calculus

Навигация

1.

Функциональные последовательности и ряды

Последовательность, членами которой являются функции, определенные на одной и той же области X (X - область определения функций), называется *функциональной последовательностью*:

$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{1}$$

Если зафиксируем $x \in X$, то получим числовую последовательность.

Допустим, что при $\forall x \in X$ последовательность (1) имеет конечный предел. При других x предел будет другой. Заметим, что предел зависит от x и обозначим этот предел через $f(x)$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

$f(x)$ - предельная функция, которая зависит от x. Это называется *поточечная ("по точкам") сходимость*.

При фиксированном x:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon),\, n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Заметим, что при изменении x меняется N. Можно ли выбрать N таким образом, чтобы оно зависело только от ε, но не зависело от выбора x?

Определение равномерной сходимости

Если:

1. Для функциональной последовательности (1) существует предельная функция $\exists f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon),\ n > N$ имеет место неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\, \forall x \in X$,

то мы скажем, что последовательность *равномерно сходится* к $f(x)$ на множестве X ($f_n(x) \rightrightarrows f(x)$).

[Примеры]

Равномерная сходимость:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad 0 \le x \le 1$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 0.$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n}.$$

$$n > \frac{1}{2\varepsilon}, \quad N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor.$$

Данная последовательность равномерно сходится к предельной функции $f(x)$.

Поточечная сходимость:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad 0 < x \le 1.$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0.$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{nx}.$$

В данном случае равномерная сходимость отсутствует.

Функциональные ряды

Рассмотрим ряд, члены которого функции, определенные на множестве X:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x). \tag{3}$$

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x).$$

Если x фиксировано, то получается числовой ряд, а $f_n(x)$ - *частичная сумма*.

Пусть ряд (3) сходится при $\forall x \in X$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{(поточечная сходимость)}.$$

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0\,\exists N(\varepsilon),\, n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \\ \varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \quad \text{(остаточный ряд)}, \\ |\varphi_n(x)| < \varepsilon. \end{cases}$$

Ряд (3) *равномерно сходится* на множестве X, если:

1. Последовательность частичных сумм имеет предельную функцию $f(x)$ на X: $\exists f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
2. $\forall\varepsilon > 0\,\exists N(\varepsilon),\, n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff |\varphi_n(x)| < \varepsilon\, \forall x \in X$.

2.

Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов

Теорема (Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости последовательностей)

Для того, чтобы функциональная последовательность (1) имела предельную функцию и сходилась к этой функции равномерно относительно $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon),\ n > N\ m = 1, 2, \ldots,$$
$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{для } \forall x \in X. \tag{4}$$

[Доказательство]

1. **Необходимость**

Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ для $\forall x \in X$. Тогда:

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists N(\varepsilon),\ n > N :$$
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

И если $n + m > n > N$, то:

$$|f_{n+m}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Следовательно:

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| = |f_{n+m}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \le |f_{n+m}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. **Достаточность**

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon),\ n > N\ m = 1, 2, \ldots :$$
$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Зафиксируем $\forall x \in X$. Так как при фиксированном x выполняется условие Больцано-Коши, то последовательность сходится.

При изменении x существует предельная функция $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (поточечная сходимость).

Сделаем предельный переход $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} f_{n+m}(x) = f(x).$$

Тогда:

$$|f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon \quad \text{при } n > N \text{ и } \forall x \in X.$$

Следовательно, по 2-му условию:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x).$$

Признак Вейерштрасса

Теорема (Признак Вейерштрасса)

Пусть у нас есть функциональный ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

где каждый член ряда определен на X.

1. $|u_k(x)| \le c_k \quad \forall x \in X,$
2. числовой ряд: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится.

Тогда: $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится.

[Доказательство]

Рассмотрим сумму $(m \in \mathbb{N})$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| \le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots + |u_{n+m}(x)| \le c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m}.$$

Из условия сходимости числового ряда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon), \ n > N \ m = 1, 2, \ldots :$$

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m}| < \varepsilon.$$

Получаем:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| < c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+m} < \varepsilon.$$

3.

Непрерывность суммы функционального ряда и функциональных последовательностей

Пусть имеем функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

1. члены ряда определены на $[a;b]$ и непрерывны на $[a;b]$
2. этот ряд равномерно сходится на $[a;b]$.

Тогда сумма ряда также будет непрерывной функцией на $[a;b]$.

[Доказательство] Возьмём $\forall x_0 \in [a;b]$ и докажем, что $f(x)$ непрерывна в этой точке.

