МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ III

Модуль I

Функциональные последовательности и ряды

Равномерная и поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов.

Определение: последовательность, членами которой являются функции, определенные на одной и той же области X, называется функциональной последовательностью.

$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x)$$

Если зафиксировать $x \in X$, получится числовая последовательность.

Допустим, что при $\forall x \in X$ последовательность имеет конечный предел (разный предел при разных x)

Предел этот зависит от x, обозначим его $f(x)$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

$f(x)$ — предельная функция, зависящая от X

Это явление называется поточечной сходимостью.

При фиксированном x

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon), n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

При изменении x меняется N.

Можно ли выбрать N так, чтобы оно зависело от ε и не зависело от x?

2 **Определение:** Если выполняются следующие условия:

1. для функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ $\exists$ предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon),\ n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon^{(2)}$, для $\forall x \in X$

Тогда говорят, что последовательность равномерно сходится к $f(x)$ на множестве X

$$\boxed{f_n(x) \rightrightarrows f(x)}$$

Пример равномерной сходимости:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2},\quad 0 \le x \le 1 \qquad f_1 = \frac{x}{1+x^2},\quad f_2 = \frac{x}{1+4x^2},\quad f_3 = \frac{x}{1+9x^2}$$

и так далее

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{x}{n^2} \to 0}{\frac{1}{n^2} + x^2} = 0$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n} < \varepsilon \Rightarrow N_\varepsilon = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$$

$$\left(\begin{array}{l} 2nx \le 1+n^2x^2, \\ (1-nx)^2 \ge 0 \end{array}\right)$$

Пример поточечной сходимости:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2},\quad 0 \le x \le 1$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0,\quad |f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{1}{nx} < \varepsilon$$

$n > \frac{1}{\varepsilon x}$. Возьмем $n \to \infty$ и $x = \frac{1}{n}$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \not< \varepsilon$

Не имеет места равномерная сходимость.

Рассмотрим ряд, определенный на X

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (3), \quad f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

Если x фиксируется, получается числовой ряд, для которого $f_n(x)$ – частичная сумма

Пусть ряд (3) сходится при $\forall x \in X$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \text{ – поточечная сходимость}$$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon), n > N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\ \varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \text{ – остаточный ряд} \end{cases}$$

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon$$

Ряд (3) равномерно сходится на множестве X, если

1. последовательность частичных сумм имеет предельную функцию $f(x)$ на X: $\exists f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ – ~~сумма ряда~~
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon), n > N \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff |\varphi_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in X$

<u>Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости последовательностей и рядов</u>

<u>Теорема:</u> для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась к предельной функции (и сумма ее) <u>равномерно</u> относительно $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon), n > N, \ m = 1, 2, \dots$$

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (4), \ \forall x \in X$$

Доказательство: I. Необходимость:

Допустим $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $\forall x \in X$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon),\ n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n + m > n > N, \Longrightarrow |f_{n+m}(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| = |f_{n+m}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| <$$

$$< |f_{n+m}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

II. Достаточность:

Допустим $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon),\ n > N,\ m = 1, 2, \ldots \ |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Зафиксируем $\forall x \in X$. При фиксированном x выполняется условие Коши* $\Longrightarrow$ последовательность сходится

При изменении x $\exists$ предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

*Фундаментальность

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon),\ n > N$$

Берём $n > N$ и $\forall x \in X$

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Сделаем предельный переход $m \to \infty$ $\left[\lim\limits_{m\to\infty} f_{m+n}(x) = f(x)\right]$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \text{ при } n > N \text{ и } \forall x \in X \Longrightarrow$$

$\Rightarrow$ по 2-ому условию равномерной сходимости Q.E.D.

Сформулируем это условие для функциональных рядов:

$$\sum u_k(x) \quad u_k(x) \text{ определены на } X$$

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

$$f_{n+m}(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_{n+m}(x)$$

Для того, чтобы ряд равномерно сходился необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon),\ n > N,\ m = 1, 2, 3, \ldots$

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

Признак Вейерштрасса

Теорема: Пусть имеем функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, каждый из членов ряда определен на X

Известно, что $|u_k(x)| \leq C_k, \forall x \in X$, при чём $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ сходится

Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится

Доказательство:

Рассмотрим:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| \leq C_{n+1} + \ldots + C_{n+m}$$

Согласно необходимому и достаточному условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon), \; n > N, \; m = 1, 2 \ldots$$

$$|C_{n+1} + C_{n+2} + \ldots + C_{n+m}| < \varepsilon$$

$$C_n \geq 0 \Rightarrow C_{n+1} + C_{n+2} + \ldots + C_{n+m} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

Начиная с некоторых $n > N$ и $m = 1, 2, \ldots$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| < C_{n+1} + C_{n+2} + \ldots + C_{n+m} < \varepsilon$$

Q.E.D. ∎

Непрерывность суммы ряда ($f(x)$)

Пусть имеем функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, $u_k(x)$ определены и непрерывны на множестве X.

Можно ли сказать, что сумма ряда будет непрерывной?

Не всегда, рассмотрим пример:

6 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x),\ 0 \le x \le 1$

При $x=1$, сумма ряда будет равна 0 ($f(x)=0$)

Рассмотрим при $0 \le x < 1$

$$(1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+\ldots+x^{n-1}(1-x)+\ldots=1$$

(бесконечно убывающая геом. прогрессия)

$$f(x)=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1-x}{1-x}=1 \qquad f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0;1)\\ 0, & x=1\end{cases}$$

В точке $x=1$ имеется разрыв 1-ого рода, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) \ne f(1)$

Легко заметить, что каждый член данного ряда является непрерывной функцией, но этот ряд сходится неравномерно на отрезке $[0;1]$

Теорема: (достаточное условие для непрерывности суммы ряда)

Пусть имеется функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, члены ряда определены на $[a;b]$ и непрерывны на $[a;b]$, этот ряд равномерно сходится на $[a;b]$. Тогда сумма ряда также будет непрерывной функцией на $[a;b]$

$f(x)$ - сумма ряда

Доказательство:

Возьмем $\forall x_0 \in [a;b]$, докажем, что $f(x)$ непрерывна в этой точке

$$f_n(x)=U_1(x)+\ldots+U_n(x)$$

$$f(x)=f_n(x)+\varphi_n(x) \quad (2)$$

$$f(x_0)=f_n(x_0)+\varphi_n(x_0) \quad (3)$$

$$(2)-(3) = f(x)-f(x_0)=f_n(x)-f_n(x_0)+\varphi_n(x)-\varphi_n(x_0)$$

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f_n(x)-f_n(x_0)|+|\varphi_n(x)|+|\varphi_n(x_0)| \quad (5)$$

Ряд равномерно сходится на $[a;b]$ $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon),\ n>N\ |\varphi_n(x)|<\varepsilon/2,\ \forall x\in[a;b]\ (6),\ |\varphi_n(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} (7)$$

$f_n(x)$ – сумма конечного числа непрерывных функций $\Longrightarrow$

$\Rightarrow f_n(x)$ – непрерывная функция, в частности в точке x_0.

то по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3 \quad (8)$$

Получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \ |x - x_0| < \delta$$

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (6), (7), (8) $\Longrightarrow f(x)$ непрерывна в x_0

Q.E.D.

Приведём пример ряда, состоящего из непрерывных функций. Этот ряд неравномерно сходится, но тем не менее сумма является непрерывной функцией

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1-(n-1)^2x^2} \right], \ 0 \le x \le 1$$

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}$$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) =$$

$$= \frac{x}{1+x^2} - 0 + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} + \ldots + \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1-(n-1)^2x^2} = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

Ряд неравномерно сходится, $u_n(x)$ непрерывны, $f(x)$ непрерывна на $[0;1]$

Q.E.D.

8 Почленный переход к пределу в функциональных рядах

Точка a является **точкой сгущения** для множества X (предельной точкой), если $\forall \delta$ в $(a-\delta; a+\delta)$ $\exists$ точка из X отличная от a.

Теорема (о почленном переходе к пределу)

Имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, каждый член определен на X.

a – точка сгущения для X, $\lim_{x \to a} u_n(x) = C_n$, $\forall n = 1, 2, \dots$

Этот функциональный ряд равномерно сходится на X, тогда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C$ сходится
2. $\lim_{x \to a} f(x) = C$

Почленный переход под знаком суммы $\lim_{x \to a} f(x) = C$

$$\lim_{x \to a} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to a} u_k(x)$$

Доказательство:

I. По необходимому и достаточному условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n > N \quad |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots u_{n+m}(x)| < \varepsilon \quad (1)$$

перейдем к пределу

$$|C_{n+1} + C_{n+2} + \dots + C_{n+m}| \leq \varepsilon \ (2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n = C$$

II. $$f(x) = f_n(x) + \underbrace{\varphi_n(x)}_{\text{ост. член}} \quad (3)$$

$$C = C_n + \underbrace{\gamma_n}_{\text{ост. член}} \quad (4)$$

$$f(x) - C = f_n(x) - C_n + \varphi_n(x) - \gamma_n$$

$$|f(x) - C| \leq |f_n(x) - C_n| + |\varphi_n(x)| + |\gamma_n| \quad (5)$$

Т.к ряд сходится равномерно

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon),\ n > N_1$

$|\varphi_n(x)| < \varepsilon/3,\ \forall x \in X \quad (6)$

Т.к $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ сходится:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2(\varepsilon),\ n > N_2$

$|\gamma_n| < \varepsilon/3$

Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$

$$\lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k = C_n$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad |x - a| < \delta$

$|f_n(x) - C_n| < \varepsilon/3 \quad (8)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ |x - a| < \delta \Rightarrow$

$$(5) = |f(x) - C| \overset{(6),(7),(8)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow \text{по Коши } \lim_{x \to a} f(x) = C$$

Q.E.D.

Почленное интегрирование рядов

Пусть имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (*), функции $u_n(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и ряд сходится. В каком случае можно интеграл от суммы заменить почленным интегрированием

Теорема: (Достаточное условие для почленного интегрирования)

Пусть имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (1), члены его непрерывны на $[a;b]$. Известно, что (1) сходится равномерно на $[a;b]$. Тогда справедлива формула:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots \quad (2)}$$

Замечание: Все интегралы в этой формуле существуют т.к (*)

10 Доказательство:

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x) \quad (3)$$

где $f_n(x) = u_1(x) + u_2(2) + \dots + u_n(x)$

$\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ — равномерно сходится

Т.к ряд равномерно сходится, то остаточный ряд также равномерно сходится и члены ряда — непрерывные функции $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_n(x)$ непрерывна. $f_n(x)$ непрерывна как сумма непрерывных функций. Поэтому возможно проинтегрировать обе части равенства (3)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_n(x)\,dx + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \varphi_n(x)\,dx \quad (4)$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = 0 \quad (5)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon),\ n > N \ |\varphi_n(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a;b]$

$\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)|\,dx < \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a)$, что равносильно (5)

Тогда согласно формуле (4), предел левой части стрем. к 0

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x))\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \dots + \int_a^b u_n(x)\,dx\right] =$$

$$= \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \dots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx$$

Q.E.D. ■

Запишем (2) в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left\{\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right\} dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)\,dx =$$

(как сумма конечного числа слагаемых)

$$= \lim_{n\to\infty}\int_a^b\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right\}dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx \quad (6)$$

Условие равномерной сходимости достаточно, но не необходимо:

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)$$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+(n-1)^2x^2}$$

$$f_n(x) \not\rightrightarrows 0, \quad x\in[0;1]$$

Проверим соотношение (6)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_0^1\frac{d(n^2x^2+1)}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)\Big|_0^1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln(1+n^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0 = \int_0^1 0\,dx = 0$$

(6) выполняется, но ряд сходится неравномерно $\Longrightarrow$ равномерная сходимость для почленного интегрирования является достаточным, но не необходимым условием.

Почленное дифференцирование функциональных рядов

Теорема: (достаточное условие)

Имеем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, члены которого определены и непрерывны на $[a;b]$, $u_k(x)$ $\forall k=1,2,\ldots$ имеют непрерывные производные, а также $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится поточечно на $[a;b]$, а $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$, тогда:

$$\boxed{f'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) \quad (1)}$$

12 Доказательство:

Имеем $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, обозначим $f^*(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$

$f^*(x)$ как сумма сходящегося ряда непрерывных функций, непрерывна на $[a;b]$. Проинтегрируем от a до $\forall x \in [a;b]$, взяв переменную t.

$$\int_a^x f^*(t)\,dt = \int_a^x \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t) \right\} dt \overset{\text{согласно теореме о почленном интегр.}}{=\!=\!=} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k'(t)\,dt \quad (2)$$

$$\int_a^x u_k'(t)\,dt = u_k(x) - u_k(a)$$

$$\int_a^x f^*(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k(x) - u_k(a)) \overset{u_k(x) \text{ поточечно сходится}}{=\!=} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) \quad (3)$$

Найдём производные левой и правой части (3), $\forall x \in [a;b]$

$f^*(t)$ непрерывна на $[a;b]$, тогда

$$\left(\int_a^x f^*(t)\,dt \right)'_x = f^*(x)$$

$$(3) \Rightarrow f^*(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)'$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

Q.E.D. ■

Интегралы, зависящие от параметра

Пусть имеем $f(x,y)$, где $x\in[a;b]$, $y\in Y$.

Пусть при $\forall$ фиксированном y $\exists \int_a^b f(x,y)dx$

Меняя y, получаем другое значение

Будем считать, что этот интеграл существует для $\forall y\in Y$

Этот интеграл называется <u>функцией от параметра y</u>

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

Равномерное стремление к предельной функции

Пусть $f(x,y)$ определена на $M=X\times Y$, и множество Y имеет конечную точку сгущения y_0

<u>Определение</u> (для конечного y_0)

Если для $f(x,y)$

1. $\exists \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$, $\forall x\in X$

2. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$, не зависящее от X,
$|y-y_0|<\delta \Longrightarrow |f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in X$

то $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, $\forall x\in X$, $y\to y_0$

и говорят, что $f(x,y)$ <u>стремится равномерно</u> к предельной функции $\varphi(x)$ относительно X

Пусть $f(x,y)$ определена на $M=X\times Y$, и множество Y имеет бесконечную точку сгущения $y_0=+\infty$ (или $-\infty$)

<u>Определение</u> (для бесконечного y_0)

Если для $f(x,y)$

1. $\exists \lim\limits_{y\to+\infty(-\infty)} f(x,y)=\varphi(x)$, $\forall x\in X$

2. $\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta(\varepsilon)>0$, не зависящее от X, $|y|>\Delta \Longrightarrow |f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in X$

то $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, $\forall x\in X$ (стремится равномерно относительно X) при $y\to y_0$

14 # Необходимое и достаточное условие равномерного стремления

Теорема:

Пусть $f(x,y)$ определена на $M = X \times Y$, множество Y имеет точку сгущения y_0. Для того, чтобы $f(x,y)$ при $y \to y_0$ имела предельную функцию $\varphi(x)$ и стремилась к ней равномерно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x,$$

$$|y - y_0| < \delta \text{ и } |y' - y_0| < \delta \implies |f(x,y') - f(x,y)| < \varepsilon, \ \forall x \in X$$

Доказательство:

Необходимость $(\implies)$

Допустим, $\exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x), \ \forall x \in X$ и

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, не зависящая от x,

$|y - y_0| < \delta \implies |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon/2, \ \forall x \in X$

Аналогично $\implies$

$|y' - y_0| < \delta \implies |f(x,y') - \varphi(x)| < \varepsilon/2, \ \forall x \in X$

$$\implies |f(x,y') - f(x,y)| = |f(x,y') - \varphi(x) + \varphi(x) - f(x,y)| \leq$$

$$\leq |f(x,y') - \varphi(x)| + |f(x,y) - \varphi(x)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Достаточность $(\impliedby)$

Пусть выполняется... $|f(x,y') - f(x,y)| < \varepsilon, \ \forall x \in X$, зафикс. x

Зафиксируем y так, чтобы $|y - y_0| < \delta$.

Перейдем к пределу при $y' \to y_0$

$$|\varphi(x) - f(x,y)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in X \implies$$

$\implies f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ относительно x при $|y - y_0| < \delta$

Аналогично при предельном переходе при $y \to y_0$ ... QED. ■

<u>Теорема</u> (для бесконечного X). Для того, чтобы $f(x,y)$ имела предельную функцию $\varphi(x)$ при $y \to y_0$ ($+\infty$ или $-\infty$) и стремилась бы к ней <u>равномерно</u> в области X, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta(\varepsilon), \text{ не зависящее от } x, \ y', y > \Delta \ (y', y < -\Delta)$$

$$|f(x,y') - f(x,y)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Непрерывность предельной функции

<u>Теорема:</u> Пусть $X = [a;b]$

Пусть $f(x,y)$ непрерывна на X при $\forall$ фиксированном $y \in Y$, известно, что $y \to y_0 \Rightarrow f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$. Тогда $\varphi(x)$ также будет непрерывной функцией.

<u>Доказательство:</u>

Рассмотрим последовательность $\{y_n\} \to y_0$, $y_n \in Y$

Т.к. $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ не зависящее от } x, \ |y - y_0| < \delta$$

$$|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a;b]$$

Выберем достаточно большое n так, чтобы $|y_n - y_0| < \delta$, тогда

$$|f(x,y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Обозначим $\psi_n(x) = f(x,y_n) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $n \to \infty$,

кроме того $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \psi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$$

Если имеем последовательность непрерывных функций $\{\psi_n(x)\} \in [a;b]$, которая равномерно сходится к $\varphi(x)$, то предельная функция $\varphi(x)$ будет также непрерывна на $[a;b]$.

Q.E.D. ■

16 Предельный переход под знаком Интеграла

Рассмотрим интеграл:

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Теорема:

Если $f(x,y)$ при $\forall$ фиксированном $y \in Y$ непрерывна по $x \in [a;b]$ и $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$ (y_0 – точка сгущения), тогда справедлива формула:

$$\boxed{\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)\,dx}$$

Доказательство:

$\varphi(x)$ – непрерывная функция $\Rightarrow \exists \int_a^b \varphi(x)\,dx$

$f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \ |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X$

$$\left| \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f(x,y) - \varphi(x))\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x,y) - \varphi(x)|\,dx <$$

$$< \varepsilon\,(b - a).$$

Получим, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от x, $|y - y_0| < \delta$

$$\left| \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| < \varepsilon(b - a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

Следовательно: $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \ |y - y_0| < \delta$

$$\left| \int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

QED ■

Непрерывность функции $I(y)$ (при предельном переходе)

Теорема: пусть $f(x,y)$ непрерывна (и по x и по y) в прямоугольнике $[a,b;c,d]$. Тогда $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ будет непрерывна на $[c;d]$

Доказательство:

Т.к. $f(x,y)$ непрерывна по совокупности в замкнутом прямоугольнике $[a,b;c,d]$, то она будет равномерно непрерывна согласно Теореме Кантора.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0 \quad \exists\delta(\varepsilon)>0,\ \forall \text{точки } (x',y'),\ (x'',y'')\in[a,b;c,d]$$

$$|x''-x'|<\delta,\ |y''-y'|<\delta \Longrightarrow |f(x'',y'')-f(x',y')|<\varepsilon$$

Возьмём $x''=x'=x$ $(\forall x\in[a;b])$, $y'=y_0$ $(\forall y\in[c;d])$, $y''=y$.

Подставим:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0,\ |y-y_0|<\delta$$

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon,\ \forall x\in[a;b] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x,y)\rightrightarrows f(x,y_0) \text{ при } y\to y_0$$

Применим предельный переход под интегралом:

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)dx=\int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx=\int f(x,y_0)dx=I(y_0)$$

В силу того, что y_0 – произвольная точка из $[c,d]$, то наша функция $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$.

Q.E.D. ■

Дифференцирование под знаком интеграла

$$\boxed{I'(y) = \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)'_y = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx \quad (1)}$$

Теорема (достаточное условие)

Пусть $f(x,y)$ определена на прямоугольнике $[a;b,c,d]$ и непрерывна по x при $\forall$ фиксированном $y \in [c,d]$. Также, существует конечная частная производная $f'_y(x,y)$ и она непрерывна по совокупности. Тогда справедлива формула $\boxed{(1)}$

Доказательство:

Возьмем $\forall y_0 \in [c,d]$. Докажем, что $\exists I'(y_0)$ и справедливо (1)

Придадим y_0 приращение Δy так, чтобы $y_0 + \Delta y \in [c,d]$.

$$I(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)\,dx, \quad I(y_0+\Delta y) = \int_a^b f(x, y_0+\Delta y)\,dx$$

$$\frac{I(y_0+\Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \frac{\int_a^b f(x,y_0+\Delta y)dx - \int_a^b f(x,y_0)dx}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y}dx \quad \boxed{(2)}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{I(y_0+\Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b \frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y} = \int_a^b \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y}$$

$$= \int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx \quad \boxed{(3)}$$

~~Докажем, что $\exists$ правый предел. Тогда будет $\exists$ и левый, который равен $I'(y_0)$~~

Рассмотрим отрезок $[y_0, y_0+\Delta y]$, применим теорему Лагранжа

$$\frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y} = f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y), \quad 0<\theta<1$$

$$\frac{\varphi(y_0+\Delta y) - \varphi(y_0)}{\Delta y} = \varphi'(y_0+\theta\Delta y), \quad 0<\theta<1$$

Т.к по условию $f'_y(x,y)$ непрерывна, то по Теореме Кантора на $[c,d]$ она будет равномерно непрерывна.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon),\ \forall (x',y'),\ (x'',y'') \in [a,b;c,d]$$

$$|x''-x'| < \delta,\ |y''-y'| < \delta \Rightarrow |f'_y(x'',y'') - f'_y(x',y')| < \varepsilon$$

Возьмем $x''=x'=x$, $y'=y_0$, $y''=y_0+\theta\Delta y$ и подставим

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ |\Delta y| < \delta$$

$$|f'_y(x, y_0+\theta\Delta y) - f'_y(x,y_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a;b]$$

Рассмотрим на $y \in [y_0, y_0+\Delta y]$

$$\frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = f'_y(x, y_0+\theta\Delta y)$$

$$\left|\frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} - f'_y(x,y_0)\right| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon),\ |\Delta y| < \delta, \quad \forall x \in [a;b]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \rightrightarrows f'_y(x,y_0)$$

Совершим предельный переход:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b \frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y}\,dx = \int_a^b \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y}\,dx =$$

$$= \underline{\int_a^b f'_y(x,y_0)\,dx}.$$ Так как y_0 – произвольный, то

$$I'(y) = \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)'_y = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx$$

Q.E.D. ∎

Интегрирование под знаком интеграла

Теорема:

Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b;c,d]$, тогда

$\forall \eta,\ c<\eta<d$
$$\boxed{\int\limits_c^\eta dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^\eta f(x,y)\,dy \quad (1)}$$

Доказательство:

Докажем, что производные левой и правой частей равны:

Для левой части: т.к $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ непрерывна на $[a,b;c,d]$.

Тогда:
$$\left(\int\limits_c^\eta I(y)\,dy\right)'_\eta = I(\eta)$$

Для правой части

Пусть $\underline{\varphi(x,\eta)}=\int\limits_c^\eta f(x,y)\,dx$ непрерывна по x

$\varphi'(x,\eta)=f(x,\eta)$ непрерывна по совокупности

$\Rightarrow \varphi(x,\eta)$ удовлетворяет условию теоремы дифференцирования по параметру

$$\underbrace{\left(\int\limits_a^b \varphi(x,\eta)\,dy\right)'_\eta}_{\text{правая часть (1)}}=\int\limits_a^b \varphi'(x,\eta)\,dx=\int\limits_a^b f(x,\eta)\,dx=\underbrace{I(\eta)}_{\text{левая часть (1)}}$$

Если производные равны, то значения интегралов отличаются на константу:

$$\int\limits_c^\eta dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^\eta f(x,y)\,dy+\text{const}$$

Q.E.D. ■

Непрерывность функции $I(y)$ в случае, когда и пределы интеграла зависят от параметра.

Рассмотрим следующий случай:

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \quad (1)$$, где $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ — непрерывные кривые

Теорема:

Пусть $f(x,y)$ непрерывна и определена на $[a,b;c,d]$, а кривые $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны и не выходят за границы прямоугольника $[a,b;c,d]$ $(c \le y \le d)$.

Тогда $(1) = I(y)$ является <u>непрерывной функцией</u> на $[c;d]$

<u>Доказательство:</u>

Возьмём $\forall y_0 \in [c;d]$, покажем, что $I(y)$ непрерывна в y_0

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)\,dx$$

$$\lim_{y\to y_0} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = I(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx$$ по теореме о непрерывности интеграла от параметра

$$\left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \right| \le \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} \overbrace{|f(x,y)|}^{\text{ограничена по 1-ой теореме Вейерштрасса}}\,dx \le M\,|\beta(y) - \beta(y_0)| \quad (3)$$

В силу непрерывности $\beta(y)$ при $y \to y_0 \Rightarrow \beta(y) \to \beta(y_0)$

Значит, в соотношении (3) правая часть стремится к 0

Следовательно и левая часть стремится к 0 при $y \to y_0$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{y\to y_0} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = 0 \Longrightarrow \lim_{y\to y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)\,dx = 0 \quad (2) \Rightarrow \lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$$

$\Longrightarrow$ непрерывна в $\forall y_0 \in [c,d] \Longrightarrow$ непрерывна на $[c,d]$ QED.

