算出 $P(0,T)$，如表 6.4 所示：

表 6.4 零息债券的价格（单位：元）

到期期限	零息债券的价格
1.0 年	0.9802
1.5 年	0.9688
2.0 年	0.9564
2.5 年	0.9448
3.0 年	0.9329

7 给本组设计的合约定价

以 2023 年 5 月 22 日作为 0 时点，将本文第 6 章计算出的远期利率、远期利率的波动率、贴现因子 P，以及本组设计的合约的重置日、上限利率、下限利率、本金，代入函数中，即可求出本组设计的合约的价格。

```
t = [0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0]
F = [0.02094206, 0.023600826, 0.02592609, 0.024529337, 0.025367757]
sigma = [0.3431253, 0.2081978, 0.2956312, 0.2832873, 0.3625096]
P = [0.980195157, 0.968763349, 0.956365935, 0.944778539, 0.932945176]
RK_c = 0.03
RK_f = 0.02
L = 1000
price = collar_value(t, F, RK_c, RK_f, L, sigma, P)
price2 = contract_value(t, F, RK_c, L, sigma, P, cap=True)
price3 = contract_value(t, F, RK_f, L, sigma, P, cap=False)
print(price2)  # 上限合约价格: 4.3087
print(price3)  # 下限合约价格: 3.7016
print(price)   # 双限合约价格: 0.6071
```

在 2023 年 5 月 22 日，本组设计的上限、下限、双限合约的价格分别为 4.3087 元，3.7016 元，0.6071 元。

8 拓展：探究变量对利率上限、下限、双限合约价格的影响

由于远期利率 F_k 和远期利率波动率 σ_k 估计的准确性会影响我们对利率期权合约定价的准确性，为了说明我们的估计对期权合约价格的影响，我们分别研究远期利率 F_k 的变动和远期利率波动率 σ_k 的变动对利率期权合约价格的影响。此外，我们分析了上限、下限利率的变动对利率上限、下限合约价格的影响。

8.1 远期利率变化

8.1.1 代码

```
F1 = []
pricex = []
pricex2 = []
pricex3 = []
n = len(F)
for j in range(-30, 31):
for i in range(n):
F1.append(F[i]+F[i]*j/100)
pricex.append(collar_value(t, F1, RK_c, RK_f, L, sigma, P))
pricex2.append(contract_value(t, F1, RK_c, L, sigma, P, cap=True))
pricex3.append(contract_value(t, F1, RK_f, L, sigma, P, cap=False))
F1 = []

percentage = range(-30, 31)
fig = plt.figure(figsize=(15, 8))
plt.plot(percentage, pricex, label='collar')
plt.plot(percentage, pricex2, label='cap')
plt.plot(percentage, pricex3, label='floor')
plt.title("change in option value over forward rate")
plt.xlabel("percentage change in the forward rate (%)")
plt.ylabel("option value")
plt.grid()
```

```
        plt.legend()
        plt.legend(fontsize=18)
        plt.tick_params(labelsize=15)
        plt.show()
```

8.1.2 结果

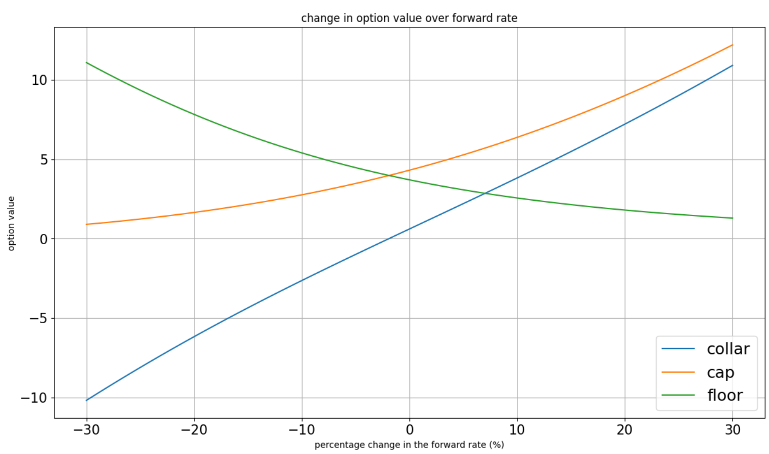

图 8.1 远期利率变动对利率期权价格的影响

由图 8.1 可以看出，远期利率的变动对利率上限、下限、双限合约价格的影响较大。随着远期利率的上升，利率上限（下限）的价格会上升（下降）。原因是随着远期利率的上升，利率上限（下限）到期获得更高收益的概率增大（减小），因此利率上限（下限）合约现在的价格上升（降低）。如当远期利率增加到我们在第 7 章用于计算的远期利率[1]的 1.2 倍时，利率上限合约价格提高近 5 元。

由于我们采用的是国债即期收益率曲线数据计算远期利率，因此我们得出的远期利率较为准确，这确保了对利率上限、下限、双限合约定价的准确性。

[1]这里使用的远期利率见表 6.2 中以 2023 年 05 月 22 日为 0 时点观察到的远期利率。

8.2 远期利率波动率变动对利率期权价格的影响

8.2.1 代码

```
sigma1 = []
sigmax = []
pricex = []
pricex2 = []
pricex3 = []
n = len(F)
for j in range(-30, 31):
for i in range(n):
sigma1.append(sigma[i]+sigma[i]*j/100)
pricex.append(collar_value(t, F, RK_c, RK_f, L, sigma1,
     P))
pricex2.append(contract_value(t, F, RK_c, L, sigma1, P,
     cap=True))
pricex3.append(contract_value(t, F, RK_f, L, sigma1, P,
     cap=False))
sigma1 = []

percentage = range(-30, 31)
fig = plt.figure(figsize=(15, 8))
plt.plot(percentage, pricex, label='collar')
plt.plot(percentage, pricex2, label='cap')
plt.plot(percentage, pricex3, label='floor')
plt.title("change in option value over forward rate")
plt.xlabel("percentage change in the volatility of the
    forward rate (%)")
plt.ylabel("option value")
plt.grid()
plt.legend()
plt.legend(fontsize=18)
plt.tick_params(labelsize=15)
plt.show()
```

