

Навигация

- [1. Функциональные последовательности и ряды](#)
- [2. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов](#)
- [3. Непрерывность суммы функционального ряда и функциональных последовательностей](#)
- [4. Почленный переход к пределу в функциональных рядах](#)
- [5. Почленное интегрирование функциональных рядов](#)
- [6. Почленное дифференцирование функциональных рядов](#)
- [7. Интеграл зависящий от параметра. Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости функций. Непрерывность предельной функции](#)
- [8. Предельный переход по параметру под знаком интеграла. Непрерывность интеграла по параметру.](#)
- [9. Дифференцирование интегралов по параметру](#)
- [10. Интегрирование интегралов от параметра](#)

1.

Функциональные последовательности и ряды

Последовательность, членами которой являются функции, определенные на одной и той же области X (X - область определения функций), называется **функциональной последовательностью**:

$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (1)$$

Если зафиксируем $x \in X$, то получим числовую последовательность.

Допустим, что при $\forall x \in X$ последовательность (1) имеет конечный предел. При других x предел будет другой. Заметим, что предел зависит от x и обозначим этот предел через $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

$f(x)$ - предельная функция, которая зависит от x . Это называется **поточечная ("по точкам") сходимость**.

При фиксированном x :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Заметим, что при изменении x меняется N . Можно ли выбрать N таким образом, чтобы оно зависело только от ε , но не зависело от выбора x ?

Определение равномерной сходимости

Если:

1. Для функциональной последовательности (1) существует предельная функция $\exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$,
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0; n > N$ имеет место неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in X$,

то мы скажем, что последовательность **равномерно сходится** к $f(x)$ на множестве X ($f_n(x) \Rightarrow f(x)$).

[Примеры]

Равномерная сходимость:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + x^2} = 0.$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}.$$

$$n > \frac{1}{2\varepsilon}, \quad N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor.$$

Данная последовательность равномерно сходится к предельной функции $f(x)$.

Поточечная сходимость:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad 0 < x \leq 1.$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0.$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{nx}.$$

В данном случае равномерная сходимость отсутствует.

Функциональные ряды

Рассмотрим ряд, члены которого функции, определенные на множестве X :

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x). \quad (3)$$

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x).$$

Если x фиксировано, то получается числовой ряд, а $f_n(x)$ - **частичная сумма**.

Пусть ряд (3) сходится при $\forall x \in X$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (\text{поточечная сходимость}).$$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \\ \varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \quad (\text{остаточный ряд}), \\ |\varphi_n(x)| < \varepsilon. \end{cases}$$

Ряд (3) **равномерно сходится** на множестве X , если:

1. Последовательность частичных сумм имеет предельную функцию $f(x)$ на X : $\exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$,
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) > 0; \quad n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff |\varphi_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$.

2.

Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов

Теорема (Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости последовательностей)

Для того, чтобы функциональная последовательность (1) имела предельную функцию и сходилась к этой функции равномерно относительно $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), n > N m = 1, 2, \dots, \\ |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{для } \forall x \in X. \end{aligned} \quad (4)$$

[Доказательство]

1. Необходимость

Пусть $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ для $\forall x \in X$. Тогда:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), n > N : \\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

И если $n + m > n > N$, то:

$$|f_{n+m}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Следовательно:

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| = |f_{n+m}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+m}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Достаточность

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), n > N m = 1, 2, \dots : \\ |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Зафиксируем $\forall x \in X$. Так как при фиксированном x выполняется условие Больцано-Коши, то последовательность сходится.

При изменении x существует предельная функция $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (поточечная сходимость).

Сделаем предельный переход $m \rightarrow \infty$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{n+m}(x) = f(x).$$

Тогда:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \text{при } n > N \text{ и } \forall x \in X.$$

Следовательно, по 2-му условию:

$$f_n(x) \Rightarrow f(x).$$

Признак Вейерштрасса

Теорема (Признак Вейерштрасса)

Пусть у нас есть функциональный ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

где каждый член ряда определен на X .

1. $|u_k(x)| \leq c_k \quad \forall x \in X$,
2. числовой ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится.

Тогда: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится.

[Доказательство]

Рассмотрим сумму ($m \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots + |u_{n+m}(x)| \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}.$$

Из условия сходимости числового ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \quad n > N \quad m = 1, 2, \dots :$$

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}| < \varepsilon.$$

Получаем:

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) < c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m} < \varepsilon.$$

3.

Непрерывность суммы функционального ряда и функциональных последовательностей

Пусть имеем функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

1. члены ряда определены на $[a; b]$ и непрерывны на $[a; b]$
2. этот ряд равномерно сходится на $[a; b]$.

Тогда сумма ряда также будет непрерывной функцией на $[a; b]$.