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$$

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x) \quad (2)$$

$$f(x_0) = f_n(x_0) + \varphi_n(x_0) \quad (3)$$

$$(2) - (3) = f(x) - f(x_0) = f_n(x) - f_n(x_0) + \varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x_0)| \quad (5)$$

Ряд равномерно сходится на $[a;b]$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$, $n > N$:

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для } \forall x \in [a;b] \quad (6)$$

$$|\varphi_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (7)$$

$f_n(x)$ — сумма конечного числа непрерывных функций $\Rightarrow$ $f_n(x)$ — непрерывная функция, в частности в точке x_0. То по определению:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (8)$$

Получим, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - x_0| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(используя (6), (7), (8))

$\Rightarrow$ $f(x)$ непрерывна в точке x_0. ■
эта теорема достаточна, но не необходима

Приведём пример ряда, состоящего из непрерывных функций, этот ряд неравномерно сходится, но тем не менее сумма является непрерывной функцией.

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right], \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}$$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

$$= \frac{x}{1+x^2} - 0 + \frac{2x}{1+2^2x^2} - \frac{x}{1+x^2} + \dots + \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}$$

$$= \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

Ряд неравномерно сходится, $u_n(x)$ непрерывны, $f(x)$ непрерывна на $[0;1]$. $\square$

4.

Почленный переход к пределу в функциональных рядах

Точка a является для множества X *точкой сгущения* (предельной точкой), если $(a-\delta; a+\delta)$ имеется точка из X, отличная от a.

Теорема (о почленном переходе к пределу)

1. Пусть имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, каждый член которого определён на множестве X.
2. a — точка сгущения для множества X
3. $\lim_{x\to a} u_n(x) = c_n \quad$ для $\forall n = 1, 2, \dots$.
4. Этот функциональный ряд равномерно сходится на X.

Тогда:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = C$ сходится
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C$

Почленный переход под знаком суммы:

$$\lim_{x\to a} f(x) = C \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_k(x)$$

[Доказательство]

Докажем 1-ое (необходимое и достаточное условие):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon), \quad n > N, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon \quad (1)$$

при $x \to a$ переходим к пределу:

$$|c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m}| \le \varepsilon \quad (2)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n = C.$$

Докажем 2-ое:

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x) \quad (3)$$

$$C = C_n + \gamma_n \quad (4)$$

$$f(x) - C = f_n(x) - C_n + \varphi_n(x) - \gamma_n$$

$$|f(x) - C| \le |f_n(x) - C_n| + |\varphi_n(x)| + |\gamma_n| \quad (5)$$

Так как функциональный ряд равномерно сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon), \quad n > N_1 \quad \Rightarrow \quad |\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in X \quad (6)$$

И так как

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2(\varepsilon), \quad n > N_2 \quad \Rightarrow \quad |\gamma_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (7)$$

$$N = \max(N_1, N_2), \quad n > N$$

$$\lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k = C_n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - C_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (8)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$(5) = |f(x) - C| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}}_{(6),(7),(8)} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow (\textit{ПоКоши}) \lim_{x \to a} f(x) = C.$$

■

5.

Почленное интегрирование функциональных рядов

Имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
Функции $u_n(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и ряд сходится. Когда можно интеграл от суммы заменить почленным интегрированием?

Теорема (достаточное условие)

1. Пусть имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (1)$, члены ряда непрерывны на $[a;b]$.
2. ряд (1) равномерно сходится на $[a;b]$.

Тогда справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big\}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \dots \quad (2)$$

Заметим, что все интегралы в этой формуле существуют.

[Доказательство]

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x), \quad (3)$$

где

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x),$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \quad \text{(равн. сх.)}.$$

Так как ряд равномерно сходится, остаточный ряд тоже равномерно сходится и члены ряда непрерывные функции, то $\varphi_n(x)$ *непрерывна*.
$f_n(x)$ *непрерывна* как сумма непрерывных функций. Поэтому имеем право проинтегрировать обе части равенства (3):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_n(x)\,dx + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx \quad (4)$$

Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Нам нужно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = 0 \quad (5).$$

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon), \; n > N \quad \Rightarrow \quad |\varphi_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a;b]$$

$$\Big|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\Big| \;\le\; \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx \;<\; \int_a^b \varepsilon\,dx = \;\varepsilon\,(b-a),$$

что равносильно (5).

Тогда из формулы (4) будет следовать, что предел левой части также стремится к 0 и это будет означать, что:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \big[u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)\big]\,dx$$

$$= \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx,$$

то есть

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Запишем (2) в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Big(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\Big)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)\,dx$$

(как сумма конечного числа слагаемых)

$$= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\Big)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx \quad (6)$$

Условие равномерной сходимости рядов достаточно, но не необходимо.

[Пример:]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\Big].$$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \nrightarrow 0 \quad x\in[0;1].$$

Проверим соотношение (6) для этого ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{d(n^2x^2+1)}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\Big[\ln(1+n^2x^2)\Big]_0^1$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln(1+n^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0 = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

(6) выполняется, но ряд неравномерно сходится. Поэтому равномерная сходимость для почленного интегрирования является достаточным, но не необходимым условием.

