Оглавление (матан 3.1)

Математический анализ 3 семестр (2021) Модуль 1

По лекциям С. Л. Берберяна (РАУ).

Литература: Фихтенгольц 2 том - pdf - vk.com/wall-51126445_39784. Для углубленного изучения - Фихтенгольц 3 том.

Функциональные последовательности и ряды

Равномерная и поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Последовательность, членами которой являются функции, определенные на одной и той же области X (X - область определения функций), называется функциональной последовательностью:

$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \quad (1)$$

Если зафиксируем $x \in X$, то получим числовую последовательность.

Допустим, что при $\forall x \in X$ последовательность (1) имеет конечный предел. При других x предел будет другой. Заметим, что предел зависит от x и обозначим этот предел через $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$f(x)$ - предельная функция, которая зависит от x. Это называется **поточечная ("по точкам") сходимость**.

При фиксированном x:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon),\; n > N$$
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Заметим, что при изменении x меняется N. Можно ли выбрать N таким образом, чтобы оно зависело только от ε, но не зависело от выбора x?

Определение равномерной сходимости. Если

1. для функциональной последовательности (1) существует предельная функция $\exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$
2. $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon),\; n > N$ имеет место неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; (2)$ для $\forall x \in X$

То мы скажем, что последовательность **равномерно сходится** к $f(x)$ на множестве X ($f_n(x) \rightrightarrows f(x)$).

Примеры:

- равномерная сходимость:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad 0 \le x \le 1$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{n^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2} = 0$$
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n} < \varepsilon$$
$$[2nx \le 1+n^2x^2,\; (1-nx)^2 \ge 0]$$
$$n > \frac{1}{2\varepsilon} \;\; N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$$

  Данная последовательность равномерно сходится к предельной функции $f(x)$.

- поточечная сходимость:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad 0 \le x \le 1$$
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 0$$
$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} < \varepsilon$$
$$n > \frac{1}{\varepsilon x}$$
$$\text{Возьмём } n \text{ сколь угодно большим и } x = \frac{1}{n}$$
$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \not< \varepsilon$$

  В данном случае не имеет места равномерная сходимость.

Рассмотрим ряд, члены которого функции, определенные на множестве X:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \;\; (3)$$
$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

Если x фиксировано, то получается числовой ряд, а $f_n(x)$ - частичная сумма.

Пусть ряд (3) сходится при $\forall x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) - \text{поточечная сходимость}$$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon),\; n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\ \varphi_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \text{остаточный ряд} \\ |\varphi_n(x)| < \varepsilon \end{cases}$$

Ряд (3) равномерно сходится на множестве X, если

1. последовательность частичных сумм имеет предельную функцию $f(x)$ на X: $\exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$
2. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon),\; n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow |\varphi_n(x)| < \varepsilon$ для $\forall x \in X$

Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости последовательностей и рядов

Теорема (Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости последовательностей). Для того, чтобы функциональная последовательность (1) имела предельную функцию, и сходилась к этой функции равномерно относительно $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon),\; n > N \text{ и } m = 1, 2, \dots$$
$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \;\; (4)$$
$$\text{для } \forall x \in X$$

Доказательство. □ *Необходимость.* Допустим $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ для $\forall x \in X$.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon),\; n > N$$
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; (5)$$
$$n + m > n > N$$
$$|f_{n+m}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \;\; (6)$$
$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| = |f_{n+m} - f(x) + f(x) - f_n(x)| \le$$
$$\le |f_{n+m}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Достаточность.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon),\; n > N \text{ и } m = 1, 2, \dots$$
$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Зафиксируем $\forall x \in X$. Так как при фиксированном x выполняется условие Больцано-Коши, то последовательность сходится. При изменении x существует предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (поточечная сходимость).

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon),\; n > N$$
$$\text{берём } n > N \text{ и } \forall x \in X$$
$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$
$$\text{Сделаем предельный переход } m \to \infty \quad \left[\lim_{m\to\infty} f_{m+n}(x) = f(x)\right]$$
$$|f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon \text{ при } n > N \text{ и } \forall x \in X$$
$$\Rightarrow \text{по } 2\text{-ому условию равн. сходимости } f_n(x) \rightrightarrows f(x)$$

■

То же самое сформулируем для функциональных рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad u_k(x) \text{ определен на } X$$
$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$
$$f_{n+m}(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_{n+m}(x)$$

Для того, чтобы функциональный ряд равномерно сходился необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon), \; n > N \text{ и } m = 1, 2, \dots$$
$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

Признак Вейерштрасса

Теорема (Признак Вейерштрасса). Пусть у нас есть функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, каждый из членов ряда определен на X. Известно, что $|u_k(x)| \leq c_k \;\; \forall x \in X$ и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится.

Доказательство. □ Рассмотрим сумму ($m \in \mathbb{N}$):

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots + |u_{n+m}(x)| \leq$$
$$\leq c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}$$

Из необходимого и достаточного условия сходимости числового ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon), \; n > N \text{ и } m = 1, 2, \dots$$
$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}| < \varepsilon$$
$$c_n \geq 0 \Rightarrow c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m} < \varepsilon$$

Получили, что начиная с некоторого номера $n > N$ и $m = 1, 2, \dots$ получим необходимое и достаточное условие для сходимости рядов.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| < c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m} < \varepsilon$$

■

Непрерывность суммы ряда

Пусть имеем функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, $u_k(x)$ определены и непрерывны на множестве X. Можно ли сказать, что сумма ряда будет непрерывной? Не всегда. Рассмотрим пример

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x), \;\; 0 \le x \le 1$$

Рассмотрим при $x = 1$, сумма ряда будет равна 0 ($f(x) = 0$).

Рассмотрим при $0 \le x < 1$

$$1 - x + x(1-x) + x^2(1-x) + \dots + x^{n-1}(1-x) + \dots = 1 \;\; (\text{бесконечно убывающая геом. прогрессия})$$
$$f(x) = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1-x}{1-x} = 1$$
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

В точке $x = 1$ имеется разрыв 1-ого рода, $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) \ne f(1)$. Легко заметить, что каждый член данного ряда является непрерывной функцией, но этот ряд сходится неравномерно на отрезке $[0;1]$.

Теорема (достаточное условие для непрерывности суммы ряда). Пусть имеем функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, члены ряда определены на $[a;b]$ и непрерывны на $[a;b]$, этот ряд равномерно сходится на $[a;b]$ Тогда сумма ряда также будет непрерывной функцией на $[a;b]$.

Доказательство. □ Возьмём $\forall x_0 \in [a;b]$ и докажем, что $f(x)$ непрерывна в этой точке.

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$
$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x) \;\; (2)$$
$$f(x_0) = f_n(x_0) + \varphi_n(x_0) \;\; (3)$$
$$(2) - (3) = f(x) - f(x_0) = f_n(x) - f_n(x_0) + \varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)$$
$$|f(x) - f(x_0)| \le |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x_0)| \;\; (5)$$

Ряд равномерно сходится на $[a;b] \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon), \; n > N$$
$$|\varphi_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{3} \;\; \text{для } \forall x \in [a;b] \;\; (6)$$
$$|\varphi_n(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} \;\; (7)$$

$f_n(x)$ - сумма конечного числа непрерывных функций $\Rightarrow f_n(x)$ - непрерывная функция, в частности в точке x_0, то по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\; |x - x_0| < \delta$$
$$\Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \;\; (8)$$

Получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\; |x - x_0| < \delta$$
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \;\; (\text{используя } (6), (7), (8))$$

$\Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

Приведём пример ряда, состоящего из непрерывных функций, этот ряд неравномерно сходится, но тем не менее сумма является непрерывной функцией.

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1-(n-1)^2x^2}\right],\ \ 0\le x\le 1$$

$$u_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}$$

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)=$$

$$=\frac{x}{1+x^2}-0+\frac{2x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}+\dots+\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1-(n-1)^2x^2}=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0$$

Ряд неравномерно сходится, $u_n(x)$ непрерывны, $f(x)$ непрерывна на $[0;1]$. □

Почленный переход к пределу в функциональных рядах

Точка a является для множества X точкой сгущения (предельной точкой), если $(a-\delta;a+\delta)$ имеется точка из X, отличное от a.

Теорема (о почленном переходе к пределу). Пусть имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, каждый член которого определен на множестве X. Известно, что a точка сгущения для множества X и $\lim\limits_{x\to a}u_n(x)=c_n$ для $\forall n=1,2,\dots$. Этот функциональный ряд равномерно сходится на X. Тогда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=C$ сходится
2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=C$

Почленный переход под знаком суммы:

$$\lim_{x\to a}f(x)=C$$

$$\lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to a}u_k(x)$$

Доказательство. □ Докажем 1-ое. По необходимому и достаточному условию

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon),\ n>N,\ m=1,2,\dots$$

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\dots+u_{n+m}(x)|<\varepsilon\quad(1)$$

перейдём к пределу

$$|c_{n+1}+c_{n+2}+\dots+c_{n+m}|\le\varepsilon\ \ (2)$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}c_n=C$$

Докажем 2-ое.

$$f(x)=f_n(x)+\varphi_n(x)\quad(3)$$

$$C=C_n+\gamma_n\quad(4)$$

$$f(x)-C=f_n(x)-C_n+\varphi_n(x)-\gamma_n$$

$$|f(x)-C|\le|f_n(x)-C_n|+|\varphi_n(x)|+|\gamma_n|\quad(5)$$

Так как функциональный ряд равномерно сходится, то

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_1(\varepsilon),\ n>N_1$$
$$|\varphi_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{ для } \forall x\in X\quad (6)$$

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_2(\varepsilon),\ n>N_2$$
$$|\gamma_n|<\frac{\varepsilon}{3}\ \ (7)$$
$$N=\max(N_1,N_2),\ n>N$$
$$\lim_{x\to a} f_n(x)=\lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{n} u_k(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k=C_n$$
$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \ |x-a|<\delta$$
$$|f_n(x)-C_n|<\frac{\varepsilon}{3}\quad (8)$$
$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0,\ |x-a|<\delta\Rightarrow$$
$$(5)=|f(x)-C|\overset{(6),(7),(8)}{<}\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$
$$\Rightarrow \text{ по Коши } \lim_{x\to a} f(x)=C$$

■

Почленное интегрирование рядов

Имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Функции $u_n(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и ряд сходится. Когда можно интеграл от суммы заменить почленным интегрированием?

Теорема (достаточное условие). Пусть имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\ \ (1)$, члены ряда непрерывны на $[a;b]$. Известно, что ряд (1) равномерно сходится на $[a;b]$. Тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx=\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+\dots\quad (2)$$

Заметим, что все интегралы в этой формуле существуют.

Доказательство.

$$f(x)=f_n(x)+\varphi_n(x),\quad (3)$$
$$\text{где } f_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x),$$
$$\varphi_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)-\ \text{ равн. сх.}$$

Так как ряд равномерно сходится, остаточный ряд тоже равномерно сходится и члены ряда непрерывные функции, то $\varphi_n(x)$ - непрерывна. $f_n(x)$ непрерывна как сумма непрерывных функций. Поэтому имеем право проинтегрировать обе части равенства (3).

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_n(x)dx + \int_a^b \varphi_n(x)$$
$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \varphi_n(x) \ \ (4)$$

Нам нужно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)dx = 0 \ \ (5)$.

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon), \ n > N$$
$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a;b]$$
$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)dx\right| \le \int_a^b |\varphi_n(x)|dx < \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a), \text{ что равносильно } (5)$$

Тогда из формулы (4) будет следовать, что предел левой части также стремится к 0 и это будет означать, что:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b (u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x))dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \dots + \int_a^b u_n(x)dx\right] =$$
$$= \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \dots + \int_a^b u_n(x)dx + \dots$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx$$

■

Запишем (2) в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left\{\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right\}dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)dx =$$
$$(\text{как сумма конечного числа слагаемых})$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_a^b\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right\}dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx \ \ (6)$$

Условие равномерной сходимости рядов достаточно, но не необходимо.