[Доказательство] Возьмём $\forall x_0 \in [a; b]$ и докажем, что $f(x)$ непрерывна в этой точке.

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x) \quad (2)$$

$$f(x_0) = f_n(x_0) + \varphi_n(x_0) \quad (3)$$

$$(2) - (3) = f(x) - f(x_0) = f_n(x) - f_n(x_0) + \varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x_0)| \quad (5)$$

Ряд равномерно сходится на $[a; b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \quad n > N :$

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для } \forall x \in [a; b] \quad (6)$$

$$|\varphi_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (7)$$

$f_n(x)$ — сумма конечного числа непрерывных функций $\Rightarrow f_n(x)$ — непрерывная функция, в частности в точке x_0 . То по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (8)$$

Получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(используя (6), (7), (8))

$\Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке x_0 . ■

эта теорема достаточна, но не необходима

Приведём пример ряда, состоящего из непрерывных функций, этот ряд неравномерно сходится, но тем не менее сумма является непрерывной функцией.

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right], \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}$$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{1+x^2} - 0 + \frac{2x}{1+2^2x^2} - \frac{x}{1+x^2} + \dots + \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \\ &= \frac{nx}{1+n^2x^2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

Ряд неравномерно сходится, $u_n(x)$ непрерывны, $f(x)$ непрерывна на $[0; 1]$. □

4.

Почленный переход к пределу в функциональных рядах

Точка a является для множества X *точкой сгущения* (предельной точкой), если $(a - \delta; a + \delta)$ имеется точка из X , отличная от a .

Теорема (о почленном переходе к пределу)

1. Пусть имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, каждый член которого определён на множестве X .
2. a — точка сгущения для множества X
3. $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = c_n$ для $\forall n = 1, 2, \dots$
4. Этот функциональный ряд равномерно сходится на X .

Тогда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C$ сходится
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$

Почленный переход под знаком суммы:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \iff \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_k(x)$$

[Доказательство]

Докажем 1-ое (необходимое и достаточное условие):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon), \quad n > N, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon \quad (1)$$

при $x \rightarrow a$ переходим к пределу:

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}| \leq \varepsilon \quad (2)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n = C.$$

Докажем 2-ое:

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x) \quad (3)$$

$$C = C_n + \gamma_n \quad (4)$$

$$f(x) - C = f_n(x) - C_n + \varphi_n(x) - \gamma_n$$

$$|f(x) - C| \leq |f_n(x) - C_n| + |\varphi_n(x)| + |\gamma_n| \quad (5)$$

Так как функциональный ряд равномерно сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon), \quad n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in X \quad (6)$$

И так как

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2(\varepsilon), \quad n > N_2 \quad \Rightarrow \quad |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (7)$$

$$N = \max(N_1, N_2), \quad n > N$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n c_k = C_n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - C_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (8)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$(5) = |f(x) - C| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}}_{(6),(7),(8)} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\text{По Коши}) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C.$$

■

Почленное интегрирование функциональных рядов

Имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Функции $u_n(x)$ непрерывны на $[a; b]$ и ряд сходится. Когда можно интеграл от суммы заменить почленным интегрированием?

Теорема (достаточное условие)

1. Пусть имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1), члены ряда непрерывны на $[a; b]$.
2. ряд (1) равномерно сходится на $[a; b]$.

Тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots \quad (2)$$

Заметим, что все интегралы в этой формуле существуют.

[Доказательство]

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x), \quad (3)$$

где

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x),$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \quad (\text{равн. сх.}).$$

Так как ряд равномерно сходится, остаточный ряд тоже равномерно сходится и члены ряда непрерывные функции, то $\varphi_n(x)$ **непрерывна**.

$f_n(x)$ **непрерывна** как сумма непрерывных функций. Поэтому имеем право проинтегрировать обе части равенства (3):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_n(x) dx + \int_a^b \varphi_n(x) dx \quad (4)$$

Следовательно,

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \varphi_n(x) dx.$$

Нам нужно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = 0 \quad (5).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon), n > N \Rightarrow |\varphi_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a; b]$$

$$\int_a^b \varphi_n(x) dx \leq \int_a^b |\varphi_n(x)| dx < \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a),$$

что равносильно (5).

Тогда из формулы (4) будет следовать, что предел левой части также стремится к 0 и это будет означать, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Но

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)] dx \\ &= \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx,\end{aligned}$$

то есть

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

Запишем (2) в следующем виде:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx$$

(как сумма конечного числа слагаемых)

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n u_k(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad (6)$$

Условие равномерной сходимости рядов достаточно, но не необходимо.