Производная функции $I(y)$

Теорема:

Пусть $f(x,y)$ непрерывна и определена в прямоугольнике $[a,b;c,d]$ а кривые $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны и не выходят за границы прямоугольника, $c \le y \le d$, кроме того, $f(x,y)$ имеет непрерывную производную $f'_y(x,y)$ в прямоугольнике $[a,b,c,d]$, также $\exists \alpha'(y)$ и $\beta'(y)$. Тогда $I(y)$ имеет производную по параметру y и справедлива формула:

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)\,dx + \beta'(y)\cdot f(\beta(y),y) - \alpha'(y)\cdot f(\alpha(y),y) \qquad (5)$$

Доказательство:

Вычитаем производную правой части для каждого слагаемого:

$$\left(\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx\right)'_{y=y_0} = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f'_y(x,y_0)\,dx$$ (по теореме о дифференцировании под знаком интеграла)

$$\underline{\varphi(y)} = \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx$$

$$\underline{\varphi(y_0)} = \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx = 0$$

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{y-y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \overset{\text{согласно теореме о среднем значении}}{=} \frac{1}{y-y_0} f(\bar{x},y)(\beta(y)-\beta(y_0)) \qquad (6)$$

$$\beta(y_0) < \bar{x} < \beta(y)$$

При $y \to y_0$ предел $\frac{\beta(y)-\beta(y_0)}{y-y_0} \to \beta'(y_0)$, $f(\bar{x},y_0) \to f(\beta(y_0),y_0)$, так как $\bar{x} \to \beta(y_0)$ и $f(x,y)$ непрерывна по совокупности

Правая часть (6) при $y \to y_0$ стремится к $\beta'(y_0)\cdot f(\beta(y_0),y_0)$, а левая часть: $\varphi'(y_0) = \left(\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right)'_{y=y_0}$

Аналогично: $\left(\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)\,dx\right)'_{y=y_0} = \alpha'(y)\cdot f(\alpha(y),y)$. Q.E.D. ■

Несобственные интегралы

Равномерная сходимость несобственных интегралов

Пусть $f(x,y)$ определена на $x \geq 0$, $y \in Y$

Известно, что при $\forall y$ существует несобственный интеграл первого рода:

$$\exists I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x,y)dx = \lim_{A \to +\infty} F(A,y)$$

Определение:

Если $F(A,y) \rightrightarrows I(y)$ относительно $y \in Y$ при $A \to +\infty$, то скажем, что $I(y)$ равномерно сходится относительно y при соответствующих значениях параметра A

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_0(\varepsilon), \text{ не зависящее от } y, \ \forall A > A_0, \forall y \in Y$$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^A f(x,y)dx \right| = \left| \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

или

$$|I(y) - F(A,y)| < \varepsilon$$

Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости несобственных интегралов

Теорема: для того, чтобы интеграл $I(y)$ равномерно сходился относительно $y \in Y$ необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_0(\varepsilon) \geq a$, не зависящий от y, $A' > A > A_0 \Longrightarrow$

$\Rightarrow \left| \int_a^{A'} f(x,y)dx - \int_a^A f(x,y)dx \right| = \left| \int_A^{A'} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$ для $\forall y \in Y$

Доказательство: Согласно критерию равномерной сходимости ($f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ относительно y, $y \to +\infty$)

$F(A,y) \rightrightarrows I(y)$ относительно y при $A \to +\infty$

$\forall \varepsilon>0\ \exists A_0(\varepsilon)\geq a$, не зависящее от y, $A'>A>A_0$,

$$|F(A',y)-F(A,y)|<\varepsilon,\ \forall y\in Y \quad \text{так как} \quad F(A,y)=\int_a^A f(x,y)dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\int_a^{A'} f(x,y)dx-\int_a^{A} f(x,y)dx\right|<\varepsilon,\ \forall y\in Y$$

или

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$$

Q.E.D. ■

Признак Вейерштрасса (равномерная сходимость) для несобственных интегралов. Теорема:

Пусть $f(x,y)$ непрерывна от x, и при $x\geq a$ $\exists \varphi(x)$ интегрируемая на $[a;+\infty)$ $\Longleftrightarrow$ $\exists \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ (конечный интеграл), для $\forall y\in Y$ $\Longrightarrow$ $|f(x,y)|\leq\varphi(x)$, $x\geq a$

Тогда $I(y)$ равномерно сходится относительно y.

Доказательство:

Рассмотрим $A<A'$

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right|\leq\int_A^{A'}|f(x,y)|dx\leq\int_A^{A'}\varphi(x)dx<\varepsilon$$

Имеем критерий интегрируемости функции от одной переменной

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A_0(\varepsilon)\geq a,\ \forall A'>A>A_0\ \left|\int_A^{A'}\varphi(x)dx\right|<\varepsilon$$

$\Longrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists A_0(\varepsilon)\geq 0$, не зависящее от y, $\forall A'>A>A_0$

$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right|<\varepsilon,\ \forall y\in Y$ (согласно необходимому и достаточному условию)

$\Longrightarrow I(y)$ равномерно сходится относительно $y\in Y$. Q.E.D. ■

Функция $\varphi(x)$ называется мажорирующей для $f(x,y)$

Предельный переход под знаком несобственного интеграла

Приведем пример, что даже при равномерной сходимости не имеет места предельный переход под знаком интеграла

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}}, & x > 0 \\ f_n(0) = 0 & \end{cases}, \quad n \to \infty$$

Покажем

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

Докажем, что $f_n(x)$ равномерно сходится на $[0; +\infty]$. Найдём $f_n'(x)$

$$f_n'(x) = -\frac{3x^2 n}{x^6} e^{-\frac{n^2}{2x^2}} + \frac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} \cdot \frac{4nx}{4x^4} = e^{-\frac{n}{2x^2}} \cdot \frac{n}{x^4}\left(\frac{n}{x^2} - 3\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{x^2} = 3 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{n}{3}}$$

Оценим $f_n(x)$. При $\begin{cases} x < \sqrt{n/3} \Rightarrow f_n'(x) > 0 \\ x > \sqrt{n/3} \Rightarrow f_n'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ в точке $x = \sqrt{n/3}$ $\exists \sup$

$$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right) = \frac{n}{(n/3)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{n}{2n/3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

При $n \to \infty$ $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right) = 0 \Rightarrow \sup \to 0 \Rightarrow f_n(x) \to 0$ независим от x

Получили, что $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) = 0$ при $x \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0 = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Проверим $\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \ (\overset{?}{=} 0)$

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^A \frac{n}{x^3} \cdot e^{-\frac{n}{2x^2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} e^{-\frac{n}{2x^2}}\Big|_\varepsilon^A = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(e^{-\frac{n^2}{2A^2}} - e^{-\frac{n}{2\varepsilon^2}}\right) = e^{-\frac{n}{2A^2}} \underset{\text{при } A\to\infty}{=} e^0 = 1$$

$1 \neq 0 \Rightarrow$ предельный переход не имеет место.

Теорема (о предельном переходе под знаком несобственного интеграла)

Пусть $f(x,y)$ определена при $x \to a$ и $y \in Y$. Пусть $f(x,y)$ непрерывна по x. Известно, что на $\forall$ конечном отрезке $[a;A]$ $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \to y_0$. Известно, что $I(y)$ равномерно сходится относительно $y \in Y$. Тогда:

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

Доказательство:

Воспользуемся необходимым и достаточным условием равномерной сходимости $I(y)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_0(\varepsilon),\ \forall A' > A > A_0 \quad \left| \int_A^{A'} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

Перейдем к пределу при $y \to y_0$

$$\left| \int_A^{A'} \varphi(x)\,dx \right| \leq \varepsilon \quad \Longrightarrow \varphi(x) \text{ интегрируема}$$

на $[a; +\infty)$, т.е

Оценим разность. Возьмем $\forall A > a$: $\exists \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \right| = \left| \int_a^{A} f(x,y)dx - \int_a^{A} \varphi(x)dx + \int_A^{+\infty} f(x,y)dx - \int_A^{+\infty} \varphi(x)dx \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| \int_a^{A} f(x,y)dx - \int_a^{A} \varphi(x)dx \right|} + \underbrace{\left| \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \right|} + \underbrace{\left| \int_A^{+\infty} \varphi(x)\,dx \right|}$$

Т.к интеграл $I(y)$ равномерно сходится, то $\left| \int_A^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon/3$,

так как он существует по определению $\left| \int_A^{+\infty} \varphi(x)dx \right| < \varepsilon/3$

Отрезок $[a;A]$ конечный. $f(x,y)$ непрерывна на $\forall$ конечном отрезке $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ имеем право перейти к пределу

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{A} f(x,y)\,dx = \int_a^{A} \lim_{y \to y_0} f(x,y)\,dx = \int_a^{A} \varphi(x)dx \Longrightarrow$$

при достаточно близких y и y_0 $\left| \int_a^{A} f(x,y)dx - \int_a^{A} \varphi(x)dx \right| < \varepsilon/3$

Следовательно, $\left| \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx \right| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$ QED. ■

Непрерывность несобственных интегралов $I(y)$

Теорема:

Пусть $f(x,y)$ определена и непрерывна как функция от 2-х переменных, $x > a$, $y \in [c; d]$.

Если $I(y)$ равномерно сходится при $y \in [c, d]$, то

$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ непрерывна на $[c; d]$.

Доказательство:

для $\forall y_0 \in [c, d]$, если $f(x,y) \rightrightarrows f(x, y_0)$ относительно x, то

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x, y_0)\,dx$$

$\Downarrow$ (Согласно теореме предельного перехода для несобственных интегралов)

$$\lim I(y) = I(y_0),$$

Следовательно, $I(y)$ непрерывна в $\forall y_0 \in [c, d]$ QED ■

Интегрирование по параметру для несобственных интегралов

Теорема:

Пусть $f(x,y)$ непрерывна по совокупности, $x \geq a$, $y \in [c, d]$.

$I(y)$ равномерно сходится относительно $y \in [c; d]$. Тогда:

$$\boxed{\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy}$$

Доказательство:

$$\int_c^d I(y)\,dy = \overbrace{\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx}^{D} = \overbrace{\int_c^d dy \int_a^{A} f(x,y)\,dx}^{E} + \overbrace{\int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx}^{F}$$

$$\int_c^d dy \int_a^{A} f(x,y)\,dx = \int_a^{A} dx \int_c^d f(x,y)\,dy \implies \overbrace{\int_c^d I(y)\,dy - \int_a^{A} dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx}^{D - E = F}$$

согласно теореме об интегрировании под знаком интеграла

Оценим $\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx$ по модулю:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists A_0(\varepsilon)\geq a, \quad A>A_0, \quad \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$$

$$\left|\int_c^d dy\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| \leq \int_c^d\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,dx\right|dy < \varepsilon(d-c)$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\int_c^d I(y)\,dy - \int_a^A dx\int_c^d f(x,y)\,dy\right|<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A dx\int_c^d f(x,y)\,dy = \int I(y)\,dy = \int_a^{+\infty} dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

$$\int_a^{+\infty} dx\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

Q.E.D. ■

Дифференцирование по параметру для несобственных интегралов

Теорема:

Пусть функция $f(x,y)$ определена при $x\geq a$, $y\in[c,d]$, причём:

1. $f(x,y)$ непрерывна по совокупности
2. $\exists f'_y(x,y)$ и она непрерывна по совокупности
3. при $\forall y \ \exists \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$
4. $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$ равномерно сходится относительно $y\in[c;d]$

Тогда:

$$I'(y) = \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)'_y = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$$

Доказательство:

Из теоремы об интегрировании по параметру для несобственных интегралов имеем:

$$\int_c^y dy \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^y f'_y(x,y)\,dy$$

Обозначим $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx = \varphi(y)$

$$\left(\int_c^y \varphi(y)\,dy\right)'_y = \varphi(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dx$$

$$\int_c^y f'_y(x,y)\,dy = f(x,y)\Big|_c^y = f(x,y) - f(x,c)$$

$$\int_a^{+\infty} (f(x,y) - f(x,c))\,dx = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x,c)\,dx$$

const $\Rightarrow$ производная равна нулю

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\,dy = \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)'_y - \underbrace{\left(\int_a^{+\infty} f(x,c)\,dx\right)'_y}_{=0} =$$

$$= \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)'_y = I'(y)$$

$\int f'_y(x,y)\,dx = \varphi(y)$ непрерывна на $[c,d]$, т.к

- $f'_y(x,y)$ непрерывна по совокупности
- $I(y)$ равномерно сходится относительно y

$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ непрерывна, так как

- $f(x,y)$ непрерывна по совокупности
- $I(y)$ равномерно сходится относительно y

Q.E.D. ■

Неявные функции

Понятие неявной функции от одной переменной

Пусть дано уравнение $F(x,y)=0$,
$F(x,y)$ – некоторая функция, определённая на множестве $X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$

Пример: $\frac{yx}{12} - \log(x+10) + y^5 - 100x^y = 0$

Пусть каждому значению x из X соответствует одно или несколько y из Y, $F(x,y)=0$, $y=f(x)$, при этом, если подставить $f(x,y)$ в $F(x,y)=0$, то оно становится тождественным.

Определение: функция $y=f(x)$ называется неявной если она задаётся с помощью неразрешимой относительно y функцией $F(x,y)$. Функция называется явной, если непосредственно задана зависимость y от x.

В прямоугольнике $[a,b;c,d]$ уравнение $F(x,y)=0$ определяет y как однозначную функцию от x $(y=f(x))$, если для каждого x существует только один y так, что если $F(x,y)=0$ то $\Rightarrow y=f(x)$ и $F(x,y)$ равносильны (определение)

y – однозначная функция от x при $F(x,y)=0$, если для $\forall x$ $\exists$ единственный y такой, что если $F(x,y)=0$, тогда $y=f(x)$ и $F(x,y)$ равносильны

Теорема о существовании и свойствах неявной функции

Теорема

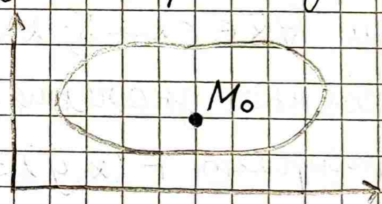
Пусть $F(x,y)$ определена и непрерывна по совокупности в некоторой окрестности $M_0(x_0,y_0)$ вместе со своими частными производными. Известно, что $F(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Тогда:

1) $\exists$ некоторая окрестность точки $M_0 = (x_0-\delta, x_0+\delta; y_0-\delta', y_0+\delta')$, в которой уравнение $F(x,y)=0$ определяет y как однозначную функцию от x

2) $y_0=f(x_0)$

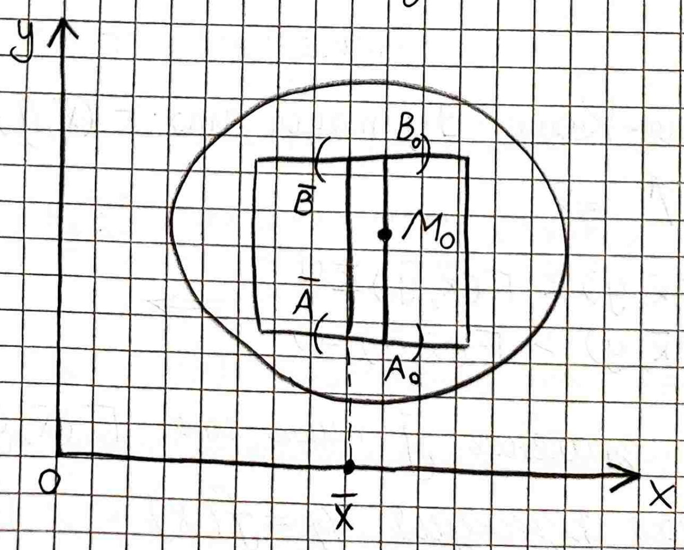
3) Неявная функция $y=f(x)$ непрерывна в $(x_0-\delta; x_0+\delta)$

4) $y=f(x)$ имеет конечную производную в промежутке $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, которая непрерывна.



Доказательство 1) пункта

Без нарушения общности $F'(x,y)\neq 0 \Rightarrow \exists F'_y(x_0,y_0)>0$, непрерывная по совокупности. Поэтому по свойству сохранения знака для непрерывных функций можно сказать, что существует замкнутый квадрат $D=[x_0+\delta; x_0-\delta; y_0-\delta', y_0+\delta']$, $D \in$ окрестности точку M_0.



Рассмотрим вертикальный отрезок A_0B_0, проходящий через M_0 $A_0(x_0, y_0-\delta')$, $B_0(x_0, y_0+\delta')$. x_0 зафиксирован.

Получим, что $F(x_0, y)$ будет возрастающей по y, кроме того, $F(x,y)$ непрерывна по совокупности $\Longrightarrow$ $F(x_0,y)$ непрерывна и возрастает по y на $[A_0, B_0]$

$$\begin{cases} \text{при } y < y_0,\ F(x_0,y) < F(x_0,y_0) = 0 \\ \text{при } y > y_0,\ F(x_0,y_0) > F(x_0,y_0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} F(A_0) < 0 \\ F(B_0) > 0 \end{matrix}$$

По вертикали:

$F'_y(x_0,y_0) > 0$, $y \in (y_0-\delta; y_0+\delta')$, $y < y_0 \Rightarrow F(x_0,y) < 0$,

$y > y_0 \Rightarrow F(x_0,y) > 0$

По горизонтали

$F(x, y_0-\delta') < 0$ в окрестности A_0, $F(x, y_0+\delta') > 0$ в окрестности B_0

Возьмём $\forall \bar{x} \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ и покажем, что ему соответствует единственное значение $\bar{y} \in (y_0-\delta'; y_0+\delta')$, и что эта пара удовлетворяет $F(\bar{x},\bar{y}) = 0$ $\Rightarrow$ получим неявную функцию которая будет однозначной

Возьмем $\bar{x}$ на нижней грани и проведём вертикаль

$\bar{A}(\bar{x}, y_0-\delta')$, $\bar{B}(\bar{x}, y_0+\delta')$

$F(\bar{A}) < 0$, $F(\bar{B}) > 0$. На вершинах имеем функцию $F(\bar{x}, y)$, зависящую от y

Согласно теореме Больцано-Коши $\exists \bar{y}$ такой, что $F(\bar{x},\bar{y}) = 0$

Т.к. $F'_y > 0 \Rightarrow F(\bar{x}, y)\uparrow \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{при } y < \bar{y},\ F(\bar{x},y) < F(\bar{x},\bar{y}) = 0 \\ \text{при } y > \bar{y},\ F(\bar{x},y) > F(\bar{x},\bar{y}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$\Rightarrow$ Нашли единственное значение $\bar{y}$ такое, что $F(\bar{x},\bar{y}) = 0$

$\Rightarrow$ $\exists$ однозначная неявная функция $y = f(x)$ Q.E.D. ■

Доказательство 2) пункта:

$x_0 \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$
$y_0 \in (y_0 - \delta'; y_0 + \delta')$ вместе удовлетворяют $F(x,y)=0 \Longrightarrow$

$\Rightarrow y_0$ является соответствующим значением для x_0

$$y_0 = f(x_0)$$ Q.E.D

Доказательство 3) пункта

$$y_0 = f(x_0) \text{ является корнем } F(x,y)=0$$

Возьмем x и y так, чтобы $F(x,y)=0$, дадим x приращение Δx

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$$

$$\underbrace{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = 0}$$

Это — полное приращение $\Delta F(x,y)$ в точке (x,y)

$$\Delta F(x,y) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) =$$

$$= \underbrace{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x, y+\Delta y)}_{\text{приращение по } x} + \underbrace{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}_{\text{приращение по } y} =$$

$$= \underbrace{F_x'(x+\Theta\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + F_y'(x, y+\Theta'\Delta y)\Delta y = 0}_{\text{Согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях, } 0<\Theta,\Theta'<1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x'(x+\Theta\Delta x, y+\Delta y)}{F_y'(x, y+\Theta'\Delta y)}$$

Из определения непрерывности $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\left| \frac{F_x'(x+\Theta\Delta x, y+\Delta y)}{F_y'(x, y+\Theta'\Delta y)} \right| \le \frac{M}{m} \quad (*)$$

Так как $F'(x)$ непрерывна, то непрерывна по совокупности $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса ограничена. $\Longrightarrow$

$\exists M, \ |F_x'(x+\Theta\Delta x, y+\Delta y)| \le M$

$F_y'(x,y)$ непрерывна и на указанной окрестности $F_y' > 0$,
$\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса достигает своего наибольшего и наименьшего значений $F_y'(x, y + \Theta' \Delta y) \geq m > 0$

$$(*) \Rightarrow \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \leq \frac{M}{m} \Rightarrow |\Delta y| \leq \frac{M}{m}|\Delta x|$$

Если $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$ Q.E.D. ■

Доказательство 4) пункта:

Для $y = f(x)$ и любой точки x_0, $\exists f'(x)$, которая непрерывна в δ-окрестности x (т.е $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$)
Воспользуемся предыдущим доказательством и непрерывностью f_x' и f_y' по совокупности.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} F_x'(x + \Theta \Delta x, y + \Delta y) = F_x'(x,y)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} F_y'(x, y + \Theta' \Delta y) = F_y'(x,y)$$

Т.к $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x'(x_0 + \Theta \Delta x, y + \Delta y)}{F_y'(x, y + \Theta' \Delta y)} \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y_x' = -\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$

Докажем непрерывность производной $f'(x)$. Подставим $y = f(x)$

$$y_x' = -\frac{F_x'(x, f(x))}{F_y'(x, f(x))} \quad (F(x, f(x)) = 0)$$

Обе функции в дроби непрерывны, т.к зависят от непрерывных аргументов $\Rightarrow$ y' непрерывна

Q.E.D. ■

Неявные функции от двух переменных

$$F(x,y,z)=0 \quad (*)$$

Определение: скажем, что уравнение (*) однозначно определяет неявную функцию $z=f(x,y)$ в параллелепипеде $(a;b,\ c;d,\ e;f)$, если $\forall (x,y)\in(a;b,\ c;d)$ соответствует единственное значение z, являющееся корнем уравнения (*)

Теорема о существовании и непрерывности неявной функции от двух переменных

Пусть $f(x,y,z)$ вместе со своими частными производными F'_x, F'_y, F'_z непрерывны в некоторой окрестности точки $P_0(x_0,y_0,z_0)$, причём $F(P_0)=F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

Тогда:

1. В некоторой окрестности $D: (x_0-\delta_1; x_0+\delta_1,\ y_0-\delta_2; y_0+\delta_2,\ z_0-\delta_3; z_0+\delta_3)$ существует однозначно неявная функция $\exists z=f(x,y)$
2. $z_0=f(x_0,y_0)$
3. $z=f(x,y)$ непрерывна в $(x_0-\delta_1; x_0+\delta_1,\ y_0-\delta_2; y_0+\delta_2)$
4. $\exists z'_x(x,y)$ и $z'_y(x,y)$, непрерывные по совокупности, причём справедливо следующее:

$$z'_x=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad z'_y=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$$

Доказательство: аналогично доказательству теоремы о существовании/непрерывности неявной функ. от одной перем.

Вычисление неявных функций

Пусть $\exists y = f(x)$ - неявная функция, причём $\exists$ непрерывная $f'(x)$ и $F(x,y)=0$ и $\boxed{y' = -\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}}$ (*)

Предположим, $\exists F'_x$ и F'_y - непрерывные частные производные

Продифференцируем $F(x,y)=0$

$$y'' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u' \quad (F'_x(x,y))'_x = F''_{xx}\cdot 1 + F''_{xy}\cdot y'(x)$$

$$\Longrightarrow \quad F''_{yx} = F''_{xy}$$

$$v' \quad (F'_y(x,y))'_x = F''_{\underset{yx}{xy}}\cdot 1 + F''_{yy}\cdot y'(x)$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} y'' = -\frac{\overset{u'}{(F''_{xx} + F''_{xy}\cdot y'(x))}\cdot \overset{v}{F'_y(x,y)} - \overset{v'}{(F''_{xy} + F''_{yy}\, y'(x))}\cdot \overset{u}{F'_x(x,y)}}{(F'_y(x,y))^2} =$$

$$= \frac{F'_x\cdot F''_{xy} + F'_x\cdot F''_{yy}\cdot y'(x) - F'_y\cdot F''_{xx} - F'_y\cdot F''_{xy}\cdot y'(x)}{(F'_y(x,y))^2} =$$

$$= \frac{F'_x\cdot F''_{xy} + F'_x\cdot F''_{yy}\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right) - F'_y\cdot F''_{xx} - F'_y\cdot F''_{xy}\cdot\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right)}{(F'_y)^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{2\cdot F'_x\cdot F''_{xy}\cdot F'_y - (F'_x)^2\cdot F''_{yy} - (F'_y)^2\cdot F''_{xx}}{(F'_y)^3}}_{\text{производная существует}} = y'' \Longrightarrow \exists y''$$

Если у получившихся производных существуют непрерывные частные производные до третьего порядка, то мы можем вычислить y''' $y^{(k)}$ k

Рассмотрим $F(x,y,z)=0$, $z=f(x,y)$

Найдём z'_x, z'_y и продифференцируем $F(x,y,z)$

$$F'_x\cdot 1+F'_y\cdot 0+F'_z\cdot z'_x=0 \Rightarrow \boxed{z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$F'_x\cdot 0+F'_y\cdot 1+F'_z\cdot z'_y=0 \Rightarrow \boxed{z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}}=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$0=df=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\Downarrow$$

$$dz=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dx-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

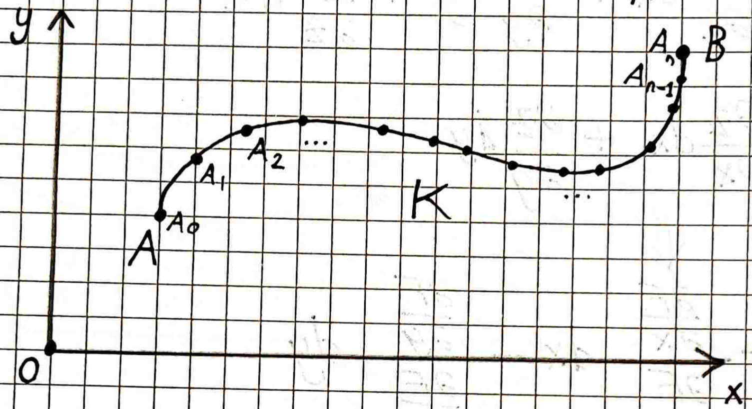
$F(x,y)=0$ продифференцируем

$$F'_x(x,y)\cdot \underbrace{x'}_{=1}+F'_y(x,y)\cdot y'_x=0 \qquad y'_x=-F_x$$

Криволинейные интегралы I типа

Пусть имеем плоскую, непрерывную, спрямляемую кривую $K = AB$, на которой распределены массы. Необходимо найти массу кривой, если известна её линейная плотность $\rho(x,y)$ [кг/м]

В механике использовали следующее решение:



$$A = A_0,\ A_1,\ A_2, \dots,\ A_n = B$$

На дуге рассматриваем произвольную точку $M_i \in A_i A_{i+1}$

масса $m_i \approx \rho(M_i)\sigma_i$, где σ_i – длина дуги.

$$m = \sum_{i=0}^{n-1} m_i = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i$$

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i, \text{ где } \lambda = \max_{0 \le i \le n-1} \sigma_i$$

Перейдём к определению:

Пусть имеем плоскую, непрерывную, спрямляемую кривую $K = AB$, разделенную на части произв. образом.

$$A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$$

В каждой из этих частей возьмём $\forall M_i \in A_i A_{i+1}$

(*) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i$, где $f(x,y)$ определена на K $M_i(\xi_i, \eta_i)$

Определение:

Если существует конечный предел суммы (*) при $\lambda \to 0$ не зависящий от способа разбиения и выбора точек M_i, то этот предел называется криволинейным интегралом I типа.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \int_{(K)} f(M)\,ds = \int_{(K)} f(x,y)\,ds \text{ , где}$$

s - длина дуги (предельный переход σ_i)

Заметим, что направление не важно:

$$\int_{(AB)} f(x,y)\,ds = \int_{(BA)} f(x,y)\,ds$$

Сформулируем также для пространственных кривых

$f(x,y,z)$ задана на AB

$$\lim \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i \text{ , } f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$$

$$\int_{(K)} f(x,y,z)\,ds = \int_{(K)} f(M)\,ds$$

Вычисление криволинейных интегралов I типа

Пусть задана непрерывная спрямляемая плоская кривая $(K) = AB$ и $f(x,y)$ определена на K

Возьмем произвольную точку M_i, положение которой определяется длиной дуги $|\breve{AM_i}|$

$$A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$$

Каждой точке соответствует своя длина дуги

$$|AA_i| = s_i \text{ , } |AA_{i+1}| = s_{i+1} \dots \text{ , } \quad M_i \in A_i A_{i+1}$$

для M_i соответствует $\overline{s_i}$, $|AM_i| = \overline{s_i}$

$$s_i \leq \overline{s_i} \leq s_{i+1}$$

Рассмотрим

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\overline{s_i}), y(\overline{s_i}))\Delta s_i, \text{ где}$$

$$\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$$

Получим параметрическое уравнение (K): $\begin{cases} x_i = x(s) \\ y_i = y(s) \end{cases}$

$M_i(x_i, y_i)$

$x_i = x(\overline{s_i}), y_i = y(\overline{s_i})$

$0 \leq s \leq S$, где S - длина дуги

Если $f(x,y)$ непрерывна, а $x(s)$ и $y(s)$ непрерывны относительно s, то интеграл существует.