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)$$
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$
$$f_n() \not\rightrightarrows 0 \ \ x \in [0;1]$$

Проверим соотношение (6) для этого ряда.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{d(n^2x^2+1)}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln\left(1+n^2x^2\right)\Big|_0^1 =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln\left(1+n^2\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+n^2\right)}{2n} = 0 = \int_0^1 0dx = 0$$

(6) выполняется, но ряд неравномерно сходится. Поэтому равномерная сходимость для почленного интегрирования является достаточным, но не необходимым.

Почленное дифференцирование функциональных рядов

Теорема (достаточное условие). Пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, члены которого определены и непрерывны на $[a;b]$. Известно, что $u_k(x)\ \forall k=1,2,\ldots$ имеют непрерывные производные. Известно, что $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на $[a;b]$ поточечно, а $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ равномерно сходится на $[a;b]$. Тогда справедлива формула:

$$f'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \quad (1)$$

Доказательство. □

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

$$f^*(x) \overset{\text{об.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

$f^*(x)$ как сумма сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна на $[a;b]$. Тогда проинтегригруем от a до $\forall x \in [a;b]$, переменную возьмём t.

$$\int_a^x f^*(t)dt = \int_a^x \left\{\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\right\}dt \overset{\substack{\text{удовлетворяет условиям теоремы} \\ \text{о почленном интегрировании}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k'(t)dt \quad (2)$$

$$\int_a^x u_k'(t)dt = u_k(x) - u_k(a)$$

$$\int_a^x f^*(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k(x) - u_k(a)) \overset{u_k(x)\text{ поточечно сх.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) \quad (3)$$

Найдём производную левой и правой части равенства (3) $\forall x \in [a;b]$. $f^*(t)$ непрерывна на $[a;b]$, тогда производная, учитывая свойство интегралов с переменным верхним пределом:

$$\left(\int_a^x f^*(t)dt\right)_x' = f^*(x)$$

$$(3) \overset{\text{продифф.}}{\Rightarrow} f^*(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)'$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

■

Интегралы, зависящие от параметра

Интегралы, зависящие от параметра

Пусть имеем функцию от двух переменных $f(x, y)$, где $x \in [a; b]$, $y \in Y$. Пусть при $\forall$ фиксированном y $\exists \int_a^b f(x, y)dx$. Меняя y мы получим другое значение. Будем считать, что этот интеграл существует $\forall y \in Y$. Этот интеграл называется функцией от параметра y:

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

Равномерное стремление к предельной функции

Пусть функция $f(x, y)$ определена на некотором двумерном множестве $M = X \times Y$, и множество Y имеет конечную точку сгущения y_0.

Определение (для конечного y_0). Если для функции $f(x, y)$

1. $\exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x), \ \forall x \in X$
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от x, что как только $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$

то $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x) \ \forall x \in X$ (равномерно сходится относительно x) при $y \to y_0$.

Пусть функция $f(x, y)$ определена на некотором двумерном множестве $M = X \times Y$, и множество Y имеет бесконечную точку сгущения $y_0 = +\infty(-\infty)$.

Определение (для бесконечного y_0). Если для функции $f(x, y)$

1. $\exists \lim\limits_{y \to +\infty(-\infty)} f(x, y) = \varphi(x), \ \forall x \in X$
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от x, что как только $y > \Delta (y < -\Delta) \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$

то $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x) \ \forall x \in X$ (равномерно сходится относительно x) при $y \to y_0$.

Необходимое и достаточное условие

Теорема (необходимое и достаточное условие) (для конечного y_0). Пусть функция $f(x, y)$ определена на некотором двумерном множестве $M = X \times Y$, и множество Y имеет точку сгущения y_0. Для того, чтобы $f(x, y)$ при $y \to y_0$ имело бы предельную функцию $\varphi(x)$ и стремилась бы к ней равномерно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x, |y - y_0| < \delta \text{ и } |y' - y_0| < \delta$$
$$|f(x, y') - f(x, y)| < \varepsilon \ \ \forall x \in X \qquad (1)$$

Доказательство (для конечного y_0). □

Необходимость. Допустим, 1) и 2) выполняется, т.е. $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$, $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ относительно x при $y \to y_0$. Воспользуемся определением равномерной сходимости:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x$$
$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для } \forall x \in X \quad (2)$$
$$\text{Аналогично для } y'$$
$$|y' - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ для } \forall x \in X \quad (3)$$
$$(2),(3) \Rightarrow |f(x,y') - f(x,y)| = |f(x,y') - \varphi(x) + \varphi(x) - f(x,y)| \le$$
$$\le |f(x,y') - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Достаточность. Пусть выполняется условие 1). Зафиксируем $\forall x \in X$. Зафиксируем y так, чтобы $|y - y_0| < \delta$. Перейдём к пределу при $y' \to y_0$ в (1):

$$|\varphi(x) - f(x,y)| \le \varepsilon \ \ \forall x \in X \quad (4)$$
$$\Rightarrow f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x) \text{ относительно } x \text{ при } |y - y_0| < \delta$$

■

Теорема (для бесконечного y_0). Для того, чтобы $f(x,y)$ при $y \to y_0$ $(+\infty / -\infty)$ имело бы предельную функцию $\varphi(x)$ и стремилась бы к ней равномерно в области X, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x,\ y' > \Delta \text{ и } y > \Delta (y' < -\Delta \text{ и } y < -\Delta)$$
$$|f(x,y') - f(x,y)| < \varepsilon \ \ \forall x \in X \quad (1)$$

Непрерывность предельной функции

Теорема. В качестве X возьмём $[a;b]$. Пусть $f(x,y)$ при $\forall$ фиксированном $y \in Y$ непрерывна на X и известно, что при $y \to y_0$ $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$. Тогда $\varphi(x)$ также будет непрерывной функцией на X.

Доказательство. □ Рассмотрим последовательность $\{y_n\} \to y_0,\ y_n \in Y$. Т.к. по условию $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(y)$ при $y \to y_0$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x,\ |y - y_0| < \delta$$
$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a;b]$$

Выберем n - большое, чтобы $|y_n - y_0| < \delta$, тогда:

$$|f(x,y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in X$$

$$\begin{matrix} \psi_n(x) = f(x,y_n) \rightrightarrows \varphi(x) \text{ при } n \to \infty \\ f_n(x) \rightrightarrows f(x) \end{matrix} \Rightarrow \psi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$$

Если имеем последовательность непрерывных функций $\{\psi_n(x)\} \in [a;b]$, которая равномерно сходится к $\varphi(x)$, то предельная функция $\varphi(x)$ будет также непрерывна на $[a;b]$.

■

Предельный переход под знаком интеграла

Рассмотрим интеграл:

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

Если $f(x,y)$ при $\forall$ фиксированном $y \in Y$ непрерывна по $x \in [a;b]$ и $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$ (y_0 - точка сгущения), тогда справедлива формула:

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx$$

Доказательство. □ $\varphi(x)$ - непрерывная функция $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx$ существует.

$$f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x) \text{ при } y \to y_0$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$$
$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in X$$
$$\left| \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f(x,y) - \varphi(x))dx \right| \leq \int_a^b |f(x,y) - \varphi(x)|dx < \varepsilon(b-a)$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x, \ |y - y_0| < \delta$$
$$\left| \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \right| < \varepsilon(b-a)$$
$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

Получили

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \ |y - y_0| < \delta$$
$$\left| \int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \right| < \varepsilon$$

■

Непрерывность функции $I(y)$

Теорема. Пусть $f(x,y)$ непрерывна по совокупности (и по x, и по y) в прямоугольнике $[a,b;c,d]$. Тогда $I(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. □

Так как функция $f(x,y)$ непрерывна по совокупности в замкнутом прямоугольнике $[a,b;c,d]$, то она будет равномерно непрерывна согласно теореме Кантора и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \ \forall \text{ точки } (x', y'), (x'', y'') \in [a,b;c,d]$$
$$\begin{matrix} |x'' - x'| < \delta \\ |y'' - y'| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x'', y'') - f(x', y')| < \varepsilon$$

Возьмём $x'' = x' = x$ ($\forall x \in [a,b]$), $y' = y_0$ ($\forall y_0 \in [c,d]$), $y'' = y$, подставим:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \ |y - y_0| < \delta$$
$$|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon \ \ \forall x \in [a,b]$$

Это означает, что $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$ при $y \to y_0$. Применим теорему о предельном переходе:

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y_0)dx = I(y_0)$$

В силу того, что y_0 - произвольная точка из $[c,d]$, то наша функция $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

■

Дифференцирование под знаком интеграла

$$I'(y) = \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)'_y = \int_a^b f'_y(x,y)dx \quad (1)$$

Теорема (достаточное условие). Пусть $f(x,y)$ определена на прямоугольнике $[a,b;c,d]$, она непрерывна по x при $\forall$ фиксированном $y\in[c,d]$. Также существует конечная частная производная $f'_y(x,y)$ и она непрерывна по совокупности. Тогда справедлива формула (1).

Доказательство. □ Возьмём $\forall y_0\in[c,d]$. Докажем, что $\exists I'(y_0)$ и справедливо (1). Придадим y_0 приращение Δy так, чтобы $y_0+\Delta y\in[c,d]$.

$$I(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)dx$$

$$I(y_0+\Delta y) = \int_a^b f(x,y_0+\Delta y)dx$$

$$\frac{I(y_0+\Delta y)-I(y_0)}{\Delta y} = \frac{\int_a^b f(x,y_0+\Delta y)dx - \int_a^b f(x,y_0)dx}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}dx \quad (2)$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{I(y_0+\Delta y)-I(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\int_a^b \frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}dx =$$
$$= \int_a^b \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}dx = \int_a^b f'_y(x,y_0)dx \quad (3)$$

Докажем, что правый предел существует (тогда и левый будет существовать, который из себя представляет $I'(y_0)$). Рассмотрим подинтегральное выражение на отрезке $[y_0, y_0+\Delta y]$ и применим теорему Лагранжа:

$$\frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y} = f'_y(x,y_0+\theta\Delta y) \quad 0<\theta<1$$
$$\frac{\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)}{\Delta y} = \varphi'(y_0+\theta\Delta y) \quad 0<\theta<1$$

По условию $f'_y(x,y)$ непрерывна, значит, по теореме Кантора на $[c,d]$ она будет равномерно непрерывна $\Rightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon),\ \forall(x',y'),\ (x'',y'')\in[a,b;c,d]$$
$$|x''-x'|<\delta,\ |y''-y'|<\delta \Rightarrow |f'_y(x'',y'')-f_y(x',y')|<\varepsilon$$

Возьмём $x''=x'=x$, $y'=y_0$, $y''=y_0+\theta\Delta y$, подставим:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0,\ |\Delta y|<\delta$$
$$|f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)-f'_y(x,y_0)|<\varepsilon \quad \forall x\in[a,b] \quad (3)$$

Рассмотрим на $y\in[y_0,y_0+\Delta y]$

$$\frac{f(x, y_0+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = f'_y(x, y_0+\theta\Delta y)$$

$$(3) \Rightarrow \left|\frac{f(x, y_0+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} - f'_y(x,y_0)\right| < \varepsilon \text{ при } |\Delta y| < \delta \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow \frac{f(x, y_0+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \rightrightarrows f'_y(x,y_0)$$

$\Rightarrow$ можем сделать предельный переход

$$\lim_{\Delta y\to 0}\int_a^b \frac{f(x, y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}dx = \int_a^b \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}dx = \int_a^b \underbrace{f'_y(x,y_0)}_{\substack{\exists \text{т.к. непрерывна} \\ \text{по совокупности}}}\, dx$$

Так как y_0 - произвольное, то

$$I'(y) = \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)'_y = \int_a^b f'_y(x,y)dx$$

■

Интегрирование под знаком интеграла

Теорема. Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b;c,d]$

$$\int_c^\eta dy\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx\int_c^\eta f(x,y)dy \quad (1)$$
$$c < \eta < d$$

Доказательство. □ Докажем, что производные левых и правых частей равны. Найдем производную левой части:

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)dx \text{ непрерывна на } [c,d]$$
$$\left(\int_c^\eta I(y)dy\right)'_\eta = I(\eta)$$

Найдём производную правой части

$$\varphi(x,\eta) = \int_c^\eta f(x,y)dx \text{ непрерывна по } x$$
$$\varphi'_\eta(x,\eta) = f(x,\eta) \text{ непрерывна по совокупности}$$
$$\varphi(x,\eta) \text{ удовлетворяет условию теоремы дифференцированию по параметру}$$
$$\left(\int_a^b \varphi(x,\eta)dy\right)'_\eta = \int_a^b \varphi'(x,\eta)dx = \int_a^b f(x,\eta)dx = I(\eta)$$

Если производные равны, то значения отличаются на константу.

$$\int_c^\eta dy\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx\int_c^\eta f(x,y)dx + const$$

Возьмём $\eta = c$

$$0 = 0 + const \Rightarrow const = 0$$

$\Rightarrow (1)$ доказана.