[Пример:]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right].$$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0 \quad x \in [0; 1].$$

Проверим соотношение (6) для этого ряда:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \int_0^1 \frac{d(n^2x^2 + 1)}{1+n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \left[\ln(1+n^2x^2) \right]_0^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln(1+n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0 = \int_0^1 0 dx = 0.\end{aligned}$$

(6) выполняется, но ряд неравномерно сходится. Поэтому равномерная сходимость для почленного интегрирования является достаточным, но не необходимым условием.

6.

Почленное дифференцирование функциональных рядов

Теорема (достаточное условие).

1. Пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, члены которого определены и непрерывны на $[a; b]$
2. $u_k(x)$ для $k = 1, 2, \dots$ имеют непрерывные производные.
3. сам ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на $[a; b]$ (**поточечно**)
4. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ **равномерно** сходится на $[a; b]$.

Тогда справедлива формула:

$$f'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x). \quad (1)$$

[Доказательство]

Обозначим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad \text{и} \quad f^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x).$$

$u'_k(x)$ непрерывны и их ряд сходится равномерно

$\Rightarrow f^*(x)$ есть равномерно сходящийся ряд непрерывных функций

$\Rightarrow f^*(x)$ *непрерывна* на $[a; b]$.

Рассмотрим интеграл от a до z , где $z \in [a; b]$:

$$\int_a^z f^*(t) dt = \int_a^z \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^z u'_k(t) dt.$$

Вторая часть по условию равномерной сходимости

Каждый $\int_a^z u'_k(t) dt$ равен $[u_k(t)]_a^z = u_k(z) - u_k(a)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^z u'_k(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k(z) - u_k(a)) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) = f(z) - f(a).$$

Таким образом получаем:

$$\int_a^z f^*(t) dt = f(z) - f(a).$$

Это означает, что функция $f(x)$ (при фиксированном a) имеет производную $f^*(x)$ на $[a; b]$.

Следовательно, дифференцируя обе части равенства по x (*учитывая свойство интегралов с переменным верхним пределом* $\int_a^x f^*(t) dt = f(x) - f(a)$), мы приходим к

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f^*(t) dt \right] = f^*(x) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} [f(x) - f(a)] = f'(x).$$

Значит,

$$f'(x) = f^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x).$$

Что и требовалось доказать. ■

7.

Интеграл зависящий от параметра. Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости функций. Непрерывность предельной функции

Пусть имеем функцию от двух переменных $f(x, y)$, где $x \in [a; b]$, $y \in Y$. Пусть при \forall фиксированном y существует

$$\int_a^b f(x, y) dx.$$

Меняя y , мы получим другое значение. Будем считать, что этот интеграл существует для всех $y \in Y$. Этот интеграл называется **функцией** от параметра y :

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Равномерное стремление к предельной функции

Пусть функция $f(x, y)$ определена на некотором двумерном множестве $M = X \times Y$, и множество Y имеет **конечную** точку сгущения y_0 .

Определение (для конечного y_0). Если для функции $f(x, y)$:

1. $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x), \forall x \in X$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от x , что как только $|y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \forall x \in X$.

Тогда $f(x, y) \Rightarrow \varphi(x) \forall x \in X$ (**равномерно сходится** относительно x) при $y \rightarrow y_0$.

Пусть функция $f(x, y)$ определена на некотором двумерном множестве $M = X \times Y$, и множество Y имеет **бесконечную** точку сгущения $y_0 = +\infty$ (или $-\infty$).

Определение (для бесконечного y_0). Если для функции $f(x, y)$:

1. $\exists \lim_{y \rightarrow +\infty(-\infty)} f(x, y) = \varphi(x), \forall x \in X$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от x , что как только $y > \Delta$ (или $y < -\Delta$) $\implies |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \forall x \in X$.

То $f(x, y) \implies \varphi(x) \forall x \in X$ (равномерно сходится относительно x) при $y \rightarrow +\infty$ (или $y \rightarrow -\infty$).

Необходимое и достаточное условие

Теорема (необходимое и достаточное условие) для конечного y_0

Пусть функция $f(x, y)$ определена на некотором двумерном множестве $M = X \times Y$, и множество Y имеет точку сгущения y_0 . Для того, чтобы $f(x, y)$ при $y \rightarrow y_0$ имело бы предельную функцию $\varphi(x)$ и стремилась бы к ней равномерно, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x, |y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in X. \quad (1)$$

Доказательство (для конечного y_0)

1. Необходимость.

Допустим, (1) и (2) (см. определение равномерной сходимости) выполняются, т.е.

$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$. Тогда $f(x, y) \Rightarrow \varphi(x)$ относительно x при $y \rightarrow y_0$.

Воспользуемся определением равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x : |y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X.$$

Аналогично для y' :

$$|y' - y_0| < \delta \implies |f(x, y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X.$$

Тогда

$$|f(x, y') - f(x, y)| = |f(x, y') - \varphi(x) + \varphi(x) - f(x, y)| \leq |f(x, y') - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

2. Достаточность.