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \text{т.е.} \\ \Delta s_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\overline{s_i}), y(\overline{s_i}))\Delta s_i = \int_0^S f(x(s); y(s))ds, \quad 0 \leq s \leq S$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \int_{(K)} f(M)ds = \int_{(K)} f(x,y)ds$$

Получим формулу для криволинейного интеграла:

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{(K)} f(M)ds &= \int_0^S f(x(s), y(s))ds \\ \int_{(K)} f(x,y)ds &= \int_0^S f(x(s), y(s))ds \end{aligned}}$$

Допустим, кривая задана параметрически:

$$(K) = \begin{cases} x = x(t) = \varphi(t) \\ y = y(t) = \psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta$$

$\varphi(t), \psi(t)$ непрерывны, $\exists \varphi'(t), \psi'(t)$ и они непрерывны

Если возрастанию t соответствует возрастание S (маленькая s)

$$S'(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$$

$$dS = S'(t)dt = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$$

$$\boxed{\int\limits_{(K)} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t)^2)}\,dt}$$

$f(x,y)$ непрерывна по совокупности, $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны, следовательно интеграл существует.

Допустим, кривая задана в неявном виде:

$$K: y = y(x),\ a \le x \le b,$$

$y(x)$ непрерывна, $\exists y'(x)$ и она непрерывна.

$(x')^2 = 1^2 = 1$

$$\boxed{\int\limits_{(K)} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx}$$

$$\int\limits_K ds = S, \quad m = \int\limits_K \rho\, ds$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \Rightarrow |\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y'(x))^2}},\ \alpha \ne \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_{(K)} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x)) \frac{1}{\cos\alpha}dx \qquad S = \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{\cos\alpha}$$

Формула для полярных координат:

ρ - полярный радиус

α - полярный угол

$$x = \rho\cos\alpha, \ y = \rho\sin\alpha$$

$$ds = \sqrt{\rho^2(\alpha) + (\rho'(\alpha))^2}\, d\alpha$$

$$f(x,y) = f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha), \ \varphi_1 \le \alpha \le \varphi_2$$

$$\int_{(K)} f(x,y)\, ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)\sqrt{\rho^2(\alpha) + (\rho'(\alpha))^2}\, d\alpha$$

Криволинейные интегралы II типа

Имеем плоскую, непрерывную, спрямляемую кривую $K = AB$, разделенную на части произвольным образом.

$$A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B \ , \ \forall M_i \in A_i A_{i+1}$$

Умножаем не на длину дуги, а на проекцию

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) D_i \ , \text{ где } D_i - \text{проекция } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) D_i = \int_{(K)} f(M)\, dx \quad (*)$$

Этот предел называется криволинейным интегралом II типа., при смене AB на BA меняется знак

Если $\Delta x_i = x_i - x_{i+1}$, то получаем $-\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) D_i$

$$\int_{(AB)} f(x,y)\, dx = -\int_{(BA)} f(x,y)\, dx$$

Делим прямую на части: $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta x_i$

Возьмем наибольшую из хорд: $\mu = \max \overline{A_i A_{i+1}}$, $\mu \to 0 \Leftrightarrow \lambda \to 0$

Определение:
Если существует конечный предел (*), не зависящий от способа разбиения и выбора точек M_i, то этот предел называется криволинейным интегралом второго типа

Если $B \to A$ $\quad \sigma' = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta x_i'$, где $\Delta x_i' = x_i - x_{i+1}$

$\sigma' = -\sigma$, $\quad \lim\limits_{\mu \to 0} \sigma' = \int_{BA} f(M)dx$

$$\int_{(AB)} f(M)dx = -\int_{(BA)} f(M)dx$$

Можно также спроектировать на ось Oy

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta y_i, \quad \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta y_i' \quad (\Delta y' = -\Delta y)$$

Если прямая пространственная, то можно аналогично спроектировать на ось Oz

Криволинейный интеграл общего типа:

$$\int_{(AB)} (P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz) =$$

$$= \int_{(AB)} Pdx + \int_{(AB)} Qdy + \int_{(AB)} Rdz$$

44 Вычисление криволинейных интегралов II типа

Теорема: пусть кривая задана параметрически:

$$K: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad a \le t \le b$$

Спроектируем отрезки кривой на ось Ox,
$\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны. На K определена функция $f(x,y)$, непрерывная по совокупности, $\exists \varphi'(t)$, непрерывная на $[a;b]$. Тогда:

$$\int\limits_{(AB)} f(M)\,dx = \int\limits_{(AB)} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

Доказательство:

Интеграл правой части существует, т.к. $f(x,y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$ непрерывны. Разобьём K произвольным образом на части, в каждой из этих частей произвольным образом возьмём точку M_i $\quad M_i(x_i;y_i)$, где $x_i = \varphi(\tau_i)$, $y_i = \psi(\tau_i)$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i))\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi'(t)\,dt$$

$A_i(\varphi(t_i),\psi(t_i))$, $A_i \to t_i$, $M_i \to \tau_i$, $t_i \le \tau_i \le \tau_{i+1}$

С другой стороны,

$$I = \int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

$$\sigma - I = \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left(f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)) - f(\varphi(t),\psi(t))\right)\cdot\varphi'(t)\,dt$$

$$|\sigma - I| \le \sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left|f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i)) - f(\varphi(t),\psi(t))\right|\cdot|\varphi'(t)|\,dt$$

$f(\varphi(t), \psi(t))$ непрерывна как сложная функция на $[a;b]$

Из следствия Теоремы Кантора ($\omega_i(f) \overset{\text{имеем}}{=} M_i - m_i$,
где M_i — наибольшее значение $f(x,y)$ на $[t_i; t_{i+1}]$
m_i — наименьшее значение $f(x,y)$ на $[t_i; t_{i+1}]$)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i < \delta \Rightarrow \omega_i(f) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t)) \right| < \varepsilon$$

С другой стороны $|\varphi'(t)| < K$ (т.к $\varphi'(t)$ непрерывна)

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} dt = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = b - a$$

Следовательно:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \Delta t_i < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon \cdot K \cdot (b-a)$$

$$(\lambda \to 0 \Leftrightarrow \mu \to 0)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \tau = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt = \lim_{\mu \to 0} \sigma = \int_{(AB)} f(M) dx$$

Q.E.D. ■

Рассмотрим в трёхмерном пространстве:

$$K: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad a \le t \le b \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

Тогда: $$\int_{(AB)} P(x,y,z) dx + Q(x,y,z) dy + R(x,y,z) dz =$$

$$= \int_{(AB)} P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \varphi'(t) dx + \int_{(AB)} Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \psi'(t) dy +$$

$$+ \int_{(AB)} R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \chi'(t) dz$$

Если кривая задана в неявном виде:

$$y = y(x),\ a \le x \le b$$

$$\int_{(AB)} f(x,y)dx = \int_a^b f(x, y(x))dx$$

Рассмотрим два случая, когда берем отрезок, параллельный осям Ox или Oy

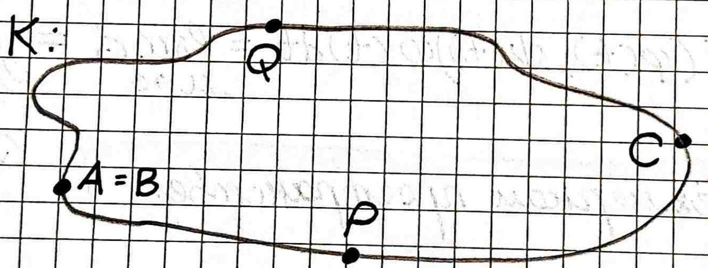
$$AB \parallel Ox \Rightarrow \int_{(AB)} f(x,y)dy = 0$$

$$AB \parallel Oy \Rightarrow \int_{(AB)} f(x,y)dx = 0$$

Случай замкнутого контура. Ориентация плоскости

Возьмём произвольный замкнутый контур

$$\forall C \in K,\ P \in AC,\ Q \in CB \quad (A = B)$$



$$\int_{(AB)} = \int_{(K)} = \int_{APC} + \int_{CQA}$$ не зависит от выбора точки C

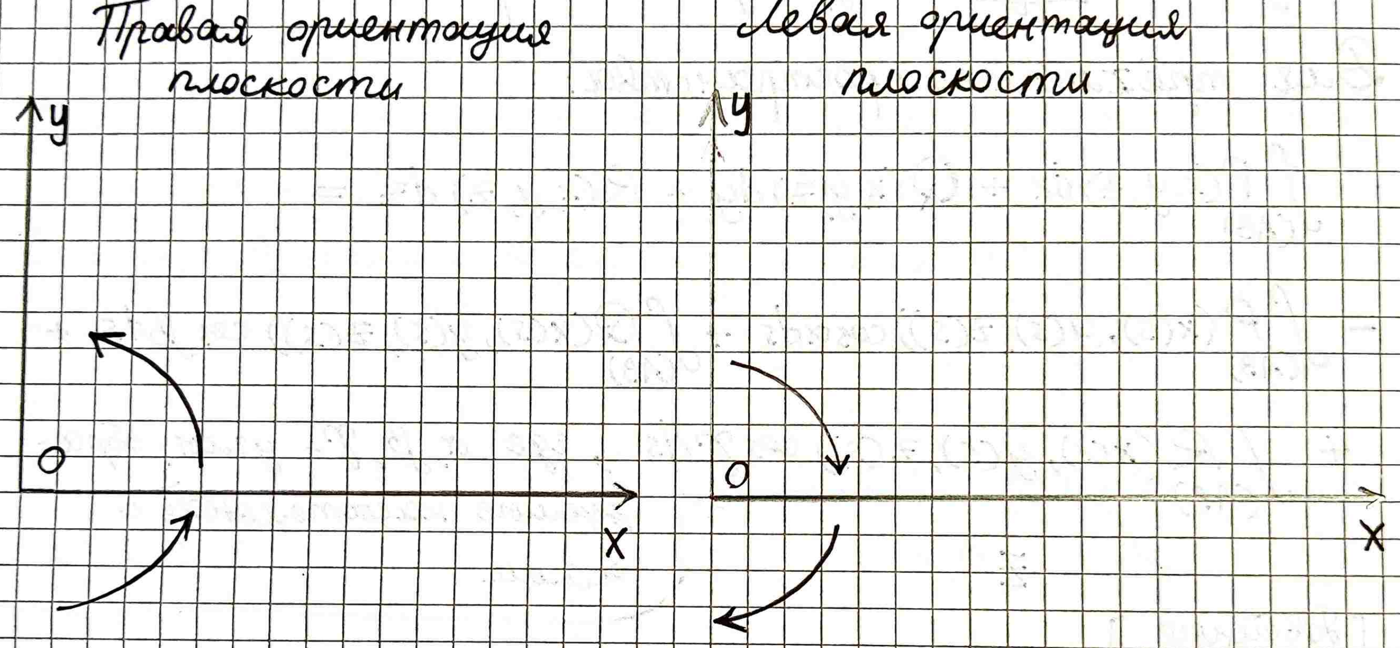
Если контур на плоскости, то необходимо выбрать направление.

Плоскость имеет правую ориентацию, если за положительное направление считается направление против часовой стрелки, и левую ориентацию, если за положительное направление взято направление по часовой стрелке.

При правой ориентации положительным считается то направление, при котором наблюдателю ближайшая часть области, ограниченной контуром, находится слева от него, а отрицательное, когда эта часть - справа.

Аналогично определяется для левой ориентации.

В соответствии с ориентацией строится система координат.



Связь между криволинейными интегралами I и II типов

Пусть дана гладкая кривая, она непрерывна, и существуют непрерывные производные, одновременно не равные 0

В качестве параметра берем длину дуги

$$K: \begin{cases} x = \varphi(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}, 0 \leq s \leq S$$

Через α обозначим угол, образуемый касательной с положительным направлением оси, в случае, если направление касательной совпадает с возрастанием s

Имеем $\varphi'(s) = \cos\alpha$, $\psi'(s) = \sin\alpha$

$$\int_{(K)} f(M)\,dx = \int_0^S f(x(s), y(s)) \cdot \varphi'(s)\,ds = \int_0^S f(x(s), y(s)) \cos\alpha\,ds =$$

$$= \int_{(AB)} f(x,y) \cos\alpha\,ds$$

$$\int_{(K)} f(M)\,dx = \int_0^S f(x(s)\, y(s)) \sin\alpha\,ds$$

Получили связь между крив. интегралами I и II типов.

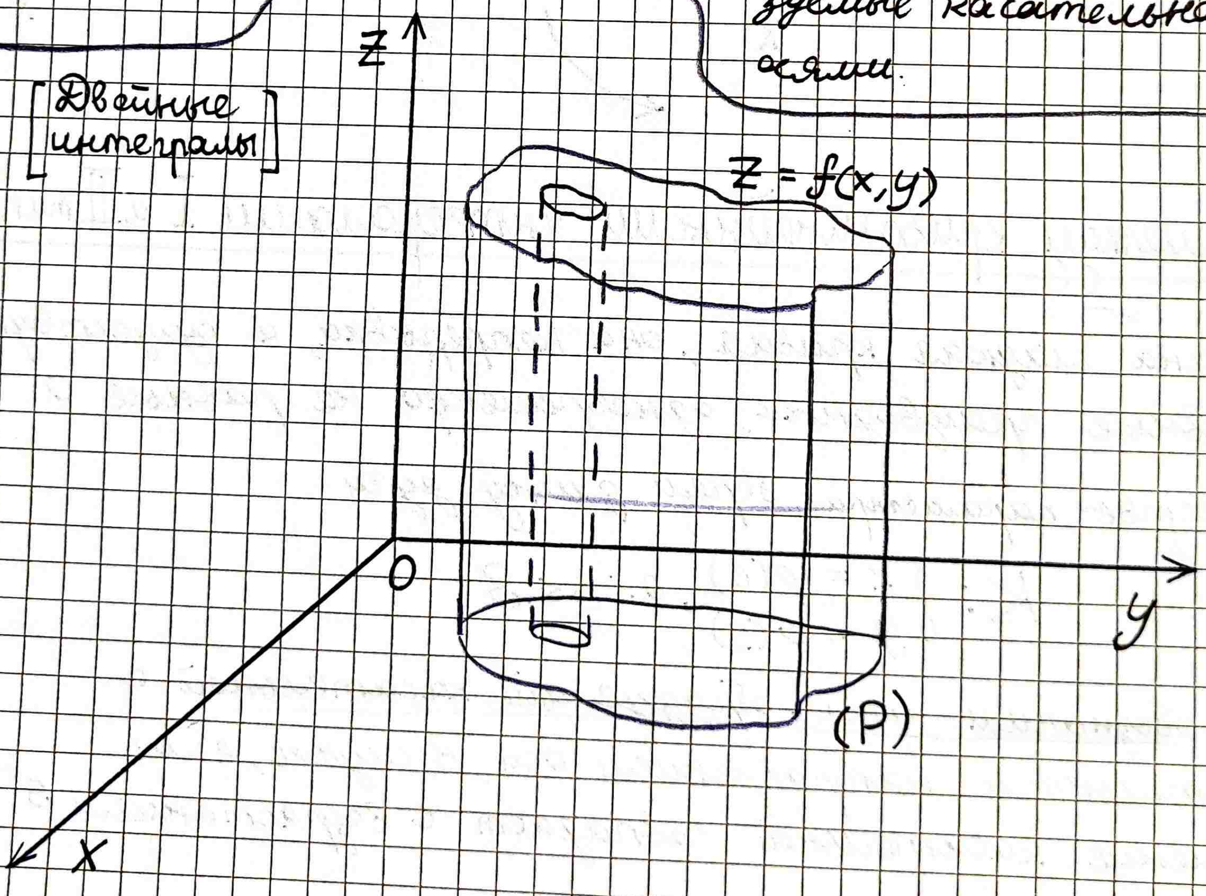
Для трёхмерного пространства:

$$\int_{(AB)} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_{(AB)} P(x(s), y(s), z(s)) \cos\alpha\,ds + \int_{(AB)} Q(x(s), y(s), z(s)) \cos\beta\,ds +$$

$$+ \int_{(AB)} R(x(s), y(s), z(s)) \cos\gamma\,ds$$, где α, β, γ - углы, образуемые касательной с осями.

[Двойные интегралы]



Двойные интегралы

В механике рассматривалась задача:
Пусть имеем цилиндрическое тело: сверху оно ограничено поверхностью, определяемой функцией $z = f(x, y)$, сбоку - цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны Oz, снизу - проекция поверхности (P). Необходимо найти объём тела (рисунок на пред. странице).

Разобьём (P) на части $P_1, P_2, \ldots, P_n$, и на каждой из них рассмотрим цилиндрический столбик. В каждой из P_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ берем произвольную точку $\forall M_i(\xi_i, \eta_i)$, подсчитываем $f(M_i)$ и находим $f(M_i) \cdot P_i$

Получаем
$$\sigma = \sum_{i=0}^{n} f(M_i) \cdot P_i = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot P_i$$

$$V_i = f(M_i) \cdot P_i \Rightarrow V = \sum_{i=0}^{n} V_i$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n} d_i$, где $d_i = \sup\limits_{M', M'' \in (P_i)} \rho(M', M'')$ - диаметр площади

Тогда:
$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint\limits_{(P)} f(x, y) dP$$

Для формулировки определения двойного интеграла определим:

- Область — связанное множество.
- Связанное множество — множество, любые две точки которого можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат этому множеству.
- Область вместе со своей границей называется замкнутой
- Открытой называется область, состоящая только из точек данного множества
- Внутренней называется точка, окрестность которой целиком состоит из точек данного множества.

• <u>Квадрируемой</u> называется область, имеющая конечную площадь, т.е если имеем все многоугольники (A) такие что $(A) \subset P$ и все многоугольники (B) такие, что $P \subset (B)$ и $\sup\{A\} = I_*$, $\inf\{B\} = I^*$ $\Rightarrow I_* = I^* = S$ - площадь P

• Кривая K имеет площадь, равную 0, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ многоугольные области (A) и (B), $K \subset (A), (B)$, такие, что $B - A < \varepsilon$

• Чтобы область была квадрируемой необходимо и достаточно, чтобы её ограничивающие контуры имели площадь, равную 0.

Возьмём поверхность $z = f(x,y)$, рассмотрим цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны Oz и её проекцию на Oxy. Разбиваем (P) на замкнутые квадрируемые части P_i с помощью кривых площади 0.

В каждой из этих частей возьмём $\forall M_i(\xi_i, \eta_i)$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n} f(M_i) P_i = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot P_i \quad (*)$$

<u>Определение</u>: если существует конечный предел суммы $(*)$, не зависящий от способа разбиения и выбора точек M_i когда наибольший из диаметров $\lambda \to 0$, то этот предел называется двойным интегралом по области (P)

$$\boxed{\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint\limits_{(P)} f(M)\,dP = \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP}$$

Необходимое и достаточное условие интегрируемости $f(x,y)$ в области (P)

Если существует двойной интеграл, то $f(x,y)$ интегрируема на (P). Если $f(x,y)$ интегрируема, то она ограничена, и каждая из областей имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани.

$$s = \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot P_i \text{ — нижняя сумма Дарбу}$$

$$m_i = \inf f(x,y),\ (x,y) \in (P_i)$$

$$S = \sum_{i=0}^{n} M_i \cdot P_i \text{ — верхняя сумма Дарбу}$$

$$M_i = \sup f(x,y),\ (x,y) \in (P_i)$$

$$s \leq \sigma \leq S$$

Теорема: для того, чтобы $f(x,y)$ была интегрируемой в области (P), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$$

Отсюда следует:

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n} M_i P_i - \sum_{i=0}^{n} m_i P_i \right) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} (M_i - m_i) P_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} \omega_i(f) P_i = 0$$

Свойства двойных интегралов

Свойство 1:

Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области (P), то $k \cdot f(x,y)$ также интегрируема в (P), при чём:
(k – постоянное число).

$$\iint\limits_{(P)} k f(x,y)\,dP = k \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP$$

Доказательство:

Разбиваем (P) с помощью кривых с площадью 0 на произвольные части, в каждой части берем произв. точку $M(\xi_i, \eta_i)$

$$\sum_{i=0}^{n} k f(\xi_i, \eta_i) P_i = k \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i$$

Конечный предел этих сумм существует.
Перейдём к пределу при $\lambda \to 0$
(т.к у правой части есть предел, то он есть и у левой)

$$\iint\limits_{(P)} k f(x,y)\,dP = k \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP$$

QED ■

- Область – открытое связное множество
- Открытым называется множество, состоящее только из внутренних точек
- Внутренней называется точка, (∃) окрестность которой целиком принадлежит этому множеству.
- Замкнутой областью ($\overline{G}$) называется область и все её граничные точки.
- Граничной называется точка A в области G, если в любой окрестности этой точки есть и точка из G и точки не из G

Свойство 2:

Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в (P), тогда их алгебраическая сумма $f(x,y) \pm g(x,y)$ также интегрируема в (P), при чём:

$$\iint\limits_{(P)} (f(x,y) \pm g(x,y))dP = \iint f(x,y)dP + \iint g(x,y)\,dP$$

Доказательство:

Разбиваем (P) с помощью кривых с площадью 0 на части, берём в каждой из них произвольные точки $M_i(\xi_i; \eta_i)$

$$\sum_{i=0}^{n} [f(\xi_i; \eta_i) + g(\xi_i; \eta_i)] P_i = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i; \eta_i) P_i + \sum_{i=0}^{n} g(\xi_i; \eta_i) P_i$$

Перейдём к пределу $(\lambda \to 0)$:

$$\iint\limits_{(P)} (f(x,y) + g(x,y))dP = \iint\limits_{(P)} f(x,y)dP + \iint\limits_{(P)} g(x,y)dP$$

Q.E.D. ■

Свойство 3:

Пусть $f(x,y)$, $g(x,y)$ интегрируемы в (P) и $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x;y) \in (P)$

Тогда:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP \leq \iint\limits_{(P)} g(x,y)dP$$

Доказательство:

Разбиваем (P) с помощью кривых с площадью 0 на части (произвольные, квадрируемые). В каждой из них берём произвольную точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$

$$\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i; \eta_i) P_i \leq \sum_{i=0}^{n} g(\xi_i; \eta_i) P_i$$

Перейдем к пределу при $\lambda \to 0$

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP \leq \iint\limits_{(P)} g(x,y)dP$$

Q.E.D. ■

Свойство 4:

Если $f(x,y)$ интегрируема в (P), то $|f(x,y)|$ также интегрируем в (P), при чём

$$\iint_{(P)} f(x,y)\,dP \leq \iint_{(P)} |f(x,y)|\,dP$$

Доказательство:

Аналогично разбиваем (P) на области. В каждой области $\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$, так как $\omega_i(f) = \sup\limits_{M', M'' \in (P_i)} |f(M') - f(M'')|$

С другой стороны $\omega_i(|f|) = \sup \big||f(M')| - |f(M'')|\big|$,

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \Rightarrow \big||f(M')| - |f(M'')|\big| \leq |f(M') - f(M'')| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{M', M'' \in (P_i)} \big||f(M')| - |f(M'')|\big| \leq \sup_{M', M'' \in (P_i)} |f(M') - f(M'')| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_i(f) \geq \omega_i(|f|) \Rightarrow 0 \leq \omega_i(|f|)P_i \leq \omega_i(f)P_i$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n} \omega_i(|f|)P_i \leq \sum_{i=0}^{n} \omega_i(f)P_i$$

Т.к $f(x,y)$ интегрируема в (P), то по необходимому и достаточному условию интегрируемости

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} \omega_i(f)P_i = 0 \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n} \omega_i(|f|)P_i = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i, \eta_i)P_i\right| \leq \sum_{i=0}^{n} |f(\xi_i, \eta_i)|P_i$$

Перейдём к пределу при $\lambda \to 0$

$$\left|\iint_{(P)} f(x,y)\,dP\right| \leq \iint_{(P)} |f(x,y)|\,dP$$

Q.E.D. ■

Свойство 5:

Пусть $f(x,y)$ интегрируема в (P), и $\exists m, M \Rightarrow \forall (x,y) \in (P) \Rightarrow$ $m \le f(x,y) \le M$. Тогда:

$$mP \le \iint_{(P)} f(x,y)\,dP \le MP$$

Доказательство:

Аналогично разбиваем P и берем $M_i(\xi_i, \eta_i)$ в частях.

$$m\sum_{i=0}^{n} P_i \le \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i \le M \sum_{i=0}^{n} P_i$$

$$mP \le \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i \le MP$$

Перейдём к пределу при $\lambda \to 0$

$$mP \le \iint_{(P)} f(x,y)\,dP \le MP$$

QED. ■

Теорема о среднем значении:

$$m \le \frac{\iint_{(P)} f(x,y)\,dP}{P} \le M$$

Обозначим $\mu \equiv \dfrac{\iint_{(P)} f(x,y)\,dP}{P}$, $\Rightarrow \iint_{(P)} f(x,y)\,dP = \mu P \Rightarrow m \le \mu \le M$

Рассмотрим случай, когда $f(x,y)$ непрерывна в (P). Тогда она равномерно непрерывна (Теорема Кантора) и принимает свои min и max значения (inf и sup) (II Теорема Вейерштрасса)

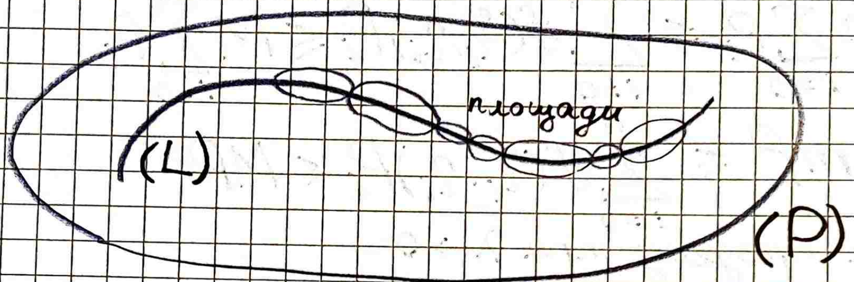
$$m \le f(x,y) \le M, \text{ где } m = \inf_{(x,y)\in(P)} \{f(x,y)\},\ M = \sup_{(x,y)\in(P)} \{f(x,y)\}$$

$f(x,y)$ принимает все промежуточные значения между m и M, т.е $\exists (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = \mu$

$$\iint_{(P)} f(x,y)\,dP = f(\bar{x}, \bar{y})P$$

Свойство 6:

Лемма: пусть имеем квадрируемую область (P) и на ней кривую (L) площади 0. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если разделить (P) на части, диаметры которых меньше δ, то сумма площадей тех частичных областей, которые имеют общие точки с (L) будет $< \varepsilon \iff \lim\limits_{\lambda \to 0}$ суммы таких площадей $= 0$.