6.

Почленное дифференцирование функциональных рядов

Теорема (достаточное условие).

1. Пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, члены которого определены и непрерывны на $[a;b]$
2. $u_k(x)$ для $k=1,2,\ldots$ имеют непрерывные производные.
3. сам ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на $[a;b]$ (**поточечно**)
4. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ **равномерно** сходится на $[a;b]$.

Тогда справедлива формула:

$$f'(x) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\Big)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x). \quad (1)$$

[Доказательство]

Обозначим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad \text{и} \quad f^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

$u_k'(x)$ непрерывны и их ряд сходится равномерно
$\Rightarrow f^*(x)$ есть равномерно сходящийся ряд непрерывных функций
$\Rightarrow f^*(x)$ *непрерывна* на $[a;b]$.

Рассмотрим интеграл от a до z, где $z \in [a;b]$:

$$\int_a^z f^*(t)\,dt = \int_a^z \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^z u_k'(t)\,dt.$$

Вторая часть по условию равномерной сходимости

Каждый $\int_a^z u_k'(t)\,dt$ равен $\left[u_k(t)\right]_a^z = u_k(z) - u_k(a)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^z u_k'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \big(u_k(z) - u_k(a)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) = f(z) - f(a).$$

Таким образом получаем:

$$\int_a^z f^*(t)\,dt = f(z) - f(a).$$

Это означает, что функция $f(x)$ (при фиксированном a) имеет производную $f^*(x)$ на $[a;b]$. Следовательно, дифференцируя обе части равенства по x *(учитывая свойство интегралов с переменным верхним пределом $\int_a^x f^*(t)\,dt = f(x) - f(a)$)*, мы приходим к

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f^*(t)\,dt\right] = f^*(x) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx}\left[f(x) - f(a)\right] = f'(x).$$

Значит,

$$f'(x) = f^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

Что и требовалось доказать. ■

7.

Интеграл зависящий от параметра. Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости функций. Непрерывность предельной функции

Пусть имеем функцию от двух переменных $f(x,y)$, где $x \in [a;b]$, $y \in Y$. Пусть при $\forall$ фиксированном y существует

$$\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Меняя y, мы получим другое значение. Будем считать, что этот интеграл существует для всех $y \in Y$. Этот интеграл называется **функцией** от параметра y:

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Равномерное стремление к предельной функции

Пусть функция $f(x,y)$ определена на некотором двумерном множестве $M = X \times Y$, и множество Y имеет **конечную** точку сгущения y_0.

Определение (для конечного y_0). Если для функции $f(x,y)$:

1. $\exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$, $\forall x \in X$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от x, что как только $|y - y_0| < \delta \implies |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$.

Тогда $f(x,y) \Longrightarrow \varphi(x)$ $\forall x \in X$ (**равномерно сходится** относительно x) при $y \to y_0$.

Пусть функция $f(x,y)$ определена на некотором двумерном множестве $M = X \times Y$, и множество Y имеет **бесконечную** точку сгущения $y_0 = +\infty$ (или $-\infty$).

Определение (для бесконечного y_0). Если для функции $f(x,y)$:

1. $\exists \lim\limits_{y \to +\infty(-\infty)} f(x,y) = \varphi(x)$, $\forall x \in X$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \Delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от x, что как только $y > \Delta$ (или $y < -\Delta$) $\implies |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$.

То $f(x,y) \Longrightarrow \varphi(x)$ $\forall x \in X$ (равномерно сходится относительно x) при $y \to +\infty$ (или $y \to -\infty$).

Необходимое и достаточное условие

Теорема (необходимое и достаточное условие) для конечного y_0

Пусть функция $f(x,y)$ определена на некотором двумерном множестве $M = X \times Y$, и множество Y имеет точку сгущения y_0. Для того, чтобы $f(x,y)$ при $y \to y_0$ имело бы предельную функцию $\varphi(x)$ и стремилась бы к ней равномерно, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x, \; |y - y_0| < \delta \implies |\, f(x,y) - f(x,y_0) \,| < \varepsilon \quad \forall x \in X. \qquad (1)$$

Доказательство (для конечного y_0)

1. **Необходимость.**
   Допустим, (1) и (2) (см. определение равномерной сходимости) выполняются, т.е. $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$. Тогда $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ относительно x при $y \to y_0$.
   Воспользуемся определением равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x: \; |y - y_0| < \delta \implies |\, f(x,y) - \varphi(x) \,| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X.$$

Аналогично для y':

$$|y' - y_0| < \delta \implies |\, f(x, y') - \varphi(x)\,| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X.$$

Тогда

$$|\, f(x, y') - f(x, y)\,| \;=\; |\, f(x, y') - \varphi(x) + \varphi(x) - f(x, y)\,| \;\le\; |\, f(x, y') - \varphi(x)\,| + |\,\varphi(x) - f(x, y)\,| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

2. **Достаточность.**
   Пусть выполняется условие (1). Зафиксируем $\forall z \in X$. Зафиксируем y так, чтобы $|y - y_0| < \delta$. Переходим к пределу при $y \to y_0$ в (1):

$$|\varphi(x) - f(x, z)| \;\le\; \varepsilon \quad \forall x \in X \quad (4)$$

$\implies$ $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ относительно x при $y \to y_0$.