В более общем случае $\eta = d$

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dx$$

■

Случай, когда и пределы интеграла зависят от параметра

Рассмотрим более общий случай интеграла от параметра,

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \quad (1)$$

где $x = \alpha(y), y = \beta(y)$ - непрерывные кривые.

Непрерывность функции $I(y)$

Теорема. Пусть $f(x,y)$ непрерывна и определена в прямоугольнике $[a,b;c,d]$, а кривые $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывные кривые, не выходящие за границы прямоугольника, $c \le y \le d$. Тогда $(1) = I(y)$ из себя представляет непрерывную функцию на $[c,d]$.

Доказательство. □ Возьмём $\forall y_0 \in [c,d]$ и покажем, что $I(y)$ непрерывна в точке y_0.

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx \quad (2)$$

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0) \ - \ ?$$

$$\lim_{y\to y_0} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx = I(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)dx, \text{ по т. о непрерывности интеграла от параметра}$$

$$\left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \right| \le \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} |f(x,y)|dx \overset{\substack{\text{ограничена по 1-ой} \\ \text{т.Вейерштрасса}}}{\le} M|\beta(y) - \beta(y_0)| \quad (3)$$

В силу непрерывности $\beta(y)$ при $y \to y_0 \Rightarrow \beta(y) \to \beta(y_0)$, значит в соотношении (3) правая часть стремится к 0, а значит и левая часть стремится к 0 при $y \to y_0$. Следовательно, второе и третье (аналогично) слагаемое в (2) стремятся к 0.

$$\lim_{y\to y_0} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx = 0$$

$$\lim_{y\to y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx = 0$$

$$(2) \Rightarrow \lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$$

$\Rightarrow$ непрерывна в $\forall y_0 \in [c,d] \Rightarrow$ непрерывна на $[c,d]$.

■

Производная функции $I(y)$

Теорема. Пусть $f(x,y)$ непрерывна и определена в прямоугольнике $[a,b;c,d]$, а кривые $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывные кривые, не выходящие за границы прямоугольника, $c \le y \le d$. Сверх этого, $f(x,y)$ имеет непрерывную производную $f'_y(x,y)$ в прямоугольнике $[a,b;c,d]$, также $\exists \alpha'(y)$ и $\beta'(y)$. Тогда $I(y)$ имеет производную по параметру y и справедлива формула:

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + \beta'(y)\cdot f(\beta(y),y) - \alpha'(y)\cdot f(\alpha(y),y) \qquad (5)$$

Доказательство. □ Рассмотрим соотношение (2). Высчитаем производную правой части для каждого слагаемого:

$$\left(\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx\right)'_{y=y_0} = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0)dx \text{ (по теореме о дифф. под знаком интеграла)}$$

$$\varphi(y) = \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$$

$$\varphi(y_0) = \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)dx = 0$$

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{y-y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \overset{\substack{\text{Согласно т. о} \\ \text{среднем значении}}}{=} \frac{1}{y-y_0}\cdot f(\bar{x},y)\cdot(\beta(y)-\beta(y_0)) \quad (6)$$

$$\beta(y_0) < \bar{x} < \beta(y)$$

При $y \to y_0$ предел $\dfrac{\beta(y)-\beta(y_0)}{y-y_0} \to \beta'(y_0)$, $f(\bar{x},y_0) \to f(\beta(y_0),y_0)$, так как $\bar{x} \to \beta(y_0)$ и $f(x,y)$ непрерывна по совокупности.

Правая часть соотношения (6) при $y \to y_0$ стремится к $\beta'(y_0)\cdot f(\beta(y_0),y_0)$, а левая часть это $\varphi'(y_0) = \left(\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\right)'_{y=y_0}$.

Аналогично получим производную третьего слагаемого.

$$\left(\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx\right)'_{y=y_0} = \alpha'(y)\cdot f(\alpha(y),y)$$

В силу произвольности y_0 получили формулу (5).

■

Несобственные интегралы

Равномерная сходимость несобственных интегралов

Пусть функция $f(x,y)$ определена при $x \ge 0$ и $y \in Y$. Известно, что при $\forall$ фиксированном $y \in Y$ существует интеграл I типа:

$$\exists I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x,y)dx=\lim_{A\to+\infty}F(A,y)$$

Определение. Если $F(A,y)\rightrightarrows I(y)$ относительно $y\in Y$ при $A\to+\infty$, то мы скажем, что $I(y)$ равномерно сходится относительно y при соответствующих значения параметра A.

$$\varepsilon>0\ \exists A_0=A_0(\varepsilon), \text{не зависящее от } y,\ A>A_0$$
$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx-\int_a^A f(x,y)dx\right|=\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon\quad\forall y\in Y\quad(1)$$

или

$$|I(y)-F(A,y)|<\varepsilon\quad(2)$$

Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости несобственных интегралов

Теорема. Для того, чтобы интеграл $I(y)$ равномерно сходился относительно $y\in Y$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists A_0(\varepsilon)\geq a,\ \text{не завис. от } y,\ A'>A>A_0$$
$$\left|\int_a^{A'} f(x,y)dx-\int_a^A f(x,y)dx\right|<\varepsilon\ \ \forall y\in Y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right|<\varepsilon\ \ \forall y\in Y$$

Доказательство. □ Воспользуемся критерием равномерной сходимости функции ($f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$ относительно y при $y\to+\infty$)

$$F(A,y)\rightrightarrows I(y)\text{ относительно } y \text{ при } A\to+\infty$$
$$\forall\varepsilon>0\ \exists A_0(\varepsilon)\geq a,\ \text{не завис. от } y,\ A'>A>A_0$$
$$|F(A',y)-F(A,y)|<\varepsilon\ \ (4)\ \ \forall y\in Y$$
$$\left|\int_a^{A'} f(x,y)dx-\int_a^A f(x,y)dx\right|<\varepsilon\ \ (5)\ \ \forall y\in Y$$
$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right|<\varepsilon\ \ \forall y\in Y$$
$$(5)\Leftrightarrow(3)$$

■

Признак равномерной сходимости несобственных интегралов (признак Вейерштрасса)

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна от x и при $x\geq a$ $\exists\varphi(x)$, интегрируемая на $[a;+\infty]\Leftrightarrow\exists\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ (конечный интеграл) $\forall y\in Y$ $|f(x,y)|\leq\varphi(x)$ для $x\geq a$, тогда $I(y)$ равномерно сходится относительно y.

Доказательство. □ Рассмотрим $A<A'$

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| \le \int_A^{A'} |f(x,y)|dx \le \int_A^{A'} \varphi(x)dx < \varepsilon$$

$$\begin{bmatrix} \text{критерий интегрируемости функции от одной переменной} \\ \forall\varepsilon > 0\ \exists A_0(\varepsilon) \ge a,\ A' > A > A_0 \\ \left|\int_A^{A'} \varphi(x)dx\right| < \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists A_0(\varepsilon) \ge a,\ \text{не завис. от } y,\ A' > A > A_0$$

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon \quad \forall y \in Y - \text{ необх. и дост. условие}$$

$\Rightarrow I(y)$ равномерно сходится относительно $y \in Y$. Функция $\varphi(x)$ называется мажорирующей для $f(x,y)$.

■

Предельный переход под знаком несобственного интеграла

Приведём пример, что даже при равномерной сходимости не имеет места предельный переход под знаком интеграла.

Пример.

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}}, & x > 0 \\ f_n(0) = 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx \ne \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx$$

Докажем, что $f_n(x)$ равномерно сходится на $[0; +\infty]$. Найдём $f'_n(x)$

$$f'_n(x) = -\frac{3x^2n}{x^6} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} + \frac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} \cdot \frac{4nx}{4x^4} = e^{-\frac{n}{2x^2}} \cdot \frac{n}{x^4}\left(\frac{n}{x^2} - 3\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{x^2} = 3 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{n}{3}}$$

Оценим $f_n(x)$. При $x < \sqrt{\frac{n}{3}} \Rightarrow f'_n(x) > 0$ и $x > \sqrt{\frac{n}{3}} \Rightarrow f'_n(x) < 0 \Rightarrow$ в этой точке $\exists \sup \Leftrightarrow f_n(x)$ получает наибольшее значение при $x = \sqrt{\frac{n}{3}}$.

$$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right) = \frac{n}{(n/3)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{n}{2\cdot n/3}} = \frac{3^{3/2}}{n^{1/2}} \cdot e^{-3/2}$$

При $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right) = 0 \Rightarrow \sup \to 0 \Rightarrow f_n(x) \to 0 \text{ независимо от } x$$

Получили, что $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) = 0$ при $x \ge 0$

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \overset{?}{=} 0$$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} \frac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} dx$$

$$\int_0^{A} \frac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^{A} \frac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^{A} e^{-\frac{n}{2x^2}} d\left(-\frac{n}{2x^2}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} e^{-\frac{n}{2x^2}}\Big|_\varepsilon^A = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(e^{-\frac{n}{2A^2}} - e^{-\frac{n}{2\varepsilon^2}}\right) = e^{-\frac{n}{2A^2}} - 0 = e^{-\frac{n}{2A^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{A} \frac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = e^{-\frac{n}{2A^2}}$$

При $A \to \infty$ получим $e^0 = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = 1$$

Т.е. предельный переход не имеет место.

Предельный переход под знаком несобственного интеграла (теорема)

Теорема. Пусть $f(x,y)$ определена при $x \to a$ и $y \in Y$. Пусть $f(x,y)$ непрерывна по x. Известно, что на $\forall$ конечном отрезке $[a;A]$ $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$. Известно, что $I(y)$ равномерно сходится относительно $y \in Y$. Тогда справедливо соотношение:

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

Доказательство. $\square$ Воспользуемся необходимым и достаточным условием, что $I(y)$ равномерно сходится

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_0(\varepsilon), A' > A > A_0$$

$$\left| \int_A^{A'} f(x,y)dx \right| < \varepsilon \quad (5)$$

Перейдём к пределу, когда $y \to y_0$, получим:

$$\left| \int_A^{A'} \varphi(x)dx \right| \leq \varepsilon \ \ (6)$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ интегрируема на отрезке $[a;+\infty]$, т.е. $\exists \displaystyle\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$

Оценим разность. Возьмём $\forall A > a$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \right| =$$

$$= \left| \int_a^{A} f(x,y)dx - \int_a^{A} \varphi(x)dx + \int_A^{+\infty} f(x,y)dx - \int_A^{+\infty} \varphi(x)dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_a^{A} f(x,y)dx - \int_a^{A} \varphi(x)dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} \varphi(x)dx \right|$$

Оценим последние 2 слагаемых. Т.к. интеграл равномернро сходится, то $\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Т.к интеграл существует по определению, то $\left|\int_A^{+\infty} \varphi(x)dx\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Оценим первое слагаемое. Отрезок $[a;A]$ конечный. На любом конечном отрезке $f(x,y)$ непрерывна $\Rightarrow$ имеем право перейти к пределу

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^A f(x,y)dx = \int_a^A \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^A \varphi(x)dx$$

$\Rightarrow$ при достаточно близких $y \to y_0$ первое слагаемое тоже $< \dfrac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx\right| < \varepsilon$$

Т.е. возможен предельный переход под знаком интеграла.