Используем эту лемму для доказательства следующего свойства:

Пусть $f(x,y)$ интегрируема в (P). Известно, что в (P) существует кривая (L) площадью 0. Если произвольным образом изменить значение $f(x,y)$ на (L) так, чтобы она оставалась ограниченной, то эта новая функция $f^*(x,y)$ будет также интегрируема в (P), при чём:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP = \iint\limits_{(P)} f^*(x,y)\,dP$$

<u>Доказательство:</u>

Докажем существование интегралов.

Составим интегральные суммы для f и f^*

Берём точку $M(\xi_i, \eta_i)$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i, \quad \sigma' = \sum_{i=0}^{n} f^*(\xi_i, \eta_i) P_i$$

При $\lambda \to 0$ $\sigma \to \iint_{(P)} f(x,y)\, dP$

σ и σ' отличаются слагаемыми общих точек с кривой (L)

обозначим их через индекс i'

Имеем $\sum_{i'} f(\xi_{i'}, \eta_{i'}) P_{i'}$ и $\sum_{i'} f^*(\xi_{i'}, \eta_{i'}) P_{i'}$

Оценим по модулю:

Т.к $f(x,y)$ и $f^*(x,y)$ ограниченные, то $\exists k, k'$ т.ч.

$$|f(x,y)| < k \quad \text{и} \quad |f^*(x,y)| < k'$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sum_{i'} f(\xi_{i'}, \eta_{i'}) P_{i'}\right| \leq k \sum_{i'} P_{i'} \quad \text{и} \quad \left|\sum_{i'} f^*(\xi_{i'}, \eta_{i'}) P_{i'}\right| \leq k' \cdot \sum_{i'} P_{i'}$$

(L) является кривой площади $0 \Longrightarrow$ при $\lambda \to 0$, согласно <u>лемме</u>, сумма площадей частичных областей, имеющих с (L) общие точки стремится к $0 \Longrightarrow$ из вышеуказанного соотношения следует, что отличающиеся слагаемые также стремятся к 0. $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma'$

Так как существуют пределы, существуют и интегралы:

$$\iint_{(P)} f(x,y)\, dP = \iint_{(P)} f^*(x,y)\, dP$$

Q.E.D. ■

Свойство 7:

Пусть $f(x,y)$ определена в (P), которая разделена кривой (K) площади 0 на две части, (P_1) и (P_2). Если $f(x,y)$ интегрируема в (P), то она интегрируема в (P_1) и (P_2) и наоборот (если $f(x,y) \in I((P_1),(P_2)) \Rightarrow f(x,y) \in I((P))$)

При чём:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP = \iint\limits_{(P_1)} f(x,y)\,dP_1 + \iint\limits_{(P_2)} f(x,y)\,dP_2$$

Доказательство:

Разобьём (P_1) и (P_2) на части произвольным образом. Некоторые из них $\in (P_1)$, другие $\in (P_2)$. Обозначим i'- те части, которые $\in (P_1)$, i'' - части $\in (P_2)$

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i P_i = \sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''}$$

Перейдём к пределу при $\lambda \to 0 \implies 0 = 0 + 0$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i = \sum_{i'} f(\xi_{i'}, \eta_{i'}) P_{i'} + \sum_{i''} f(\xi_{i''}, \eta_{i''}) P_{i''}$$

Пусть $f(x,y)$ интегрируема в (P_1) и (P_2)

Произвольно разделим (P) и этому делению добавим кривую (K)

$$S = \sum_{i} \omega_i P_i = \underbrace{\sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'}}_{\to 0} + \underbrace{\sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''}}_{\to 0}$$

относительно (P_1) и (P_2)

Суммы отличаются слагаемыми, имеющими общие точки с (K). Т.к $f(x,y)$ ограничена в (P_1) и (P_2) то она ограничена и в (P)

i^3 – те слагаемые, которые есть в i', но не в i''

i^4 – те слагаемые, которые есть в i'', но не в i'

$$\left|\sum_{i^3} \omega_{i^3} P_{i^3}\right| \leq \sum_{i^3} |\omega_{i^3}| P_{i^3} \leq M \sum_{i^3} P_i$$

$$\left|\sum_{i^4} \omega_{i^4} P_{i^4}\right| \leq \sum_{i^4} |\omega_{i^4}| P_{i^4} \leq M \sum_{i^4} P_{i^4}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} S = \lim_{\lambda \to 0} S'$$

Так как $S' \to 0$, то и $S \to 0 \Longrightarrow$ по необходимому и достаточному условию $f(x,y)$ интегрируема в (P)

$$\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i = \sum_{i'} f(\xi_{i'}, \eta_{i'}) P_{i'} + \sum_{i''} f(\xi_{i''}, \eta_{i''}) P_{i''}$$

Перейдём к пределу при $\lambda \to 0$

$$\iint_{(P)} f(x,y)\, dP = \iint_{(P_1)} f(x,y)\, dP_1 + \iint_{(P_2)} f(x,y)\, dP_2$$

Q.E.D. ■

Классы интегрируемых функций

Первый класс: Пусть $f(x,y)$ непрерывна в квадрируемой области (P). Тогда $f(x,y)$ интегрируема в (P), т.е $\exists \iint_{(P)} f(x,y)\, dP$

Доказательство: так как $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области, то по теореме Кантора, она равномерно непрерывна $\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \lambda < \delta \Rightarrow \omega_i(f) < \varepsilon$

Рассмотрим сумму $\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) \cdot P_i < \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} P_i = \varepsilon \cdot P$

 Получим, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)P_i=0$

$$\Downarrow$$

По необходимому и достаточному условию интегрируемости функции

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0,$$

а следовательно:

$$\exists\iint\limits_{(P)}f(x,y)\,dP$$

Q.E.D. ■

Прежде, чем сформулировать второй класс, докажем лемму:

Лемма: (теперь с доказательством)

Пусть имеем квадрируемую область (P), и в ней некоторую кривую (L) площади 0. Тогда, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$, что как только мы разделим (P) на части, диаметры которых меньше δ $(\lambda<\delta)$, то сумма площадей тех частичных областей, которые имеют общие точки с (L), будет $<\varepsilon$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0}$ суммы площадей таких областей $=0$

Доказательство:

Так как (L) имеет площадь 0, то согласно определению для $\forall\varepsilon>0$ (L) можно покрыть некоторой многоугольной областью (Q), площадь которой $<\varepsilon$

Границу (Q) обозначим через (K). $(K)\cap(L)=0$

Определим параметрические представления (K) и (L)

(K): $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t_0 \le t \le T$
($\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны на $[t_0;T]$)

(L): $x=\varphi^*(u)$, $y=\psi^*(u)$, $u_0 \le u \le U$
($\varphi^*(u)$, $\psi^*(u)$ непрерывны на $[u_0,U]$)

Утверждаем, что расстояние между любыми двумя точками из (K) и (L) достигает своего наименьшего значения для некоторого $\delta > 0$

Пусть $M \in (K)$, $M_1 \in (L)$

$$d(M, M_1) = \sqrt{(\varphi(t)-\varphi^*(u))^2+(\psi(t)-\psi^*(u))^2}$$

Так как функции $\varphi(t), \psi(t), \varphi^*(u), \psi^*(u)$ непрерывны, то расстояние — также непрерывная функция от двух переменных t, u в прямоугольнике $[t_0;T; u_0;U]$

Согласно Второй Теореме Вейерштрасса, она достигает своего наименьшего значения δ.

Так как (K) и (L) не пересекаются, то $\delta > 0$.

Разобьём область (P) произвольным образом на части так, чтобы диаметры всех этих частичных областей были меньше δ $(\lambda < \delta)$

Тогда области, имеющие с (L) общие точки, лежат внутри (Q), так как их диаметры меньше δ.

Площадь $(Q) < \varepsilon \Rightarrow$ сумма площадей этих областей $< \varepsilon$

Q.E.D. ■

Второй класс

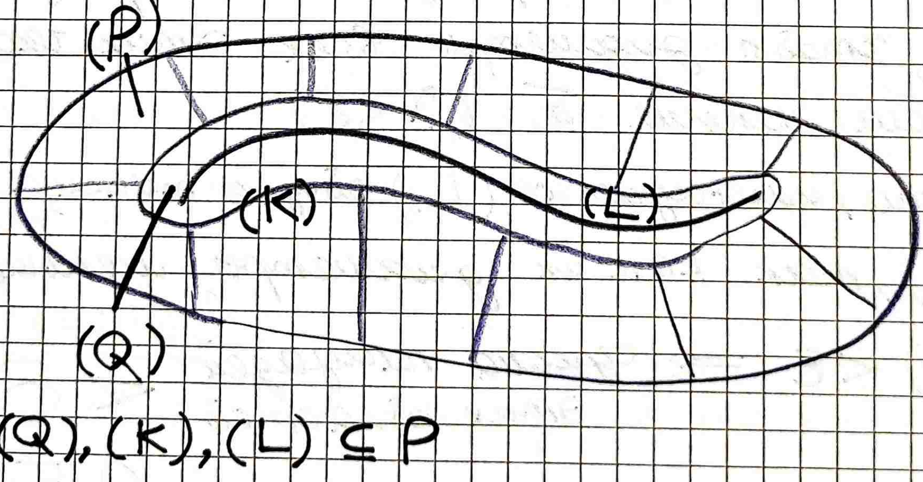
Пусть ограниченная функция $f(x,y)$ определена в (P). Известно, что она имеет разрывы только на конечном количестве кривых площади 0. Тогда $f(x,y)$ интегрируема в области (P), т.е. $\exists \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP$

Доказательство:

Возьмём одну кривую (L) площади 0. По определению её можно покрыть некоторой многоугольной областью (Q), такой, что её площадь $< \varepsilon$. Границу (Q) обозначим через (K). Рассмотрим замкнутую область вне внутренности (Q). $(P) \setminus (Q)$ тут нет разрывов

$f(x,y)$ равномерно непрерывна в этой области согласно теореме Кантора. Согласно следствию, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1(\varepsilon) > 0$, что если область разделить на части, для которых $\lambda_1 < \delta_1 \Rightarrow \omega_i(f) < \varepsilon$ (1)

$\lambda_1 = \max$ (диаметры всех областей)



$(Q), (K), (L) \subseteq P$

$(L), (K) \subseteq Q$

Согласно лемме (стр 60), $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2(\varepsilon) > 0$, что если (P) разделить на части так, что $\lambda_2 < \delta_2$ (2)

$\Rightarrow$ сумма площадей, имеющих общие точки с (L), будет $< \varepsilon$

Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Разобьём (P) так, чтобы $\lambda < \delta$, составим сумму:

$$\sum \omega_i(f) P_i = \sum \omega_{i'}(f) P_{i'} + \sum \omega_{i''}(f) P_{i''},$$

где i' – области, лежащие вне Q

i'' – области, либо лежащие в Q

либо имеющие общие точки с Q

$$(1) \Rightarrow \sum_{i'} \omega_{i'} P_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} P_{i'} < \varepsilon \cdot P$$

$$(2) \Rightarrow \sum_{i''} \omega_{i''} P_{i''} < \Omega \sum_{i''} P_{i''} < \Omega \cdot 2\varepsilon$$

(т.к $f(x,y)$ ограничена, то $\omega(f) \equiv \Omega$ также ограничена. По i'' колебание обозначим $\omega(f) = \Omega = M - m$)

Из этого следует:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f) P_i < \varepsilon P + 2\varepsilon\Omega = \varepsilon(P + 2\Omega)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i P_i = 0 \Rightarrow \lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$$

$$\Downarrow$$

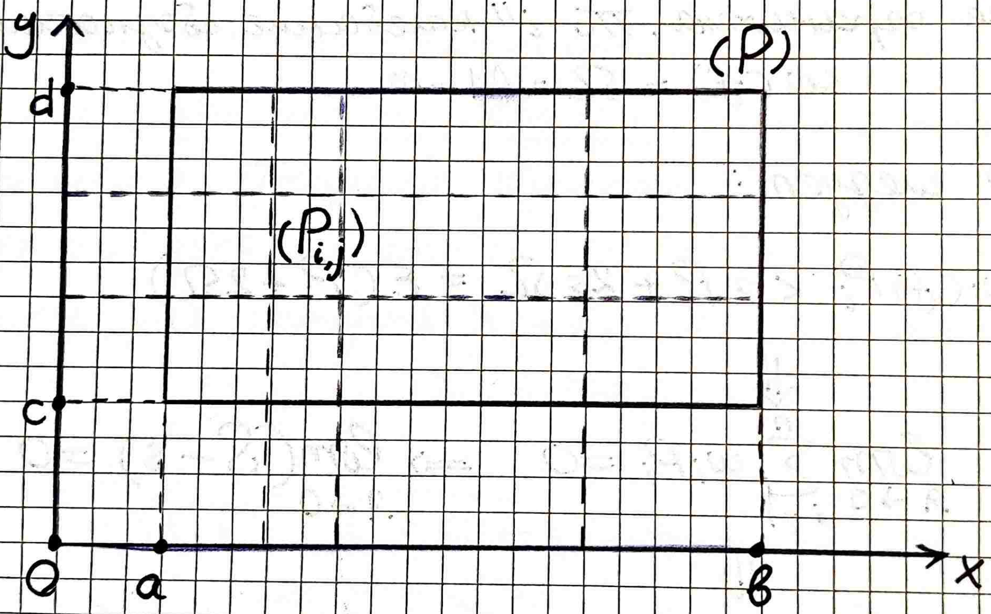
$$\exists \iint_{(P)} f(x,y)\, dP$$

Q.E.D. ■

Вычисление двойного интеграла в прямоугольной области

Теорема: пусть $f(x,y)$ определена на $[a;b, c;d] = P$
известно, что $\exists \iint_{(P)} f(x,y)\,dP$, при чём
$$\forall x \quad \exists I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$
Тогда
$$\exists \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \iint_{(P)} f(x,y)\,dP$$

Доказательство:



Разделим ось y точками $j = \overline{0, \ell-1}$ на ℓ частей
ось x точками $i = \overline{0, n-1}$ на n частей

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Рассмотрим область $(P_{i,j})$, $\begin{matrix} 0 \le i \le n-1 \\ 0 \le j \le \ell-1 \end{matrix}$

$$(x,y) \in (P_{i,j}) \Rightarrow m_{i,j} \le f(x,y) \le M_{i,j}$$

$$x = \xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$$

$$m_{i,j} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{i,j} \text{ от } y_j \text{ до } y_{j+1}$$

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} m_{ij}\,dy \leq \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\,dy \leq \int_{y_j}^{y_{j+1}} M_{ij}\,dy$$

$$m_{ij}\Delta y_j \leq \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\,dy \leq M_{ij}\,\Delta y_j$$

Просуммируем по всем j $\left(\int_c^d f(\xi_i, y)\,dy = I(\xi_i)\right)$

$$\sum_{j=0}^{l-1} m_{ij}\Delta y_j \leq I(\xi_i) \leq \sum_{j=0}^{l-1} M_{ij}\Delta y_j$$

Умножим это равенство на Δx_i и просуммируем по i

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{j=0}^{l-1} m_{ij}\Delta y_j \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i \sum_{j=0}^{l-1} M_{ij}\,\Delta y_j$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{l-1} m_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\,\Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{l-1} M_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j$$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{l-1} m_{ij}P_{ij}}_{=s} \leq \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{l-1} M_{ij}P_{ij}}_{=S}$$

нижняя и верхняя интегральные суммы Дарбу для $\iint_{(P)} f(x,y)\,dP$

$$\Delta x_i \to 0,\ \Delta y_j \to 0 \iff \lambda \to 0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} s = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} S = \iint_{(P)} f(x,y)\,dP$$

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i = \iint_{(P)} f(x,y)\,dP$$ – <u>предел существует</u>

$\sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i$ – интегральная сумма для $\int_c^d I(x)\,dx$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum I(\xi_i)\Delta x_i = \int I(x)\,dx$$ – <u>предел единственен</u>

Следовательно:

$$\iint_{(P)} f(x,y)\,dP = \int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Q.E.D. ■

<u>Теорема 2:</u>

Пусть $f(x,y)$ определена в $P = [a;b,\ c;d]$.

Известно, что $\exists \iint_{(P)} f(x,y)\,dP$, при чём

$\forall y \ \ \exists I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$.

Тогда $\exists \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \iint_{(P)} f(x,y)\,dP$

<u>Доказательство аналогично теореме 1.</u>

<u>Примечание:</u>

Если $f(x,y)$ непрерывна в $P = [a;b,\ c;d]$, то удовлетворяются условия <u>обеих</u> теорем

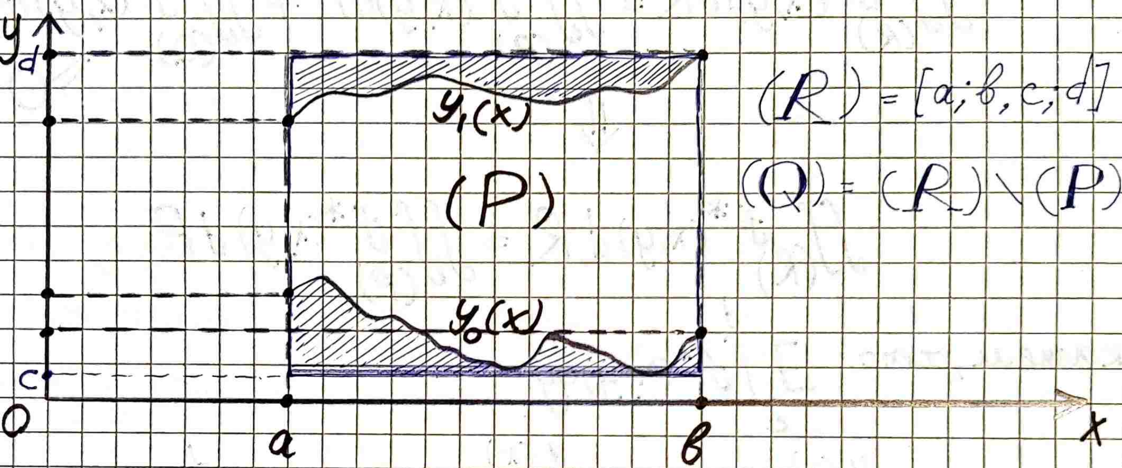
$$\iint_{(P)} f(x,y)\,dP = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Следовательно, для непрерывных функций не важен порядок интегрирования.

Вычисление двойного интеграла в случае криволинейной области

Криволинейная область I типа

Теорема 3: Пусть задана криволинейная область (P), ограниченная непрерывными функциями $y = y_0(x)$ и $y = y_1(x)$ при $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a$, $x = b$



$(R) = [a;b,c;d]$

$(Q) = (R) \setminus (P)$

Пусть $f(x,y)$ определена на (P). Известно, что $\exists \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP$ и при каждом постоянном $\forall x = const \in [a;b]$

$\exists\, I(x) = \int f(x,y)\,dy$. Тогда

$$\exists \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x,y)\,dy = \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP$$

Доказательство:

Согласно Второй Теореме Вейерштрасса:

$y = y_0(x)$ непрерывна на $[a;b] \Rightarrow c = \inf\limits_{x\in[a;b]} y_0(x)$

$y = y_1(x)$ непрерывна на $[a;b] \Rightarrow d = \sup\limits_{x\in[a;b]} y_1(x)$

так как обе функции достигают $\sup$ и $\inf$

68 Рассмотрим прямоугольник $(R) = [a;b, c;d]$

Обозначим $(Q) = (R) \setminus (P)$

Введём функцию $f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in (P) \\ 0, & (x,y) \in (Q) \end{cases}$

Функция удовлетворяет условиям Теоремы 1

Докажем, что существует криволинейный интеграл

$$\iint_{(R)} f^*(x,y)\,dR = \iint_{(P)} f^*(x,y)\,dP + \underbrace{\iint_{(Q)} f^*(x,y)\,dQ}_{=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\iint_{(R)} f^*(x,y)\,dR = \iint_{(P)} f^*(x,y)\,dP$$

Докажем, что $\exists \int\limits_c^d f^*(x,y)\,dy$

$$\int\limits_c^d f^*(x,y)\,dy = \int\limits_c^{y_0(x)} f^*(x,y)\,dy + \int\limits_{y_0(x)}^{y_1(x)} f^*(x,y)\,dy + \int\limits_{y_1(x)}^{d} f^*(x,y)\,dy =$$

$$= 0 + \int\limits_{y_0(x)}^{y_1(x)} f^*(x,y)\,dy + 0 \implies$$

$$\implies \int\limits_c^d f^*(x,y)\,dy = \int\limits_{y_0(x)}^{y_1(x)} f^*(x,y)\,dy = \int\limits_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x,y)\,dy$$

$f^*(x,y)$ в прямоугольнике R удовлетворяет условиям Теоремы 1 $\implies$

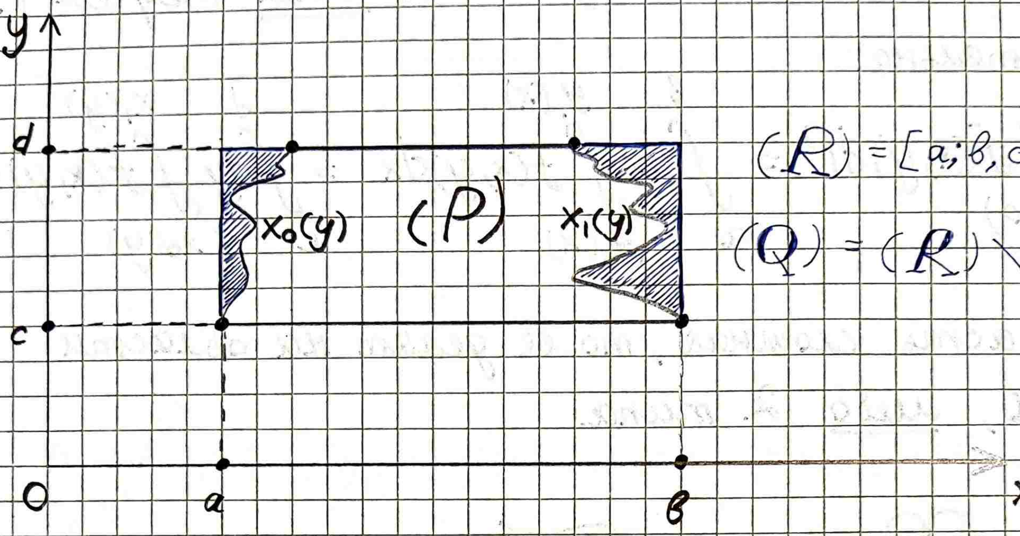
$$\implies \iint_{(R)} f^*(x,y)\,dR = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$$

$$\iint_{(P)} f(x,y)\,dP = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x,y)\,dy$$

Q.E.D. ■

Криволинейная область II типа

Теорема 4:



$(R) = [a;в;c;d]$

$(Q) = (R) \setminus (P)$

Пусть задана криволинейная область (P), ограниченная непрерывными функциями $x = x_0(y)$, $x = x_1(y)$, при $c \leq y \leq d$ и прямыми $y = c$, $y = d$.