Пусть выполняется условие (1). Зафиксируем $\forall z \in X$. Зафиксируем y так, чтобы $|y - y_0| < \delta$.

Переходим к пределу при $y \rightarrow y_0$ в (1):

$$|\varphi(x) - f(x, z)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X \quad (4)$$

$$\implies f(x, y) \Rightarrow \varphi(x) \text{ относительно } x \text{ при } y \rightarrow y_0.$$

Теорема (для бесконечного y_0)

Для того, чтобы $f(x, y)$ при $y \rightarrow y_0 = +\infty$ (или $-\infty$) имело бы предельную функцию $\varphi(x)$ и стремилось бы к ней равномерно в области X , **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x, y > \Delta \text{ (или } y < -\Delta) \implies |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X. \quad (1)$$

Непрерывность предельной функции

Теорема. В качестве X возьмём $[a; b]$. Пусть $f(x, y)$ при \forall фиксированном $y \in Y$ непрерывна на X и известно, что при $y \rightarrow y_0$ $f(x, y) \implies \varphi(x)$. Тогда $\varphi(x)$ также будет непрерывной функцией на X .

Доказательство.

Рассмотрим последовательность $\{y_n\} \rightarrow y_0$, $y_n \in Y$. По условию $f(x, y) \implies \varphi(x)$ при $y \rightarrow y_0$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x, |y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a; b].$$

Выберем n — большое, чтобы $|y_n - y_0| < \delta$. Тогда

$$|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a; b].$$

Определим

$$\psi_n(x) = f(x, y_n) \Rightarrow \psi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(x).$$

Но $\psi_n(x) = f(x, y_n)$ — непрерывна на $[a; b]$, значит $\psi_n \rightarrow \varphi$ равномерно, а потому $\varphi(x)$ будет непрерывна на $[a; b]$.

Если имеем последовательность непрерывных функций $\{\psi_n(x)\} \subset [a; b]$, которая **равномерно** сходится к $\varphi(x)$, то предельная функция $\varphi(x)$ будет также непрерывна на $[a; b]$.

8.

Предельный переход по параметру под знаком интеграла. Непрерывность интеграла по параметру.

Рассмотрим интеграл

$$I(y)=\int_a^bf(x,y)\,dx.$$

Если

1. $f(x,y)\,\forall y\in Y$ непрерывна по $x\in[a,b]$
2. $f(x,y)\Rightarrow\varphi(x)$ при $y\rightarrow y_0$

тогда

$$\lim_{y\rightarrow y_0}I(y)=\lim_{y\rightarrow y_0}\int_a^bf(x,y)dx=\int_a^b\varphi(x)dx=\int_a^b\lim_{y\rightarrow y_0}f(x,y)dx$$

[Доказательство]

$\varphi(x)$ непрерывная функция $\Rightarrow \exists \int_a^b\varphi(x)dx$

Из 2. имеем

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$

$$|\int_a^bf(x,y)dx-\int_a^b\varphi(x)dx|=|\int_a^b(f(x,y)-\varphi(x))dx|\leq \int_a^b|f(x,y)-\varphi(x)|dx<\varepsilon(b-a)$$

$$\Rightarrow \lim_{y\rightarrow y_0}\int_a^bf(x,y)dx=\int_a^b\varphi(x)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad |y - y_0| < \delta \quad |\int_a^bf(x,y)dx-\int_a^b\varphi(x)dx| < \varepsilon$$

Непрерывность функции $I(y)$

Теорема:

Пусть $f(x,y)$ непрерывна по совокупности в прямоугольнике $[a,b;c,d]$

Тогда $I(y)=\int_a^bf(x,y)dx$ непрерывна на отрезке $[c,d]$

[Доказательство]

Так как $f(x,y)$ непрерывна по совокупности в прямоугольнике $[a,b;c,d]$, то она будет равномерно непрерывна по теореме Кантора

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall (x',y'),(x'',y'')\in[a,b;c,d]$$

$$|x''-x'|<\delta \quad |y''-y'|<\delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\int_a^bf(x'',y'')dx-\int_a^bf(x',y')dx|<\varepsilon$$

Возьмем

$x''=x'=x\,(\forall x\in[a,b])\,,$

$y'=y_0\,(\forall y_0\in[c,d])\,,\,y''=y$ и подставим

Получили

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad |y - y_0| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx \right| < \varepsilon$$

Это означает, что $f(x, y) \Rightarrow f(x, y_0)$

Сделаем предельный переход согласно теореме

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = I(y_0) \Rightarrow$$

\Rightarrow в силу того, что y_0 произвольная точка из $[c, d]$, то $I(y)$ непрерывна на $[c, d]$

■