■

Непрерывность несобственных интегралов $I(y)$

Теорема. Пусть $f(x,y)$ определена и непрерывна как функция от 2 переменных при $x > a$ и $y \in [c;d]$. Если $I(y)$ равномерно сходится при $y \in [c;d]$, то $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ непрерывна на $[c;d]$.

Доказательство. □ Возьмём $\forall y_0 \in [c;d]$. Если $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$ относительно x.

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx$$
$$\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$$

Т.е. $I(y)$ непрерывна в любой точке $I(y_0)$ на $[c;d]$.

■

Интегрирование несобственного интеграла по параметру

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy \quad (1)$$

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна по совокупности при $x \geq a$ и $y \in [c;d]$. Известно, что $I(y)$ равномерно сходится относительно $y \in [c;d]$. Тогда справедливо соотношение (1).

Доказательство. □

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = [\text{Возьмем } \forall A > a] =$$
$$= \int_c^d dy \int_a^A f(x,y)dx + \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \quad (2)$$
$$\int_c^d dy \int_a^A f(x,y)dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)dy \quad (3)$$
$$(2) \Leftrightarrow \int_c^d I(y)dy = \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)dx + \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \quad (4)$$
$$\int_c^d I(y)dy - \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)dx = \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \quad (5)$$

Оценим внутренний интеграл правой части по модулю

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_0(\varepsilon) \geq a, \ A > A_0$$
$$\left| \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon \quad (6)$$
$$(5),(6) \Rightarrow \left| \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \right| \leq \int_c^d \left| \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \right| dy < \varepsilon(d-c) \ \ (7)$$
$$(5) \Rightarrow \left| \int_c^d I(y)dy - \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)dy \right| < \varepsilon$$
$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d I(y)dy \ \ (8)$$
$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy$$
$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d I(y)dy$$

■

Дифференцирование несобственного интеграла по параметру

$$I'(y) = \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \right)'_y = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \quad (1)$$

Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ определена при $x \geq a$ и $y \in [c;d]$. Известно, что

1. $f(x,y)$ непрерывна по x,
2. $\exists f'_y(x,y)$ и она непрерывна по совокупности,
3. при любом фиксированном $y \ \exists \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ равномерно сходится относительно $y \in [c;d]$.

Тогда справедливо (1).

Доказательство. □ Из предыдущей теоремы (интегрирование несобственного интеграла по параметру)

$$\int_c^y dy \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^y f'(x,y)dy \quad (2)$$

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \overset{\text{об.}}{=} \varphi(y)$$

$$\left(\int_c^y \varphi(y)dy\right)'_y = \varphi(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$$

$$\int_c^y f'_y(x,y)dy = f(x,y)\Big|_c^y = f(x,y) - f(x,c)$$

$$\int_a^{+\infty} (f(x,y) - f(x,c))dx = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} \underbrace{f(x,c)dx}_{\text{const}}$$

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dy = \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)'_y - \left(\int_a^{+\infty} \underbrace{f(x,c)dx}_{\substack{\text{const}\\ =0}}\right)'_y =$$

$$= \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)'_y = I'(y)$$

$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx = \varphi(y)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$, так как $f'_y(x,y)$ непрерывна по совокупности и $I(y)$ равномерно сходится относительно y.

$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ непрерывна, так как $f(x,y)$ непрерывна по совокупности и $I(y)$ равномерно сходится относительно y.

■

Неявные функции

Понятие неявной функции от одной переменной

Пусть дано уравнение $F(x,y) = 0 \quad (1)$, некоторая функция, определенная на множестве $X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$.

Пример: $\frac{yx}{12} - \log(x+10) + y^5 - 100x^y = 0$

Пусть каждому значению x из промежутка X соответствует одно или несколько y из Y. $F(x,y) = 0$, $y = f(x)$. При этом, если $y = f(x)$ подставить в уравнение (1), оно становится тождественным.

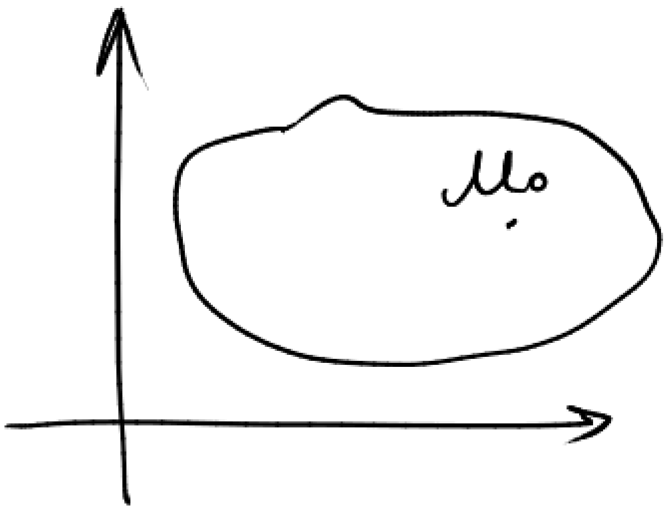
Определение. Функция $y = f(x)$ называется неявной функцией, если она задается с помощью неразрешимой относительно y функцией $F(x,y)$. И явной, если непосредственно задана зависимость y от x.

В прямоугольнике $[a,b;c,d]$ уравнение (1) определяет y как однозначную от x $(y = f(x))$, если для каждого x существует только один y так, что $F(x,y) = 0 \Rightarrow y = f(x)$ и $F(x,y)$ равносильны.

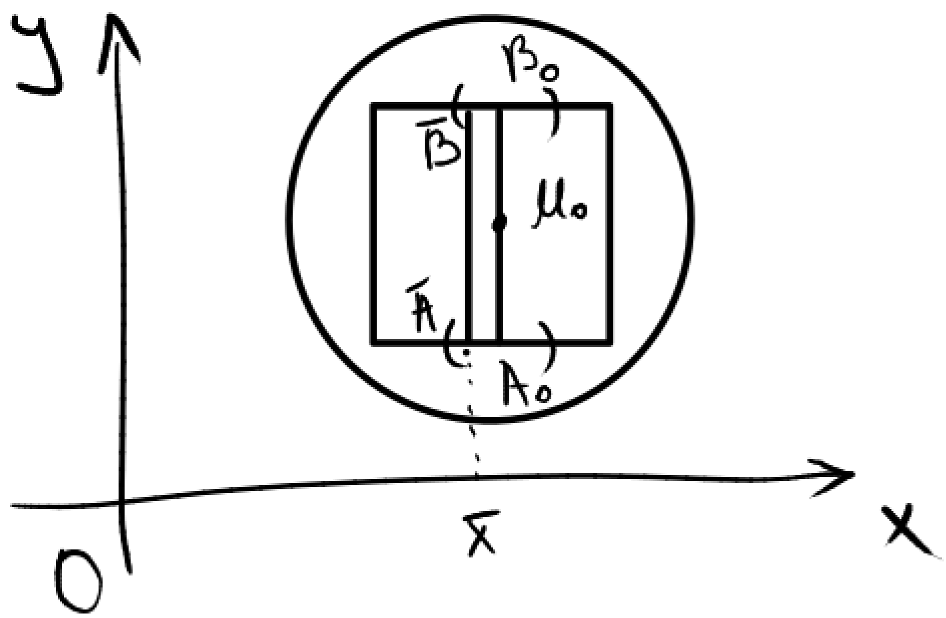
Теорема о существовании и свойствах неявной функции

Теорема (о существовании и свойствах неявной функции). Пусть $F(x, y)$ определена и непрерывна по совокупности в некоторой окрестности $M_0(x_0, y_0)$ вместе со своими частными производными. Известно, что $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда справедливо следующее:

1. $\exists$ некоторая окрестность точки M_0 - $(x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \delta', y_0 + \delta')$, в которой уравнение $(1) = 0$ и определяет y как однозначную функцию от x;
2. $y_0 = f(x_0)$
3. неявная функция $y = f(x)$ непрерывна в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
4. $y = f(x)$ имеет конечную производную в промежутке $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, которая непрерывна



Доказательство 1-ого пункта. □ Без нарушения общности $F'(x, y) \neq 0$. Поэтому существует некоторая $F'_y(x_0, y_0) > 0$, непрерывная по совокупности. Поэтому по свойсвту сохранения знака для непрерывных функций можем сказать, что существует некоторый замкнутый квадрат $D = [x_0 + \delta; x_0 - \delta; y_0 - \delta', y_0 + \delta']$, $D \subset$ окрестности точки M_0.



Рассмотрим вертикальный отрезок, проходящий через M_0 - $A_0(x_0; y_0 - \delta'), B_0(x_0, y_0 + \delta')$. x_0 - зафиксированно, получим $F(x_0, y)$ будет возрастающей по y, кроме того функция $F(x, y)$ непрерывна по совокупности $\Rightarrow$ $F(x_0, y)$ непрерывна и возрастает по y на $[A_0, B_0]$,

$$\begin{cases} \text{при } y < y_0, \ F(x_0, y) < F(x_0, y_0) = 0 \\ \text{при } y > y_0, \ F(x_0, y) > F(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} F(A_0) < 0 \\ F(B_0) > 0 \end{matrix}$$

По вертикали: $F'_y(x_0, y_0) > 0, y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta'), y < y_0 \Rightarrow F(x_0, y) < 0, y > y_0 \Rightarrow F(x_0, y) > 0$.

По горизонтали: $F(x, y_0 - \delta') < 0$ в окрестности A_0, $F(x, y_0 + \delta') > 0$ в окрестности B_0.

Возьмём $\forall \bar{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и покажем, что ей соответсвует только одно значение $\bar{y} \in (y_0 - \delta', y_0 + \delta')$ и что эта пара удовлетворяет $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Rightarrow$ получим неявную функция, которая будет однозначной.

Возьмём на нижней грани $\bar{x}$ и проведем вертикаль $\bar{A}(\bar{x}, y - 0 - \delta')$, $\bar{B}(\bar{x}, y_0 + \delta')$. $F(\bar{A}) < 0$, $F(\bar{B}) > 0$. На вершинах имеем функцию $F(\bar{x}, y)$, зависящую от y.

Согласно теореме Больцоно-Коши $\exists \bar{y}$ такое, что $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Так как $F'_y > 0 \Rightarrow F(\bar{x}, y) \uparrow \ \Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{при } y < \bar{y}, F(\bar{x}, y) < F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \text{при } y > \bar{y}, F(\bar{x}, y) > F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ нашли только 1 значение $\bar{y}$ такое, что $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Rightarrow \exists$ однозначная неявная функция $y = f(x)$

■

Доказательство 2-ого пункта. □ $x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $y_0 \in (y_0 - \delta', y_0 + \delta')$ и вместе удовлетворяют $F(x, y) = 0$ $\Rightarrow y_0$ является соответствующим значением и $x_0 \Rightarrow y_0 = f(x_0)$

■

Доказательство 3-его пункта. □ Докажем 3-ий пункт.

$$y_0 = f(x_0) \text{ является корнем } F(x,y) = 0 \ \ (1)$$

Возьмем x и соответсвующий ему y так, что $F(x,y)=0$, дадим x приращение Δx:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$$
$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = 0$$

Это из себя представляет полное приращение функции $\Delta F(x,y) = 0$ в точке (x,y).

$$\Delta F(x,y) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) =$$

$$= \underbrace{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)}_{\text{приращение по } x} + \underbrace{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}_{\text{приращение по } y} \overset{\substack{\text{т. Лагранжа о} \\ \text{конечных приращениях}}}{=}$$
$$= F'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\cdot\Delta x + F'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\cdot\Delta y = 0$$
$$(0 < \theta, \theta_1 < 1)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)}{F'_y(x, y+\theta_1\Delta y)} \quad (1)$$

Из определения непрерывности бесконечному малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции ($\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$).