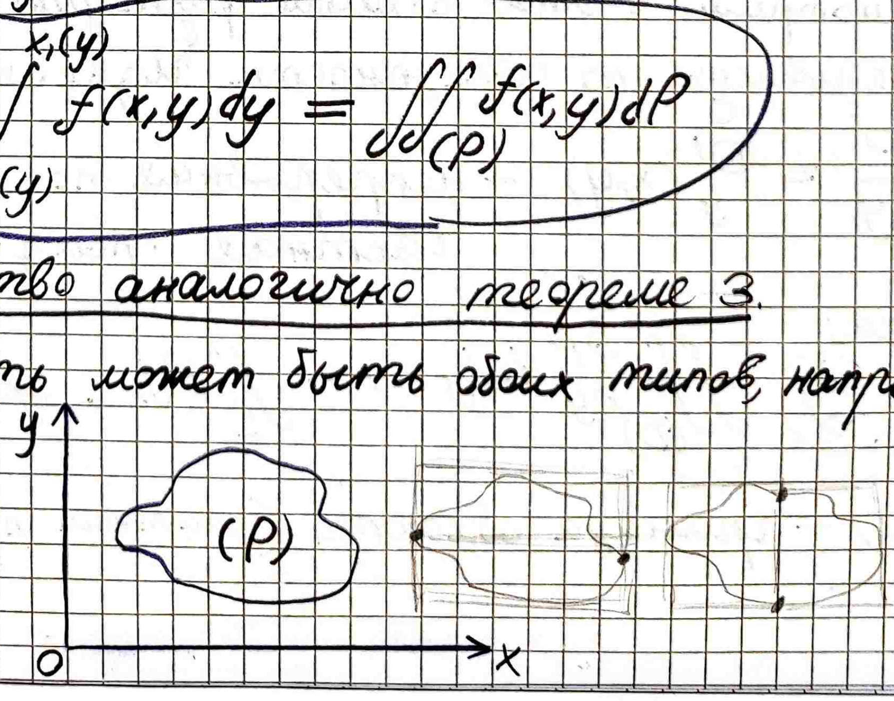
Пусть $f(x,y)$ определена на (P). Известно, что $\exists \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP$ и при каждом постоянном $y = const \in [c;d]$,

$$\exists I(y) = \int\limits_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x,y)\,dy. \text{ Тогда}$$

$$\exists \int\limits_{c}^{d} dx \int\limits_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x,y)\,dy = \iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP$$

Доказательство аналогично теореме 3.

Однако область может быть обоих типов, например:



Теорема:

Если $f(x,y)$ непрерывна по совокупности в области (P), тогда удовлетворяются условия обеих теорем (3 и 4)

Следовательно:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)\,dP = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x,y)\,dx = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x,y)\,dx$$

Если область сложная, то её делят на области либо 1, либо 2 типа.

Формула Грина

Формула Грина выражает связь между криволинейными и двойными интегралами.

Теорема

Рассмотрим криволинейную область (D) I типа, ограниченную функциями $y = y_0(x)$, $y = y_1(x)$ $(x \in [a;b])$ и $x = a$, $x = b$.

Рассмотрим в этой области функцию $P(x,y)$, непрерывную по совокупности. Известно, что $\exists \frac{\partial P}{\partial y} = P'_y(x,y)$ — непрерывная по совокупности частная производная

Тогда:

1) $$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_L P\,dx\text{, где}$$

(L) — граница области (считаем по часовой стрелке)

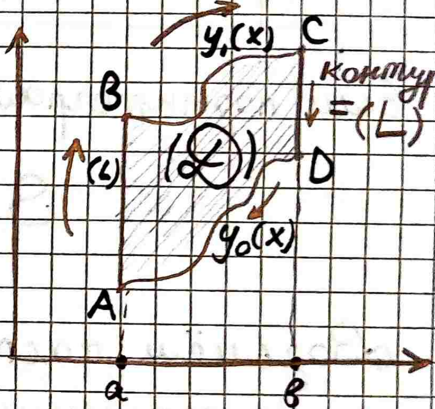
Доказательство:

Интеграл существует, т.к. $\exists \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = (*)$$

$$\int_{y_0(x)}^{y_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = P(x,y)\Big|_{y_0(x)}^{y_1(x)} = P(x,y_1(x)) - P(x,y_0(x))$$

$$(*) = \int_a^b P(x,y_1(x))\,dx - \int_a^b P(x,y_0(x))\,dx = (*)$$



$$\int_a^b P(x,y_1(x))\,dx = \int\limits_{(BC)} P(x,y)\,dx$$

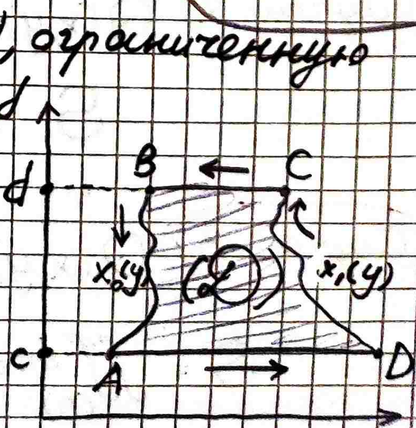
$$\int_a^b P(x,y_0(x))\,dx = \int\limits_{(AD)} P(x,y)\,dx$$

$$(*) = \iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = \int\limits_{(BC)} P(x,y)\,dx + \int\limits_{(AD)} P(x,y)\,dx + \underbrace{\int\limits_{(CD)} P(x,y)\,dx}_{=0} + \underbrace{\int\limits_{(AB)} P(x,y)\,dx}_{=0}$$

$$= -\int\limits_{(L)} P\,dx$$

Q.E.D. ∎

Рассмотрим область II типа (D), ограниченную $x = x_0(y)$, $x = x_1(y)$, $(y \in c;d)$, $y = c$, $y = d$



Пусть $Q(x,y)$ непрерывна в (D) вместе с $\frac{\partial Q}{\partial x}$, (L) - контур (D)

Тогда:

2) $$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int\limits_{(L)} Q(x,y)\,dy$$

(считаем против часовой стрелки)

Пусть область (D) одновременно и I, и II типов, P, Q непрерывны, $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны

Тогда одновременно имеют место формулы 1) и 2)

Формула Грина: $\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \int\limits_{(L)} P dx + Q dy$

2) − 1)

Выражение площади области через криволинейные интегралы

Если подынтегральная функция равна 1, то

$$S = \iint\limits_{(D)} dx dy$$

Возьмём частные случаи и вставим в формулу Грина.

Случай 1) $Q(x,y) = x,\ P(x,y) = 0$

$$S = \iint\limits_{(D)} dx dy = \int\limits_{(L)} x dy$$

Случай 2) $Q(x,y) = 0,\ P(x,y) = -y$

$$S = \iint\limits_{(D)} dx dy = \int\limits_{(L)} y dx$$

Случай 3) $Q(x,y) = \frac{1}{2}x,\ P(x,y) = -\frac{1}{2}y$

$$S = \iint\limits_{(D)} dx dy = \int\limits_{(L)} \frac{1}{2} y dx + \frac{1}{2} x dy = \frac{1}{2} \int\limits_{(L)} x dy - y dx$$

Интеграл как аддитивная функция области. Дифференцирование по области

Пусть имеем квадрируемую область (P). Её части обозначим (p), $(p) \subset (P)$. В каждой маленькой области по-ставим в соответствие некоторое число. Тем самым получим функцию от области (P) $\Phi((P))$. Например: масса, распределённая по области (P), является такой функцией

Если функция от области удовлетворяет следующему условию:

$$\Phi((P)) = \Phi((p')) + \Phi((p'')),$$

$$(p'), (p'') \subset (P), \quad (p') \cap (p'') = \varnothing, \quad (p') \cup (p'') = (P)$$

тогда $\Phi((P))$ является аддитивной

Пример аддитивной функции от области:

Пусть $f(x,y)$ интегрируема в квадрируемой области (P). Возьмём $\forall (p) \subset (P)$ ((p) также квадрируема)), тогда:

$$\Phi((p)) = \iint_{(p)} f(x,y)\,dp = \iint_{(p')} f(x,y)\,dp' + \iint_{(p'')} f(x,y)\,dp''$$

$$(p) = (p') \cup (p'')$$

$$\Phi((p)) = \Phi((p')) + \Phi((p''))$$

Рассмотрим дифференцирование функции от области

Берем произвольную точку M в области (P), и берём некоторую подобласть (p), содержащую $M \in (p) \subset (P)$

74 Рассмотрим дробь $\frac{\Phi((p))}{p}$. Пусть диаметры таких областей стремятся к нулю, т.е. стягиваются к точке M. Если $\exists \lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{\Phi((p))}{p} = f(M)$, то этот предел называется производной функции Φ от (P) в точке M. Рассмотрим эту производную

$$\Phi((p)) = \iint\limits_{(p)} f(x,y)\,dp$$

Предположим, что $f(x,y)$ непрерывна в (P)

Тогда, согласно Теореме о среднем значении,

$\exists (\bar{x}, \bar{y}) \in (p)$, такая, что

$$\iint\limits_{(p)} f(x,y)\,dp = f(\bar{x},\bar{y}) \cdot p$$

$$\frac{\Phi((p))}{p} = f(\bar{x},\bar{y})$$

$$(\bar{x},\bar{y}) \to (x,y) \Rightarrow f(\bar{x},\bar{y}) \to f(x,y) = f(M)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\Phi((p))}{p} = f(x,y) = f(M)$$

В случае, если $\Phi((P))$ представляется двойным интегралом, то производная функции от области (P) в точке M будет равна подынтегральной функции, если она непрерывна.

Если $\Phi((P))$ - <u>масса</u>, то производная функция представляет собой <u>плотность</u>

Интеграл по простому замкнутому контуру

Рассмотрим случай, когда (L) является простым замкнутым контуром (не имеет самопересечений)
Пусть он лежит в односвязной области (E)
(Область односвязна, если внутренность целиком принадлежит ей)
(обращение в 0)

Теорема: пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в односвязной области (E).
Тогда для того, чтобы интеграл по любому замкнутому контуру (L), содержащемуся в (E), равнялся нулю (т.е. $\int\limits_{(L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$)
необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ во всей области [в любой точке] (E)

Доказательство:
Заметим, что выполнены все условия для формулы Грина, поэтому:

$$\int\limits_{(L)} P dx + Q dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (D) \subset (E)$$

Достаточность ($\Leftarrow$) пусть $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ во всей (E)

Тогда $\iint\limits_{(E)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint\limits_{(E)} 0\, dx\,dy = 0 = \int\limits_{(L)} P dx + Q dy$

Необходимость ($\Rightarrow$) Пусть интеграл по любому замкнутому контуру (L) в области (E) равен 0
т.е.

$$\int\limits_{(L)} P dx + Q dy = 0, \quad \forall (L) \subset (E)$$

$$\Downarrow$$

$$\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

Продифференцируем:

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \forall (x,y) \in (D)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in (E) \subset (D)$$

Q.E.D. ■

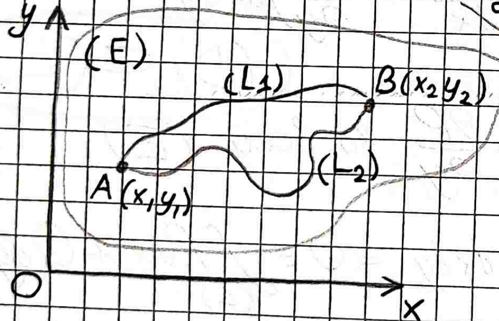
76 Интеграл по кривой, соединяющей 2 точки. Необходимое и достаточное условие независимости интеграла от формы кривой. (пути интегрирования)

Пусть имеем односвязную область (E) и две произвольные точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$.

В каком случае криволинейный интеграл, соединяющий эти две точки, не зависит от формы кривой?

Интеграл этот имеет вид: $\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Теорема: пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в (E). Для того, чтобы криволинейный интеграл от A до B не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы в любой точке (E) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ $\Leftrightarrow$ т.е.



$$\int\limits_{(L_1)} Pdx + Qdy = \int\limits_{(L_2)} Pdx + Qdy$$

Доказательство:

Достаточность ($\Leftarrow$) Пусть $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в любой точке (E)

I. Если кривые не пересекаются, то согласно Теореме (стр 75) про интеграл по замкнутому контуру (по (L)), интеграл по $(L) = (L_1) \cup (L_2)$ равен 0.

$$\int\limits_{A1B} (Pdx + Qdy) + \int\limits_{B2A} (Pdx + Qdy) = 0$$

$$L_1 = A1B, \quad L_2 = A2B$$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_{(L_1)} (Pdx + Qdy) - \int\limits_{(L_2)} (Pdx + Qdy) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_{(L_1)} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{(L_2)} (Pdx + Qdy)$$

Это значит, что интегрирование не зависит от формы кривой.

Необходимость ($\Longrightarrow$)

Пусть

$$\int\limits_{(L_1)} Pdx + Qdy = \int\limits_{(L_2)} Pdx + Qdy$$

$$\Downarrow$$

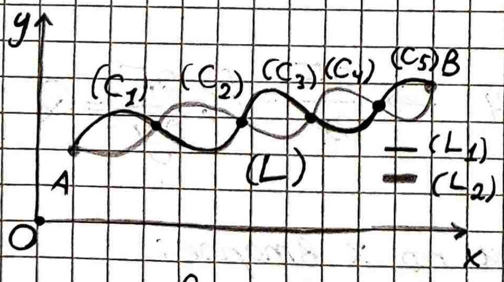
$$0 = \int\limits_{(A1B)} Pdx + Qdy + \int\limits_{B2A} Pdx + Qdy = \int\limits_{(L)} Pdx + Qdy$$

$$\Downarrow$$

По той же теореме (стр. 75) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

Достаточность 2 ($\Longleftarrow$)

I. Если же кривые пересекаются в конечном числе точек, то каждый сегмент от одной точки пересечения до другой рассматриваем как замкнутые контуры.



(C_1): $\int\limits_{(C_1)} Pdx + Qdy = 0$

(C_2): $\int\limits_{(C_2)} Pdx + Qdy = 0$

...

(C_n): $\int\limits_{(C_n)} Pdx + Qdy = 0$

$\Longrightarrow$ (утверждение верно и при ∞ числе пересечений)

$$\Longrightarrow \int\limits_{(L)} Pdx + Qdy = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{(C_i)} Pdx + Qdy = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{(L_1)} Pdx + Qdy = \int\limits_{(L_2)} Pdx + Qdy \Longrightarrow$$ интегрирование не зависит от формы кривой

Q.E.D. ■

78 Необходимое и достаточное условие для того, чтобы выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (*)$$

Полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

В каком случае (*) будет полным дифференциалом, т.е.:

$$dF(x,y) = Pdx + Qdy \qquad ?$$

Теорема:

Пусть имеем односвязную область (E), функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в (E). Для того, чтобы дифференциальное выражение было полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы в любой точке области (E) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

Доказательство:

Необходимость ($\Rightarrow$)

Пусть $dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = P,\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q$

P и Q непрерывны по условию.

Продифференцируем по y первое и по x второе:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

По Теореме Шварца, так как вторые производные непрерывны, то они равны в любой точке области (E)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Достаточность: $(\Leftarrow)$

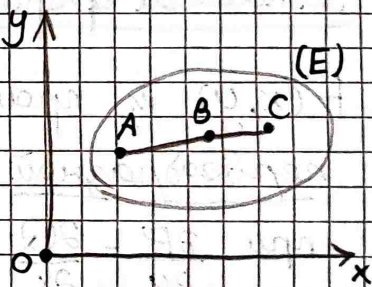
Пусть $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в любой точке области (E).

Если берём любые 2 точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, $A, B \in (E)$, то интеграл от A до B не зависит от пути интегрирования (формы кривой AB) (согласно Теореме (стр 76))

$$\int_{(AB)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Зафиксируем точку $A(x_0, y_0)$, возьмем любую точку области (E) с координатами (x, y)

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$



Покажем, что в точке B существуют частные производные $F'_x(x_1, y_1)$, $F'_y(x_1, y_1)$ $\quad F'_x(x_1,y_1) = \frac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial x}$, $F'_y(x_1,y_1) = \frac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial y}$

Дадим приращение $x_1 + \Delta x$ и эта часть будет параллельна Ox (т.к. $\Delta y = 0$)

$$F(x_1, y_1) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \quad (I) \qquad C(x_1 + \Delta x, y_1)$$

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1+\Delta x,\, y_1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \quad (II)$$

$$(II) - (I) = F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) = \int_{(x,y_1)}^{(x_1+\Delta x,\, y_1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{BC} P(x,y)\,dx + \underbrace{Q(x,y)\,dy}_{=0 \text{ т.к. параллельна оси } Ox} = \int_{BC} P(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x, y_1)\,dx$$

По теореме о среднем значении,

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x, y_1)dx = P(x_1 + \Theta\Delta x, y_1)\Delta x, \quad \Theta \in [0;1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F(x_1+\Delta x, y_1) - F(x_1, y_1)}{\Delta x} = P(x_1 + \Theta\Delta x, y_1)$$

при $\Delta x \to 0$ $\quad \frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} = P$

Аналогично получим, что $\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} = Q$ при $\Delta y \to 0$

Для произвольной точки $B(x_1, y_1)$. Следовательно:

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y} = Pdx + Qdy$$

QED ■

Аналог формулы Ньютона-Лейбница

$F(x,y)$ из прошлой теоремы (стр 78) называется первообразной для $Pdx + Qdy$, т.е. $dF(x,y) = Pdx + Qdy$, при $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Известно, что если существует первообразная, то она единственная. Предположим обратное, т.е

$$\exists \Phi(x,y),\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} = Q,\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = P$$

Производные равны, значит F и Φ отличаются константой

$$F(x,y) - \Phi(x,y) = C \quad \left(\text{имеем } F(x,y) = \int_{(x_0 y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy\right.$$

Возьмём $x = x_0$, $y = y_0$

$$\Rightarrow F(x_0, y_0) = 0 \Longrightarrow -\Phi(x_0 y_0) = C \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \Phi(x,y) - \Phi(x_0 y_0)$$

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \Phi(x,y) - \Phi(x_0 y_0)$$

Возьмём $x = x_1$, $y = y_1$

$$\Phi(x,y) - \Phi(x_0 y_0) = \int_{(x_0 y_0)}^{(x,y)} Pdx - Qdy = \Phi(x,y)\Big|_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)}$$

Аналог формулы Ньютона-Лейбница при $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Независимость функций

Пусть имеем систему функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \qquad \dots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Функции f_i, $i = 1, 2, \dots, m$ определены в n-мерной области D, где можно определить точку как $M_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Функции y_i $(1 \le i \le m)$ (т.е. те же f_i) непрерывны в области D вместе со своими частными производными:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial y_1}{\partial x_n}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_2}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial x_n}$$

Допустим, одна из функций системы зависит от других

$$y_i = \Phi(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m) \quad (*)$$

Φ непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial y_i}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial y_i}{\partial y_m}$ в $(n-1)$-мерной области E в $(m-1)$-мерном пространстве.

Когда $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, то соответствующая точка $(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m) \in E$

Определение

Если равенство $(*)$ выполняется тождественно для любой точки области D, то говорим, что y_i в области D зависит от остальных функций системы, т.е. $(y_1, \dots y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m)$

Система в этом случае называется зависимой.

Если же ни в области D, ни в какой-либо из её подобластей $D_0 \subset D$ не выполняется равенство $(*)$, то говорим, что в области D $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ – независимая система функций

Условия независимости

Рассмотрим следующую функциональную матрицу, определенную в D: $(m \leq n)$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

$m \times n$

Теорема: (о независимости системы функций)

Если хотя бы один из определителей (детерминантов) m-го порядка в матрице A отличен от 0, то система функций $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ будет независимой

Доказательство: без нарушения общности возьмём левый верхний угол матрицы. Если его определитель не равен 0, переставим столбцы. Докажем от противного

Допустим, система зависима в некоторой подобласти $(D_0) \subset (D)$, т.е. $y_m = \Phi(y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$. Продифференцируем по x_i

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial y_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_m}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i}$$

При $i=1$ первый элемент последней строчки является линейной комбинацией элементов предыдущих строк, аналогично при $i = \overline{1,n} \implies$ определитель равен 0.

Пришли к противоречию $\implies$ система функций является независимой в области (D).

Q.E.D. ■

Функциональные определители и их свойства

Рассмотрим систему из n функций от n переменных

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Эти функции определены в некоторой n-мерной области D и они непрерывны со всеми своими частными производными. Составим функциональный определитель:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \overset{\text{транспонируем}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Этот определитель также называется определителем Якоби или Якобианом

Умножение функциональных определителей.

Рассмотрим систему 3-х функций от 3-х переменных

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

Они определены в трёхмерном пространстве (D), где любая точка определяется тремя координатами. Все функции со своими частными производными непрерывны в (D)

Рассмотрим следующую систему функций

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, t_3) \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, t_3) \\ x_3 = \varphi_3(t_1, t_2, t_3) \end{cases}$$

Эти функции определены в трехмерной области (E) и непрерывны вместе со своими частными производными в области (E). Если $(t_1, t_2, t_3) \in (E)$, то ей соответствует $(x_1, x_2, x_3) \in (D)$. y_1, y_2, y_3 можно рассматривать как сложные функции от t_1, t_2, t_3.

Рассмотрим функциональные определители этих систем и их произведение:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} & \frac{\partial y_1}{\partial t_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} & \frac{\partial y_2}{\partial t_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial t_1} & \frac{\partial y_3}{\partial t_2} & \frac{\partial y_3}{\partial t_3} \end{vmatrix}$$

То есть

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(t_1, t_2, t_3)} = \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(t_1, t_2, t_3)}$$

Рассмотрим частные случаи: случай от 1-ой переменной

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

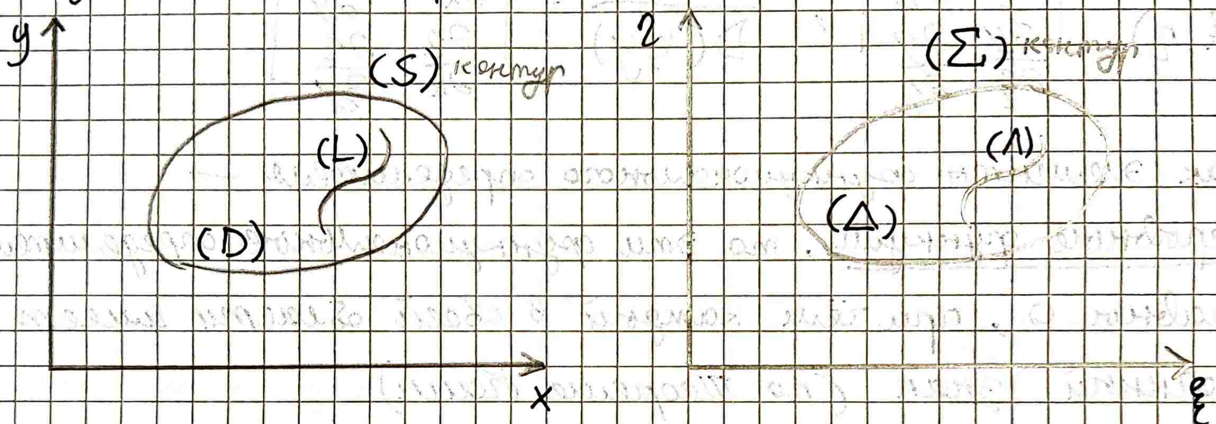
Если $y = t$, то Якобиан будет равен 1 и

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 1$$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Преобразование плоских областей

Рассмотрим две плоскости. К одной отнесем систему координат xOy, а к другой $\xi O \eta$. В каждой области рассмотрим кусочно-гладкие кривые. Отметим, что эти области неограничены и могут совпасть даже со всей плоскостью. Если ограничены — то их границы кусочно-гладкие, если неограничены — то границ нет.



Пусть дана система функций

$$\text{I} \begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad \forall (\xi, \eta) \in (\Delta) \Longrightarrow (x, y) \in (D)$$

Различным парам (ξ, η) соответствуют различные пары (x, y), тем самым устанавливаем взаимно-однозначное соответствие $(\Delta) \to (D)$, и уравнения $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ разрешимы относительно ξ и η

А следовательно: $\text{II} \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$

Предположим, что функции систем I и II: x, y, ξ, η непрерывны и кроме того, непрерывны их частные производные:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Система I) осуществляет преобразование области (Δ) в (D)

Система II) осуществляет преобразование области (D) в (Δ)

Если (Δ) и (D) – плоскости, то это называется преобразованием плоскости в плоскость, если $(\Delta)=(D)$, то имеем преобразование плоскости в саму себя.

Имеем отношение $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\cdot\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=1$, так как

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{vmatrix},\quad \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y}\\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y}\end{vmatrix}$$

Так как элементы функционального определителя — непрерывные функции, то эти функциональные определители не равны 0, причём каждый в своей области имеет постоянный знак (по теореме Коши)

Внутренним точкам (Δ) соответствуют внутренние точки (D) и наоборот. Следовательно, точкам контура (S) будут соответствовать точки контура (Σ)

Теорема: любой кусочно-гладкой кривой (Λ) в области (Δ) соответствует кусочно-гладкая кривая (L) в области (D)

Доказательство:

Пусть система I) отображает (Λ) в (L). Предположим, что (Λ) – гладкая кривая. Запишем (Λ) параметрически:

$$(\Lambda):\begin{cases}\xi=\xi(t)\\ \eta=\eta(t)\end{cases},\ \alpha\le t\le\beta$$

$\exists\ \xi'(t), \eta'(t)$, непрерывные и не равные 0 одновременно, то есть $(\xi'(t))^2+(\eta'(t))^2\neq 0,\ \forall t\in[\alpha;\beta]$

$$(L): \begin{cases} x = x(\xi(t), \eta(t)) = x_1(t) \\ y = y(\xi(t), \eta(t)) = y_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1'(t) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \xi'(t) + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \eta'(t) \\ y_1'(t) = \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \eta'(t) \end{cases} \Rightarrow x_1'(t), y_1'(t)$$ непрерывны.