Теорема (для бесконечного y_0)

Для того, чтобы $f(x, y)$ при $y \to y_0 = +\infty$ (или $-\infty$) имело бы предельную функцию $\varphi(x)$ и стремилось бы к ней равномерно в области X, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \Delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x, \; y > \Delta \text{ (или } y < -\Delta) \implies |\, f(x, y) - \varphi(x)\,| < \varepsilon \;\; \forall x \in X. \quad (1)$$

Непрерывность предельной функции

Теорема. В качестве X возьмём $[a; b]$. Пусть $f(x, y)$ при $\forall$ фиксированном $y \in Y$ непрерывна на X и известно, что при $y \to y_0$ $f(x, y) \implies \varphi(x)$. Тогда $\varphi(x)$ также будет непрерывной функцией на X.

Доказательство.

Рассмотрим последовательность $\{y_n\} \to y_0$, $y_n \in Y$. По условию $f(x, y) \implies \varphi(x)$ при $y \to y_0$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x, \; |y - y_0| < \delta \implies |\, f(x, y) - \varphi(x)\,| < \varepsilon \quad \forall x \in [a; b].$$

Выберем n — большое, чтобы $|\, y_n - y_0\,| < \delta$. Тогда

$$|\, f(x, y_n) - \varphi(x)\,| < \varepsilon \quad \forall x \in [a; b].$$

Определим

$$\psi_n(x) = f(x, y_n) \;\; \Rightarrow \;\; \psi_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \varphi(x).$$

Но $\psi_n(x) = f(x, y_n)$ — непрерывна на $[a; b]$, значит $\psi_n \to \varphi$ равномерно, а потому $\varphi(x)$ будет непрерывна на $[a; b]$.

Если имеем последовательность непрерывных функций $\{\psi_n(x)\} \subset [a; b]$, которая **равномерно** сходится к $\varphi(x)$, то предельная функция $\varphi(x)$ будет также непрерывна на $[a; b]$.

8.

Предельный переход по параметру под знаком интеграла. Непрерывность интеграла по параметру.

Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Если

1. $f(x,y)$ $\forall y \in Y$ непрерывна по $x \in [a,b]$
2. $f(x,y) \xrightarrow{\textit{равномерно}} \varphi(x)$ при $y \to y_0$

тогда

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx$$

[Доказательство]

$\varphi(x)$ непрерывная функция $\Rightarrow$ $\exists \int_a^b \varphi(x)dx$

Из 2. имеем
$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta(\varepsilon) > 0 \quad |y - y_0| < \delta \;=> |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \forall x\, \in X$

$$|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx| = |\int_a^b (f(x,y) - \varphi(x))dx| \le \int_a^b |f(x,y) - \varphi(x)|dx < \varepsilon(b-a)$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta(\varepsilon) > 0 \quad |y - y_0| < \delta \quad |\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx| < \varepsilon$$

Непрерывность функции $I(y)$

Теорема:

Пусть $f(x,y)$ непрерывна по совокупности в прямоугольнике $[a,b;c,d]$

Тогда $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ непрерывна на отрезке $[c,d]$

[Доказательство]
Так как $f(x,y)$ непрерывна по совокупности в прямоугольнике $[a,b;c,d]$, то она будет равномерно непрерывна по теореме Кантора

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall \left(x',y'\right), (x'',y'') \in [a,b;c,d]$$

$$|x'' - x'| < \delta \quad |y'' - y'| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\int_a^b f(x'', y'')dx - \int_a^b f(x', y')dx| < \varepsilon$$

Возьмем
$x'' = x' = x$ $(\forall x \in [a, b])$,
$y' = y_0$ $(\forall y_0 \in [c, d])$, $y'' = y$ и подставим

Получили

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad |y - y_0| < \delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\int_a^b f(x, y)dx - \int_a^b f(x, y_0)dx| < \varepsilon$$

Это означает, что $f(x, y) \xrightarrow{\text{равномерно}} f(x, y_0)$

Сделаем предельный переход согласно теореме

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx = \int_a^b f(x, y_0)dx = I(y_0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ в силу того, что y_0 произвольная точка из $[c, d]$, то
$I(y)$ непрерывна на $[c, d]$

■