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$
$$\left|\frac{F'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)}{F'_y(x, y+\theta_1\Delta y)}\right| \le \frac{M}{m} \quad (2)$$

Т.к. $F'(x)$ непрерывна, то непрерывна по совокупности, то по теореме Вейерштрасса ограничена $\Rightarrow \exists M, \quad |F'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)| \le M$.

$F'_y(x,y)$ непрерывна и на указанной окрестности $F'_y > 0$, то по теореме Вейерштрасса достигает своего наибольшего и наименьшего значения $F'_y(x, y+\theta_1\Delta y) \ge m > 0$.

$$(2) \Rightarrow \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \le \frac{M}{m}$$
$$|\Delta y| \le \frac{M}{m}|\Delta x|$$

если $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$. ■

Доказательство 4-ого пункта. □

Для $y = f(x)$ для любой точки x_0 из окрестности $\exists f'(x)$ и $f'(x)$ непрерывна при $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

Воспользуемся (1) и непрерывностью f'_x и f'_y по совокупности

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} F'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y) = F'_x(x,y)$$
$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} F'_y(x, y+\theta_1\Delta y) = F'_y(x,y)$$
$$(1) \Rightarrow y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

Докажем непрерывность производной $f'(x)$. Подставим вместо y $f(x)$.

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))} \quad [F(x, f(x)) \equiv 0]$$

обе функции в дроби непрерывны, так как зависят от непрерывных аргументов $\Rightarrow y'$ непрерывна ■

Понятие неявной функции от двух переменных

$F(x, y, z) = 0 \quad (3)$

Определение. Скажем, что уравнение (3) однозначно определяет в параллелепипеде (a,b;c,d;e,f) неявную функцию $z = f(x, y)$, если каждой паре $\forall (x, y) \in (a, b; c, d)$ соответствует одно значение z, являющееся корнем (3).

Теорема о существование и непрерывности неявной функции. Пусть $f(x, y, x)$ вместе со своими частными производными F'_x, F'_y, F'_z непрерывны в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$F(P_0) = F(x_0, y_0, z_0) = 0$$
$$\text{и } F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

Тогда

1. В некоторой окрестности $D : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1; y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2; z_0 - \delta_3, z_0 + \delta_3)$ существует однозначно неявная функция $\exists z = f(x, y)$
2. $z_0 = f(x_0, y_0)$ (следует из 1.)
3. $z = f(x, y)$ будет непрерывна нв интервале $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1; y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$
4. $\exists z'_x(x, y)$ и $z'_y(x, y)$ и они непрерывны по совокупности и справедливы следующие формулы:

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

Доказательство. □ Аналогично предыдущему. ■

Вычисление неявных функций

Допустим известно существование неявной функции $y = f(x)$ и непрерывной производной $f'(x)$ из $F(x, y) = 0$ и $y' = -\dfrac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (4)$. Предположим, $\exists F'_x$ и F'_y существуют непрерывные частные производные. Продифференцируем $F(x, y) = 0$:

$$(F'_x(x,y))'_x = F''_{xx}\cdot 1 + F''_{xy}\cdot y'(x)$$
$$(F'_y(x,y))'_x = F''_{xy}\cdot 1 + F''_{yy}\cdot y'(x)$$
$$(4) \Rightarrow -\frac{(F''_{xx}+F''_{xy}\cdot y'(x))\cdot F'_y(x,y) - F'_x(x,y)\cdot(F''_{xy}\cdot 1 + F''_{yy}\cdot y'(x))}{(F'_y(x,y))^2} =$$
$$= \frac{F'_x\cdot F''_{xy} + F'_x\cdot F''_{yy}\cdot y'(x) - F'_y\cdot F''_{xx} - F'_y\cdot F''_{xy}\cdot y'(x)}{(F'_y)^2} \overset{(4)}{=}$$
$$\overset{(4)}{=} \frac{F'_x\cdot F''_{xy} + F'_x\cdot F''_{yy}\cdot\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right) - F'_y\cdot F''_{xx} - F'_y\cdot F''_{xy}\cdot\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right)}{(F'_y)^2} =$$
$$= \frac{F'_x\cdot F''_{xy}\cdot F'_y - (F'_x)^2\cdot F''_{yy} - (F'_y)^2\cdot F''_{xx} - F'_y\cdot F''_{xy}\cdot F'_x}{(F'_y)^3} =$$
$$= \frac{2\cdot F'_x\cdot F''_{xy}\cdot F'_y - (F'_x)^2\cdot F''_{yy} - (F'_y)^2\cdot F''_{xx}}{(F'_y)^3}$$

Производная правой части (4) существует, следовательно, производная левой части тоже существует и это y''.

Если у частных производных существуют непрерывные частные производные до третьего порядка, то мы можем вычислить y'''.

Рассмотрим $F(x,y,z)=0\ \ (5)$, $z=f(x,y)$. Найдем z'_x, z'_y и продифференцируем (5).

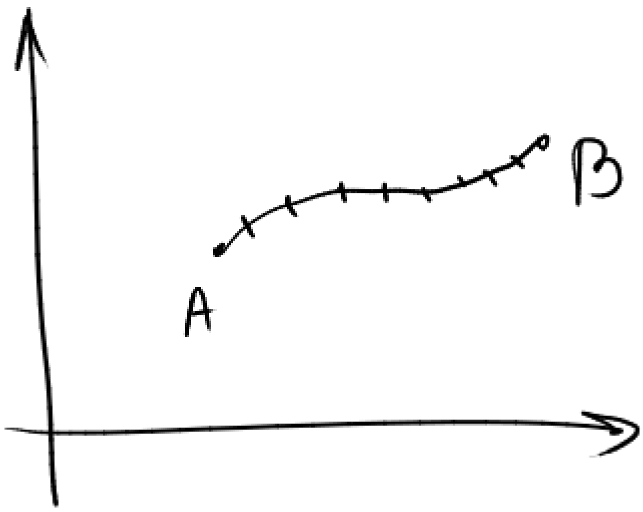
$$F'_x\cdot 1 + F'_y\cdot 0 + F'_z\cdot z'_x = 0$$
$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$$
$$F'_x\cdot 0 + F'_y\cdot 1 + F_z\cdot z'_y = 0$$
$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$
$$0 = df = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz \quad (7)$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$
$$dz = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}dx - \frac{\partial F}{\partial y}dy}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$
$$dz = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}dx}{\frac{\partial F}{\partial z}} - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}dy}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Криволинейные интегралы

Криволинейные интегралы I типа

Первая задача, связанная с криволинейным интегралом, возникла в механике. Пусть имеем кривую $K = AB$, она плоская, непрерывная, спрямляемая (та, которая имеет конечную длину). Пусть на этой кривой распределены массы. Задача состоит в том, чтобы найти массу всей кривой. Известна её линейная плотность $\rho(x, y)$.

Прежде всего кривую делили на части произвольным образом



$$A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$$

На дуге рассматривали точку $\forall M_i \in A_iA_{i+1}$

$$m_i \approx \rho(M_i)\sigma_i,\ \sigma_i \text{ - длина дуги}$$

$$m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i$$

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} \rho(M_1)\sigma_i \quad \lambda = \max_{0 \le i \le n-1} \sigma_i$$

Это было решение механиков. Перейдем к определению математиков.

Пусть имеем кривую $K = AB$, она плоская, непрерывная, спрямляемая (та, которая имеет конечную длину). Кривую разделили на части произвольным образом:

$$A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$$

В каждой из этих частей возьмём $\forall M_i \in A_iA_{i+1}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i, \text{ где } f(x, y) \text{ определена на } KM_i(\xi_i, \eta_i)$$

Определение. Если существует конечный предел при $\lambda \to 0$ этих сумм, не зависящий ни от способа разбиения, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется криволинейным интегралом I типа.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \int_{(K)} f(M)ds = \int_{(K)} f(x, y)ds \quad \big(s \text{ - длина дуги } (\text{предельный переход } \sigma_i)\big)$$

Направление не имеет значения:

$$\int_{(AB)} f(x, y)ds = \int_{(BA)} f(x, y)ds$$

То же самое будет справедливо для пространственных кривых.

$$f(x,y,z) \text{ задана на } AB$$
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i, \quad f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$$
$$\int_{(K)} f(x,y,z)ds = \int_{(K)} f(M)ds$$

Вычисление криволинейных интегралов I типа

Пусть задана непрерывная спрямляемая плоская кривая $(K) = AB$ и $f(x,y)$ определена на (K). Возьмём произвольную точку $\forall M_0$, положение которой определяется соответствующе $|\breve{AM_0}|$.

$$A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$$

Каждой точке соответствует своя длина дуги: $|AA_i| = s_i,\ |AA_{i+1}| = s_{i+1}$

$$\forall M_i \in A_iA_{i+1}$$
$$\text{для } M_i \text{ соответствует } \bar{s_i} \quad |AM_i| = \bar{s}_i$$
$$s_i \le \bar{s_i} \le s_{i+1}$$

Рассмотрим

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i))\Delta s_i}_{\text{инт. сумма для опр. интеграла}} \ (1)$$
$$\Delta s_i = (s_{i+1} - s_i)$$
$$M_i(x_i, y_i)$$
$$x_i = x(\bar{s}_i) \quad y_i = y(\bar{s}_i)$$
$$\text{получим параметрическое уравнение } (K):\begin{cases} x_i = x(s) \\ y_i = y(s)\end{cases}$$
$$0 \le s \le S, \text{ где } S \text{ - длина дуги}$$
$$\sigma_i = s_{i+1} = \Delta s_i$$

Если $f(x,y)$ непрерывна, $x(s), y(s)$ - непрерывны относительно s, то интеграл существует:

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0 \\ \Updownarrow \\ \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i))\Delta s_i = \int_0^S f(x(s), y(s))ds \quad 0 \le s \le S$$
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \int_{(K)} f(M)ds = \int_{(K)} f(x,y)ds$$

Получили формулу для криволинейного интеграла:

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_0^S f(x(s), y(s))ds \quad (2)$$
$$\int_{(K)} f(x,y)ds = \int_0^S f(x(s), y(s))ds$$

Перейдём к более общему случаю, когда кривая задана параметрически $(K) = \begin{cases} x = x(t) = \varphi(t) \\ y = y(t) = \psi(t) \end{cases}$, $\alpha \leq t \leq \beta$. $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывны и $\exists \varphi'(t), \psi'(t)$ и они непрерывны.

Если возрастанию t соответствует возрастание S

$$S'(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$$

$$dS = S'(t)dt = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt$$

$$\int_{(K)} f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt \quad (3)$$

$f(x,y)$ непрерывна по совокупности, $x(t), y(t)$ непрерывны, следовательно интеграл существует.

Рассмотрим частный случай, когда (K) задана в неявном виде $K: y = y(x), \ \ a \leq x \leq b$. Эта функция непрерывна и $\exists y'(x)$ и она непрерывна.

$$\int_{(K)} f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx \quad (4)$$

В определенном случае геометрический смысл $\displaystyle\int_K ds = S$, в физике $m = \displaystyle\int_K \rho ds$.