Допустим, что (L) не кусочно-гладкая, значит в некоторой точке $t = t_0$, $(x_1'(t_0))^2 + (y_1'(t_0))^2 = 0$

$$\begin{cases} x_1'(t_0) = 0 \\ y_1'(t_0) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{но}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} \neq 0$$

Имеем систему однородных линейных уравнений, у которой определитель не равен нулю, следовательно имеется ненулевое решение. Пришли к противоречию. Значит на кривой (L) нет особых точек, (где производные равны 0 $\Rightarrow$ (L) – кусочно-гладкая кривая.

QED. ■

Определение кусочно-гладкой кривой

Если кривая $L = AB$ задана параметрически

$$L = \{(x,y) : x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha;\beta]\}$$

$$A(x(\alpha), y(\alpha)), B(\ (\beta), y(\beta))$$

так, что функции x, y непрерывно дифференцируемы (имеют непрерывные производные) на смежных отрезках

$$[\alpha_i;\beta_i], \ i = \overline{1,n}, \ \alpha = \alpha_1 < \beta_1 = \alpha_2 < \beta_2 = \alpha_3 < \ldots < \beta_n = \beta$$

при чём

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0, \ \forall t \in [\alpha, \beta],$$

тогда (L) называется кусочно-гладкой кривой

Аналогично определяется для 3-х функций $x(t), y(t), z(t)$

88 Аналогично можно с помощью системы II) кусочно-гладкую кривую (L) области (D) отобразить в кусочно-гладкую кривую (Λ) области (Δ).

Вообще, имея замкнутую кривую в области плоскости $(\xi O \eta)$, с помощью функций системы I) её можно отобразить на некоторую замкнутую кривую плоскости (xOy). Направление обхода может меняться или не меняться.

Т.к пара $(\xi, \eta) \in (\Delta)$ определяет системой I) точку $(x, y) \in (D)$, то (ξ, η) называют координатами точек области (D).

Если зафиксировать одну из координат, то множество точек (x, y) образуют координатную линию.

Зафиксировав $\xi = \xi_0$, получаем линию $\begin{cases} x = x(\xi_0, \eta) \\ y = y(\xi_0, \eta) \end{cases}$

Аналогично можем зафиксировать и $\eta = \eta_0$.

Так как в основном координатные линии — кривые, то (ξ, η) называют криволинейными координатами точек плоскости (xOy).

Пример: полярные координаты

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Кроме точки $(0,0)$, имеем взаимно-однозначное соответствие (в случае $(0,0)$ $r = 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$)

Якобиан:

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -r\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi = -r$$

Выражение площади в криволинейных координатах

Вычислим площадь (D) в криволинейных координатах

Теорема:
$$(D) = \iint\limits_{(\Delta)} \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi\, d\eta = \iint\limits_{(\Delta)} |I(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta$$

Предположим, $\exists \dfrac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta}, \dfrac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi}$, причём удовлетворяются условия Теоремы Шварца (т.е эти производные непрерывны)

так, что $\dfrac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi}$

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} \\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{vmatrix}$$

Доказательство:

Запишем параметрически кривую (Σ)
$$(\Sigma): \begin{cases} \xi = \xi(t) \\ \eta = \eta(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha;\beta]$$

α и β выберем так, чтобы положительному направлению (Σ) соответствовало положительное направление кривой (S)

Запишем (S)
$$(S): \begin{cases} x = x(\xi(t),\eta(t)) = x_1(t) \\ y = y(\xi(t),\eta(t)) = y_1(t) \end{cases}$$

Формула площади

$dy = y_1'(t)dt$

$$D = \int\limits_{(S)} x\, dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(\xi(t),\eta(t))\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial\eta}\eta'(t)\right)dt \quad (1)$$

Рассмотрим
$$\int\limits_{(\Sigma)} x(\xi,\eta)\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta\right) \quad (2)$$

$\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ подставим в (2) и придём к (1)

Так как обходы контуров (S) и (Σ) могут быть противоположными, запишем:

$$D = \pm\int\limits_{(\Sigma)} x(\xi,\eta)\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta\right) = \pm\int\limits_{(\Sigma)} x\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi + x\frac{\partial y}{\partial\eta}\eta \quad (3)$$

$$P(\xi,\eta) = x\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad Q(\xi,\eta) = x\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + x\frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} + x\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$(3) = \pm\iint_{(\Delta)}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta = \pm\iint_{(\Delta)} \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} =$$

$$= \pm\iint_{(\Delta)} \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\, d\xi\, d\eta$$

$$D = \iint_{(\Delta)} \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi\, d\eta$$

Вывели формулу

$$\boxed{D = \iint_{(D)} \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi\, d\eta}, \quad \text{при } \Delta \to 0 \Rightarrow D \to 0$$

При этом доказали, что кривая площади 0 отображается в кривую площади 0.

Q.E.D.

Так как подынтегральная функция непрерывна, то можем применить теорему о среднем значении

$$\exists(\bar{\xi},\bar{\eta}) \in (\Delta) \Rightarrow D = \iint_{(D)} |I(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta = |I(\bar{\xi},\bar{\eta})| \cdot \Delta$$

Взаимно-однозначное соответствие в основном не сохраняется полностью, нарушаясь в конечном количестве точек, либо на какой-либо кривой. Точки, в которых нарушается взаимно-однозначное соответствие, можем заключить в область $(\delta) \subset (\Delta)$, имеющая сколь угодно малую площадь, и ей будет соответствовать $(d) \in (D)$ также сколь угодно маленькая.

$$D - d = \iint_{(\Delta)\setminus(\delta)} |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta$$

Пусть $|I(\xi,\eta)| \le M$ в области (Δ), тогда

$$D = \iint_{(\Delta)\setminus(\delta)} |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta + \iint_{(\delta)} |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta$$

$$\iint_{(\delta)} |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta \le M \cdot \delta$$

$$\delta \to 0 \Rightarrow M \cdot \delta \to 0$$

$$\Rightarrow D = \iint_{(\Delta)} |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta$$

Замена переменных в двойном интеграле

Пусть в плоскости xOy имеем область (D), ограниченная кусочно-гладкой кривой (S). Известно, что $f(x,y)$ непрерывна в (D). Также, в плоскости $\xi O \eta$ задана область (Δ), огр. кусочно-гладкой кривой (Σ), между (D) и (Δ) действует взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}, \quad (\Delta) \leftrightarrow (D)$$

$x, y, \frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}$ непрерывны

Теорема:

$$\iint_{(D)} f(x,y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) |I(\xi,\eta)| d\xi d\eta \quad (*)$$

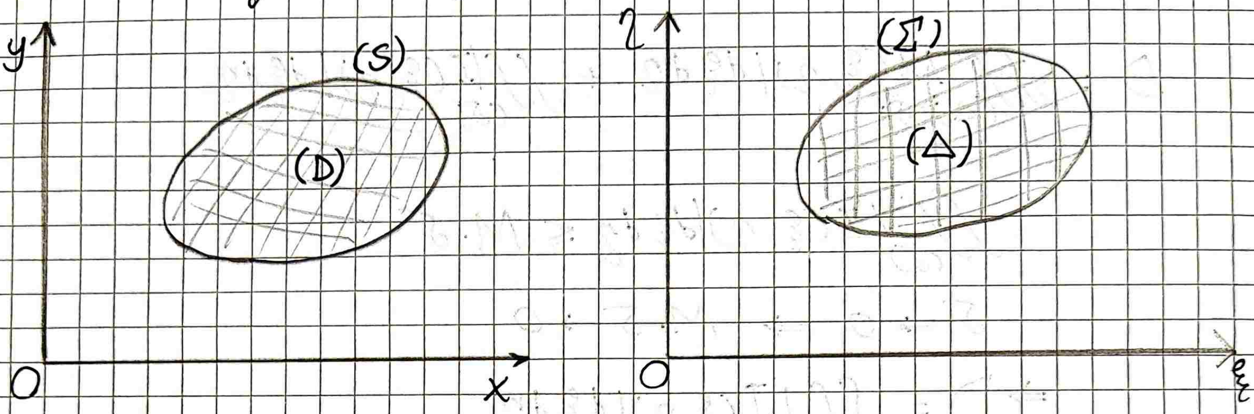
Доказательство:

$f(x,y)$ непрерывна $\Longrightarrow$ левый интеграл существует

x, y непрерывны (и производные) $\Longrightarrow$ $f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$, Якобиан $I(\xi,\eta)$ непрерывны

Следовательно $\Longrightarrow$ правый интеграл также существует.

92 Разобъём область (Δ) на части кусочно-гладкими кривыми $(\Delta_1), (\Delta_2), \dots, (\Delta_n)$. Тем самым (D) также разобъется кусочно гладкими кривыми на $(D_1), (D_2), \dots, (D_n)$



Составим интегральные суммы для левого интеграла.
В каждой области возьмём $M_i(x_i, y_i) \in (D_i)$, $i = \overline{1,n}$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) D_i$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint_{(D)} f(x,y)\,dxdy$$

Преобразуем σ так, чтобы она представляла правую часть равенства $(*)$

$$D_i = |I(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i)| \cdot \Delta_i$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot |I(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i)| \cdot \Delta_i$$

Возьмём фиксированные ξ_i, η_i, произвольные x_i, y_i

$$\begin{cases} x_i = x(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i) \\ y_i = y(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i) \end{cases}$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i), y(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i)) |I(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i)| \cdot \Delta_i$$

$$\lambda \to 0 \implies \lambda_1 \to 0 \quad (\lambda_1 = \max_{i=\overline{1,n}} d(D_i))$$

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} \sigma = \iint_{(D)} f(x,y)\,dxdy$$

Q.E.D.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) \cdot |I(\xi,\eta)|\,d\xi d\eta$$

Тройные Интегралы

Пусть имеем тело объёмом V. Известна плотность в любой точке этого тела $\rho = \rho(M) = \rho(x,y,z)$. Необходимо найти массу тела

Физики решали эту задачу следующим образом:
Разобьём тело на части объёмом $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$, и в каждой возьмём произвольную точку $M(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$,
$\rho(M_i)\cdot V_i = m_i$

Найдём приближенно массу тела и если $\exists$ предел, перейдем к нему при $\lambda \to 0$ (λ - наибольший из диаметров частей тела)

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cdot V_i$$

$$m = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,dV$$

Для формулировки математического определения введём следующие понятия:

- <u>Кубируемое тело:</u> рассмотрим все возможные многогранники (T_1), содержащие тело (V) и все возможные многогранники (T_2), содержащиеся в теле (V). $V_* = \sup T_2$, $V^* = \inf T_1$

$$V = V^* = V_*$$

Для того, чтобы тело было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы его ограничивающая поверхность была объёма 0.

- Поверхность (S) имеет объём 0, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists (A) \subset (V), (B) \supset (V)$ такие, что $B - A < \varepsilon$.

Пусть задано кубируемое тело (V) и в нём определена функция $f(x,y,z)$. Разобъём (V) с помощью поверхностей объёма 0 на $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$, в каждом возьмём произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$

Составим следующую сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) V_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot V_i$$

Если существует конечный предел этой суммы, когда наибольший из диаметров частичных областей стремится к нулю, причём предел этот не зависит ни от способа разбиения (V), ни от выбора точек M_i, то этот предел называется тройным интегралом от $f(x,y,z)$ по (V)

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iiint_{(V)} f(x,y,z)\, dV$$

Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции на теле

(по телу) $\iiint$

Любая интегрируемая функция ограничена, т.к. в противном случае можно взять сколь угодно большой σ и предел не будет конечен.

Рассмотрим верхние и нижние суммы Дарбу

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i V_i, \quad m_i = \inf_{(x,y,z)\in(V)} \{f\}, \quad M_i = \sup_{(x,y,z)\in(V)} \{f\}$$

Чтобы $f(x,y,z)$ была интегрируема (по телу), необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$, или

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) V_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i V_i = 0$$

Свойства Тройных Интегралов

Свойство 1:

Пусть $f(x,y,z)$ интегрируема в (V). Тогда, $kf(x,y,z)$ также интегрируема, при чём

$$\iiint\limits_{(V)} k f(x,y,z)\,dV = k\iiint f(x,y,z)\,dV$$

Доказательство:

Произвольным образом делим (V) на части. Рассмотрим интегральные суммы:

точка

$$\sum_{i=1}^{n} k f(M_i)V_i = k\sum_{i=1}^{n} f(M_i)V_i$$

При $\lambda \to 0$ получаем доказываемое Q.E.D. ■

Свойство 2:

Пусть $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ интегрируемы в (V). Тогда $f(x,y,z) \pm g(x,y,z)$ также интегрируема, при чём:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z) \pm g(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV \pm \iiint\limits_{(V)} g(x,y,z)\,dV$$

Доказательство:

Произвольным образом делим (V) на части. Рассмотрим интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} (f(M_i)+g(M_i))V_i = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)V_i + \sum_{i=1}^{n} g(M_i)V_i$$

При $\lambda \to 0$ получаем доказываемое. Q.E.D ■

Свойство 3:

Пусть $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ интегрируемы в (V). Известно, что во всей части определения $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$

Тогда:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV \leq \iiint\limits_{(V)} g(x,y,z)\,dV$$

Свойство 4:

Пусть $f(x,y,z)$ интегрируема в (V). Тогда $|f(x,y,z)|$ также интегрируем в (V), причём:

$$\left|\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV\right| \leq \iiint\limits_{(V)} |f(x,y,z)|\,dV$$

Свойство 5:

Пусть $f(x,y,z)$ интегрируема в (V). Известно, что $m \leq f(x,y,z) \leq M$. Тогда справедливо неравенство:

$$mV \leq \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z) \leq MV$$

Теорема о среднем значении

При условиях свойства 5, $m \leq \mu \leq M$, $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV = \mu V$

Рассмотрим частный случай, когда $f(x,y,z)$ непрерывна на (V). Тогда $\exists(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in (V)$ (точка) такая, что

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV = f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\cdot V$$

Свойство 6:

Пусть $f(x,y,z)$ определена в (V) и известно, что (V) разлагается на области $(V') \cup (V'') = (V)$, не налегающие друг на друга. Тогда $\exists \iiint\limits_{(V')} f(x,y,z)\,dV'$, $\exists \iiint\limits_{(V'')} f(x,y,z)\,dV'' \Longleftrightarrow \exists \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV$. При чём

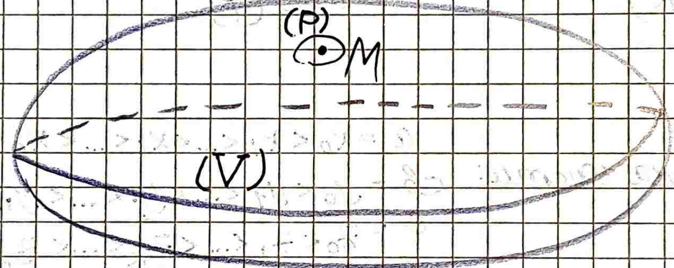
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{(V')} f(x,y,z)\,dV' + \iiint\limits_{(V'')} f(x,y,z)\,dV''$$

Свойство 7:

Пусть $f(x,y,z)$ интегрируема в (V) и имеет разрывы только на конечном числе поверхностей объёма 0. Если изменить значение функции на конечном числе поверхностей так, чтобы получившаяся функция $f^*(x,y,z)$ оставалась ограниченой, то эта функция будет интегрируемой в (V), при чём

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{(V)} f^*(x,y,z)\,dV.$$

Тройной интеграл как аддитивная функция от пространственной области



Возьмем в теле (V) точку M и её окружающую область $(e) \in (V)$, ограниченную (P). Каждой такой области сопоставим некоторое число и назовем это функцией от области $\Phi((V))$. Эта функция аддитивная, т.е

$$(V) = (V_1) \cup (V_2) \Longrightarrow \Phi((V)) = \Phi((V_1)) + \Phi((V_2))$$

В качестве примера возьмём $\Phi((V)) = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV$

Рассмотрим понятие производной области

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\Phi((V))}{V}$$

Когда $\exists \lim$, то он называется производной функцией от области в точке M

Вычисление тройного интеграла в случае прямоугольного параллелепипеда

Пусть имеем прямоугольный параллелепипед $(T) = [a, b; c, d; e, f]$

Проектируем (T) на плоскость yOz и получим прямоугольник $(R) = [c; d; e; f]$

Теорема

Пусть имеем $f(x, y, z)$ определенную в (T),

$\exists \iiint_{(T)} f(x, y, z) dT$, известно, что при любом фиксированном $x \in [a; b]$ $\exists\, I(x) = \iint_{(R)} f(x, y, z)\, dR$

Тогда:

$$\exists \int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z)\, dR = \iiint_{(T)} f(x, y, z)\, dT$$

Доказательство:

Отрезки разделим на части:

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b,\ i = \overline{0, n}$

$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_j < \ldots < y_m = d,\ j = \overline{0, m}$

$e = z_0 < z_1 < \ldots < z_k < \ldots < z_l = f,\ k = \overline{0, l}$

Параллелепипед (T) разделился на частичные параллелепипеды

$$(T_{i,j,k}) = [x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}; z_k, z_{k+1}]$$

Прямоугольник (R) разделился на $(R_{j,k}) = [y_j, y_{j+1}, z_k, z_{k+1}]$

Так как существует тройной интеграл, $f(x, y, z)$ ограничена на (T) и в частности на $(T_{i,j,k})$

$$m_{i,j,k} \leq f \leq M_{i,j,k}$$

$$m_{i,j,k} = \inf_{(x,y,z) \in (T_{ijk})} \{f(x, y, z)\}$$

$$M_{i,j,k} = \sup_{(x,y,z) \in (T_{i,j,k})} \{f(x, y, z)\}$$

Проинтегрируем неравенство по (R), $\forall x \in [x_i; x_{i+1}]$

$$\iint\limits_{(R_{jk})} m_{ijk}\, dR \leq \iint\limits_{(R_{jk})} f(x,y,z)\, dR \leq \iint\limits_{(R_{jk})} M_{ijk}\, dR$$

Согласно двойному интегрированию прямоугольника

$$m_{ijk} \Delta y_j \Delta z_k \leq \iint\limits_{(R_{jk})} f(x,y,z)\, dR \leq M_{ijk} \Delta y_j \Delta z_k$$

Зафиксируем $x = \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, просуммируем неравенство по всем j и k

$$\sum_j \sum_k m_{ijk} \Delta y_j \Delta z_k \leq I(\xi_i) = \iint\limits_{(R)} f(\xi_i, y, z)\, dy\, dz \leq$$

$$\leq \sum \sum M_{ijk} \Delta y_j \Delta z_k$$

Теперь просуммируем по всем i

$$\sum_i \sum_j \sum_k m_{ijk} \Delta y_j \Delta z_k \Delta x_i \leq \sum_i I(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_i \sum_j \sum_k M_{ijk} \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Получили верхнюю и нижнюю суммы Дарбу, а значит поскольку $f(x,y,z)$ интегрируема, то эти суммы стремятся к интегралу.

$$\begin{matrix} \Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0 \\ \Delta z_k \to 0 \end{matrix} \Rightarrow \lim s = \lim S = \iiint f\, dV = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0 \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_i I(\xi_i) \Delta x_i = \iiint\limits_{(V)} f\, dV$$

Получаем (т.к. предел единственен)

$$\int_a^b I(x)\, dx = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z), \text{ где}$$

$$I(x) = \iint\limits_{(R)} f(x,y,z)\, dR \; [dy\, dz]$$

QED. ■

100 • Пусть имеем параллелепипед (T) и его основание (R)

$$\iiint_{(T)} f(x,y,z)\,dT = \int_a^b dx \iint_{(R)} f(x,y,z)\,dR$$

$f(x,y,z)$ непрерывна в T и $\forall x \in [a,b], \forall y \in [c;d]\ \exists \int_e^f f(x,y,z)\,dz$

Тогда тройной интеграл представляется в виде повторного

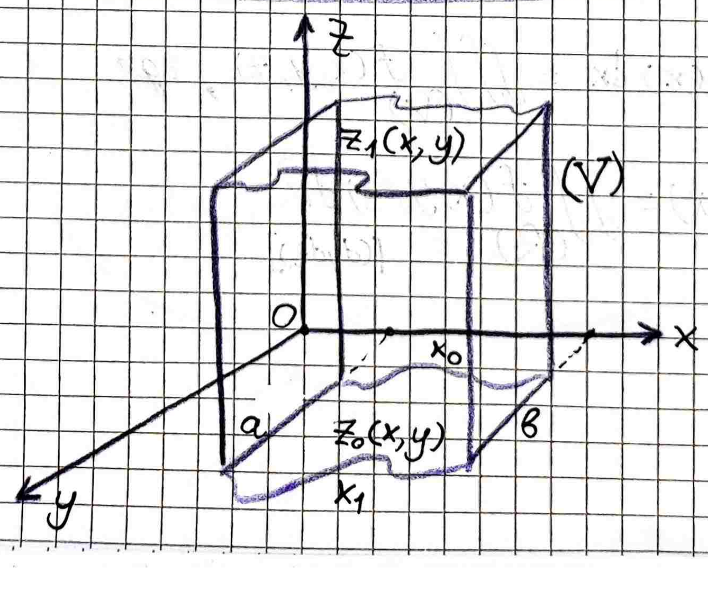
$$\iiint_{(T)} f(x,y,z)\,dT = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z)\,dz$$

• Пусть имеем цилиндрический брус (V). С боков образующие цилиндрической поверхности параллельны оси Oz нижняя и верхняя поверхности определяются уравнениями

$z = z_0(x,y)$, $z = z_1(x,y)$. Этот брус проектируется на плоскость xOy криволинейной трапецией, ограниченной прямыми, параллельными Oy: $x = a$, $x = b$ а по бокам – кривыми $y = y_0(x)$, $y = y_1(x)$

Предположим, что $f(x,y,z)$ непрерывна по совокупности. Тогда, интеграл по (V) имеет следующий вид:

$$\boxed{\iiint_{(V)} f(x,y,z)\,dV = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} dy \int_{z_0(x,y)}^{z_1(x,y)} f(x,y,z)\,dz}$$



Параметрическое представление поверхности

Пусть имеем (S) — поверхность, заданную след. образом:

$$S: \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$$

φ, ψ, χ непрерывны вместе со своими частными производными $\varphi'_u, \varphi'_v, \psi'_u, \psi'_v, \chi'_u, \chi'_v$ в области (Δ) в плоскости (u,v)

Рассмотрим функциональную матрицу, состоящую из частных производных:

$$\begin{pmatrix} \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

Каждая точка M_0 на S определяется одной парой (u_0, v_0), то есть M_0 — <u>простая</u> точка. Если хотя бы один из определителей вышеприведенной матрицы отличен от 0, то M_0 — <u>не особая</u> точка, если же все определители равны 0, то M_0 — <u>особая</u> точка.

$$A = \begin{vmatrix} \psi'_u & \chi'_u \\ \psi'_v & \chi'_v \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} \chi'_u & \varphi'_u \\ \chi'_v & \varphi'_v \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix}$$

Пусть M_0 — не особая, допустим $C \neq 0$. В достаточно малой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на поверхности (S) z <u>явно</u> выражается через x и y, т.е $z = f(x,y)$, причём $f(x,y)$ непрерывна вместе со своими частными производными (f'_x, f'_y) в окрестности точки M_0, и в каждой точке этой поверхности $S: t = f(x,y)$ существует касательная плоскость

$M(x_0, y_0, z_0)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$ — уравнение касательной плоскости

 Следовательно существует нормаль, перпендикулярная касательной плоскости в той точке, где её провели.

Касательная образует следующие углы с осями Ox, Oy, Oz

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

В случае, если поверхность задана в явном виде $z = f(x, y)$, углы выражаются как: $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$

$$\cos\alpha = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

Эти косинусы называются <u>направляющими косинусами</u> нормали

Если $u = u_0$ зафиксируем, а v будем менять, получим кривую, целиком содержащуюся на (S)

$$\begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \\ z = z(u_0, v) \end{cases}$$

Меняя u_0 на u_1, получаем другую <u>u-кривых</u> кривую. Таким образом, получаем множество кривых, лежащих на поверхности (S). Фиксируя v и меняя u, получаем множество v-кривых, лежащих на поверхности (S)

<u>Понятие стороны поверхности.</u>

Пусть поверхность (S) в каждой своей точке имеет касательную плоскость, которой можно приписать направление (или во внешнюю часть, или во внутреннюю)

- Возьмем точку A_0 в (S) и припишем ей какое-либо направление нормали. По некоторой замкнутой кривой (контуру) выйдем из A_0 и снова вернемся (совершив круг), сохраняя направление нормали.

- Если проходя по любому контуру, направление нормали не меняется, то поверхность называется <u>двухсторонней</u>
- Если существует хотя бы один контур, пройдя по которому направление нормали меняется на противоположное, то поверхность называется <u>односторонней</u>

Пример двухсторонней поверхности

Пример односторонней поверхности (лента Мёбиуса)

Будем рассматривать только двухсторонние поверхности.

Можно показать, что если точке двухсторонней поверхности приписываем направление нормали, тогда то же направление нормали будет и во всех остальных точках этой поверхности.

<u>Определение</u>: Совокупность всех точек поверхности с приписанными в этих точках направлениями нормали по указанному правилу называется стороной поверхности

<u>Примеры двухсторонних поверхностей</u>

I) Область (S) задана в явном виде:

$S: z = f(x,y)$ определена в плоской области (D), где $(D) \subset (x,y)$. $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны в (D)

$p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ $\cos\alpha = \frac{-p}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}$, $\cos\beta = \frac{-q}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}$, $\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}$

(ось Ox) (ось Oy) (Ось Oz)

Эти углы являются непрерывными функциями в области (D) так как p и q непрерывны в области (D)

104 II) Область задана параметрически:

$S: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$ x, y, z определены в некоторой области (Δ) содержащейся в плоскости параметров (u,v)

x, y, z и их частные производные $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ непрерывны в области (Δ)

Определение: Поверхность называется гладкой, если функции, параметрически определяющие эту поверхность (как в пр. II) непрерывны вместе со своими частными производными, а все точки поверхности являются неособыми и простыми

Ориентация поверхности

Пусть (S) – незамкнутая гладкая двухсторонняя поверхность, ограниченная простым контуром (L)

Определение: положительным по (L) назовём то направление, при котором поверхность – слева от наблюдателя, обход – против часовой стрелки и направление нормали – вверх (от ног к голове). Отрицательным в таком случае будет считаться обратное направление

В "перевернутой" перспективе направления меняются местами.