8.2.2 结果

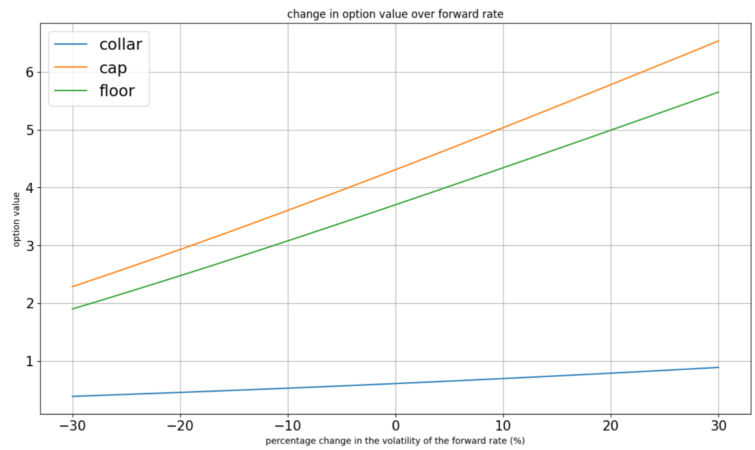

图 8.2 远期利率波动率变化的敏感性分析

由图 8.2 可以看出，在其他条件一定时，随着远期利率的波动率 σ_k 的增加，利率上限、下限合约价格均增加。可能的原因是，随着 σ_k 的增加，到期获得更高收益的概率增大，因此合约现在的价值增加。如在远期利率的波动率为我们计算出远期利率的波动率 [2] 的 1.3 倍时，利率上限合约的价格增加了 2.2 元左右。

由于估计波动率方法的原因，远期波动率的真实值与估计值存在一定偏差，这些偏差对利率上限、下限、双限合约价格会有一定的影响。

[2]这里所指的远期利率的波动率见表 6.3。

8.3 探究上限、下限利率变化对合约价格的影响

8.3.1 代码

```
RK_c1 = RK_c
RK_f1 = RK_f
pricex = []
pricex2 = []
pricex3 = []
n = len(F)
for j in range(-15, 21):
for i in range(n):
RK_c1 = RK_c1 + RK_c1 * j / 100
RK_f1 = RK_f1 + RK_f1 * j / 100
pricex.append(collar_value(t, F, RK_c1, RK_f1, L, sigma, P))
pricex2.append(contract_value(t, F, RK_c1, L, sigma, P, cap=True))
pricex3.append(contract_value(t, F, RK_f1, L, sigma, P, cap=False))
RK_c1 = RK_c
RK_f1 = RK_f

percentage = range(-15, 21)
fig = plt.figure(figsize=(15, 8))
plt.plot(percentage, pricex, label='collar')
plt.plot(percentage, pricex2, label='cap')
plt.plot(percentage, pricex3, label='floor')
plt.title("change in option value over cap/floor")
plt.xlabel("percentage change in the cap/floor (%)")
plt.ylabel("option value")
plt.grid()
plt.legend()
plt.legend(fontsize=18)
plt.tick_params(labelsize=15)
plt.show()
```

8.3.2 结果

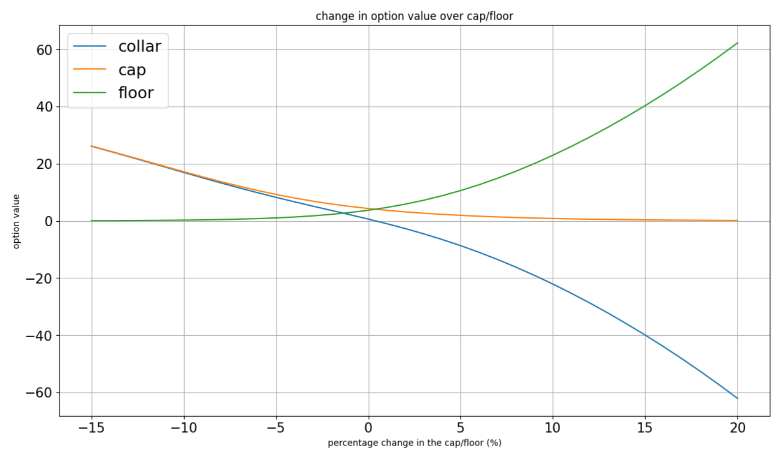

图 8.3 远期利率波动率变化的敏感性分析

由图 8.3 我们可以看出，随着下限利率的减小，利率下限合约的价格降低，当下限利率低于我们合约中设定的下限利率（2%）的 90%时，利率下限合约的价格接近 0；随着上限利率的增加，利率上限合约的价格降低，当上限利率高于我们合约中设定的上限利率（3%）的 115%时，利率上限合约的价格接近 0。

原因是随着下限（上限）利率的减小（增加），利率下限（上限）合约到期获得更高收益的概率减小，因此期权现在的价值降低。而由于上限、下限合约的性质，上限、下限合约的价格不会为负。

9 参考文献

[1] 邵翔. 利率期权在当前商业银行风险管理中的应用初探 [J]. 中国货币市场,2020,No.224(06):24-28.

[2] 陈健恒, 东旭, 牛佳敏. 国际利率期权市场发展及对我国的借鉴 [J]. 中国货币市场,2020,No.224(06):29-34.