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha}$$

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}$$

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{1 + (y'(x))^2} = \frac{1}{|\cos\alpha|}$$

$$\int_{(K)} f(x,y)ds = \int_a^b f(x, y(x))\frac{1}{|\cos\alpha|}dx$$

$$S = \int_a^b \frac{dx}{|\cos\alpha|}$$

Формула для полярных координат:

$$\rho - \text{полярный радиус}, \ \alpha - \text{полярный угол}$$

$$x = \rho\cos\alpha$$

$$y = \rho\sin\alpha$$

$$ds = \sqrt{\rho^2(\alpha) + (\rho'(\alpha))^2}d\alpha$$

$$f(x,y) = f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha), \quad \varphi_1 \leq \alpha \leq \varphi_2$$

$$\int_{(K)} f(x,y)ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)\sqrt{\rho^2(\alpha) + (\rho'(\alpha))^2}d\alpha$$

Криволинейный интеграл II типа

Пусть имеем кривую $K = AB$, она плоская, непрерывная, спрямляемая (та, которая имеет конечную длину). Кривую разделили на части произвольным образом:

$$A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$$
$$\forall M_i \in A_i A_{i+1}$$

Умножаем не на длину дуги, а на проекцию.

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) D_i, \text{ где } D_i \text{ - проекция } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$
$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) D_i = \int_{(K)} f(M) dx$$

Этот предел называется криволинейным интегралом второго типа. При смене AB на BA меняется на противоположное.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i+1} \qquad -\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) D_i$$
$$\int_{(AB)} f(x, y) dx = -\int_{(BA)} f(x, y) dx$$

Делим прямую на части

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta x_i$$

Возьмём наибольшую из хорд:

$$\mu = \max \overline{A_i A_{i+1}}$$
$$\mu \to 0 \Leftrightarrow \lambda \to 0$$

Определение. Если существует конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется криволинейным интегралом второго типа.

Направление:

$$B \to A \quad \sigma^i = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta x_i'$$
$$\Delta x_i' = x_i - x_{i+1}$$
$$\sigma' = -\sigma$$
$$\lim_{\mu \to 0} \sigma' = \int_{BA} f(M) dx$$
$$\int_{(AB)} f(M) dx = -\int_{(BA)} f(M) dx$$

Можем также спроектировать на ось Oy

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta y_i \quad \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \Delta y_i'$$
$$\Delta y_i' = -\Delta y_i$$

Если же прямая пространственная, то можно аналогично спроектировать на ось Oz.

Криволинейный интеграл общего типа:

$$\int_{(AB)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_{(AB)} P dx + \int_{(Ab)} Q dy + \int_{(AB)} R dz$$

Вычисление криволинейного интеграла II типа

Теорема. Пусть кривая задана параметрически $K: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ \alpha \le t \le \beta.$ Спроектируем на ось Ox. $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны. На К определена $f(x, y)$, которая непрерывна по совокупности, $\varphi'(t)$ также непрерывна на $[\alpha; \beta]$. Тогда справедлива формула:

$$\int_{(AB)} f(M)dx = \int_{(AB)} f(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \quad (1)$$

Доказательство. □ Интеграл правой части существует, так как функции $f(x, y), \ \varphi(t), \ \psi(t), \ \varphi'(t)$ непрерывны.

Разобьём кривую K произвольным образом на части, в каждой из этих частей поризвольным образом возьмём точку M_i

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)dt \quad (2)$$

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)dt$$

$$A_i \to t_i \ (\text{соответствует })$$

$$A_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$$

$$M_i \to \tau_i$$

$$t_i \le \tau_i \le \tau_{i+1}$$

С другой стороны

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \quad (3)$$

$$\sigma - I = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t_i))] \cdot \varphi'(t)dt \quad (4)$$

$$|\sigma - I| \le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t_i))| \cdot |\varphi'(t)|dt \quad (5)$$

$f(\varphi(t), \psi(t))$ непрерывна как сложная функция на $[\alpha, \beta]$. Из следствия теоремы Кантора $\omega_i(f) = M_i - m_i$

$$\text{частичные отрезки обозначим } \Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \Delta t_i < \delta$$

$$\omega_i(f) < \varepsilon$$

$$f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t_i)) < \varepsilon$$

$$\text{по т. Вейерштрасса } |\varphi'(t)| < K$$

$$\sum_{i=0}^{i=1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = \beta - \alpha$$

$$(\varepsilon < 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0)\Delta t_i < \delta \Rightarrow$$

$$(5) \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon \cdot K \cdot (\beta - \alpha)$$

$$\lambda \to 0 \Leftrightarrow \mu \to 0$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \tau = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt = \lim_{\mu \to 0} \sigma = \int_{(AB)} f(M)dx$$

Аналогично, если кривая задана параметрически:

$$K: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ \ \alpha \le t \le \beta$$

и $\psi'(t)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$, то справедлива формула

$$\int_{(AB)} f(M)dx = \int_{(AB)} f(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)dt$$

Рассмотрим в 3-мерном пространстве

$$K:\begin{cases} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t),\\ z=\chi(t)\end{cases}\ \alpha\le t\le\beta$$

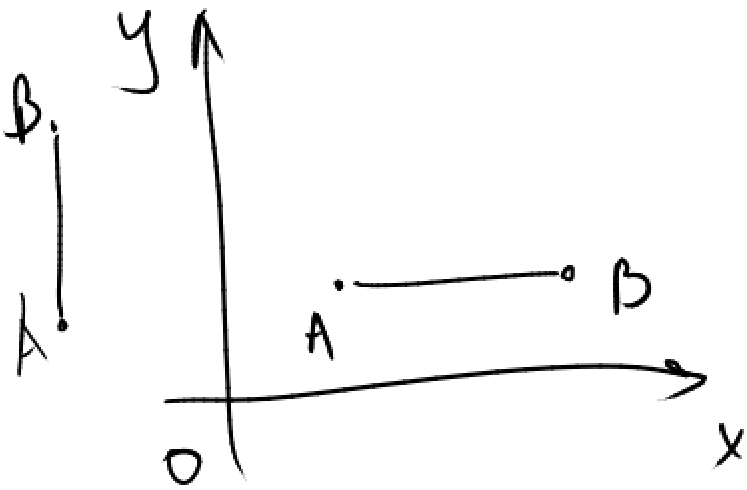
То справедлива формула

$$\int_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int_{(AB)} P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\cdot\varphi'(t)dx + \int_{(Ab)} Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\cdot\psi'(t)dy +$$
$$+\int_{(AB)} R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\cdot\chi'(t)dz$$

Кривая задана в неявном виде

$$y=y(x),\ a\le x\le b$$
$$\int_{(AB)} f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y(x))dx$$

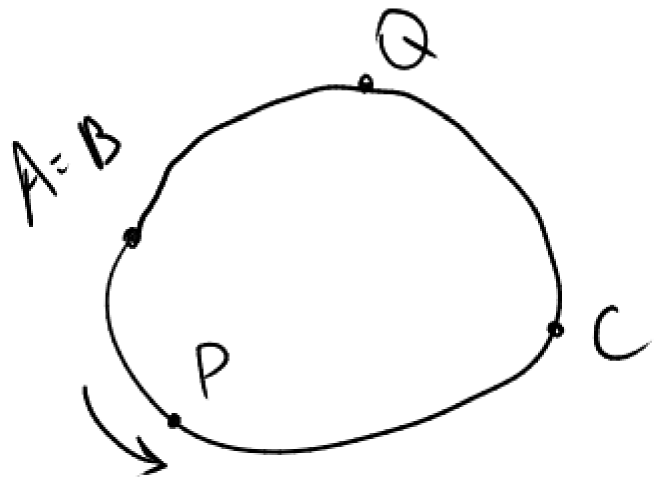
Рассмотрим 2 случая, когда берем отрезок, параллельный оси Ox или Oy:



$$AB||Ox \qquad \int_{(AB)} f(x,y)dy = 0$$
$$AB||Oy \qquad \int_{(AB)} f(x,y)dx = 0$$

Случай замкнутого контура. Ориентация плоскости.

Возьмём произвольный замкнутый контур. $\forall C \in K,\, P \in AC, Q \in CB.$



$$\int_{(AB)} = \int_{(K)} = \int_{APC} + \int_{CQA}$$

не зависит от выбора точки C

Если кривая на плоскости, то мы должны выбрать направление.

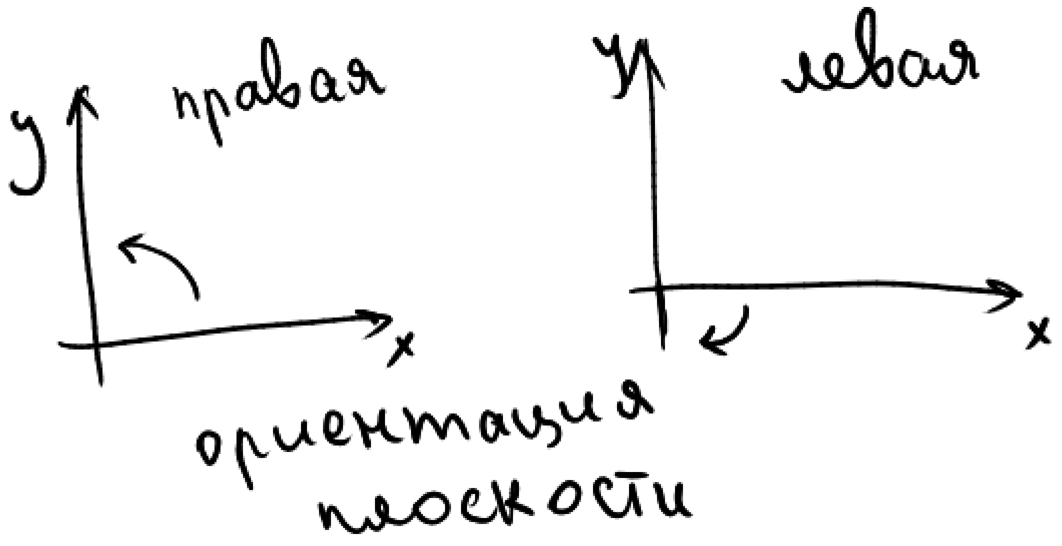
Если за положительное направление считать направление против часовой стрелки, то плоскость имеет правую ориентацию.

Если за положительное направление считать направление по часовой стрелки, то плоскость имеет левую ориентацию.

Ориентацию для окружности и близким к ним контурам легко определить. Для более сложных фигур определяется правилом:

При правой ориентации плоскости положительным считается то направление, при котором наблюдателю ближайшая часть области, ограниченной этим контуром, находится слева от него, а отрицательное - справа.

В соответствие с правой и левой ориентацией плоскости строится система координат.



Связь между криволинейными интегралами I и II типов

Пусть дана гладкая кривая, то есть если она задана параметрически, сама непрерывна и существуют непрерывные производные и при этом эти две производные одновременно не равны 0.

$$K : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ \ \alpha \le t \le \beta$$

В качестве параметра возьмём длину дуги

$$\begin{matrix} x = \varphi(s) \\ y = \psi(s) \end{matrix}, \ \ 0 \le s \le S$$

α обозначим угол, образуемый касательной с положительным направлением оси, в случае, если направление касательной совпадает с возрастанием параметра s.

Имеем следующее:

$$\varphi'(s) = \cos\alpha$$
$$\psi'(s) = \sin\alpha$$
$$\int_{(K)} f(M)dx = \int_0^S f(x(s), y(s)) \cdot \varphi'(s)ds = \int_0^S f(x(s), y(x)) \cos\alpha ds = \int (AB) f(x,y)\cos\alpha ds$$
$$\int_{(K)} f(M)dx = \int_0^S f(x(s), y(s)) \sin\alpha ds$$

Получили связь между криволинеными интегралами I и II типов.