Эти определения справедливы также для любой замкнутой кривой внутри поверхности.

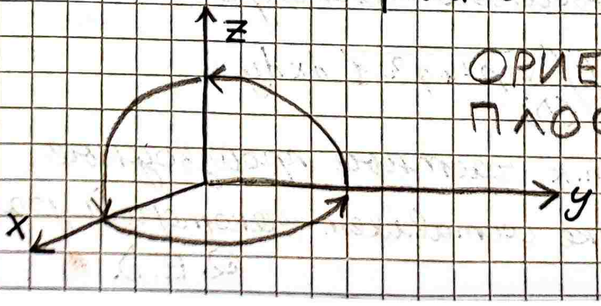
Определение: совокупность всех обходов замкнутых контуров (правило, по которому совершается обход), называется ориентацией поверхности.

Площадь поверхности, заданной в явном виде

Пусть задана поверхность (S) в явном виде $z = f(x, y)$, $(x, y) \in (D)$, (D) – квадрируемая область на плоскости xOy.
Известно, что $f(x, y)$ непрерывна в (D) вместе со своими частными производными $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$, поверхность не замкнута и ограничена простой кривой.

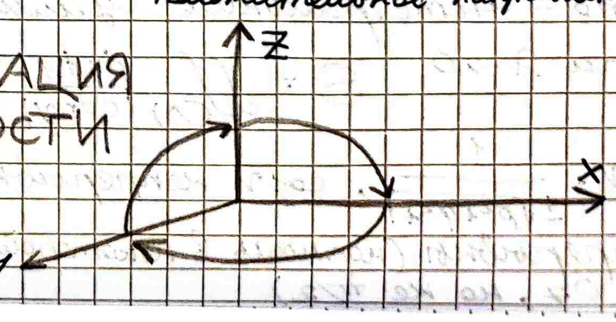
Разделим (D) с помощью кривых площади 0 на части и получим квадрируемые частичные области (D_i), $i = \overline{1, n}$.
На каждом из этих контуров строим цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны Oz. Эта цилиндрическая поверхность (цилиндр. тело) вырезает некоторую часть из (S) $\Rightarrow$ (D_i) будет соответствовать (S_i), $i = \overline{1, n}$.
В (D_i) возьмем точку $P_i(x_i, y_i)$, ей будет соответствовать $M_i(x_i, y_i, z_i) \in (S_i)$.
Так как (S) задана в явном виде и она непрерывна вместе со своими частными производными, значит в каждой точке она будет иметь касательную плоскость.
Проведём в точке M_i касательную плоскость (T).
Цилиндрическая часть вырезает часть касательной плоскости (T_i), $i = \overline{1, n}$. Будем считать $T_i \approx S_i$.
Следовательно
$$S \approx \sum_{i=1}^{n} T_i$$

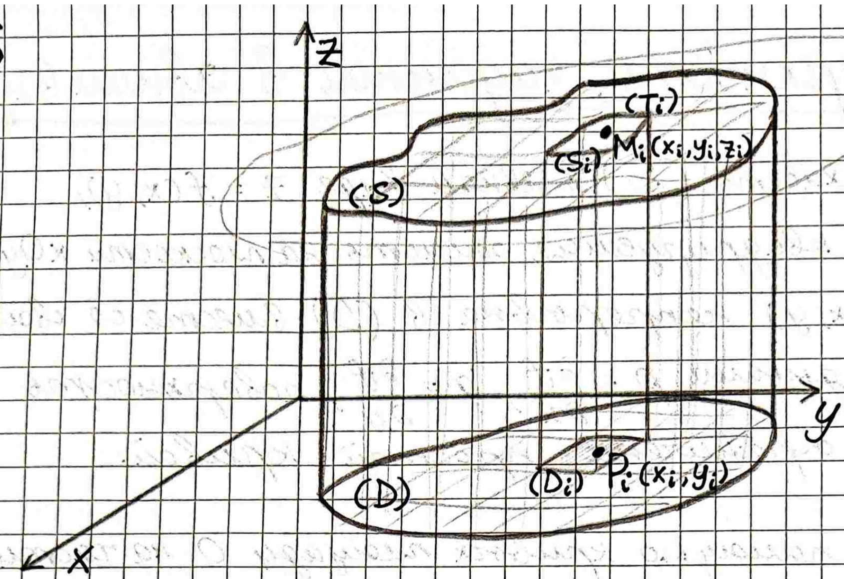
Правая координатная система
положительное направление



ОРИЕНТАЦИЯ ПЛОСКОСТИ

Левая координатная система
положительное направление





(T) - касательная плоскость в точке M_i

Пусть λ – наибольший из диаметров (S_i)

Устремим $\lambda \to 0$

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} T_i$$

$\Big($ λ_1 – наибольший из диаметров (D_i)

$\lambda_1 \to 0 \Leftrightarrow \lambda \to 0$ $\Big)$

Теорема:

$$S = \iint_{(D)} \frac{dxdy}{|\cos \nu|}, \text{ где}$$

ν – угол образуемый нормалью с Oz в любой точке (S),

$$\cos \nu = \frac{1}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

Доказательство: ортогональная проекция (T_i) есть (D_i), $\forall i = \overline{1,n}$

имеем $D_i = T_i \cos \nu_i$, где ν_i – угол, образуемый нормалью с осью Oz в точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$

$$T_i = \frac{D_i}{|\cos \nu_i|} \Rightarrow \sigma = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{|\cos \nu_i|}$$

Это – интегральная сумма двойного интеграла.

При $\lambda \to 0$

$$S = \iint_{(D)} \frac{dxdy}{|\cos \nu|} = \iint_{(D)} \sqrt{p^2+q^2+1}\, dxdy$$

$\cos \nu = \frac{1}{\pm\sqrt{p^2+q^2+1}}$, $\cos \nu$ непрерывна, т.к частные производные непрерывны (нормаль в некоторой точке составляет некоторый угол с Oz, но не $\pi/2$)

Q.E.D. ■

Площадь поверхности в общем случае

Пусть поверхность задана параметрически:

$$(S):\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Функции определены в плоскости (Δ), они и их частные производные непрерывны.

Предположим, что на (S) только простые точки, нет кратных точек, то есть каждой паре (u_0, v_0) соответствует только одна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и нет особых точек (из функциональных определителей хотя бы один - ненулевой). Между (Δ) и (S) существует взаимно-однозначное соответствие.

Возьмем произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (S)$

Этой точке соответствует $(u_0, v_0) \in (\Delta)$. Так как точки — не особые, возьмем точку, в которой $C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$

Существует некоторая окрестность M_0, где $z = f(x,y)$

В некоторой другой точке $M_1(x_1, y_1, z_1) \in (S)$ $A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \neq 0$

Следовательно, x можно выразить как $x = \varphi(y,z)$

Согласно Лемме Гейне-Бореля (из всякой бесконечной системы интервалов, покрывающей отрезок числовой прямой, можно выбрать конечную подсистему, также покрывающую этот отрезок) т.е. если имеем замкнутую область, то существует конечное число кругов, покрывающих эту область.

(S) можно разложить на конечное число кусков (s), в каждом из которых поверхность выражена в явном виде.

Например в M_0 имеем $z = f(x,y) \Rightarrow$ Вычислим площадь (s)

$$s = \iint_{(d)} \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} = \iint_{(\delta)} \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{C} \cdot C\,du\,dv = \iint_{(\delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

(D делится на d

Δ делится на δ)

$$(S) \leftrightarrow (D) \leftrightarrow (\Delta)$$

$$(s) \leftrightarrow (d) \leftrightarrow (\sigma)$$

$$\cos\nu = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Якобиан: $|I(u,v)| = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$

$$S = \sum s = \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

Рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} (x'_u)^2+(y'_u)^2+(z'_u)^2 & x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \\ x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v & (x'_v)^2+(y'_v)^2+(z'_v)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} =$$

$$= EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

$$S = \iint_{(\Delta)} \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

E, G, F называются Гауссовскими коэффициентами

Поверхностные интегралы первого типа

Пусть имеем гладкую (кусочно-гладкую) поверхность (S), ограниченную некоторой кривой (L), и на ней задана некоторая функция $f(x,y,z)$. Разобьём эту поверхность на части с помощью кривых. В каждой части произвольным образом возьмём $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot S_i$$

Если при стремлении наибольшего из диаметров частей λ к нулю $(\lambda \to 0)$ существует конечный предел, не зависящий ни от способа разбиения, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется поверхностным интегралом первого типа от функции $f(x,y,z)$ по поверхности (S)

$$\lim_{\lambda\to0} \sigma = \lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)S_i$$

$$\iint_{(S)} f(M)\,dS = \iint_{(S)} f(x,y,z)\,dS$$

Вычисление

Пусть $f(x,y,z)$ непрерывна по совокупности на (S): $\begin{cases} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{cases}$

Функции x, y, z определены в области (Δ) в плоскости (u,v), они непрерывны в (Δ) вместе с частными производными $x'_u, x'_v, y'_u, y'_v, z'_u, z'_v$. Поверхность гладкая и не имеет кратных точек, т.е. каждой $(u_0,v_0)\in(\Delta)$ соответствует единственная $(x,y,z)\in(S)$ $\Rightarrow$ имеем взаимно-однозначное соответствие между (Δ) и (S)

Кусочно-гладкими кривыми разбиваем (S) на части (S_i), тем самым (Δ) также разбивается на части (Δ_i)

λ – наибольший из диаметров (S_i)

λ_1 – наибольший из диаметров (Δ_i) $\quad \lambda\to0 \Leftrightarrow \lambda_1\to0$

Теорема: пусть (S) удовлетворяет всем вышеприведенным условиям и $f(x,y,z)$ непрерывна на (S), тогда

$$\exists \iint_{(S)} f(x,y,z)\,ds = \iint_{(\Delta)} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\cdot\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

где $EG-F^2 = \begin{vmatrix} (x'_u)^2+(y'_u)^2+(z'_u)^2 & x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \\ x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v & (x'_v)^2+(y'_v)^2+(z'_v)^2 \end{vmatrix}$

Этот функциональный определитель является непрерывной функцией от u, v в (Δ).

 Доказательство:

Интеграл правой части существует, т.к сложная функция от непрерывных функций также непрерывна.

В каждой части (S_i) выбранной точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$ будет соответствовать $(u_i, v_i) \in (\Delta_i)$, $i = \overline{1, n}$

$$x = x(u_i, v_i) \quad y = y(u_i, v_i) \quad z = z(u_i, v_i)$$

Согласно <u>теореме о среднем значении</u>:

$$S_i = \iint\limits_{(\Delta_i)} \sqrt{EG - F^2}\, du dv = \sqrt{EG-F^2}\Big|_{\substack{u = \bar{u}_i \\ v = \bar{v}_i}} \Delta_i,$$ где

$(\bar{u}_i, \bar{v}_i) \in (\Delta_i)$ – некоторая точка

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u = \bar{u}_i \\ v = \bar{v}_i}} \Delta_i$$

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \cdot \sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u = u_i \\ v = v_i}} \Delta_i$$

интегральная сумма правой части

$$\sigma - \sigma^* = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)) \left(\sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u = \bar{u}_i \\ v = \bar{v}_i}} - \sqrt{EG - F^2}\Big|_{\substack{u = u_i \\ v = v_i}} \right) \Delta_i$$

$$|\sigma - \sigma^*| \le \sum_{i=1}^{n} f(x, y, z) \left| \sqrt{\dots} - \sqrt{\dots} \right| \cdot \Delta_i \qquad |f(x,y,z)| \le M$$

По <u>теореме Вейерштрасса I</u>, $f(x, y, z)$ ограниченна, т.к непрерывна в (Δ)

E, G, F непрерывны в (Δ) $\Rightarrow$ по <u>теореме Кантора</u> они равномерно непрерывны $\xRightarrow{\text{в } (\Delta)}$ $\sqrt{EG - F^2}$ равномерно непрерывна в (Δ). Согласно определению равномерной непрерывности:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon)$, такое, что если $\lambda_1 < \delta \Leftrightarrow |u_i - \bar{u}_i| < \delta$
$|v_i - \bar{v}_i| < \delta$

$$\Rightarrow \left| \sqrt{EG - F^2} - \sqrt{\overline{EG - F^2}} \right| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$|\sigma - \sigma^*| < M \cdot \varepsilon \cdot \Delta$$

как сумма всех Δ_i

по определению равномерной непрерывности

по ограниченности функции $f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_1 \to 0} \sigma^* = \iint_{(\Delta)} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

$$\Downarrow \ (\lambda \to 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \to 0)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint_{(S)} f(x, y, z)\, ds$$

Q.E.D. ■

Аналогично можно доказать следующее:

Если (S) задана в явном виде $z = f(x, y)$, $(x, y) \in (D)$ – квадрируемая проекция, z'_x, z'_y непрерывны, тогда:

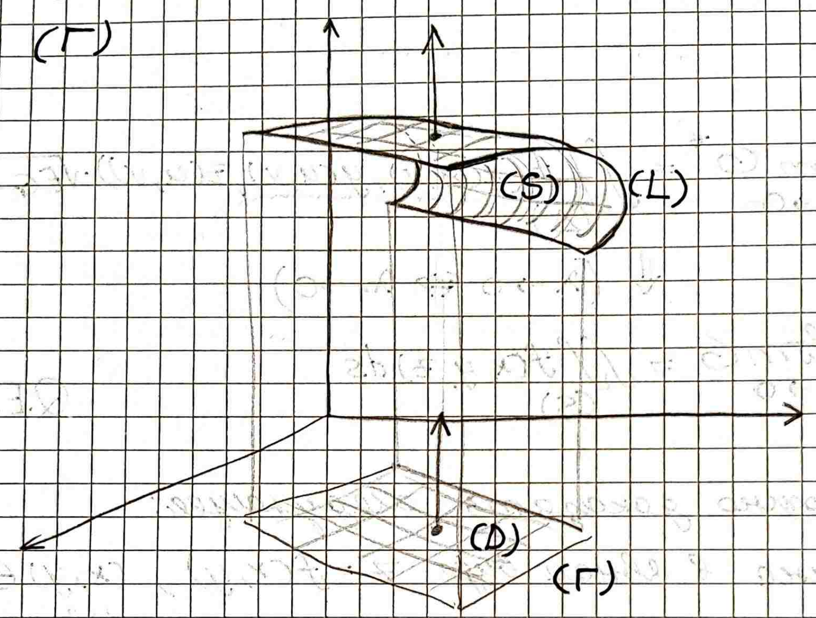
$(p = z'_x,\ q = z'_y)$ $\quad S_i = \iint_{(D_i)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$

$$\iint_{(S)} f(x, y, z)\, dx\, dy = \iint f(x, y, z) \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy = \iint \frac{f(x, y, z(x, y))}{|\cos \gamma|}\, dx\, dy$$

где $\quad |\cos \gamma| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$

Поверхностные интегралы второго типа

Пусть имеем гладкую двухстороннюю поверхность (S), ограниченную контуром (L). На ней установим определённое направление. Поверхность задана в явном виде $z = f(x,y)$. Проекцию обозначим через (D), контур проекции, через (Γ)



Берем "верхнюю" сторону поверхности (S), положительным будет направление против часовой стрелки, направление проектируемой части будет таким же (со стороной поверхности определяется ориентация поверхности).

Проектируем (S) на (D). (S) делим на части (S_i) (D) делится на части (D_i), и обход частей будет таким же. Каждая (S_i) будет ориентированной (D_i) также

В случае, когда обход (L) совпадает с обходом (Γ)

$\forall M_i (x_i, y_i, z_i) \in (S_i)$ $\quad \sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot D_i$

Если взять "нижнюю" сторону, то обход проектируемой будет не совпадать и

$$\sigma = -\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot D_i$$

Когда существует конечный предел этих сумм, при ($\lambda \to 0$) не зависящий ни от способа разделения (S), ни от выбора точек M_i, то этот предел называется поверхностным интегралом второго типа (выбранный по определенной стороне интеграл)

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint_{(S)} f(x,y,z)\,dx\,dy$$

Если поверхность спроектирована на другие плоскости, то интеграл будет иметь вид:

$$\iint_{(S)} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

Вычисление в случае явного уравнения

Пусть дана гладкая двухсторонняя поверхность (S): $z = z(x,y)$, $(x,y) \in (D)$, z, $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ непрерывны в (D). На (S) задана $f(x,y,z)$, непрерывная функция. Выберем верхнюю сторону поверхности

Теорема: имея вышеупомянутые условия, справедливо:

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dS = \iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))\,dx\,dy$$

Доказательство:

Разделим (S) кусочно-гладкими кривыми на части (S_i), (D) разделится на части (D_i). В каждой (S_i) берем $\forall M_i$, составляем сумму:

$$(z_i = z(x_i, y_i))$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\cdot D_i$$

σ — интегральная сумма правой части требуемого равенства

$(\lambda \to 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \to 0)$ $\quad \lambda_1 = \max d(D_i)$, $\lambda = \max d(S_i)$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint_{(D)} f(x, y, z(x,y))\,dxdy$$

Интеграл существует, т.к. $x, y, z(x,y)$ непрерывны и f непрерывна как сложная функция.

то же, что и

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} \sigma = \iint_{(S)} f(x,y,z)\,dxdy = \iint_{(S)} f(x,y,z)\,dS$$

σ имеет единственный предел, следовательно

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dS = \iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))\,dxdy$$

Q.E.D. ■

При выборе нижней стороны добавляем минус

Аналогично получается, если $x = x(y,z)$ или $y = y(x,z)$

Связь между поверхностными интегралами первого и второго типов

Имеем гладкую двухстороннюю поверхность $(S): z(x,y)$ $(x,y) \in (D)$, z, z'_x, z'_y непрерывны в (D). Берем верхнюю сторону. На (S) имеем непрерывную $f(x,y,z)$

Поверхностный интеграл I типа:

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dS = \iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))\frac{1}{|\cos\gamma|}\,dxdy$$

При выборе верхней стороны $0 < \gamma < 90 \Rightarrow \cos\gamma > 0$

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\cos\gamma\,dS = \iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))\,dxdy = \iint_{(S)} f(x,y,z)\,dxdy$$

Умножим обе стороны на $\cos\gamma$ внутри интеграла

Если возьмём нижнюю сторону, то $90 < \nu < 180 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\nu < 0$

$$-\iint_{(S)} f(x,y,z)\cos\nu\, dS = -\iint_{(D)} f(x,y,z(x,y))\,dxdy = -\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dxdy$$

Получим поверхностный интеграл II типа

В общем случае:

$$\iint_{(S)} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\nu)dS$$

где α – угол нормали с Ox

β – угол нормали с Oy

ν – угол нормали с Oz

Направляющие косинусы имеют то же направление, что и установленная сторона поверхности.

Примечание: если (S) – цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны Oz, то

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\,dxdy = 0$$

Вычисление поверхностного интеграла второго типа в общем случае (параметрически заданная поверхность)

Пусть имеем $(S): \begin{cases} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{cases}$, x, y, z и частные производные непрерывны в (Δ). На (S) нет особых и кратных точек. (S) ограничена контуром (L). (Δ) ограничена (Ω). Т.е. между (S) и (Δ) имеем взаимно-однозначное соответствие.

Рассмотрим случай, когда (L) и (Ω) соответствуют друг другу

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \cos\nu = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv$$

 Тогда $\iint\limits_{(S)} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\, dS$

$$= \iint\limits_{(\Delta)} (AP + BQ + CR)\,dudv$$

Функции $P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
$Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $(u,v)\in(\Delta)$
$R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ находятся в (Δ)

Формула Стокса

Формула Стокса представляет собой связь поверхностного интеграла с криволинейным. Из неё следует Формула Грина.

Возьмем (S) - гладкую двустороннюю поверхность без кратных точек, ограниченную кусочно-гладкой кривой (L). Пусть $P(x,y,z)$, P'_x, P'_y, P'_z непрерывны на (S). Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_{(L)} P\,dx = \iint\limits_{(S)} \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdy - \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$$

Обход (L) согласуется со стороной поверхности (S)

В общем случае, имея функции P, Q, R от x, y, z:

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Выведем формулу Грина: т.к $z=0$, (S) - плоская область, имеем:

$$\int\limits_{(L)} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(S)} 0 + 0 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Формула Остроградского

Формула Остроградского представляет собой связь между тройным интегралом по телу и поверхностным интегралом по границе этого тела.

Возьмем тело, ограниченное снизу и сверху гладкими поверхностями $(S_1): z = z_0(x,y)$, $(S_2): z = z_1(x,y)$, $z_0(x,y) < z_1(x,y)$, а сбоку цилиндрической поверхностью (S_3) параллельной Oz

Возьмём непрерывную функцию $R(x,y,z)$, её частная производная $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывна.

Тогда:

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{(S)} R\,dx\,dy$$

Пусть (S) - полная поверхность, ограничивающая тело, нормаль поверхности направлена во внешнюю сторону

Проекция на xOy - (D)

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_{(D)} dx\,dy \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \iint_{(D)} R(x,y,z_1(x,y))\,dx\,dy -$$

$$- \iint_{(D)} R(x,y,z_0(x,y))\,dx\,dy = \iint_{(S_1)} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint_{(S_2)} R(x,y,z)\,dx\,dy$$

$$+ \underbrace{\iint_{(S_3)} R(x,y,z)\,dx\,dy}_{=0} = \iint_{(S)} R\,dx\,dy$$

$$\alpha = \angle(\vec{n}, Ox) \quad \beta = \angle(\vec{n}, Oy) \quad \gamma = \angle(\vec{n}, Oz)$$ углы нормали с осями

Аналогично, можем получить равенства, если непрерывны P, $\frac{\partial P}{\partial x}$ или Q, $\frac{\partial Q}{\partial y}$. В общем случае формула имеет вид:

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_{(S)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

Применение формулы Остроградского

Рассмотрим частные случаи:

$$\begin{cases} P = x \\ Q = 0 \\ R = 0 \end{cases} \Rightarrow V = \iint\limits_{(S)} x\,dydz$$

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q = y \\ R = 0 \end{cases} \Rightarrow V = \iint\limits_{(S)} y\,dxdz$$

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \\ R = z \end{cases} \Rightarrow V = \iint\limits_{(S)} z\,dx\,dy$$

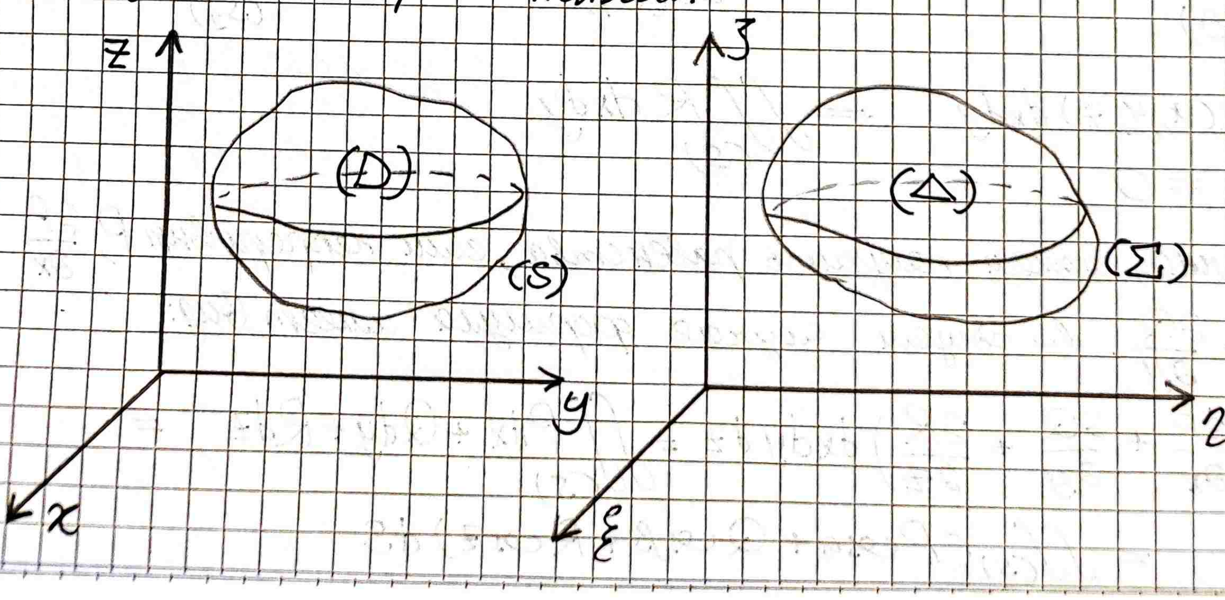
$$\begin{cases} P = x/3 \\ Q = y/3 \\ R = z/3 \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(S)} x\,dydz + y\,dxdz + z\,dxdy$$

Замена переменных в тройных интегралах

Преобразование пространственных областей

Рассмотрим два трехмерных пространства и в каждом из них определим системы координат.

Рассмотрим два тела, ограниченных кусочно-гладким поверхностями:



(Δ) отображается в (D) с помощью системы 1)
(D) также отображается в (Δ) с помощью системы 2)

$$1)\ \begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \xi = \xi(x, y, z) \\ \eta = \eta(x, y, z) \\ \zeta = \zeta(x, y, z) \end{cases}$$

Функции $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ непрерывны вместе со своими частными производными. Тогда:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} \cdot \frac{D(\xi,\eta,\zeta)}{D(x,y,z)} = 1$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$ – непрерывная функция

Якобиан сохраняет знак (по Теореме Коши, т.к функции непрерывны)

- Граница (Σ) в (Δ) соответствует границе (S) в (D)
- $\forall$ кусочно-гладкая поверхность (Σ_1) в (Δ) будет отображаться в кусочно-гладкую поверхность (S_1) в (D) и наоборот.
- $\forall (\xi, \eta, \zeta)$ определяет некоторую (x, y, z).

(ξ, η, ζ) называются криволинейными координатами точек пространства (x, y, z)

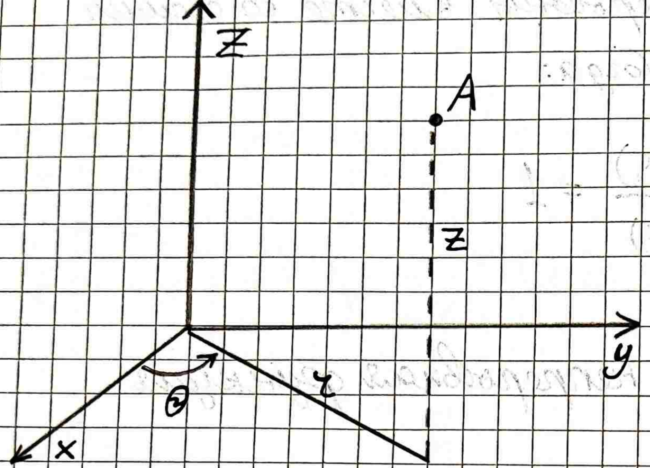
- Если одна из координат фиксируется, (например $\xi = \xi_0$), то множество точек $(x, y, z) = \begin{cases} x = x(\xi_0, \eta, \zeta) \\ y = y(\xi_0, \eta, \zeta) \\ z = z(\xi_0, \eta, \zeta) \end{cases}$ образуют координатную поверхность

Возможны три такие координатные поверхности (соответственно трём координатам ξ, η и ζ)

Криволинейные координаты

Цилиндрические

Цилиндрические координаты связывают полярные координаты с прямоугольными, добавляется аппликата (ось Z)



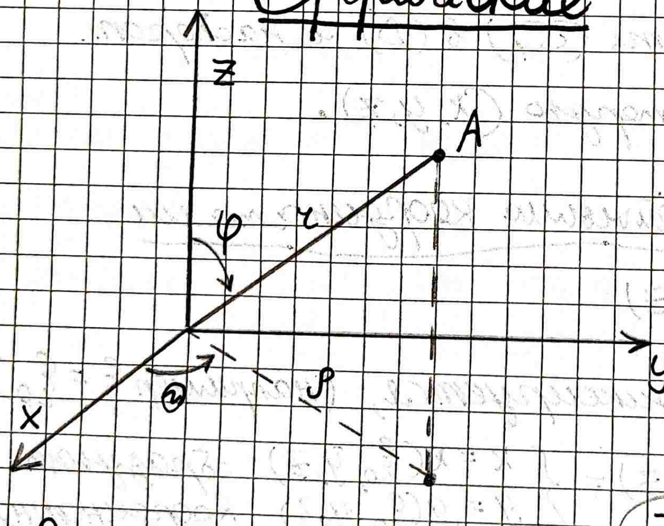
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \quad , \quad r \geq 0, \; \theta \in [0; 2\pi)$$
$$z = z$$

Запишем Якобиан:

$$J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Сферические



$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta \quad , \quad r \geq 0, \; \varphi, \theta \in [0; 2\pi$$
$$z = r\cos\varphi$$

r = радиус-вектор

$$J(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\varphi$$

Якобиан:

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi$$

Замена переменных

Теорема: пусть имеем две системы функций, которыми задается взаимно-однозначное соответствие между замкнутыми телами (D) и (Δ) ограниченными кусочно-гладкими плоскостями (S) и (Σ): $\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta) \end{cases}$ $\begin{cases} \xi = \xi(x, y, z) \\ \eta = \eta(x, y, z) \\ \zeta = \zeta(x, y, z) \end{cases}$

Причём $\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} \cdot \frac{D(\xi,\eta,\zeta)}{D(x,y,z)} = 1$. Функции $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ непрерывны вместе с частными производными. Тогда:

$$\iiint\limits_{(D)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta))\,|J(\xi,\eta,\zeta)|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

Доказательство.

С помощью кусочно-гладких поверхностей разбиваем (D) и (Δ)

(D) и (Δ) на (D_i) и (Δ_i), $i = \overline{1,n}$, $(D_i) \leftrightarrow (\Delta_i)$

Рассмотрим интегральные суммы:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) D_i$$

Согласно теореме о среднем значении, $\exists (\bar\xi_i, \bar\eta_i, \bar\zeta_i)$ такие, что

$D_i = |J(\bar\xi_i, \bar\eta_i, \bar\zeta_i)| \cdot \Delta_i$, $\begin{cases} x_i = x(\bar\xi_i, \bar\eta_i, \bar\zeta_i) \\ y_i = y(\bar\xi_i, \bar\eta_i, \bar\zeta_i) \\ z_i = z(\bar\xi_i, \bar\eta_i, \bar\zeta_i) \end{cases}$ Следовательно:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\bar\xi_i, \bar\eta_i, \bar\zeta_i), y(\bar\xi_i, \bar\eta_i, \bar\zeta_i), z(\bar\xi_i, \bar\eta_i, \bar\zeta_i))\,|J(\bar\xi_i, \bar\eta_i, \bar\zeta_i)|\,\Delta_i$$

Это — интегральная сумма для правой части

Т.к. f, x, y, z непрерывны, то интеграл существует и Якобиан непрерывен

Пусть $\lambda \to 0$ — наибольший из диаметров частей (Δ_i)

$\lambda_1 \to 0$ — наибольший из диаметров частей (D_i)

$\lambda \to 0 \implies \sigma \to \iiint_{(\Delta)} f(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta))\,|J(\xi,\eta,\zeta)|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$ =

$\lambda_1 \to 0 \implies \sigma \to \iiint_{(D)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

Так как $\lambda \to 0 \iff \lambda_1 \to 0$ и предел единственен, доказано. QED. ■

Ряды Фурье

Тригонометрический ряд и его свойства

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (1)$$

Такой ряд называется тригонометрическим рядом

$a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, b_1, \ldots, b_k, \ldots$ – коэффициенты триг. ряда

Функциями триг. ряда будут: $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos kx, \sin kx$

Период $\frac{1}{2}$ равен 0, ды остальных функций $\sin kx, \cos kx = \frac{2\pi}{k}$

Общий период будет $k \cdot \frac{2\pi}{k} = 2\pi$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$S(x+2\pi) = S_n(x)$$

Пусть ряд (1) сходится на отрезке $[-\pi;\pi]$. Это значит, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad x \in [-\pi;\pi]$$ на любом отрезке длины 2π

Ряд (1) будет сходиться на всей числовой прямой и $S(x)$ будет иметь период 2π.

Функции триг. ряда ортогональны на $[-\pi;\pi]$, то есть

- интеграл произведения двух различных функций $\neq 0$
- интеграл квадрата функции $= 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos kx\,dx = \frac{1}{2k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\sin kx\,dx = -\frac{1}{2k}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((k-n)x) + \cos((k+n)x)\,dx = \frac{1}{2(n-k)}\sin(k-n)x + \frac{1}{2(n+k)}\sin(k+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Если $n=k$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2kx\,dx=-\frac{1}{4k}\cos 2kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0$

Тогда как:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,dx=\frac{1}{4}x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}\neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}\,dx=\pi+\frac{1}{4k}\sin 2kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi\neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2kx}{2}\,dx=\pi-\frac{1}{4k}\sin 2kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi\neq 0$$

Определение коэффициентов тригонометрического ряда методом Эйлера-Фурье

Пусть функция $f(x)$ разлагается в триг. ряд на $[-\pi;\pi]$

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx \quad (1)$$

- Пусть ряд равномерно сходится. Почленно проинтегрируем на отрезке $[-\pi;\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx}_{=0}+b_k\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx}_{=0}\Big)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi\longrightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx \quad (2)$$

- Умножим обе части ряда (1) на $\cos mx$, $m=1,2,\ldots$, проинтегрируем на $[-\pi;\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx}_{=0}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos kx\,dx}_{=0,\text{ если } k\neq m}+b_k\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin kx\,dx}_{=0}\Big)\Rightarrow$$

если $k=m$

$$\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\pi a_m,\ m=1,2,\ldots\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx \quad (3)$$

• Умножим обе части ряда (1) на $\sin mx$, $m=1,2,\dots$,
проинтегрируем на $[-\pi;\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos mx\,dx}_{=0} + b_k\underbrace{\int \sin kx\sin mx\,dx}_{=0,\ \text{если } m\neq k}\Big)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \pi b_m,\quad m=1,2,\dots \qquad \text{когда } m=k$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx \qquad (4)$$

Тригонометрический ряд, коэффициенты которого определяются формулами (2), (3), (4), называется <u>рядом Фурье</u>.

<u>Определение</u>: функция называется <u>кусочно-непрерывной</u> на отрезке $[a;b]$, если его можно разбить на конечное число отрезков, в которых эта функция непрерывна всюду кроме концов этих отрезков, а на концах имеются <u>скачки</u>

<u>Скачок</u> — когда не соблюдается равенство:

$$\underset{\text{предел слева}}{f(x_0-0)} = \underset{\text{предел в точке}}{f(x_0)} = \underset{\text{предел справа}}{f(x_0+0)}$$

<u>Интеграл Дирихле</u>

Пусть $f(x)$ непрерывная или кусочно-непрерывная с периодом 2π. Тогда коэффициенты ряда Фурье выводились следующим образом:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\,du,\quad k=0,1,2,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\,du,\quad k=0,1,2,\dots$$

Если $f(x)$ непрерывна или кусочно непрерывна на отрезке 2π, то $\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(u)\,du = \int\limits_{0}^{2\pi} f(u)\,du$ не зависит от выбора α.

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(u)\,du = \cancel{\int\limits_{\alpha}^{0} f(u)\,du} + \int\limits_{0}^{2\pi} f(u)\,du + \cancel{\int\limits_{2\pi}^{2\pi+\alpha} f(u)\,du} = \int\limits_{0}^{2\pi} f(u)\,du, \text{ так как}$$

$$\int\limits_{2\pi}^{2\pi+\alpha} f(u)\,du \overset{\text{замена переменных}}{=\!=\!=} \int\limits_{0}^{\alpha} f(t)\,dt = \int\limits_{0}^{\alpha} f(u)\,du$$

$u = 2\pi + t$, $du = dt$
если $u = 2\pi$, то $t = 0$
$u = 2\pi + \alpha$, $t = \alpha$

Так как $f(x)$ непрерывна, сопоставим ей ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Исследуем частичную сумму: , $x = x_0$

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku \cos kx_0\,du + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku \sin kx_0\,du\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\underbrace{(\cos ku \cos kx_0 + \sin ku \sin kx_0)}_{=\cos(u-x_0)}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(u-x_0)\right)du$$

Рассмотрим тождество:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\right)\right)$$

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha = 2\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha - \left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha}{2}\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\alpha\right) + \left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\alpha\cdot k)$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

Получаем $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos k\alpha \overset{?}{=} \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\cdot\frac{1}{2\sin\frac{u-x_0}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot(u-x_0)\,du$$

Это выражение называется <u>интегралом (ядром) Дирихле</u>

Представим его в другой форме:

возьмем t

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi+x_0}^{\pi+x_0} f(u)\cdot\frac{1}{2\sin\frac{u-x_0}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-x_0)\,du = \begin{cases} t = u - x_0,\ dt = du \\ u = x_0 - \pi \Rightarrow t = -\pi \\ u = x_0 + \pi \Rightarrow t = \pi \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\,\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x_0+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x_0+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x_0-t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x_0+t)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left(f(x_0+t)+f(x_0-t)\right)\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot dt$$

<u>Лемма Римана</u>

Лемма: пусть $g(t)$ непрерывна или кусочно-непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда справедливо:

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_{a}^{b} g(t)\sin pt\,dt = 0$$

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_{a}^{b} g(t)\cos pt\,dt = 0$$

Доказательство:

Допустим, $g(t)$ непрерывна на $[a;b]$

Воспользуемся следующей оценкой:

Докажем для sin, аналогично доказывается и для cos

$$\left|\int_a^b \sin pt\,dt\right| \leqslant \frac{2}{p}$$

Так как:

$$\left|\int_a^b \sin pt\,dt\right| = \left|\frac{1}{p}\underbrace{(\overset{\leqslant 1}{\cos pb} - \overset{\geqslant -1}{\cos pa})}_{\leqslant 2}\right| \leqslant \frac{2}{p}$$

Разделим отрезок $[a;b]$ произвольным образом на части

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)\sin pt\,dt$$

Обозначим наименьшее значение в $[t_i;t_{i+1}]$ через $m_i = \inf\limits_{t\in[t_i;t_{i+1}]} g(t)$

$$\int_a^b g(t)\sin pt\,dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} (g(t)-m_i)\sin pt\,dt + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin pt\,dt$$

Оценим:

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} |g(t)-m_i|\cdot\underbrace{|\sin pt|}_{\leqslant 1}dt + \sum_{i=0}^{n-1}|m_i|\underbrace{\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin pt\,dt\right|}_{\leqslant 2/p}$$

Так как $g(t) < M_i \equiv \sup\limits_{t\in[t_i;t_{i+1}]} g(t)$, то $|g(t)-m_i| < \omega_i(g)$

Пусть $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right| \leqslant \overbrace{\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(g)\Delta t_i}^{<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)} + \overbrace{\frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|}^{<\varepsilon/2}$$

Т.к $g(t)$ непрерывна на $[a;b]$, она равномерно непрерывна по теореме Кантора $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon),\ \Delta t_i<\delta\ \ \omega_i(g) \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ Возьмём такой ε

$\sum_0^{n-1}\Delta t_i = b-a$, $\frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i| \leqslant \varepsilon/2$ когда $p > 4/\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1}|m_i|$, а мы имеем $p\to\infty$

Получаем $\left|\int_a^b g(t)\sin pt\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\sin pt\,dt = 0$

Q.E.D. ■

Первое применение леммы

Пусть $f(x)$ непрерывная или кусочно-непрерывная на $[-\pi;\pi]$, кроме того, $f(x)$ периодическая.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad k=0,1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k=0,1,2,\ldots$$

Тогда, по лемме Римана:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

Второе применение леммы. Принцип локализации

Возьмем $\forall \delta$, $0<\delta<\pi$ и рассмотрим интеграл Дирихле:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2\sin t/2}\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2\sin t/2}\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

Рассмотрим второе слагаемое: $\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0-t)}{2\sin t/2} \equiv g(t)$

$g(t)$ – кусочно-непрерывная функция, и по лемме Римана $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi} g(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt = 0$. Следовательно, поведение частичной суммы зависит от первого слагаемого.

Если предел существует, то существует сумма ряда Фурье:

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos x_0 + b_k\sin x_0$$

Теорема: Поведение ряда Фурье в исследуемой точке x_0 зависит только от значения $f(x)$ в $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ принимают одинаковые значения в некоторой δ-окрестности точки x_0, $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.
Тогда соответствующие им ряды Фурье либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. В случае сходимости, они сходятся к одной и той же сумме.

В этом заключается принцип локализации.

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x_0) = \lim_{n \to \infty} S_n'(x_0)$$

Стоит заметить, что при этом a_k, b_k у $f(x)$ отличаются от a_k', b_k' у $g(x)$.

Представление функции рядом Фурье

Пусть $f(x)$ задана на $[a, b]$, и с помощью конечного числа точек $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_i < \ldots < a_n = b$ её можно разбить на части так, чтобы внутри любого отрезка она была дифференцируема. У самой функции существуют пределы:

$$\lim_{x \to a_i + 0} f(x) = f(a_i + 0) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a_{i+1} - 0} f(x) = f(a_{i+1} - 0)$$

Кроме того, существуют пределы производной:

$$\lim_{x \to a_i + 0} f'(x) = f'(a_i + 0) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a_{i+1} - 0} f'(x) = f'(a_{i+1} - 0)$$

То есть предел справа (верхний предел) на левом конце и предел слева (нижний предел) на правом конце (для каждого отрезка, для функции и её производной)

Точка $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется точками стыка.
Такая функция – кусочно-дифференцируемая

130 Теорема: пусть $f(x)$ – кусочно-дифференцируема с периодом 2π. Тогда в любой точке x_0, лежащей на числовой прямой, ряд Фурье сходится и его сумма имеет вид:

$$S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

В частности, если в точке x_0 $f(x)$ непрерывна, то

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0) \Longrightarrow S_n = f(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0$$

Доказательство:

Возьмем $f(x) = 1$

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2$$

$$\frac{a}{2} = 1 \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx = 0$$

Получаем $S_n(x_0) = 1$

С другой стороны: $S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\overset{1}{f(x_0+t)} + \overset{1}{f(x_0-t)}) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2} dt$

$$S_n(x) = 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2} dt$$

Умножим на S_0 обе части

$$S_0 = \frac{2S_0}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2} dt$$

Должны доказать, что $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S_0$, или $\lim_{n\to\infty}(S_n(x) - S_0) = 0$

$$S_n(x) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2}\Big(f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)\Big) dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\left(\frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t} - \frac{f(x_0-t) - f(x_0-0)}{-t}\right)\frac{t/2}{\sin t/2}}_{g(t)} \sin(n+\frac{1}{2})t\, dt$$

Обозначим $g(t) = \left(\frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t} - \frac{f(x_0-t) - f(x_0-0)}{-t}\right)\frac{t/2}{\sin t/2}$

$g(t)$ кусочно-дифф в $(0;\pi)$, т.к $f(x)$ кусочно-дифф $\Rightarrow g(t)$ кусочно-непрерывна в $(0;\pi)$

Нам нужно $\lim\limits_{t\to+0} g(t) = K$, такой что $g(0) = K$. Если докажем это, получим, что $g(t)$ кусочно непрерывна и в точке 0.

Возможны 3 случая:

1) x_0 лежит внутри частичного отрезка, внутри которого $f(x)$ дифференцируема.

Тогда $\lim\limits_{t\to+0} g(t) = \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} = f'(x_0) = \lim\limits_{t\to+} \dfrac{(x_0-t)-\lim(x_0-0)}{-t}$

$\Rightarrow \underbrace{(f'(x_0)-f'(x_0))}_{=0}\dfrac{t/2}{\sin t/2}^{\nearrow 1} = 0 = \lim\limits_{t\to 0+} g(t) = 0 = K$

2) Если x_0 – точка стыка и $f(x)$ в этой точке непрерывна

Тогда $f(x_0+0) = f(x_0) = f(x_0-0)$,

$\lim\limits_{t\to+0}\left(\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} - \dfrac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t}\right) = f'_+(x_0) - f'_-(x_0) = K$

3) Если x_0 – точка стыка и разрыва, т.е не соблюдается $f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0)$

Тогда $\lim\limits_{t\to+0}\left(\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} - \dfrac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}\right) =$

$= \lim\limits_{t\to+0} g(t) = f'_+(x_0) - f'_-(x_0) = K$

Принимаем $g(0) = K \Longrightarrow \lim\limits_{t\to+0} g(t) = g(0) \Longrightarrow$

$\Rightarrow g(t)$ кусочно непрерывна на $[0;\pi] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по лемме Римана, $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n(x) - S_0) = \lim\limits_{\substack{t\to+0\\ n\to\infty}} \int_0^{\pi} g(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt = 0$

Получили сходимость ряда Фурье.

$$S_0 = \frac{2f(x_0)}{2} = f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k \sin kx$$

Q.E.D. ■

Случай непериодической функции

Пусть $f(x)$ задана на $(-\pi;\pi]$, в этом промежутке она кусочно-дифференцируема. Есть два варианта:

Вне этого промежутка $f(x)$ либо непериодическая, либо не определена.

Разложим $f(x)$ в ряд Фурье, введя вспомогательную функцию:
$$\begin{cases} f^*(x) = f(x),\ x \in (-\pi;\pi] \\ f^*(-\pi) = f^*(\pi) = f(\pi) \end{cases}$$

С периодом 2π продолжим на всю числовую прямую

$f^*(x)$ кусочно-дифференцируема на всей числовой прямой.

Пусть имеем произвольный $x_0 \in (-\pi;\pi)$

$$S_0 = \frac{f^*(x_0+0)+f^*(x_0-0)}{2} = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ k=0,1,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\quad kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,\ k=0,1,\dots$$

Так как $f^*(x)$ и $f(x)$ совпадают везде кроме точек разрыва, а точки разрыва не влияют на интеграл, получим, что нет необходимости в $f^*(x)$, кроме $x=\pm\pi$, где функция должна рассматриваться отдельно.

$x=-\pi$: $$S_0 = \frac{f^*(-\pi+0)+f^*(-\pi-0)}{2} = \frac{f^*(-\pi+0)+f^*(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

$x=\pi$: $$S_0 = \frac{f^*(\pi+0)+f^*(\pi-0)}{2} = \frac{f^*(-\pi+0)+f^*(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

Случай произвольного промежутка

Пусть $f(x)$ определена на $(-l; l]$, $l>0$. Функция дифференцируема. Продолжим её на всю числовую прямую с периодом $T = 2l$. Обозначим $x = \frac{ly}{\pi}$. Рассмотрим $f(x) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$ определенную на $(-\pi; \pi)$. Так как эта функция кусочно дифференцируема в $(-\pi; \pi)$, применим разложение в ряд Фурье:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\cos ky\,dy$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{ly}{\pi}\right)\sin ky\,dy \quad , \quad y = \frac{\pi x}{l}$$

$$y = -\pi \Rightarrow x = -l$$

$$y = \pi \Rightarrow x = l$$

$$dy = \frac{\pi}{l}dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi x}{l}\cdot\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\sin k\frac{\pi x}{l}\cdot\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi k x}{l} + b_k\sin\frac{\pi k x}{l}\right)$$

Разложение только по синусам (косинусам)

Если $f(x)$ чётная, непрерывная или кусочно-непрерывная на отрезке $[-\pi;\pi]$. Тогда $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_0^{\pi} f(x)dx$

Для нечётной: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$

Исходя из этого; если $f(x)$ кусочно-дифференцируема с периодом 2π, тогда:

Если $f(x)$ чётная:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0$$

Если же $f(x)$ нечётная

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

Следовательно:

Чётная $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

Нечётная $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

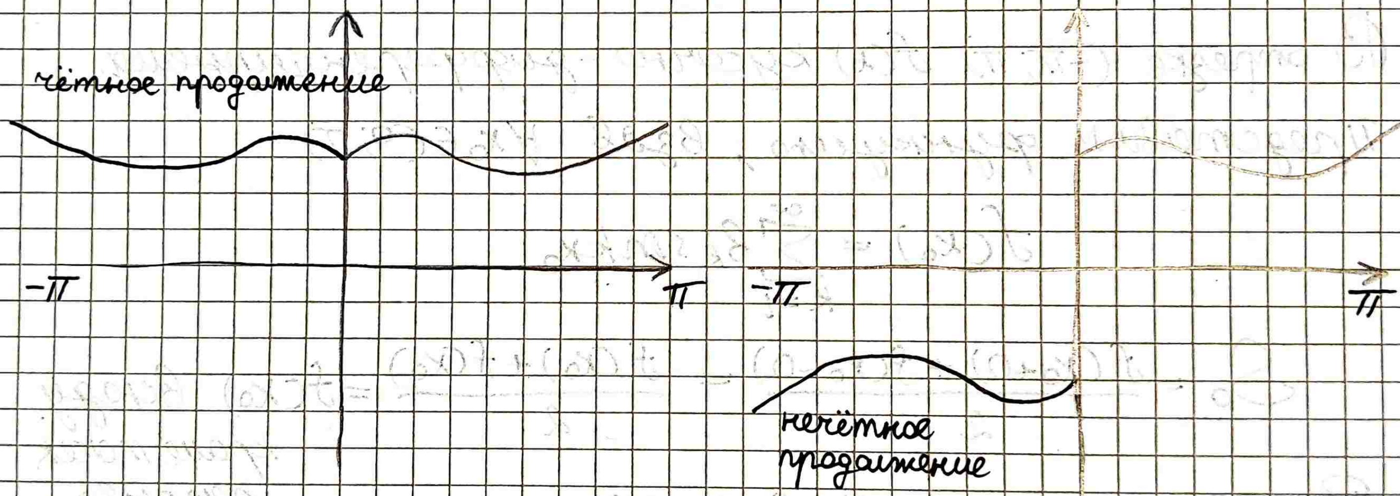
Произвольную функцию можно представить в виде:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \text{ где}$$

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \; f_1(x) - \underline{\text{чётная}}$$

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \; f_2(x) - \underline{\text{нечётная}}$$

Пусть $f(x)$ задана на $[0; \pi)$ и внутри этого отрезка она кусочно-дифференцируема. Есть 2 способа <u>продолжения</u> данной функции: <u>чётным</u> образом, т.е $f(-x) = f(x)$ и <u>нечётным</u> образом, т.е $f(-x) = -f(x)$



<u>Чётное продолжение</u>:

В отрезке $(-\pi; \pi)$ $f(x)$ кусочно-дифференцируема, значит

$$S_0 = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} = \frac{f(x_0) + f(x_0)}{2} = f(x_0)$$ всюду кроме точек разрыва

Ряд Фурье сходится и

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0$$

136 Предположим, что функция непрерывна в $x = \pm\pi$

$x = -\pi \quad S_0 = \dfrac{f(-\pi+0) + f(-\pi-0)}{2} = \dfrac{f(-\pi) + f(-\pi)}{2} = f(-\pi)$

$x = \pi \quad S_0 = \dfrac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \dfrac{f(\pi) + f(\pi)}{2} = f(\pi)$

$x = 0 \quad S_0 = \dfrac{f(+0) + f(-0)}{2} = \dfrac{f(0) + f(0)}{2} = f(0)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

<u>Нечётное продолжение:</u>

В отрезке $(-\pi;\pi)$ $f(x)$ кусочно-дифференцируема.

Представим функцию, взяв $\forall x_0 \in (0;\pi)$

$$f(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx_0$$

$S_0 = \dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} = \dfrac{f(x_0) + f(x_0)}{2} = f(x_0)$ всюду, кроме точек разрыва.

Рассмотрим точки $x = 0$, $x = \pi$

$x_0 = 0 \Rightarrow S_0 = \dfrac{f(+0) + f(-0)}{2} = \dfrac{f(0) + f(0)}{2} = f(0)$

$x_0 = \pi \Rightarrow S_0 = \dfrac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \dfrac{f(-\pi+0) + f(-\pi-0)}{2} = 0$

$$f(\pi) = 0 = f(-\pi)$$

СОДЕРЖАНИЕ