Для трехмерного пространства:

$$\int_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{(AB)} P(x(s),y(s),z(s))\cos\alpha ds + \int_{(AB)} Q(x(s),y(s),z(s))\cos\beta ds +$$

$$+ \int_{(AB)} R(x(s),y(s),z(s))\cos\nu ds$$

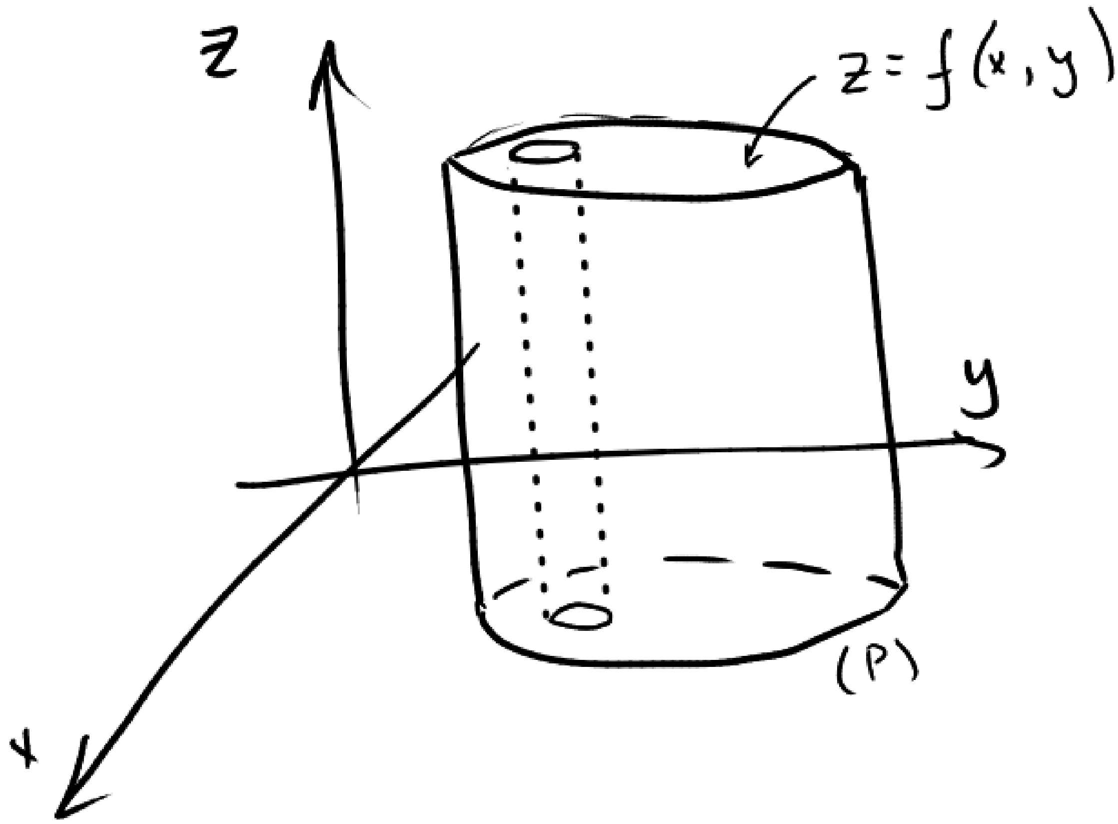
где α, β, ν - углы образуемые с осями.

Двойные интегралы

Понятие двойного интеграла

Механики решали следующую задачу:

В трехмерном пространстве рассматривался цилиндрический груз. Сверху - поверхность, ограниченная $z = f(x,y)$ (как шапочка), сбоку - цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны Oz, снизу - проекция поверхности (P). Задача: найти V тела.



Разобьём область (P) на части: $P_1, P_2, \ldots, P_n$, и на каждой из этой областей рассмотрим цилиндрический столбик. В каждой из $P_i,\ i = 1, 2, \ldots$ берём точку $\forall M_i(\xi_i, \eta_i)$, подсчитываем значение функции и умножаем на площадь:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \cdot P_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \cdot P_i$$
$$V_i \approx f(M_i) P_i$$
$$V = \sum_{i=0}^{n-1} V_i$$

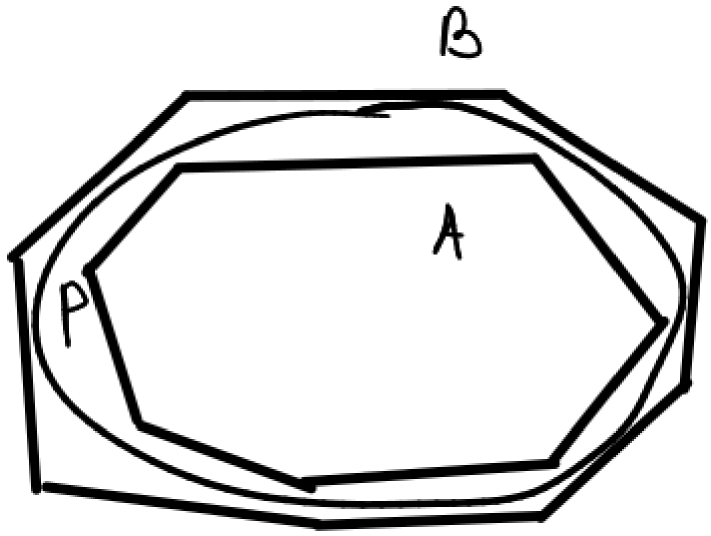
Обозначим $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n} d_i$, где $d_i = \sup \rho(M', M'')$, $M', M'' \in (P_i)$ - диаметр (супремум расстояния между двумя любыми точками).

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint_{(P)} f(x, y) dP$$

Математики дали точное определение двойного интеграла.

Для начала определим некоторые понятия:

- Областью называется связанное множество.
- Связанным называется множество, если любые две точки можно соединить ломанной, целиком состоящей из точек из данного множества.
- Область вместе со своей границей называется замкнутой.
- Открытой называется область, если она состоит только из внутренних точек.
- Внутренней называется такая точка M, если её окрестность целиком состоит из точек данного множества.
- Квадрируемой называется область, которая имеет конечную площадь. Рассматриваются все многоугольные области, содержащие область и содержащиеся в ней. $(A) \subset (P)$, $(B) \supset (P)$, $\sup\{A\} = I_*, \inf\{B\} = I^*$, $I_* = I^* = S$ - площадь P.



- Кривая K имеет площадь 0, если $\forall \varepsilon > 0$ существует некоторые многоугольные области (B) и (A), содержащие эту кривую, для которых $B - A < \varepsilon$.
- Чтобы область была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы её ограничивающие контуры имеют площадь 0.

Возьмём поверхность $z = f(x, y)$, рассмотрим цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны Oz, и её проекцию на Oxy. Разбиваем (P) на замкнутые квадрируемые части P_i с помощью кривых площади 0. В каждой из этих частей возьмём $\forall M_i(\xi_i, \eta_i)$. (как у физиков)

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \cdot P_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \cdot P_i$$

Определение (двойного интеграла). Если существует конечный предел этих сумм, который не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора точек M_i, когда наибольший из частичных диаметров $\lambda \to 0$, то этот предел называется двойным интегралом по области (P).

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint_{(P)} f(M) dP = \iint_{(P)} f(x, y) dP$$

Необходимое и достаточное условие интегрируемости $f(x, y)$ в области (P)

Если $\exists$ двойной интеграл, то $f(x, y)$ интегрируема на (P). Если $f(x, y)$ интегрируема, то она ограничена, и каждая из областей имеет точную верхнюю грань и точную нижнюю:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot P_i - \text{нижние сумма Дарбу} \quad m_i = \inf f(x, y),\ (x, y) \in (P_i)$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \cdot P_i - \text{верхние сумма Дарбу} \quad M_i = \sup f(x, y),\ (x, y) \in (P_i)$$

$$s \le \sigma \le S$$

При увеличении разбиения нижние суммы не убывают, верхние суммы не возрастают.

Теорема. Для того, чтобы $f(x, y)$ была интегрируемой в области (P), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0 \quad (1)$$

Отсюда следует:

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} M_i P_i - \sum_{i=0}^{n-1} m_i P_i \right) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) P_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) P_i = 0$$

Свойства двойных интегралов

Свойство 1

Свойство 1. Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области (P), то $kf(x, y)$ также интегрируема в той же области, где k - постоянное число.

$$\iint_{(P)} kf(x, y) dP = k \iint_{(P)} f(x, y) dP$$

Доказательство. $\square$ Разбиваем область (P) с помощью кривых с площадью 0 на произвольные части и в каждой берем произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} kf(\xi_i, \eta_i) P_i = k \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) P_i \quad (1)$$

Конечный предел этих сумм существует. Перейдем к пределу (так как предел у правой части существует, то он существует и у левой) при $\lambda \to 0$.

$$\iint_{(P)} kf(x,y)dP = k\iint_{(P)} f(x,y)dP$$

■

Свойство 2

Свойство 2. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области (P), тогда их алгебраическая сумма $f(x,y) \pm g(x,y)$ также интегрируема в (P).

$$\iint_{(P)} f(x,y) \pm g(x,y)dP = \iint f(x,y)dP \pm \iint g(x,y)dP$$

Доказательство. □ Разбиваем область (P) с помощью кривых с площадью 0 на произвольные части и в каждой берем произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} [f(\xi_i,\eta_i) \pm g(\xi_i,\eta_i)]P_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)P_i \pm \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i,\eta_i)P_i$$

Перейдем к пределу (так как предел у правой части существует, то он существует и у левой) когда $\lambda \to 0$:

$$\iint_{(P)} f(x,y) \pm g(x,y)dP = \iint f(x,y)dP \pm \iint g(x,y)dP$$

■

Свойство 3

- Областью называется открытое связное множество.
- Открытым называется множеством, состоящее только из внутренних точек.
- Внутренней точкой для множества E называется та точка, если существует окрестность этой точки, целиком состоящая из точек E.
- Связным называется множество, если любые его две точки можно соединить непрерывной ломанной, целиком состоящей из точек данного множества.
- Замкнутой областью $(\bar{G})$ называется область и все её граничные точки.
- Точка A называется граничной для области G, если в любой окрестности этой точки есть точки из G и точки не из G.

Свойство 3. Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области (P), и $f(x,y) \leq g(x,y)$ и

$$\iint_{(P)} f(x,y)dP \leq \iint_{(P)} g(x,y)dP$$

Доказательство. □ Разбиваем область (P) с помощью кривых с площадью 0 на произвольные квадрируемые части и в каждой берем произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)P_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i,\eta_i)P_i$$

Перейдем к пределу, когда $\lambda \to 0$

$$\iint_{(P)} f(x,y)dp \leq \iint_{(P)} g(x,y)dP$$

■

Свойство 4

Свойство 4. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области (P), то $|f(x,y)|$ тоже интегрируем в области (P) и

$$\left|\iint_{(P)} f(x,y)dP\right| = \iint_{(P)} |f(x,y)|dP$$

Доказательство. В каждой частичной области $\omega_i(|f|) = \omega_i(f)$, так как

$$\omega_i(f) = \sup|f(M') - f(M'')|$$
$$\forall M', M'' \in (P_i)$$
$$\omega_i(|f|) = \sup||f(M')| - |f(M'')||$$
$$[\ ||a| - |b|| \leq |a-b|\ ]$$
$$||f(M')| - |f(M'')|| \leq |f(M') - f(M'')|$$
$$\sup_{M',M''\in(P_i)} ||f(M')| - |f(M'')|| \leq \sup_{M',M''\in(P_i)} |f(M') - f(M'')|$$
$$\Rightarrow \omega_i(|f|) = \omega_i(f)$$
$$0 \leq \omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$$
$$0 \leq \omega_i(|f|)P_i \leq \omega_i(f)P_i$$
$$0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(|f|)P_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f)P_i$$

Так как $f(x,y)$ интегрируема в (P), то согласно необходимому и достаточному условию интегрируемости $f(x,y) \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(f)P_i = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i(|f|)P_i = 0$.

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i,\eta_i)P_i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i,\eta_i)|P_i$$

Перейдем к пределу при $\lambda \to 0$.

$$\left|\iint_{(P)} f(x,y)dP\right| = \iint_{(P)} |f(x,y)|dP$$

■

Свойство 5

Свойство 5. Пусть $f(x, y)$ интегрируема в области (P) и $m \leq f(x, y) \leq M$, тогда

$$mP \leq \iint_{(P)} f(x, y) dP \leq MP$$

Доказательство. □ Разбиваем область (P) с помощью кривых с площадью 0 на произвольные квадрируемые части и в каждой берем произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$:

$$m \sum_{i=0}^{n-1} P_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) P_i \leq M \sum_{i=0}^{n-1} P_i$$

$$mP \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) P_i \leq MP$$

перейдем к пределу, когда $\lambda \to 0$ и получим

$$mP \leq \iint_{(P)} f(x, y) dP \leq MP$$

■

Теорема о среднем значении

Отсюда следует теорема о среднем значении.

□

$$m \leq \frac{\iint_{(P)} f(x, y) dP}{P} \leq M$$

$$\frac{\iint_{(P)} f(x, y) dP}{P} \overset{\text{об}}{=} \mu \quad (1)$$

$$m \leq \mu \leq M$$

$$(1) \Rightarrow \iint_{(P)} f(x, y) dP = \mu P \ \ (2)$$

Рассмотрим частный случай, когда $f(x, y)$ непрерывна в области (P), тогда она равномерна непрерывна по теореме Кантора, и кроме того, согласно второй теореме Вейерштрасса, принимает свои наибольшее и наименьшее значения, которые являются для значения функции точной нижней границей и точной верхней:

$$m \leq f(x, y) \leq M$$

$$m = \inf_{(x,y) \in (P)} \{f(x, y)\} \quad M = \sup_{(x,y) \in (P)} \{f(x, y)\}$$

Согласно второй теореме Больцано-Коши, функция принимает каждое промежуточное значение между m и M

$$\exists (\bar{x}, \bar{y}), \ f(\bar{x}, \bar{y}) = \mu$$

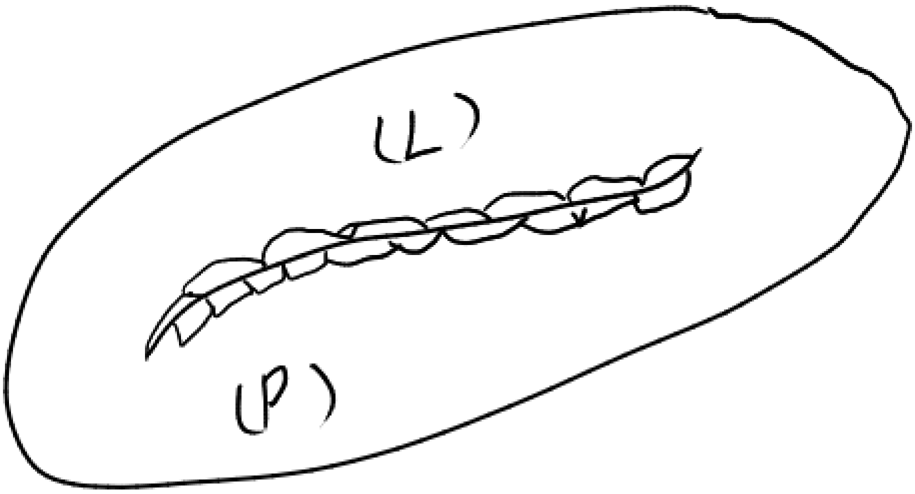
$$(2) \Rightarrow \iint_{(P)} f(x, y) dP = f(\bar{x}, \bar{y}) \cdot P$$

■

Свойство 6

Сформулируем лемму без доказательства.

Лемма. Пусть имеем квадрируемую область (P) и в ней некоторую кривую (L) площади 0. Тогда для $\forall \varepsilon\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, что как только мы разделим область (P) на части, диаметры которых меньше чем $\delta \Leftrightarrow \lambda < \delta$, $-$ сумма площадей тех частичных областей, которые имеют с (L) общие точки, будет $< \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{\lambda \to 0}$ суммы площадей тех частичных областей, которые имеют с (L) общие точки, $= 0$.



Используем эту лемму для доказательства следующего свойства.

Свойство 6. Пусть $f(x, y)$ интегрируема в квадрируемой области (P). Известно, что в этой области существует кривая (L) с площадью 0. Если произвольным образом изменить значение функции $f(x, y)$ на прямой (L) так, чтобы она оставалась ограниченной, то эта новая функция $f^*(x, y)$ будет интегрируема в области (P) и справедлива формула:

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \iint_{(P)} f^*(x, y) dP$$

Доказательство. $\square$

Докажем существование интегралов

Для доказательства составим интегральные суммы для f и f^*. Берем точку $M(\xi_i, \eta_i)$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i$$

$$\sigma' = \sum_{i=1}^{n} f^*(\xi_i, \eta_i) P_i$$

При $\lambda \to 0$ $\sigma \to \iint_{(P)} f(x, y) dP$.

σ и σ' могут отличатся только такими слагаемыми, которые имеют общие точки с (L)

i' $-$ те слагаемые, которые отличаются

$$\sum_{i'} f(\xi_{i'}, \eta_{i'}) P_{i'}$$

$$\sum_{i'} f^*(\xi_{i'}, \eta_{i'}) P_{i'}$$

Оценим по модулю:

$$|f(x,y)| \le k$$

$$\left|\sum_{i'} f(\xi_{i'},\eta_{i'})P_{i'}\right| \le k\cdot\sum_{i'} P_{i'} \quad (2)$$

$$|f^*(x,y)| \le k_1$$

$$\left|\sum_{i'} f^*(\xi_{i'},\eta_{i'})P_{i'}\right| \le k_1\cdot\sum_{i'} P_{i'} \quad (3)$$

L является кривой площади 0, тогда согласно лемме при $\lambda \to 0$ сумма площадей тех частичных областей, которые имеют с L общие точки стремится к 0. Из соотношения (2) и (3) следует, что отличающиеся слагаемые стремятся к нулю, это означает

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sigma'$$

$$\iint_{(P)} f(x,y)dP = \iint_{(P)} f^*(x,y)dP$$

пределы существуют, значит интегралы существуют.

■

Свойство 7

Свойство 7. Пусть функция $f(x,y)$ определена в области (P) которая разделена кривой K площади 0 на две части P_1', P_2'. Если $f(x,y)$ интегрируема в (P), то интегрируема и в (P_1') и в (P_2'). И наоборот, если интегрируема и в (P_1') и в (P_2'), то она интегрируема в (P). И справедлива формула:

$$\iint_{(P)} f(x,y)dP = \iint_{(P_1)} f(x,y)dP_1 + \iint_{(P_2)} f(x,y)dP_2 \quad (1)$$

Доказательство. □

Разобьём области (P_1') и (P_2') произвольным образом на части

$$(P),(P_1),(P_2),\dots,(P_n)$$

Из них некоторые будут лежать в (P_1'), а некоторые - в (P_2'). Обозначим i' - области, которые лежат в (P_1'), i'' - области которые лежат в (P_2').

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i P_i = \sum_{i'}\omega_i' P_i + \sum_{i''}\omega_i' P_i \quad (2)$$

$$\omega_i - \text{ колебание функции } f$$

Перейдём к пределу $\lambda \to 0 \Rightarrow (2) \Rightarrow 0 = 0 + 0$

Так как $f(x,y)$ интегрируема на (P), то она интегрируема на (P_1') и (P_2').

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)P_i = \sum_{i'} f(\xi_{i'},\eta_{i'})P_{i'} + \sum_{i''} f(\xi_{i''},\eta_{i''})P_{i''}$$

Первую часть доказали.

Пусть $f(x,y)$ интегрируема в (P_1') и в (P_2'). Покажем, что она также интегрируема в (P).

Произвольно разделим (P). Этому произвольному делению добавим кривую (K), делящую (P) на (P_1') и (P_2').

$$S=\sum_i \omega_i P_i = \underbrace{\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'}}_{\substack{\to 0 \\ \text{относительно } P_1'}} + \underbrace{\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''}}_{\substack{\to 0 \\ \text{относительно } P_2'}}$$

Суммы отличаются теми слагаемыми, которые имеют с (K) общие точки. Т.к. $f(x,y)$ ограничена в (P_1') и в (P_2'), то $f(x,y)$ ограничена в (P).

$$i''' - \text{те, которые есть в первой сумме, но нет во второй}$$

$$\left|\sum_{i'''} \omega_{i'''} P_{i'''}\right| \leq \sum_{i'''} |\omega_{i'''}| P_{i'''} \leq M \sum_{i'''} P_{i'''}$$

$$i^{IV} - \text{те, которые есть во второй сумме, но нет в первой}$$

$$\left|\sum_{i^{IV}} \omega_{i^{IV}} P_{i^{IV}}\right| \leq \sum_{i^{IV}} |\omega_{i^{IV}}| P_{i^{IV}} \leq M \sum_{i^{IV}} P_{i^{IV}}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} S = \lim_{\lambda\to 0} S_1$$

Так как $S_1 \to 0$, то и $S \to 0 \Rightarrow$ по необходимому и достаточному условию $f(x,y)$ интегрируема в (P)

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)P_i = \sum_{i'} f(\xi_{i'},\eta_{i'})P_{i'} + \sum_{i''} f(\xi_{i''},\eta_{i''})P_{i''}$$

Переходим к пределу $\lambda \to 0$ и получаем (1)

$$\iint_{(P)} f(x,y)dP = \iint_{(P_1)} f(x,y)dP_1 + \iint_{(P_2)} f(x,y)dP_2$$

■

Вопросы 1-ого модуля

1. Равномерная и поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Примеры.
2. Условия равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Признак Вейерштрасса.
3. Непрерывность суммы функционального ряда.
4. Почленный переход к пределу в функциональных рядах.
5. Почленное интегрирование функциональных рядов.
6. Почленное дифференцирование функциональных рядов.
7. Интегралы, зависящие от параметра. Равномерное стремление к предельной функции. Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости функции $f(x,y)$. Непрерывность предельной функции.
8. Предельный переход под знаком интеграла. Непрерывность функции $I(y)$.
9. Дифференцирование под знаком интеграла.
10. Интегрирование под знаком интеграла.
11. Случай, когда и пределы интеграла зависят от параметра. Непрерывность функции $I(y)$.

12. Случай, когда и пределы интеграла зависят от параметра. Производная функции $I(y)$.
13. Равномерная сходимость несобственных интегралов. Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости несобственных интегралов. Признак равномерной сходимости несобственных интегралов.
14. Предельный переход под знаком несобственных интегралов.
15. Непрерывность несобственных интегралов $I(y)$.
16. Интегрирование несобственного интеграла по параметру.
17. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру.
18. Понятие неявной функции от одной переменной. Теорема о существовании и свойствах неявной функции от одной переменной.
19. Неявная функция от двух переменных. Теорема о существовании и свойствах неявных функций от двух переменных. Вычисление производных неявных функций в случае уравнения $F(x, y) = 0$.
20. Вычисление производных неявных функций в случае уравнения $F(x, y, z) = 0$. Вычисление производных неявных функций с помощью дифференциалов.
21. Криволинейные интегралы первого типа и их вычисление.
22. Криволинейные интегралы второго типа и их вычисление.
23. Случай замкнутого контура. Ориентация плоскости. Связь между криволинейными интегралами обоих типов.
24. Понятие двойных интегралов. Суммы Дарбу. Условие существования двойного интеграла. Необходимое и достаточное условие интегрируемости (без доказательства).
25. Свойства двойных интегралов (1-4).
26. Свойства двойных интегралов (5-7).

Оглавление